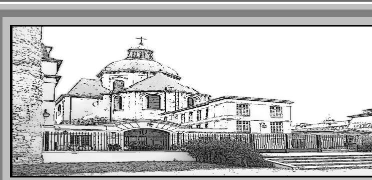


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 décembre
M.P.S.I.2

2024 2025

TD11

◃0▹ ♡ La suite u est définie par $u_0 = 7$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante ? Est elle croissante à partir d'un certain rang ?

On définit alors le vecteur d'observation $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Donnez la matrice M vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M.U_n$.

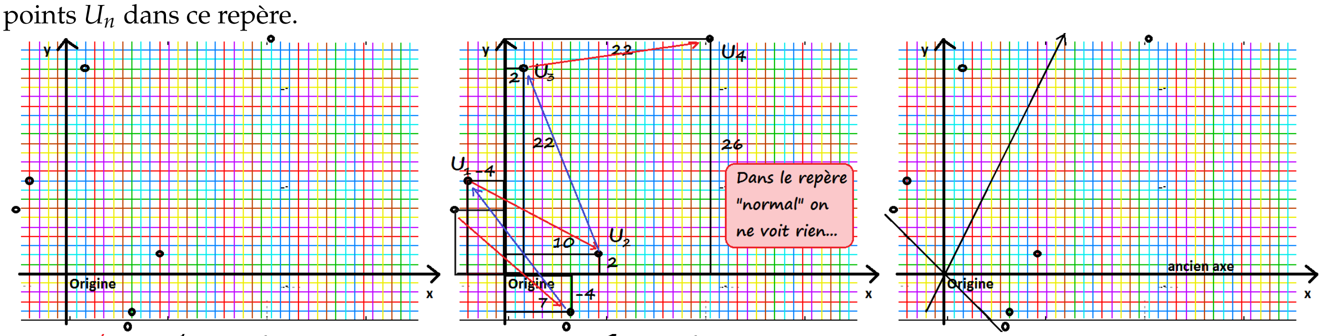
Donnez une matrice D vérifiant $Tr(M) = Tr(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

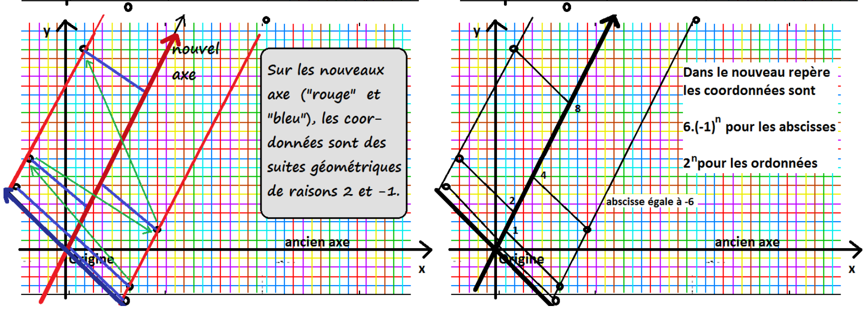
Trouvez une matrice P inversible de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ vérifiant $M.P = P.D$ (et inversez P).

Calculez D^n, M^n, U_n et u_n.

Résolvez $u_n \geqslant 2017$ d'inconnue entière n.

Placez dans le plan les points U_n pour n de -2 à 4 (repère orthonormé, échelle à choisir). Tracez le nouveau repère qui garde la même origine 0 mais prend pour axes $Vect(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ et $Vect(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$. Donnez les coordonnées des points U_n dans ce repère.





On pose $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.
Calculez A^2, B^2, $A.B$, $B.A$, ainsi que $A + B$.
Calculez A^n et B^n.

Pourquoi peut on utiliser la formule du binôme pour $(A + B)^n$ et pourquoi donne-t-elle $A^n + B^n$? Retrouvez la matrice M^n.

◃1▹ ♡ Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 0 & \\ 3 & & 4 \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

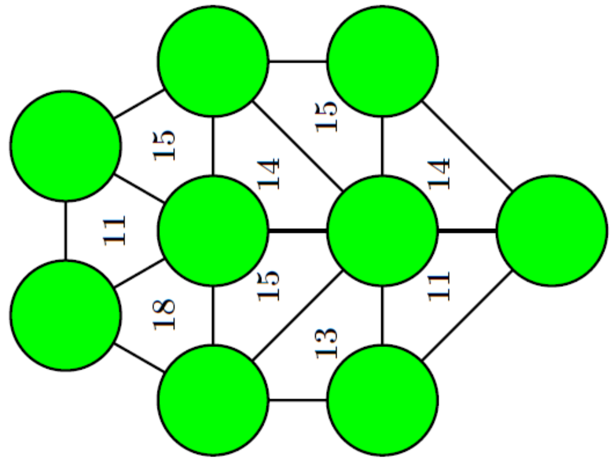
◃2▹ Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 11$.
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 10$.
Rappel : $P(A)$ est l'ensemble de toutes les parties de A.
Par exemple $P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$P(\{u\}) = \{\emptyset, \{u\}\}$

◃3▹ a est une suite arithmétique vérifiant $\sum_{k=0}^{10} a_k = 374$. Pouvez vous retrouver la raison ? Et le premier terme ?

Et si j'ajoute $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1\ 344$?

◁4▷ ♣ $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ est il égal à ± 3 ?
De toutes les matrices de taille 2 à coefficients ± 1, lesquelles ont le déterminant le plus grand ?

Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.



Calculez $\sum_{k=0}^{n} 2^k.3^{n-k}$.

Calculez $\sum_{k=0}^{n} 2.k.3.(n-k)$.

◁5▷ Calculez $\prod_{k=1}^{n} \sqrt{2.k}$.

◁6▷ a est un réel plus grand que 1 ; résolvez $a^2 - 2.a.T_7(x) + 1 = 0$ d'inconnue réelle x (T_n est le n^{ieme} polynôme de Pafnouti T.).

◁7▷ Calculez $T_n'(0)$ pour tout n.

◁8▷ Montrez : $ch^2 = 1 + (ch')^2$. Quel est le minimum de l'application ch ?

◁9▷ Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0,\ 1]$.

La longueur du graphe d'une application f de classe C^1 entre $(a,\ f(a))$ et $(b,\ f(b))$ est donnée par $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}.dt$ (intégrale de la norme du vecteur vitesse de $t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$.

◁10▷ Dans une I.S. (2020), on a trouvé pour a dans $]-1,\ 1[$: $J_a = \int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + a.\cos(\theta)}.d\theta = \pi.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a.\sqrt{1-a^2}}\right)$. Mais, le membre de droite n'a pas de valeur en 0. Est ce qu'au moins sa limite en 0 (calculez la) coïncide bien avec J_0 ?
On a ensuite intégré le membre de droite[1], et trouvé $I_a = \pi.\left(\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{Arcsin(a)}{2}\right)\right)\right)$. Pour a dans $]0,\ 1[$.
Mais quelle est la limite de cette chose en 0 ?
Vérifiez qu'elle se dérive bien ne ce qui est indiqué plus haut.
Mon livre donne $I_a = \pi.\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$. C'est la même formule ?

◁11▷ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

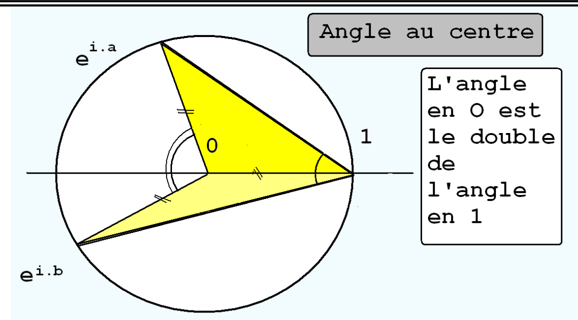
◁12▷ Clément Deslandes a décidé de fabriquer des assiettes plutôt que de faire prof de maths.
Il veut tester la solidité de ses assiettes. Il en prend une et se rend au pied d'un immeuble de 78 étages et il veut savoir depuis quel étage il peut balancer une assiette sans qu'elle se casse. Il veut même connaître l'étage au delà duquel elle se brise.
S'il la lance du sommet et qu'elle se brise, il saura qu'elle ne tient pas 78 étages, mais il ne saura pas à partir de quel étage elle se serait brisée. Alors quoi ?
Il teste au premier étage. L'assiette se brise, il sait qu'elle se brisera quel quel que soit l'étage. Et si elle ne se brise pas, il recommence au deuxième étage. Si elle se brise, le niveau de rupture est le 1. Sinon, il monte au troisième

1. bon, c'est quoi alors $I_a = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + x.\cos(\theta)}.d\theta \right).dx$

étage et recommence.
En gros une récurrence. Si elle se rompt à l'étage n, on a l'information, sinon, on passe à l'étage $n+1$.
C'est un peu long, mais ça se fait. Et au pire il fait 79 tests.

Mais voilà, il a pensé à prendre deux assiettes. Alors que fait il pour minimiser le nombre de tests « dans le pire cas » ?

On peut envisager « il va au trente neuvième étage, il jette une assiette ; si elle se brise, il lui en reste une pour tester étage par étage de 0 à 38, et si elle réchappe, il lui en reste deux pour tester du 39 au 78 ». Mais il y a mieux.



α, β et γ sont trois réels distincts. Montrez : $Arg\left(\left(\frac{e^{i.\beta}-e^{i.\gamma}}{e^{i.\alpha}-e^{i.\gamma}}\right)^2\right)=\beta-\alpha$.

◃13▹ Retrouvez le théorème de l'angle au centre.

◃14▹ ♡ Pour la formule de Taylor avec reste intégrale

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k+\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$$

des livres proposent parfois

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k+\frac{1}{n!}.\int_a^x(x-u)^n.f^{(n+1)}(u).du$$

Passez de l'une à l'autre.

◃15▹ Calculez $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$, $\int_0^{\pi/2}\frac{-\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$ et $\int_0^{\pi/2}\frac{a.\cos(x)+b.\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$ (non, pas Bioche).

◃16▹ Calculez $\int_a^b\frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$.

◃17▹ ♡ Une inégalité classique dit $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+x)^n\geqslant 1+n.x$.
Prouvez la de différentes façons : récurrence sur n
formule du binôme que vous coupez
variation de fonction (il faudra dériver plusieurs fois)
formule de Taylor avec reste intégrale

◃18▹ Reliez dans cette grille l'entrée à la sortie du tunnel. Les chiffres inscrits en début de ligne et de colonne indiquent le nombre de cases du tunnel dans la ligne ou colonne. Le tunnel ne se croise pas lui même, ni ne se touche. Un exemple résolu vous permet de comprendre.

	2	1	1	2	3
0					
0					
2				☺	■
2	☺				■
5	■	■	■	■	■

	5	2	2	0	0
3					
2			☺		
1					
1					
2		☺			

	0	3	1	2	1
2					☺
3					
1					
1		☺			
0					

	1	2	1	2	4
0					
2				☺	
1					
3	☺				
4					

	0	2	1	3	0
0					
0					
1				☺	
2		☺			
3					

	1	2	3	0	0
0					
2		☺			
1					
3	☺				
0					

A cause de vous, cette hotte est purifiée. Elle adore cacher les menus. Si je ne ne prends plus de train, je suis assisté. Elle est en route avec sa bûche. Dure luttes pour avoir des boutures. Il cherche des branchettes faute de lattes. Elle adore les bobards. J'ai pris un coup avec la bûche. Des jeux en quoi ?

◁19▷ ♡ On définit : $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \cos(x) & si & x \leqslant 0 \\ a.\cos(x) + b.\sin(x) & si & 0 < x < \pi \\ \sin(x) & si & \pi \leqslant x \end{array} \right.$. Pouvez vous la rendre continue en choisissant bien a et b ?

Même question pour $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \cos(x) & si & x \leqslant \pi/3 \\ a.\cos(x) + b.\sin(x) & si & \pi < 3.x < 2.\pi \\ \sin(x) & si & 2.\pi/3 \leqslant x \end{array} \right.$. Est elle alors dérivable ?

◁20▷ Pour tout n on pose : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{n}$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n)}{k}$. Montrez que (A_n) et (C_n) sont croissantes. Montrez que B_n est décroissante.
Étudiez la convergence de chacune par comparaison série intégrale.
Donnez un équivalent en $+\infty$ simple de chacune.

◁21▷ On constate

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccccccccccc} 11^0 & = & & & & & & 1 & & & & & \\ 11^1 & = & & & & & 1 & & 1 & & & & \\ 11^2 & = & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ 11^3 & = & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ 11^4 & = & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & & \\ 11^5 & \neq & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}.$$

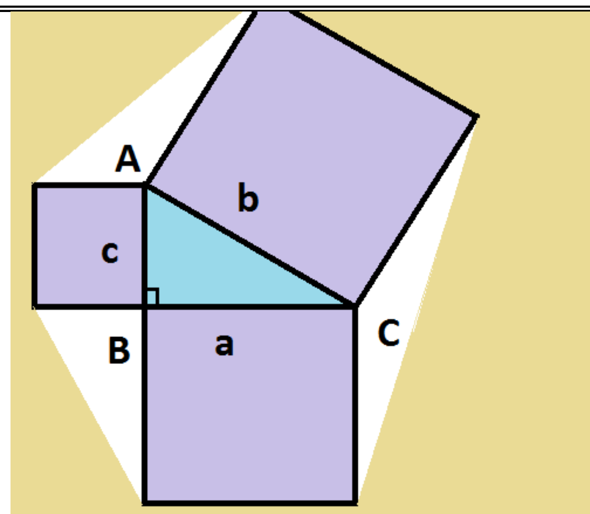
Qu'est ce qui ne va pas entre le triangle de Pascal et les carrés d'entiers ?

◁22▷ Comparez (pour la relation d'ordre) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$, $\int_1^{n+1} \frac{dt}{1+t^2}$ et $1 + \int_0^n \frac{dt}{t^2+1}$.

◁23▷ ♡ Représentez graphiquement $x \longmapsto \tan^2(Arcsin(\cos(Arctan(\sqrt{x+3}))))$ et donnez ses dérivées successives *(simplifiez d'abord, évidemment)*.

◁24▷ Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des hauteurs entières ?
Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des médianes entières ?

Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : (A, B, C) est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.



Calculez celle là : $\int_0^1 x.4^x.dx$.

Montrez cette inégalité :
◁25▷ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geqslant 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

◁26▷ Développez $(u+v+w).(u+v-w).(u-v+w).(-u+v+w)$.
a, b et c sont les longueurs de trois côtés d'un triangle et vérifient $2.(a^8+b^8+c^8) = (a^4+b^4+c^4)^2$. Montrez que le triangle est rectangle. Réciproque ?

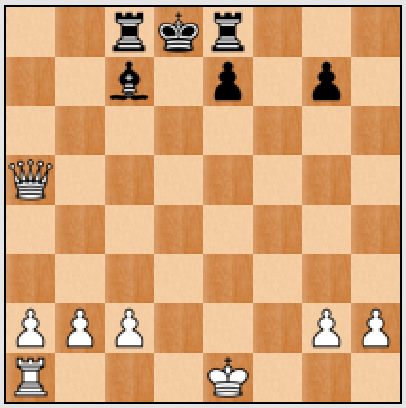
◁27▷ La suite u est définie par $u_0 = 7$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante ? Est elle croissante à partir d'un certain rang ?

◁28▷ Calculez ces versions trigonométriques et hyperboliques $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.dt$ et $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}.dt$.

◁29▷ Calculez (géométriquement pour l'une) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}.dt$ et $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}.dt$.

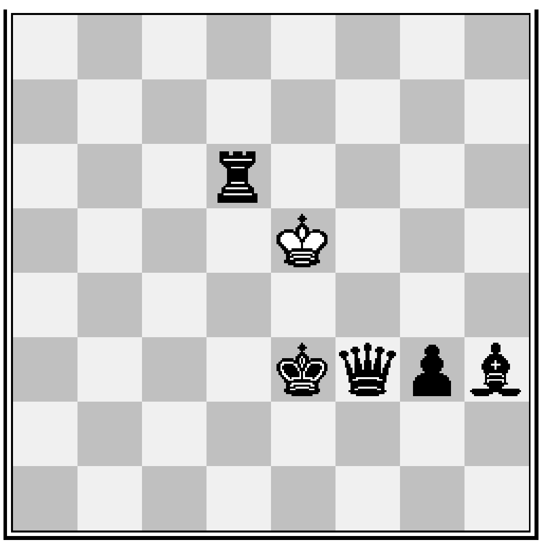
◁30▷ ♡ Calculez $\int_0^x \cos(\theta).d\theta$ en effectuant tous les changements de variable que peuvent préconiser les règles de Bioche.

◁31▷ Deux exercices pour Lucas et quelques autres.



Montrez que le fou noir est un est fait un pion noir qui a été promu ; trouvez la case où il l'a été, et déduisez que le roi blanc ne peut plus roquer.

http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/PbEch1.htm



Les blancs viennent juste de jouer. Si si. Que viennent-t-ils de jouer ?
Indication : un pion a avancé deux coups avant.

◁32▷ Dérivez $a \longmapsto \int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}.dx$, puis calculez $\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}.dx$ et $\int_{1/a}^{a} \frac{Atan(x)}{x}.dx$ pour tout a.
Pensez à écrire $\int_{u(a)}^{v(a)} f(t).dt$ sous la forme $F(v(a)) - F(u(a))$ pour pouvoir dériver en fonction de a.

◁33▷ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \cos((2.k+1).\theta)$ pour n donné dans $\mathbb{N}$ et θ dans $\mathbb{R}$.

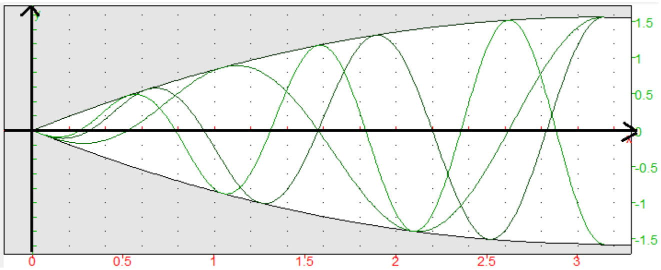
◁34▷ ♡ Calculez $\sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \right)$ puis $\sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^n \right)$ et enfin $\sum_{k=0}^{2014} \left(\sum_{n=k}^{2014} 2^n \right)$ (changez l'année si vous y tenez).

◁35▷ ♡ Cet élève Izeurahai-Cranpla affirme $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} (i+j) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} (i+j)$ puisque de toutes façons, pour i et j nuls, $i+j$ ne compte pas. Prouvez lui qu'il a tort.

◃36▹ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k.\theta)}{\cos^k(\theta)}$ (on supposera que θ n'est pas un multiple de π).

◃37▹

I∼0) **(Fourier, Dirichlet).** Montrez : $\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k.



I∼1) Déduisez : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.dt$.

I∼2) Montrez que $t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{1}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.

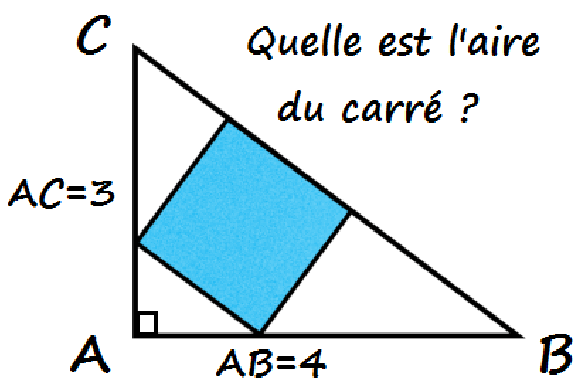
I∼3) En intégrant par parties, montrez que $\int_0^{\pi} \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

I∼4) Déduisez que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

Dans une vidéo, (l'excellent) Mickaël Penn passe par une longue récurrence pour calculer

$$1 * (2 * 4 * (8 * (\ldots (2^{2020} * 2^{2021}) \ldots)))$$

où la loi $*$ (non associative ?) est définie par $a * b = \frac{a.b}{a+b}$. Mais quand même, il y a plus simple, non ?
C'est l'addition transformée par une bijection bien
◃38▹ choisie, non ?



◃39▹ Calculez ces trois sommes $I_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} i$, $J_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} j$ et $K_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k$ et écrivez le script Python qui vous permettra de vérifier..

◃40▹ On donne $0 \leqslant n \leqslant k \leqslant N$.
On choisit n entiers dans `range(1, N+1)`. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous plus petits que k ?
Quelle est la probabilité que le plus grand des entiers tirés ait pour valeur k ?
Retrouvez la formule de ZHU SHI JIE.

Ici, les probabilités c'est juste du dénombrement

$$\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

◃41▹ ♡ Montrez que la série de terme général $\frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n}$ converge et calculez sa somme.

◃42▹ Du côté de chez Roger Mansuy Vrai ou Faux :

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1}(-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^{n} a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{[\ln(n)]} a^j$
B	$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=0}^{n} j$	J	$\sum_{k=1}^{n} a^{2.k} = \sum_{j=1}^{2.n} a^j$
C	$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=0}^{n}(n-j)$	K	$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=i}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Big)$
E	$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \frac{n.(n-1)}{2}$
F	$\sum_{k=1}^{n}(u_k - 2.u_{k+1} + u_{k+1}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$
G	$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\ pair}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p}$	N	$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1}-1$
H	$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\ impair}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$	O	$\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{5^{k+1}-1}{4}$

◃43▹ Trouvez a, b, c, d et e *(si si !)* pour avoir
$\frac{24}{(X-1).(X-2).(X-3).(X-4)} = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{X-3}+\frac{d}{X-4}+\frac{e}{X-5}$. Calculez $\sum_{4\leqslant k}\frac{1}{\binom{k}{4}}$.

◃44▹ Télescopez la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+1)!}$.

◃45▹ ♡ Calculez $\sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n}}(i-j)$

et calculez aussi $\sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n}}|i-j|$ (là, c'est plus ♠).

◃46▹ ♡ Encadrez $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$ par $\frac{1}{2.n}$ et $\frac{1}{n}$ (comptez les termes...). Déduisez la limite de cette suite.

Écrivez un script Python qui calcule *(approximation réelle)* cette somme pour n donné.

♣ Conjecturez à la calculatrice la limite de $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$ quand n tend vers l'infini *(la démonstration viendra plus tard)*.

◃47▹ Complétez : $\sum_{k=0}^{?} x^{2.[\sqrt{k}]} = \sum_{p=0}^{n-1}(2.p+1).x^{2.p}$ (découpage en tranches).

◃48▹ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} k.k!$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

◃49▹ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini du quotient de $\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k\ pair}} k$ par $\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k\ impair}} k$.

◃50▹ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ (ayez le bon réflexe oublié de Terminale).

◃51▹ Pour tout entier naturel n, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, et $Q_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ puis $R_n = \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$.

Toutes les preuves pourront se faire par manipulations sur les produits (ou les sommes si vous passez au logarithme), sans récurrence.

Prouvez : $P_n = \frac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2} = \prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-1}$.

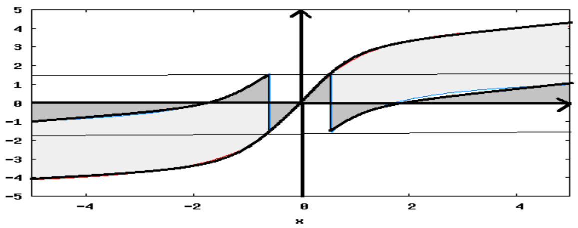
Prouvez $Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$ puis $R_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Déduisez que $\dfrac{P_{n+1}.P_{n-1}}{(P_n)^2}$ converge vers e.

◁52▷ Trouvez a et b sachant : $a+b=15$ et $a^2+b^2=30$.
Une matrice carrée A de taille 2 vérifie $Tr(A)=15$ et $Tr(A^2)=30$. Calculez $\det(A)$.

◁53▷ ♡ Calculez $I=\int_0^1 \dfrac{t}{(1+t^2)^2}.dt$, $J=\int_0^1 \dfrac{t}{(1+t^2)^2}.t.dt$ *(par parties)*, $K=\int_0^1 \dfrac{t^2+1}{(1+t^2)^2}.dt$ et enfin $L=\int_0^1 \dfrac{1}{(1+t^2)^2}.dt$.

◁54▷ ♡ Dérivez $t \longmapsto 3.Arctan\left(\dfrac{t^3-3.t}{t^2-3}\right)$ et $t \longmapsto Arctan\left(\dfrac{t^3-3.t}{3.t^2-1}\right)$.



Expliquez ce graphe.

◁55▷ ♡ Résolvez $Arctan(x)+\dfrac{\pi}{6}=Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x.

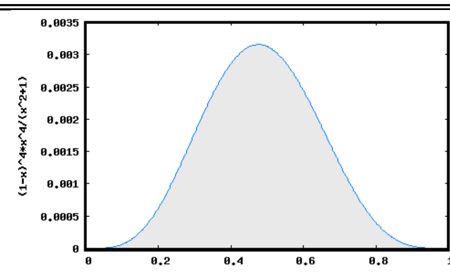
◁56▷ Résolvez

$x^2-5.x+6<0$	$(x^2-5.x+6<0)\Rightarrow(x>5)$	$(x>5)\Rightarrow(x^2-5.x+6<0)$
$x^2-5.x+6<0$ ou $x>5$	$x^2-5.x+6<0$ et $x>5$	$(x>5)\Rightarrow(x^2>25)$

d'inconnue réelle x.

◁57▷ Montrez que l'application $x \longmapsto x+\dfrac{4}{\pi}.Arctan(x)$ (notée f) réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminez $f^{-1}(2)$.
En dérivant $f(f^{-1}(x))=x$ calculez aussi $(f^{-1})'(2)$. Est ce que $(f')^{-1}(2)$ existe ? Calculez $\int_0^2 f^{-1}(t).dt$.

◁58▷ Montrez que les hauteurs du triangle de côtés 580, 609 et 841 sont entières. (ce triangle a une particularité, et ensuite, calculez son aire de plusieurs façons).



◁59▷ Calculez le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4.(1-X)^4$ par $1+X^2$.
Déduisez : $\int_0^1 \dfrac{x^4.(1-x)^4}{1+x^2}.dx=\dfrac{22}{7}-\pi$.
Donnez le maximum de $x.(1-x)$ quand x décrit $[0,\ 1]$. Majorez l'erreur commise quand on remplace π par $22/7$.

◁60▷ Donnez une primitive de $x \longmapsto e^{Arcsin(x)}$ (il faudra peut être intégrer deux fois par parties)..

◁61▷ Montrez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)}=\frac{11}{9}$.

◁62▷ Calculez $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos(x)}{2+\cos^2(x)}.dx$ (Bioche ?).

◁63▷ ♡ Démontrez : $Tr(A.B)=Tr(B.A)$ pour A de taille 3 sur 2 et B de taille 2 sur 3. (la trace est la somme des termes de la diagonale (principale), et elle ne se calcule que si la matrice est carrée...

◁64▷ Il parait que $3.Atan\left(\dfrac{3}{4}\right)+Arccos\left(\dfrac{44}{125}\right)=\pi$. Mais même si la calculatrice du physicien le valide avec treize décimales, seul le cerveau du mathématicien peut le justifier. Cadeau : $117^2=13\,689$.

◃65▹ ♡ N est tel que $N/2$ est un carré parfait, $N/3$ un cube parfait et $N/5$ une puissance cinquième d'entier. Et N est non nul, évidemment. Trouvez en un *(pensez à décomposer N en produit de facteurs premiers)*.

◃66▹ ♡ Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t$ et $t \longmapsto e^{3.t}$.
Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t)$ et $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$.
Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 3 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(2.t)$ et $t \longmapsto e^{3.t}$.
Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 4 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(3.t)$ et $t \longmapsto e^{3.t}.\cos(t)$.

◃67▹ ♡ Donnez une matrice qui se diagonalise en $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

◃68▹ ♡ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{rcrcr|} a'_t & = & 4.a_t & + & b_t \\ b'_t & = & 2.a_t & + & 3.b_t \end{array}\right.$. Façon physicien bricoleur : ajustez k pour que $a_t + k.b_t$ vérifie une équation $y'_t = \mu.y_t$.
Façon physicien ayant lu des livres de maths : diagonalisez la matrice.
Façon matheux : bâclez ces calculs et cherchez à comprendre le lien entre les deux méthodes.

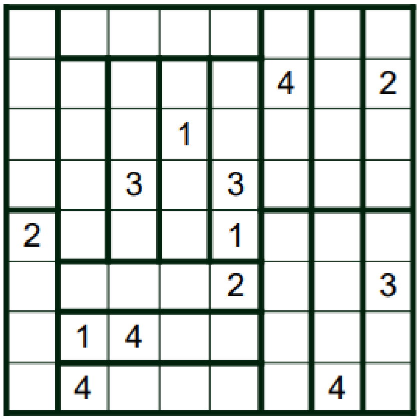
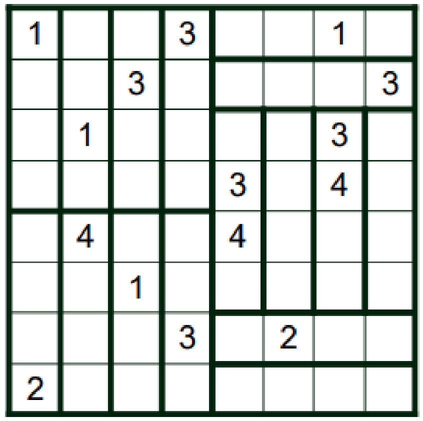
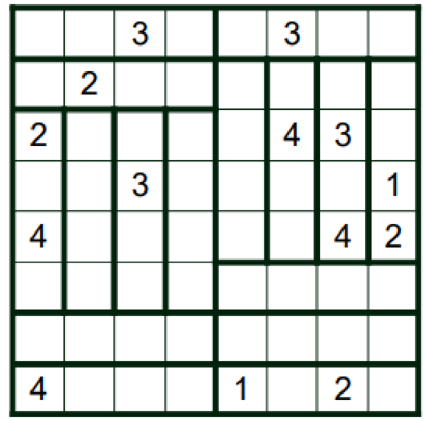
◃69▹ ♡ Résolvez $\sqrt{t^2+6.t+10}.y'_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t.
Résolvez $\sqrt{t^4+6.t^2+10}.y'_t + t.y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t.

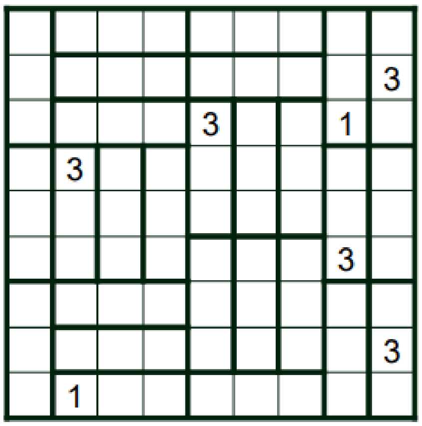
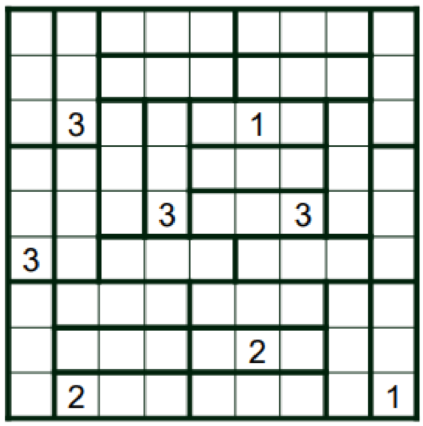
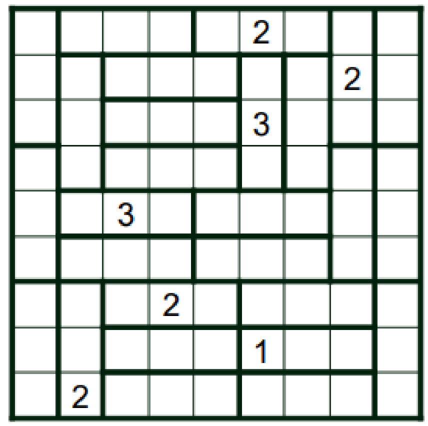
◃70▹ Calculez pour tout réel a strictement positif $\int_{x=1/a}^{a} \Big(\int_{y=0}^{1} \frac{dy}{x^2+y^2} \Big).dx$.

◃71▹ On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.
Rétrouvez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne
$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n.(n+1)}$
$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n.(n+1)} \Big)$
$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1)} \Big)$
$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Big) \Big)$
$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} \Big)$
$S = 1 + S$
Décomposition en éléments simples / compteur / télescopage / définition / permutation des sigmas.

◃72▹ ♡ La suite u est définie par u_0 et u_1 donnés et $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Exprimez u_2,u_3, u_4 et u_5 à l'aide de u_0 et u_1.
On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice M vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ pour tout n. Calculez sa trace et son déterminant. Trouvez une matrice diagonale D vérifiant $Tr(D) = Tr(M)$ et $\det(D) = \det(M)$. Trouvez P inversible *(de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$*)* vérifiant $M.P = P.D$. Explicitez alors D^n, M^n et U_n à l'aide de n. Donnez la forme explicite de u_n pour tout n.
Pouvez vous choisir u_0 et u_1 pour avoir $u_{10} = 10$ et $u_{20} = 20$?

◃73▹ ♡ La matrice M vérifie $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Trouvez la diagonalisez la.

◁74▷