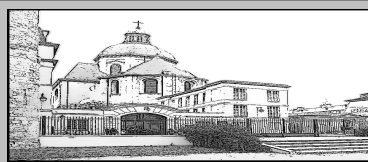


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 décembre
M.P.S.I.2



2024

2025

TD11

<0>

La suite u est définie par $u_0 = 7, u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante ? Est elle croissante à partir d'un certain rang ?

On calcule les premiers termes.

7	-4	10	2	22	26	70
---	----	----	---	----	----	----

On peut affirmer : $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante.

La négation de suite croissante n'est pas « suite décroissante », c'est « il existe n tel que... ».

En revanche, à partir du rang 2, tous les termes de la suite sont positifs.

Récurrence : C'est vrai pour u_2 et u_3 .

Si pour un n donné, u_n et u_{n+1} sont positifs, alors u_{n+2} est positif (combinaison).

A partir du rang 3, la suite est croissante.

Direct : $u_{n+1} = u_n + 2.u_{n-1} \geq u_n$ puisque u_{-1} est positif.

Cette fois, pas de récurrence.

Ah, il faut savoir quand faire une récurrence, et quand faire une preuve directe.

Et ça, ce n'est pas un truc qui s'apprend par cœur comme une classification périodique ou une chanson de...

C'est une question d'intelligence.

On définit alors le vecteur d'observation $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Donnez la matrice M vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n$.

Classique : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_{n+1} \\ 2.u_n & +u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

On se doute même que c'est la seule. Mais ce n'est pas demandé.

Une question du type « donnez ... vérifiant... » appelle une réponse « on propose/on vérifie », et des raisonnements par explications et non par implication (balancez à la poubelle vos « forcément » et autres « on identifie »).

Donnez une matrice D vérifiant $Tr(M) = Tr(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ vérifie $a + b = 1$ et $a \times b = -2$. On trouve l'équation dite caractéristique : $x^2 - x - 2 = 0$.

On trouve deux solutions : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On en choisit une.

Prendre l'autre modifiera la matrice P mais pas le résultat final M^n .

Comment celui qui ignore le calcul matriciel trouvera l'équation caractéristique.

Bricolage : Il se dit : est il possible qu'une suite géométrique soit solution de notre problème ?

Il tente une suite de la forme $u_0.x^n$ avec x à déterminer.

Il reporte : $u_0.x^{n+2} = u_0.x^{n+1} + 2.u_0.x^n$.

Il simplifie : $x^{n+2} = x^{n+1} + 2.x^n$.

Il simplifie encore : $x^2 = x + 2$.

Trouvez une matrice P inversible de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ vérifiant $M.P = P.D$ (et inversez P).

On veut écrire $M.P = P.D$.

A priori, si P est avec quatre coefficients, on a quatre équations :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On se dit qu'avec quatre équations pour quatre inconnues, on va avoir un système et une unique solution.

Mais voilà, deux des quatre équations sont redondantes (si on y réfléchit, c'est à cause de l'égalité des déterminants et traces).

Alors on va pouvoir imposer $\alpha = \beta = 1$. En fait, ce ne sont pas les coefficients de P qui importent, mais les deux colonnes de P , à facteur multiplicatif près.

$$\text{Bref, on y va } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Et je vais faire le con... Pardon, je vais faire l'élève.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2+a & 2+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -a & 2b \end{pmatrix} \text{ (là ça va)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = 2 \text{ (et vlan !)}$$

L'élève a raisonné avec ses réflexes de Terminable. Il n'a gardé que deux équation au lieu de quatre.

Il a raisonné par implications.

Et on veut l'autre sens !

$$\text{Reprenons : } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = -1 & \text{et} & b = 2 \\ 2 + a = -a & \text{et} & 2 + b = 2b \end{matrix}$$

Et là, par équivalences, les quatre équations sont correctes.

Bon, de toutes façons, pour ne pas se perdre, on propose/vérifie $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Calculez D^n , M^n , U_n et u_n .

Par récurrence évidente : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Par multiplication : $M = P.D.P^{-1}$.

Par récurrence sur n ou concaténation : $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

Concaténation, c'est « mise bout à bout » : $M^n = (P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}) \dots (P.D.P^{-1})$

Les $P^{-1}.P$ se simplifient, et il reste $M^n = P.D.D.D \dots D.P^{-1}$.

On a donc $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

$$M^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Enfin, ayant affaire à une suite géométrique de raison à gauche $M : U_n = M^n.U_0$.

(ici, pas de récurrence, c'est une simple histoire de suite géométrique).

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On notera qu'on a deux lignes. l'une donne u_n en fonction de n : $u_n = \frac{(2 \cdot (-1)^n + 2^n) \cdot 7 - (2^n - (-1)^n) \cdot 4}{3}$

et l'autre donne u_{n+1} . Et c'est la même au rang $n + 1$. Pas grand chose de nouveau...

On peut réarranger : $u_n = 6 \cdot (-1)^n + 2^n$

Résolvez $u_n \geq 2017$ d'inconnue entière n .

On veut $6 \cdot (-1)^n + 2^n \geq 2017$.

Quitte à oublier un instant $18 \cdot (-1)^n$, on résout $2^n \geq 2017$.

A la main, on trouve $n \geq 11$.

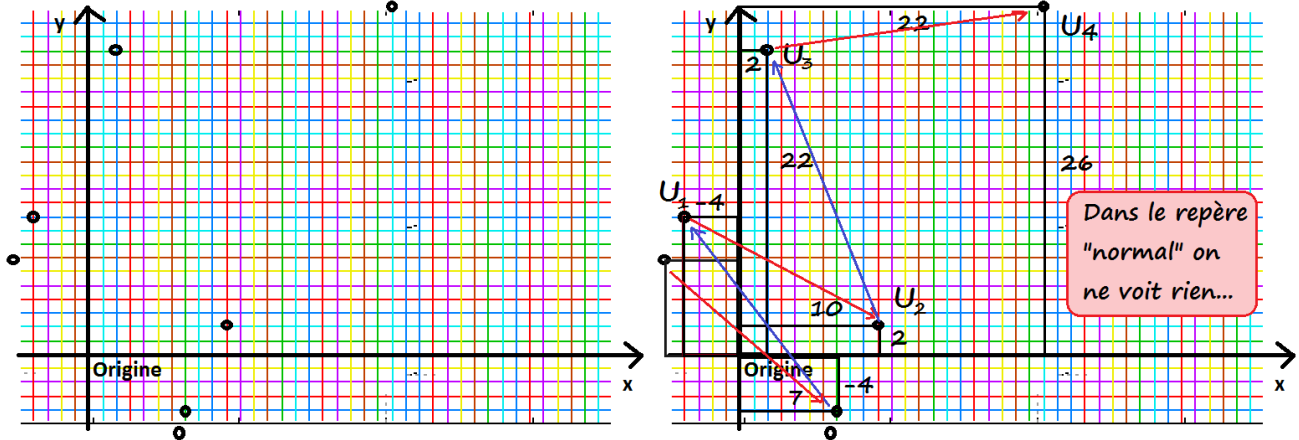
Et on peut vérifier : $6 + 2048 \geq 2017$ et $-6 + 1024 < 2017$.

Et au delà du rang 11, par croissance : $u_n \geq u_{11} > 2017$.

Si on n'avait pas eu des nombres si simples, on aurait dû faire intervenir des logarithmes pour résoudre $2^n \geq A$ d'inconnue n .

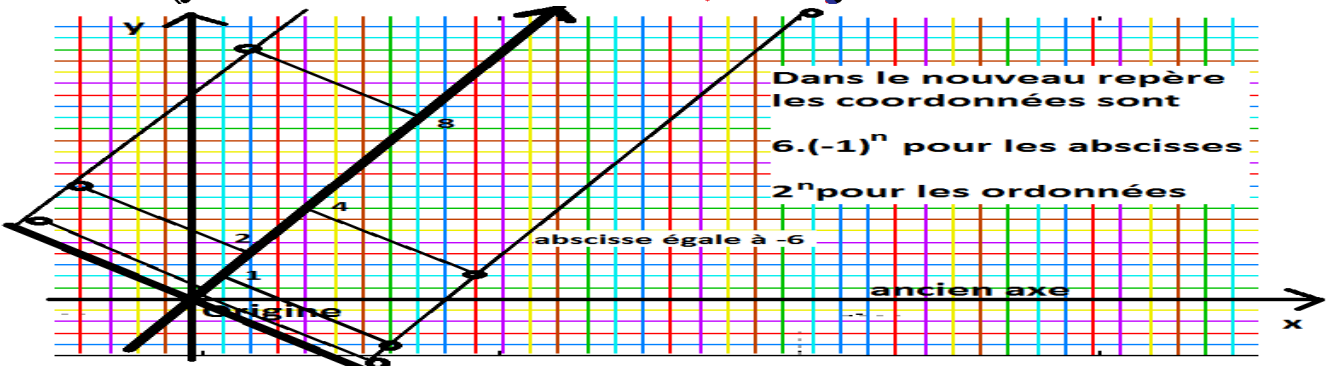
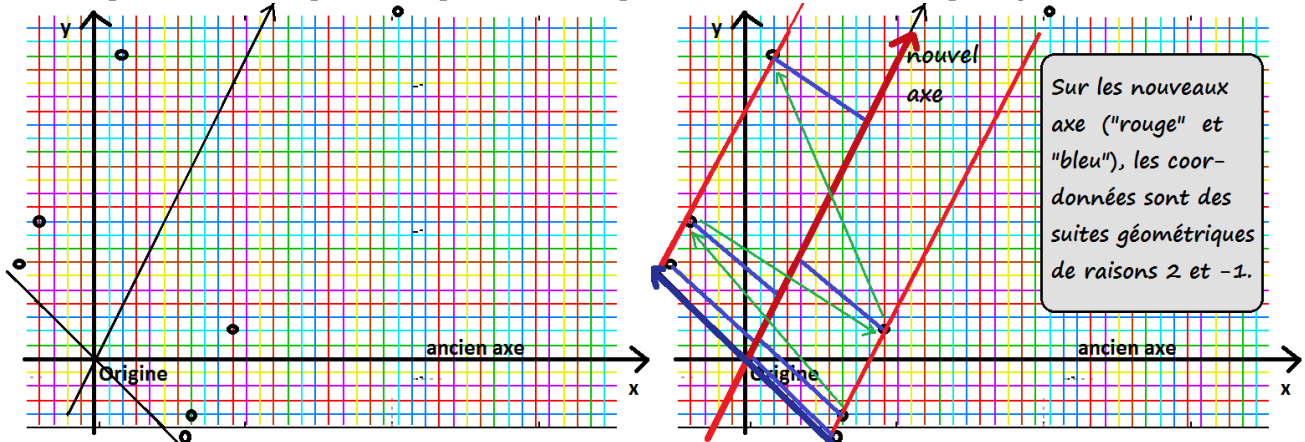
Placez dans le plan les points U_n pour n de -2 à 4 (repère orthonormé, échelle à choisir). Tracez le nouveau repère qui garde la même origine 0 mais prend pour axes $\text{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\text{Vect}(\vec{i} + 2\vec{j})$. Donnez les coordonnées des points U_n dans ce repère.

Dans le repère initial, on peut placer les points les uns après les autres, et mettre en valeur leurs coordonnées.



On trace le nouveau repère. Les points ne bougent pas, mais leur coordonnées changent.

On note que le nouveau repère correspond « comme par hasard » à la matrice de passage P .



On pose $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 , B^2 , $A.B$, $B.A$, ainsi que $A + B$.

Calculez A^n et B^n . Pourquoi peut on utiliser la formule du binôme pour $(A + B)^n$ et pourquoi donne-t-elle $A^n + B^n$? Retrouvez la matrice M^n .

On va calculer M^n par une autre méthode, qu'on appelle décomposition en combinaisons de projecteurs commutant deux à deux.

Ne cherchez pas pour l'instant à comprendre pourquoi, qui sont ces projecteurs...

Ce sont ces deux matrices A et B (de somme M , comme par hasard).

On effectue les calculs et surtout, on ne s'arrête pas à $A^2 =$ quatre coefficients.

On prend du recul :

A^2	B^2	$A.B$	$B.A$
$-A$	$2.B$	$0_{2,2}$	$0_{2,2}$

Et si déjà on doit résoudre un exercice élémentaire, niveau Terminale (je dis bien Terminale et pas Terminable, c'est que c'est un exercice destiné à cultiver votre intelligence...).

$$(A + B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$$

(pas de binôme trop rapide, on est dans un anneau non commutatif).

$$(A + B)^2 = -A + 2.B$$

et cette forme est plus agréable que celle avec des coefficients partout.

On pousse plus loin, avec M^3 : $(A + B)^3 = (-A + 2.B).(A + B)$
 $(A + B)^3 = -A^2 + 2.B.A - A.B + 2.B^2$ (pas de commutativité)
 $(A + B)^3 = A + 4.B$ ça commence à prendre forme

On pouvait y accéder aussi avec la formule du binôme sans commutativité :

$$(A + B)^3 = A^3 + (A^2.B + A.B.A + B.A^2) + (A.B^2 + B.A.B + B^2.A) + B^3$$

dans laquelle on élimine tout ce qui contient $A.B$ ou $B.A$: $(A + B)^3 = A^3 + B^3 = -A + 4.B$.

On généralise : $(A + B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ pour tout n .

C'est initialisé.

Supposons $(A + B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ vrai pour un entier naturel n quelconque.

On calcule $(A + B)^{n+1} = (A + B)^n.(A + B)$
 $(A + B)^{n+1} = (-1)^n.A + 2^n.B).(A + B)$
 $(A + B)^{n+1} = (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2 + (-1)^n.A.B + 2^n.B.A$
 $(A + B)^{n+1} = (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2$
 $(A + B)^{n+1} = (-1)^{n+1}.A + 2^{n+1}.B$

On a donc $M^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} + 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

Avec un peu de recul, on pouvait quand même utiliser la formule du binôme.

L'anneau des matrices 2 sur 2 n'est pas commutatif.

Mais ici, les deux matrices A et B sont permutables ($A.B = B.A$, et mal dit : elles commutent).

On a donc quand même $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.A^{n-k}.B^k$.

Mais dès que k vaut autre chose que 0 ou n , on a un $A.B$ ou un $B.A$ dans $A^{n-k}.B^k$. Ce terme est nul !

Dans la somme issue du binôme, il ne reste que deux termes : $(A + B)^n = A^n + B^n$.

Surtout, ne faites pas lire cette formule à un élève de collège ou même de lycée, il croira que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ c'est plus cool que l'identité remarquable que lui apprend son prof. Mais ici, on a $a.b = b.a = 0$, ce qui n'a pas souvent lieu dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Ensuite, par récurrence évidente sur n $A^n = (-1)^n.A$ et $B^n = 2^n.B$.

Les deux valeurs $(-1)^n$ et 2^n viennent directement des deux valeurs propres de M .

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & & \\ 3 & 4 & \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

Dans $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & c & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ e & 1 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ g & 0 & h \\ 3 & i & 4 \end{pmatrix}$, on donne des noms aux coefficients, et on résout de petites équations comme $1 + e = 2$.

On trouve finalement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

◀2▶

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 11$.

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 10$.

Rappel : $P(A)$ est l'ensemble de toutes les parties de A .

Par exemple $P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$P(\{u\}) = \{\emptyset, \{u\}\}$$

Facile, du moment qu'on accepte l'idée que les objets mathématiques ne sont pas que des nombres, mais aussi des ensembles, des fonctions, des opérateurs. Bref, des trucs vivants.

Prenons justement $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$.

Ici, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (huit éléments)

$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (quatre éléments)

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (onze éléments)

On ne confondra pas $P(A) \cup P(B)$ avec $P(A \cup B)$ (bien plus gros, car contenant des choses comme $\{1, 2, a\}$, et un total de 32 éléments).

Est il possible d'avoir $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 10$?

On mettra dans $P(A) \cup P(B)$ • les 2^p parties de A (en posant $p = \text{Card}(A)$)

• les 2^q parties de B (en posant $q = \text{Card}(B)$)

et enlever les parties communes, comme \emptyset et d'autres si A et B ont des éléments communs.

Mais peut on avoir $2^p + 2^q - \dots = 10$?

Prenons, $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (huit éléments)

$P(\{3,4\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$ (quatre éléments)

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$ (dix éléments)

◀3▶

a est une suite arithmétique vérifiant $\sum_{k=0}^{10} a_k = 374$. Pouvez vous retrouver la raison ? Et le premier terme ?

Et si j'ajoute $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1344$?

Non. On peut prendre une suite de premier terme 34 et de raison 0.
de premier terme 33 et de raison 1

En notant a_0 le premier terme et r la raison, on a un système
$$\begin{aligned} 11.a_0 + \frac{10 \cdot 11}{2}.r &= 374 \\ 21.a_0 + \frac{20 \cdot 21}{2}.r &= 1344 \end{aligned}$$

Cette fois, on le résout : le premier terme vaut 4 et la raison 6

◀4▶

♣ $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ est il égal à ± 3 ?

De toutes les matrices de taille 2 à coefficients ± 1 , lesquelles ont le déterminant le plus grand ?

Pour ce qui est de $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, si on en fait un produit, ce ne peut être que 3 ou -3 .

Mais si on le lit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ avec chaque ε_i dans $\{-1, 1\}$, il peut valoir $-3, -1, 1$ ou 3.

Sinon, on regarde le déterminant de $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ en notation malpropre. C'est $\varepsilon_1.\varepsilon_2 - \varepsilon_3.\varepsilon_4$ avec des notations propres.

Il ne peut dépasser 2, atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Il ne peut dépasser -2 , atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Et il vaut 0 pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$.

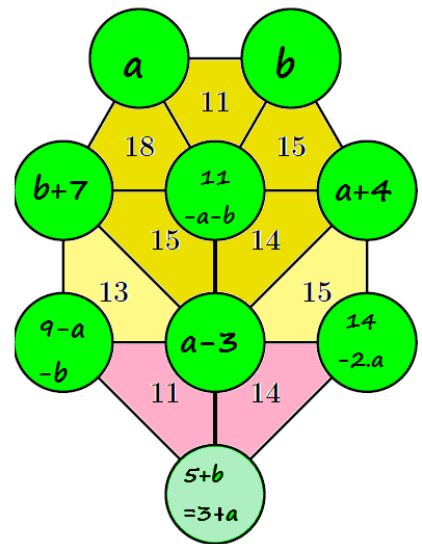
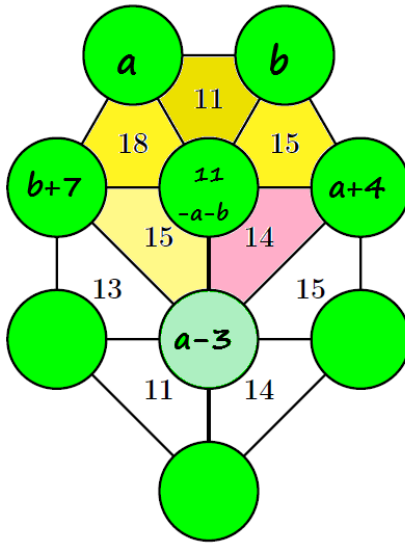
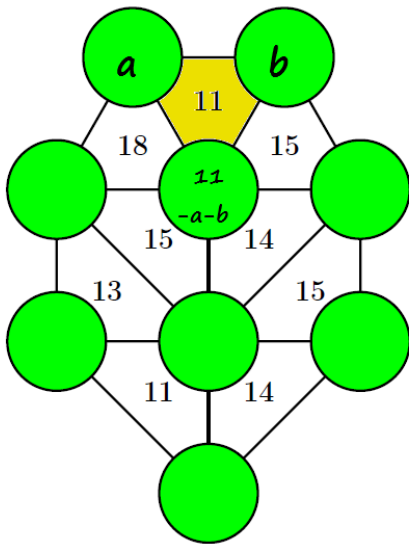
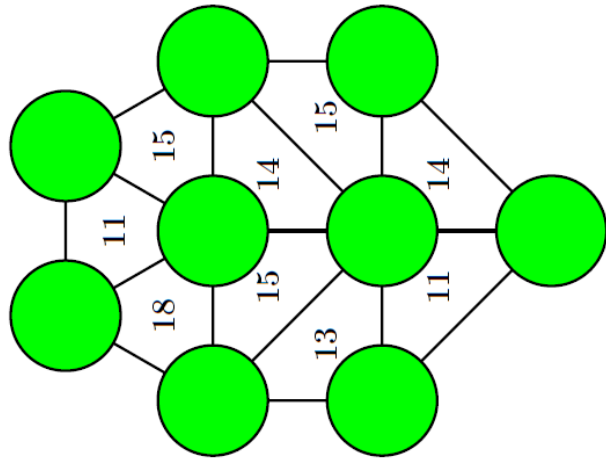
Et en taille 3 ? Je vous la repose bientôt...

Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.

Calculez $\sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k}$.

Calculez $\sum_{k=0}^n 2 \cdot k \cdot 3 \cdot (n-k)$.

Calculez $\prod_{k=1}^n \sqrt{2 \cdot k}$.



On donne deux noms aux premiers termes en haut. On complète par le premier triangle jaune (première image). On complète avec trois autres triangles (en jaune plus clair). On obtient la valeur de la cellule vert clair.

Mais alors le triangle rose (image du milieu) impose une équation : $(11 - a - b) + (a + 4) + (a - 3) = 14 : a - b = 2$.

On continue jusqu'en bas. Les deux derniers triangles (roses) imposent deux valeurs à la cellule vert clair de la dernière image : $5 + b = 3 + a$. On l'a déjà.

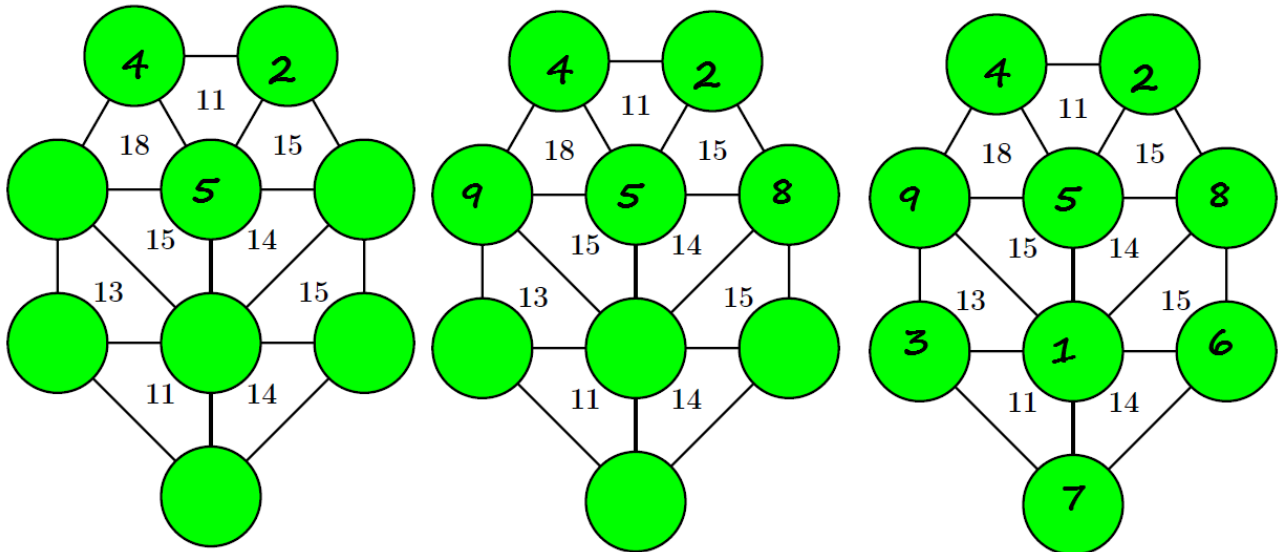
Mais il nous reste des contraintes : ce sont des entiers, et ils sont tous différents.

On a donc par exemple $a - 3 > 0$ et $14 - 2 \cdot a > 0$ (avant dernière ligne, cellules de droite et du milieu). a vaut 4 ou 5 ou 6. Et par là même, b vaut 2 ou 3 ou 4.

Mais $b + 7$ ne doit pas dépasser 9. Il ne reste que $a = 4$ et $b = 2$.

Mais la solution $a = 5$ et $b = 7$ donne une case négative en haut au milieu.

La solution passe donc par 4 et 6 :



Approche de Tristan¹ : la pièce centrale en haut est 5
 Ce ne peut pas être 9 car pour 11 il ne reste que $1 + 1$
 ni 8 car $9 + 8 > 15$
 ni 7 car $7 + 8 = 15 \dots$
 Et ensuite, ça vient assez vite.

Sinon, il y avait aussi une approche « algèbre linéaire » intuitive.

On a neuf disques à remplir : 9 inconnues.

On a neuf triangles à border : 9 équations.

Il est tentant de dire qu'il y aura une unique solution (système de Cramer 9 sur 9).

Sauf si il dégénère. Et ici, on l'a vu dégénérer quand on a trouvé deux fois l'équation $a - b = 2$.

On va donc avoir une inconnue qui va passer d'inconnue à « paramètre ».

Mais ensuite, on avait des contraintes sur « solutions entières et positives, et ça change tout ».

Personnellement, je trouve que c'est au travers de tels exercices qu'on perçoit la notion de dimensions dans les systèmes linéaires.

Ah oui, après il y a trois sommes et produits.

$\sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k}$ est une somme de série géométrique de raison $2/3$.

En effet, on passe de $2^k \cdot 3^{n-k}$ à $2^{k+1} \cdot 3^{n-k-1}$ en multipliant par 2 et en divisant par 3.

Le premier terme est pour $k = 0$: $2^0 \cdot 3^n$.

Le premier terme à venir est $k = n + 1$: $2^{n+1} \cdot 3^{n-n-1}$.

La formule donne directement $\frac{3^n - \frac{2^{n+1}}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$ (et je ne calcule pas le nombre de termes, je m'en contrefiche).

On simplifie en $3^{n+1} - 2^{n+1}$ (assez compact et prévisible).

$$\sum_{k=0}^n 2.k.3.(n-k) = 6. \sum_{k=0}^n k.(n-k) = 6. \left(\sum_{k=0}^n n.k - \sum_{k=0}^n k^2 \right) = 6.n. \sum_{k=0}^n k - 6. \sum_{k=0}^n k^2$$

Le cours donne $6.n. \frac{n.(n+1)}{2} - 6. \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.

On simplifie en $n.(n^2 - 1)$; joli quand même.

$$\prod_{k=1}^n \sqrt{2.k} = \sqrt{\prod_{k=1}^n 2.k} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n k \right)} = \sqrt{2^n \cdot n!} = 2^{n/2} \cdot \sqrt{n!}$$

1. MPSI2 promo première vague Covid, spécialiste des exos étranges, parti à Decour en MP puis à l'ESILV

et on n'a guère mieux...

◀6▶ a est un réel plus grand que 1 ; résolvez $a^2 - 2.a.T_7(x) + 1 = 0$ d'inconnue réelle x (T_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Pafnouti T.).

◀7▶ Calculez $T'_n(0)$ pour tout n .

Pour calculer $T'_n(0)$, le plus simple est de partir de la formule $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ puis de la dériver (grâce au $\forall \theta$) : $-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$. On applique pour θ égal à $\pi/2$: $-1.T'_n(0) = -n.\sin(n.\pi/2)$. On a la

formule close $T'_n(0) = n.\sin(n.\pi/2)$

$n \text{ modulo } 4$	0	1	2	3
$T'_n(0)$	0	n	0	$-n$

On peut aussi partir de $T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$ et dériver

$$T'_{n+2}(X) = 2.X.T'_{n+1}(X) + 2.T_{n+1}(X) - T'_n(X).$$

On applique en 0 : $T'_{n+2}(0) = 2.T_{n+1}(0) - T'_n(0)$. Or, $T_n(0)$ vaut $T_n(\cos(\pi/2))$ c'est à dire $\cos(n.\pi/2)$. Après, il faut mouliner un peu.

◀8▶ Montrez : $ch^2 = 1 + (ch')^2$. Quel est le minimum de l'application ch ?

C'est juste $ch^2 = 1 + sh^2$.

On l'a en écrivant pour tout x : $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$. Il ne reste plus qu'à multiplier les deux. Le minimum de ch est en 0 et il vaut 1.

◀9▶ Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0, 1]$.

La longueur du graphe d'une application f de classe C^1 entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est donnée par $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}.dt$ (intégrale de la norme du vecteur vitesse de $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$).

On a donc $y = ch(t)$, d'où $f'(t) = sh(t)$ et $\sqrt{1 + (f'(t))^2} = ch(t)$ grâce à la relation de Pythagore et à la positivité du cosinus hyperbolique.

On sait intégrer aisément : $\int_0^1 ch(t).dt = sh(1)$.

Et on sait intégrer entre deux points quelconques. C'est ce qui explique « à rebours » que le cosinus hyperbolique intervienne dans des problèmes physiques de corde qui pend entre deux points, sous le nom de chaînette.

◀10▶ Dans une I.S. (2020), on a trouvé pour a dans $] -1, 1[$: $J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a.\cos(\theta)}.d\theta = \pi.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a.\sqrt{1-a^2}}\right)$. Mais, le membre de droite n'a pas de valeur en 0. Est ce qu'au moins sa limite en 0 (calculez la) coïncide bien avec J_0 ?

On a ensuite intégré le membre de droite a , et trouvé $I_a = \pi.\left(\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right)\right)$. Pour a dans $]0, 1[$.

Mais quelle est la limite de cette chose en 0 ?

Vérifiez qu'elle se dérive bien ne ce qui est indiqué plus haut.

Mon livre donne $I_a = \pi.\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$. C'est la même formule ?

$$a. \text{ bon, c'est quoi alors } I_a = \int_{x=0}^a \left(\int_{\theta=0}^\pi \frac{\cos(\theta)}{1+x.\cos(\theta)}.d\theta \right).dx$$

Première question : $\pi.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a.\sqrt{1-a^2}}\right)$ a-t-elle une limite quand a tend vers 0 ?

On réduit au dénominateur commun, puis on conjugue

$$\pi.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a.\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a.\sqrt{1-a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}.\left(\sqrt{1-a^2} + 1\right)}$$

Ce quotient tend vers 0 quand a tend vers 0.

Et pour a nul, l'intégrale vaut bien 0.

On a intégré $\int \frac{da}{a.\sqrt{1-a^2}}$ par changement de variable en $a = \sin(\theta)$ et trouvé $\ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right)$.

Transformons la différence des logarithmes en logarithme d'un quotient : $-\pi.\ln\left(\frac{\tan(\dots)}{x}\right)$.

On utilise des équivalents : $\text{Arcsin}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ (qui vient de $\theta \sim \sin(\theta)$ et d'un changement de variable, ou du taux d'accroissement $\frac{\text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(0)}{x}$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}$).

De même, $\tan(\theta) \sim \theta$. Finalement, $\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) \sim \frac{a}{2}$ et $\frac{\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)}{a}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Bon on dérive pour vérifier $\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right)$

et on trouve $a \mapsto \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)}$.

On simplifie $2 \cdot \cos^2(\dots) \cdot \tan(\dots)$ en $2 \cdot \cos(\dots) \cdot \sin(\dots)$ en ayant simplifié les cosinus entre eux.

Ayant identifié le double de l'angle, on a bien notre $\sin\left(2 \cdot \frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)$ d'où a lui-même.

Remarque : j'ai dérivé la composée

$$a \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}} \text{Arcsin}(a) \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2(\dots)}} \tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) \xrightarrow{\frac{1}{\tan(\dots)}} \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right).$$

En dérivant sous cette forme, on n'a plus besoin de traîner des formules en $\frac{u'}{u}$ ou $\sin(u) \cdot u'$ et autres... On multiplie des dérivées classiques, mais on les calcule à chaque fois au bon endroit.

Pour égaliser ma formule avec celle du livre : $\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{2}\right)$ il y a deux approches :

on fait de la trigonométrie pour simplifier	on montre que les deux applications ont la même dérivée et coïncident en un point
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$ $\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(a))}{1 + \cos(\text{Arcsin}(a))}$ $\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) = \frac{a}{1 + \sqrt{1-a^2}}$ $\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right)$ $= \ln\left(\frac{a}{1 + \sqrt{1-a^2}}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1-a^2}\right)$	A vous...

◀11▶ Calculez $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{Arcsin}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arcsin}(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Et $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$ est jouable aussi, trouverez vous ?

<12>

Clément Deslandes a décidé de fabriquer des assiettes plutôt que de faire prof de maths. Il veut tester la solidité de ses assiettes. Il en prend une et se rend au pied d'un immeuble de 78 étages et il veut savoir depuis quel étage il peut balancer une assiette sans qu'elle se casse. Il veut même connaître l'étage au delà duquel elle se brise.

S'il la lance du sommet et qu'elle se brise, il saura qu'elle ne tient pas 78 étages, mais il ne saura pas à partir de quel étage elle se serait brisée. Alors quoi ?

Il teste au premier étage. L'assiette se brise, il sait qu'elle se brisera quel que soit l'étage. Et si elle ne se brise pas, il recommence au deuxième étage. Si elle se brise, le niveau de rupture est le 1. Sinon, il monte au troisième étage et recommence.

En gros une récurrence. Si elle se rompt à l'étage n , on a l'information, sinon, on passe à l'étage $n + 1$.

C'est un peu long, mais ça se fait. Et au pire il fait 79 tests.

Mais voilà, il a pensé à prendre deux assiettes. Alors que fait il pour minimiser le nombre de tests « dans le pire cas » ?

On peut envisager « il va au trente neuvième étage, il jette une assiette ; si elle se brise, il lui en reste une pour tester étage par étage de 0 à 38, et si elle réchappe, il lui en reste deux pour tester du 39 au 78 ». Mais il y a mieux.

Une solution.

On prend l'assiette A et on teste les étages pairs dans l'ordre : 0, 2, 4 et ainsi de suite.

Si l'assiette se rompt à l'étage $2.N$, on sait qu'elle a passé l'étape $2.(N - 1)$. C'est donc que la frontière est « soir $2.N - 2$ soit $2.N - 1$. On jette donc l'assiette B depuis l'étage $2.N - 1$ et on peut conclure.

Dans le pire des cas, on fait $39 + 1$ tests (c'est à l'avant dernier étage qu'est la frontière).

Mais il y a mieux.

On ne cherche pas l'algorithme optimal tout de suite, mais on s'interroge « si j'ai le droit à n lancers, je fais quoi ? ». Notons que dès la première assiette cassée (la A lancée de l'étage N), il faut faire du « étage par étage » avec l'assiette B jusqu'à trouver la frontière : en commençant au dernier cap franchi par A jusqu'à l'étage $N - 1$ (on sait qu'en N , c'est la rupture).

Dès lors, si on a droit à n lancers, le premier lâcher de A ne peut pas se faire au delà de l'étage n (si elle se casse, on remonte avec B étage par étage de 1 à $n - 1$, et on peut être amené à faire donc $1 + (n - 1)$ lancers).

Si elle se brise, on fait $n - 1$ étages avec l'assiette B comme on l'a dit.

Si elle ne se brise pas, il nous reste deux assiettes et $n - 1$ lancers (et $78 - n$ étages).

On va donc lâcher l'assiette depuis l'étage $n + (n - 1)$ (intervalle à explorer avec l'assiette B [$n, 2.n - 1$] si l'assiette A se brise).

A se brise : $n - 2$ lancers pour explorer l'intervalle mentionné ci dessus.

A ne se brise pas, on la lance cette fois depuis l'étage $n + (n - 1) + (n - 2)$.

Et ainsi de suite.

La somme $n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$ nous donne alors la plus grande hauteur qu'on puisse atteindre avec n lancers.

Et justement : $78 = 12 + 11 + 10 + \dots + 1$ (nombre triangulaire).

On va donc pouvoir conclure en 12 lancers.

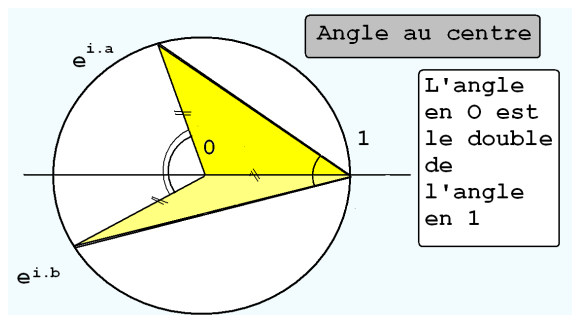
Algorithme

je lâche A depuis le niveau 12			
elle se casse	elle ne se casse pas		
je teste avec B les niveaux 1 à 11	je lâche A depuis le niveau 23		
	elle se casse	elle ne se casse pas	
	je teste avec B les niveaux 13 à 22	je lâche A depuis le niveau 33	
		elle se casse	elle ne se casse pas
		je teste avec B les niveaux 24 à 32	je lâche A depuis 4

α , β et γ sont trois réels distincts. Montrez :

$$\operatorname{Arg}\left(\left(\frac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}\right)^2\right) = \beta - \alpha.$$

◀ 13 ▶ Retrouvez le théorème de l'angle au centre.



◀ 14 ▶ ♡ Pour la formule de Taylor avec reste intégrale $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+th) \cdot dt$, des livres proposent parfois $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-u)^n \cdot f^{(n+1)}(u) \cdot du$. Passez de l'une à l'autre ?

On va considérer que le cours nous donne la première.

On veut ensuite calculer $f(x)$ à l'aide des dérivées en a .

On pose donc $x = a + h$ ou plutôt $h = x - a$ (quantité que le physicien qualifiera de petite et notera même dx , et que le mathématicien qualifiera d'accroissement).

Le terme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k$ devient $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$. C'est bon.

Conseil : Si vous croisez quelqu'un qui utilise $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$, discutez avec lui.

Mais ne le laissez pas polluer votre esprit. Sa formule n'est pas judicieuse.

Vous allez être trop tenté de développer les $(x-a)^k$ par la formule du binôme, et vous perdrez alors tout l'intérêt de la formule de Taylor.

Quand les termes sont ordonnés suivant les puissances de h , vous les voyez triés : $1 \gg h \gg h^2 \gg h^3$ (pour h « petit »).

Pour x proche de a , la formule $1 \ll (x-a) \gg (x-a)^2 \gg (x-a)^3$ est ordonnée.

Mais les termes $1, x, x^2, x^3$ sont tous « grands », et $x^2 + a \cdot x + 1$ est « grand » tandis que $x^2 - 2 \cdot a \cdot x + 1$ est « petit ».

Bref, développer les $(x-a)^k$ donne une formule où plus rien n'est petit...

Il faut ensuite passer de $\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+th) \cdot dt$ à $\frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-u)^n \cdot f^{(n+1)}(u) \cdot du$.

La factorielle est la même.

Posons ensuite $u = a + t \cdot h$. Les bornes deviennent a et $a + h$ c'est à dire x .

On a alors $dt = \frac{du}{h}$, $(1-t)^n = \frac{(x-u)^n}{h^n}$.

On a donc h^{n+1} qui s'en va ! C'est la même.

◀ 15 ▶ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$ (non, pas Bioche).

Dans cet exercice, seule la dernière intégrale nous intéresse. Mais on passe par les deux premières pour l'avoir. Il faut savoir comprendre l'enchaînement des questions.

$$\bullet \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \text{ (rectangle).}$$

$$\bullet \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx = \left[\ln(\cos(x) + \sin(x)) \right]_0^{\pi/2} = 0 \text{ forme en } \frac{u'}{u}.$$

$$\bullet \int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx = \frac{a+b}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx + \frac{a-b}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx \text{ combinai-son.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx = \frac{(a+b) \cdot \pi}{4}$$

Et si on s'entraînait à TeX ? $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$ c'est

$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$.

Et j'ai une préférence pour $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$ qui donne une fraction plus jolie :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$$

La syntaxe pour une intégrale, c'est \int , et on met ensuite en indice avec $_$ et en « exposant » avec $^$. Si il y a plusieurs termes dans l'exposant, on les met dans un groupe par $\{ \}$.

Et π , c'est π .

◀ 16 ▶

Calculez $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$.

Il serait bon que l'intervalle $[a, b]$ ne contienne aucun élément de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$ avec k entier.

Et l'élève qui n'a rien compris dit « il faut éviter que a soit de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$ et que b soit aussi de la forme $p \cdot \frac{\pi}{2}$ (avec k et p entiers). Certes, il est moins con que celui qui met le même k pour a et b . Mais en fait, il n'a rien compris aux maths, donc à la base du raisonnement.

Certes, on parle de a et b , mais il y a surtout une variable x qui va aller de a à b (oui, une VARIABLE, l'objet capital).

Imaginez que a est égal à $\frac{\pi}{4}$ et b égal à $\frac{11 \cdot \pi}{3}$. C'est bon, aucun n'est de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$.

Mais entre a et b , si on veut calculer $\int_{\pi/4}^{11 \cdot \pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}$ il y a $\frac{\pi}{2}$

En fait, il faut que a et b soient ensemble dans un même intervalle $\left] \frac{k \cdot \pi}{2}, \frac{(k+1) \cdot \pi}{2} \right[$.

Bioche nous incite à trouver une tangente cachée.

Rappelons : $\frac{1}{\cos^2} = \tan'$.

On rappelle aussi $\frac{1}{\sin^2} = \frac{1}{1 - \cos^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \tan^2}} = \frac{1 + \tan^2}{\tan^2} = 1 + \frac{1}{\tan^2}$ (vérifiez : $1 + \frac{1}{\tan^2} = \dots$).

On est donc en présence de $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \cdot t'$.

On intègre en $\left[\tan(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)} \right]_a^b$

◀ 17 ▶

♥ Une inégalité classique dit $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

Prouvez la de différentes façons : récurrence sur n

formule du binôme que vous coupez

variation de fonction (il faudra dériver plusieurs fois)

formule de Taylor avec reste intégrale

Binôme pour commencer (la récurrence, je la mets à la fin car on généralise un peu à x aussi entre -1 et 0).

Quand on développe : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k = 1 + n \cdot x + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$ en isolant les deux premiers termes ($k=0$ et $k=1$).

Mais dans la somme $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$ tout est positif.

On a donc bien $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

La formule de Taylor avec reste intégrale c'est $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+t \cdot h) \cdot dt$, et elle se démontre par récurrence sur n avec des intégrations par parties.

On l'écrit à l'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot f''(a+t \cdot h) \cdot dt$$

Remarque :

Finalement, pas besoin de récurrence, on calcule $\int_0^1 (1-t) \cdot h \cdot f''(a+t \cdot h) \cdot dt$ par parties :

$h^2 \cdot f''(a + t.h)$	\leftrightarrow	$h \cdot f'(a + t.h)$	\leftrightarrow	$f(a + t.h)$
$(1 - t)$	\leftrightarrow	-1	\leftrightarrow	0

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h \cdot f''(a + t.h) \cdot dt = \left[(1-t) \cdot h \cdot f'(a + t.h) \right]_{t=0}^1 + \int_0^1 h \cdot f'(a + t.h) \cdot dt$$

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h \cdot f''(a + t.h) \cdot dt = \left[(1-t) \cdot h \cdot f'(a + t.h) \right]_{t=0}^1 + \left[f(a + t.h) \right]_{t=0}^1$$

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h \cdot f''(a + t.h) \cdot dt = 0 - h \cdot f'(a) + f(a + h) - f(a)$$

On l'applique à $x \mapsto x^n$ et $a = 1$:

$$f(1+h) = f(1) + x \cdot f'(1) + x^2 \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot f''(1+t.x) \cdot dt$$

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + x^2 \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (1+t.x)^{n-2} \cdot dt$$

L'intégrale est positive, et le x^2 devant aussi.

On a encore la minoration.

En fait, on montre même $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ par récurrence sur n .

Pour n égal à 0 : $1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$.

Pour n égal à 1 : $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$.

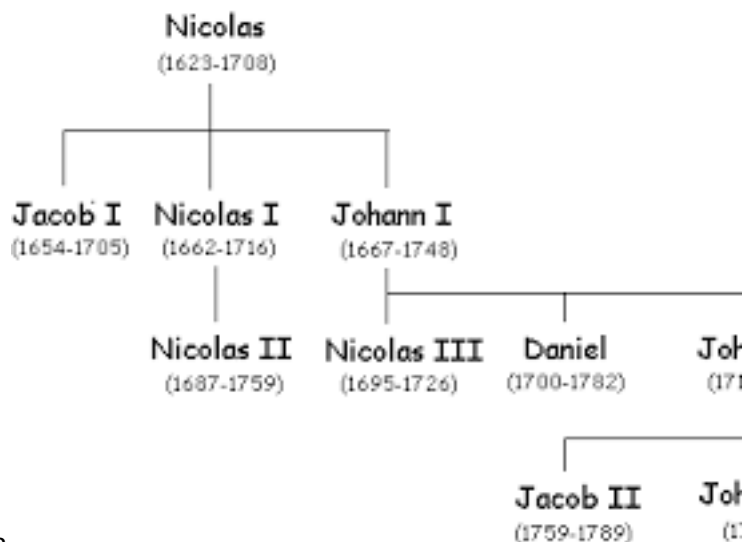
dans les deux cas il y a même égalité.

Prenons maintenant x fixé, ainsi que n quelconque, et supposons $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

Multiplions par $1+x$ (positif, puisque $x \geq -1$) : $(1+x)^{n+1} \geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x)$.

On développe : $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2$.

Mais $n \cdot x^2$ est positif. On a donc bien $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1) \cdot x$.



Cette inégalité porte le nom de Bernoulli. D'accord, mais lequel ?

Jacques, Jean, Daniel, Nicolas ?

<18>

Reliez dans cette grille l'entrée à la sortie du tunnel. Les chiffres inscrits en début de ligne et de colonne indiquent le nombre de cases du tunnel dans la ligne ou colonne. Le tunnel ne se croise pas lui-même, ni ne se touche. Un exemple résolu vous permet de comprendre.

	2	1	1	2	3	5	2	2	0	0	0	3	1	2	1
0						3					2				☺
0						2		☺			3				
2				☺	■	1					1				
2	☺				■	1					1		☺		
5	■	■	■	■	■	2		☺			0				
	1	2	1	2	4	0	2	1	3	0	1	2	3	0	0
0						0					0				
2				☺		0					2		☺		
1						1			☺		1				
3	☺					2		☺			3	☺			
4						3					0				

A cause de vous, cette hotte est purifiée. Elle adore cacher les menus. Si je ne ne prends plus de train, je suis assisté. Elle est en route avec sa bûche. Dure luttes pour avoir des boutures. Il cherche des branchettes faute de lattes. Elle adore les bobards. J'ai pris un coup avec la bûche. Des jeux en quoi ?

<19>

♥ On définit : $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sin(x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$. Pouvez vous la rendre continue en choisissant bien a et b ?

Même question pour $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq \pi/3 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } \pi < 3x < 2\pi \\ \sin(x) & \text{si } 2\pi/3 \leq x \end{cases}$. Est elle alors dérivable ?

$$f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sin(x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases} \text{ est continue }]-\infty, 0[\text{ car c'est le cosinus}$$

est continue sur $]0, \pi[$ car c'est un polynôme

est continue sur $]\pi, +\infty[$ car c'est le sinus.

La seule question est « en 0 et en π ».

On regarde donc en chacun de ces points la limite à droite et la limite à gauche.

La continuité c'est ça (en laissant de côté les ε) : la même limite à droite et à gauche, égale à la valeur de la fonction².

	à gauche de 0	en 0	à droite de 0		à gauche de π	en π	à droite de π
formule	$\cos(x)$	1	$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$		$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$	0	$\sin(x)$
limite	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$	$f(0) = 1$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = a$		$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = -a$	$f(\pi) = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} f(x) = 0$
condition	$a = 1$				$a = 0$		

Pas de raccordement continu possible des deux côtés à la fois...

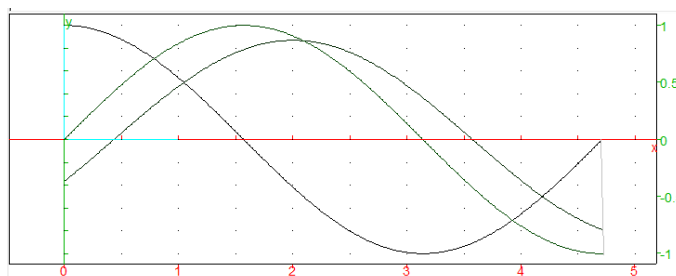
Donc pas de raccordement dérivable !

Passons à $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq \pi/3 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } \pi < 3x < 2\pi \\ \sin(x) & \text{si } 2\pi/3 \leq x \end{cases}$.

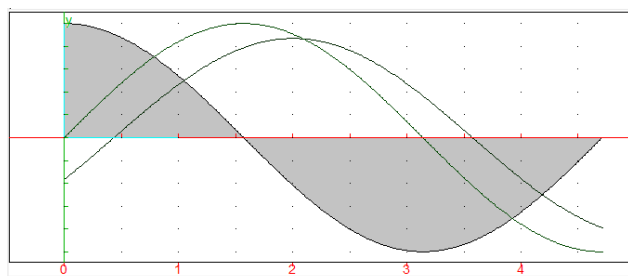
	à gauche de $\frac{\pi}{3}$	en $\frac{\pi}{3}$	à droite de $\frac{\pi}{3}$		à gauche de $\frac{2\pi}{3}$	en $\frac{2\pi}{3}$	à droite de $\frac{2\pi}{3}$
formule	$\cos(x)$	$\frac{1}{2}$	$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$		$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(x)$
limite	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/3 \\ x < \pi/3}} f(x) = \frac{1}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/3 \\ x > \pi/3}} f(x) = \frac{a + b \cdot \sqrt{3}}{2}$		$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = \frac{-a + b \cdot \sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2\pi/3 \\ x > 2\pi/3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
condition	$\frac{a + b \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$				$\frac{-a + b \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		

Cette fois, le système a une solution : $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

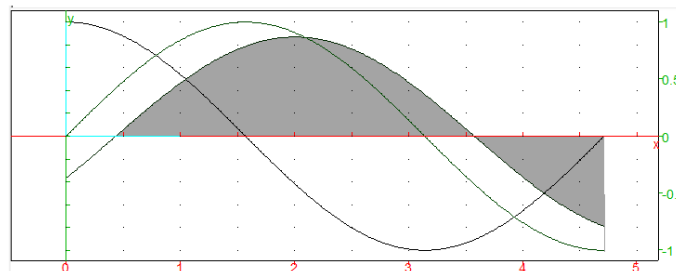
2. là, on redevient « terminalesque », mais surtout on voit ça géométriquement



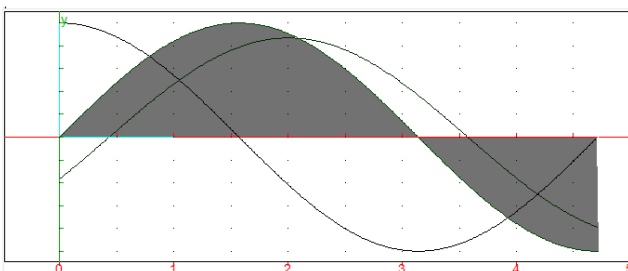
les trois graphes



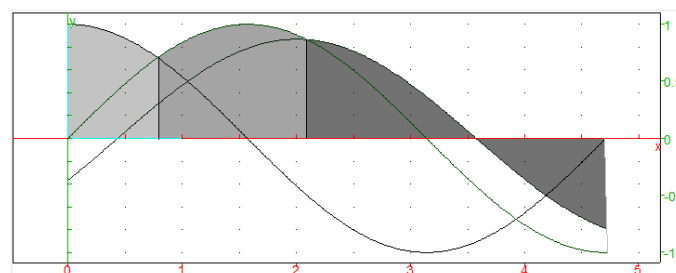
le cosinus tout seul



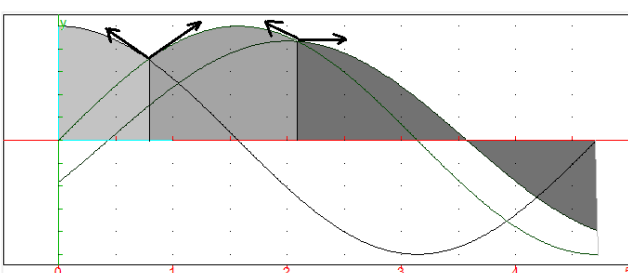
celle du milieu toute seule



le sinus tout seul



la fonction avec ses raccords



raccords continus mais non dérivables

◀ 20 ▶

Pour tout n on pose : $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$, $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{n}$, $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n)}{k}$. Montrez que (A_n) et (C_n) sont croissantes.

Montrez que B_n est décroissante.

Étudiez la convergence de chacune par comparaison série intégrale.

Donnez un équivalent en $+\infty$ simple de chacune.

On ne sait pas tout de suite si (B_n) est croissante.

Mais B_n est constante, puisque cette fois, n est fixé (sinon il y aurait des parenthèses).

C'est la suite $(B_n)_{k \in \mathbb{N}}$ si il faut l'écrire proprement.

Étant constante, elle est décroissante.

(A_n) est une série à termes positifs : $A_{n+1} - A_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} > 0$ pour tout n .

Elle est croissante.

C_n vaut $\ln(n) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Pour n donné on a $0 \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq \frac{\ln(n+1)}{H_{n+1}}$ en posant $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Jetons un œil quand même : $B_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(k)$.

Cette fois, $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît et $\left(\sum_{k=1}^n \ln(k)\right)$ croît. Qui croire...

En fait, elle croît. Mais il faut y aller proprement.

On peut encadrer A_n par $\int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \cdot dt$ et $0 + \int_1^n \frac{\ln(t)}{t} \cdot dt$.

On y va, pour x plus grand que -3 : $\cos(\text{Arctan}(\sqrt{x+3})) = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x+3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

et il est entre 0 et 1 puisque c'est un cosinus

$$\tan(\text{Arcsin}(\cos(\text{Arctan}(\sqrt{x+3})))) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+4}}}$$

On élève au carré, et notre application n'est autre que $x \mapsto \frac{1}{x+3}$

On représente donc juste un morceau d'hyperbole. Un morceau, car on a imposé $x \geq -3$.

Quant aux dérivées, elles se calculent sans effort.

sauf si on est con et qu'on n'a toujours pas compris que $x \mapsto \frac{1}{(x+3)^3}$ c'est $x \mapsto (x+3)^{-3}$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f^{(3)}(x)$...	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n+1)}(x)$
$(x+3)^{-1}$	$-(x+3)^{-2}$	$2.(x+3)^{-3}$	$6.(x+3)^{-4}$		$(-1)^n.n!. (x+3)^{-n-1}$	$(-1)^{n+1}.(n+1)!. (x+3)^{-n-2}$

La formule est validée par récurrence sur n .

- ◀24▶ Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut-il avoir des hauteurs entières ?
Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut-il avoir des médianes entières ?

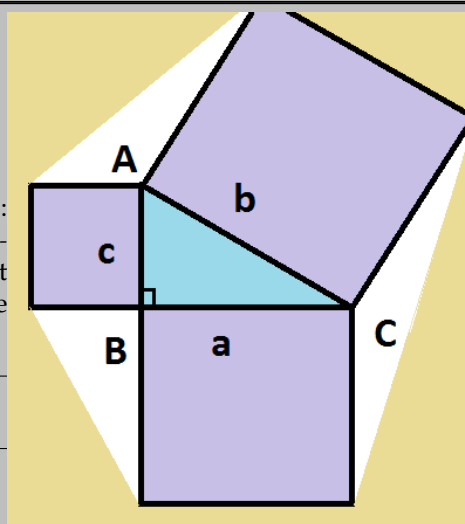
Le concours Kangourou propose l'exercice suivant :
(A, B, C) est un triangle rectangle en B (côtés a, b etc, hypoténuse b). On construit des carrés sur les côtés. On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.

Calculez celle là : $\int_0^1 x.4^x .dx$.

Montrez cette inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan(x) \geq 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

◀25▶



On a évidemment des pièces faciles à déterminer.

Le triangle (A, B, C) d'aire $a.c/2$. Son symétrique par rapport à B de même aire $a.c/2$. Ou alors, on colle les deux triangles rectangles et on récupère un rectangle de côtés a et c .	Les deux « petits » carrés d'aires a^2 et c^2 .	Le grand carré d'aire b^2 . mais par théorème de Pythagore, il a pour aire $a^2 + c^2$.	Il reste deux triangles basés sur le grand carré. Prenons celui en C pour des raisons de symétrie des rôles. Il a pour côtés a et c (et l'autre est plus lourd à déterminer).
---	---	--	---

L'aire d'un triangle est le produit des deux côtés fois le sinus de l'angle, divisé par 2. C'est la formule base fois hauteur divisé par 2.

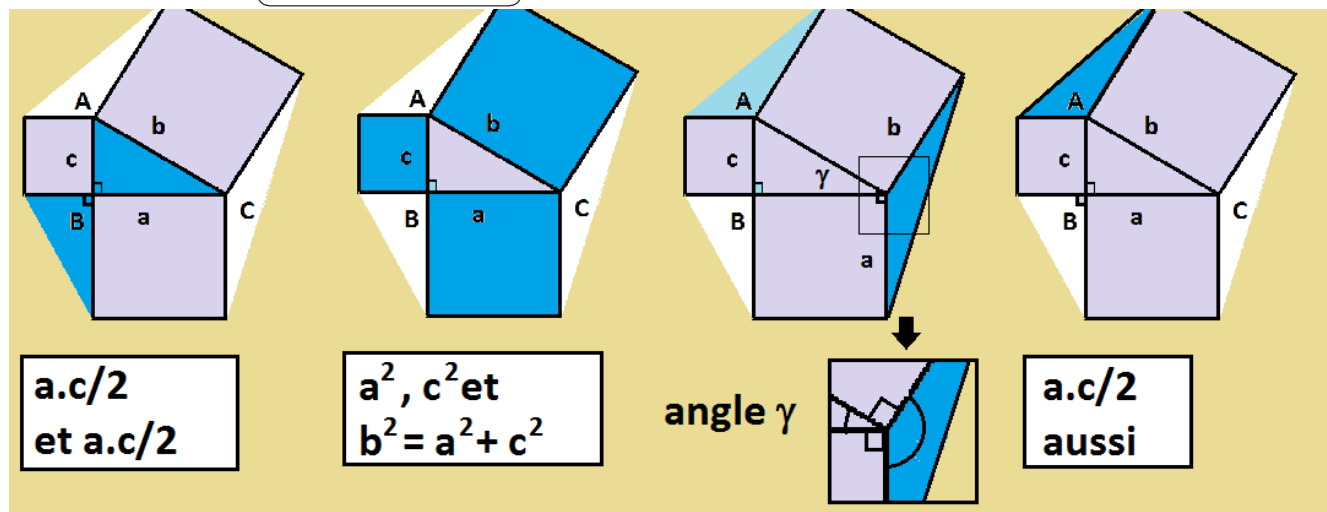
Il faut donc déterminer le sinus de l'angle obtus en C. Par complémentarité, on le mesure en faisant un tour autour de C : $\gamma + \frac{\pi}{2} + \text{inconnu} + \frac{\pi}{2} = 2.\pi$.

L'angle obtus en C vaut $\pi - \gamma$. Son sinus vaut donc $\sin(\pi - \gamma)$ c'est à dire $\sin(\gamma)$. Dans le triangle rectangle en B, on a $\sin(\gamma) = \frac{\text{oppose}}{\text{hypotenuse}} = \frac{c}{b}$.

L'aire du triangle marqué en C est donc $a.b.\frac{c}{b}.\frac{1}{2}$. On trouve $\frac{a.c}{2}$.

Il en va de même pour l'autre triangle.³

L'aire totale est donc $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$



$\int_0^1 x.4^x .dx$ se calcule par parties. $\frac{4. \ln(4) - 3}{(\ln(4))^2}$.

L'inégalité $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan(x) \geq 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ est en effet une inégalité de convexité, issue de la formule de Taylor avec reste intégrale.

L'application \tan a pour dérivée première $1 + \tan^2$ et pour dérivée seconde $2. \tan.(1 + \tan^2)$.

Cette dérivée seconde est positive sur $[0, \pi/2[$, la tangente est convexe.

Son graphe est au dessus de ses tangentes.

Et la tangente en $\frac{\pi}{4}$ a pour équation $y = 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (coefficients directeur 2 venant de $1 + \tan^2(\pi/4)$).

La question est évidemment parfaitement traitable par une étude de fonction différence qui est décroissante sur $[0, \pi/4]$ puis croissante sur $[\pi/4, \pi/2[$ et admet un minimum (nul) en $\pi/4$.

26

Développez $(u + v + w).(u + v - w).(u - v + w).(-u + v + w)$. a, b et c sont les longueurs de trois côtés d'un triangle et vérifient $2.(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$. Montrez que le triangle est rectangle. Réciproque ?

On développe $(u + v + w).(u + v - w)$ et $(u - v + w).(-u + v + w)$

Le premier donne $(u + v)^2 - w^2$ et le second $-((u - v) + w).(u - v - w)$ c'est à dire $w^2 - (u - v)^2$.

On effectue à présent $(u^2 + v^2 - w^2 + 2.u.v).(u^2 + v^2 - w^2 - 2.u.v)$ au signe près.

On trouve donc cette fois $(u^2 + v^2 - w^2)^2 - 4.u^2.v^2$.

On développe le premier : $u^4 + v^4 + w^4 + 2.u^2.v^2 - 2.u^2.w^2 - 2.v^2.w^2$ et $-4.u^2.v^2$ pour le second :

$$(u + v + w).(u + v - w).(u - v + w).(-u + v + w) = 2.(u^2.v^2 + u^2.w^2 + v^2.w^2) - (u^4 + v^4 + w^4)$$

Si on prend le calcul avec méthode, par le bon bout, c'est très simple. Sinon, c'est la mort.

C'est la différence que je vois entre mathématiques et physique.

En mathématiques, un calcul peut être esthétique. Un physique, celui qui fait le calcul doit être efficace, c'est tout ce qu'on lui demande ; pas d'esthétisme, mais du papier.

Sinon, il importe que votre réponse soit symétrique dans les rôles joués par u, v et w .

Je me demande aussi si il n'aurait pas été simple de poser $s = u + v + w$ et de développer $s.(s - 2.w).(s - 2.v).(s - 2.u)$.

En tout cas, on prend du recul, on le fait joliment, et pas en se ruant sur des lignes qui débordent.

On se donne un triangle de côtés a, b et c . On suppose $2.(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$.

Ou quitte à développer $2.(a^8 + b^8 + c^8) = a^8 + b^8 + c^8 + 2.(a^4.b^4 + a^4.c^4 + b^4.c^4)$.

On doit arriver à quelque chose comme $a^2 + b^2 = c^2$. Ou $a^2 + c^2 = b^2$. Ou $-a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

On pose donc $u = a^2, v = b^2$ et $w = c^2$ dans l'expression précédente :

3. on peut le prouver d'autres façons, en déformant le triangle initial

$$(a^2 + b^2 + c^2).(a^2 + b^2 - c^2).(a^2 - b^2 + c^2).(-a^2 + b^2 + c^2) = 2.(a^4.b^4 + a^4.c^4 + b^4.c^4) - (a^8 + b^8 + c^8)$$

Ceci est nul par l'hypothèse développée plus haut.

Par intégrité, on a l'une des quatre possibilités :

$a^2 + b^2 + c^2 = 0$	$a^2 + b^2 - c^2 = 0$	$a^2 - b^2 + c^2 = 0$	$-a^2 + b^2 + c^2 = 0$
impossible	triangle rectangle		
	hypoténuse c	hypoténuse b	hypoténuse a

Réciproquement, si le triangle est rectangle, par symétrie des rôles on pourra supposer $c^2 = a^2 + b^2$ et reporter dans la différence

$$2.(a^8 + b^8 + (a^2 + b^2)^4) - (a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)^2)^2$$

On trouve $2.(2.a^8 + 2.b^8 + 4.a^6.b^2 + 6.a^4.b^4 + 4.a^2.b^6) - (2.a^4 + 2.b^4 + 2.a^2.b^2)$ et tout se simplifie.

On peut aussi estimer qu'avec $(a^2 + b^2 + c^2).(a^2 + b^2 - c^2).(a^2 - b^2 + c^2).(-a^2 + b^2 + c^2) = 2.(a^4.b^4 + a^4.c^4 + b^4.c^4) - (a^8 + b^8 + c^8)$ on a de quoi raisonner par équivalences.

◀27▶

La suite u est définie par $u_0 = 7, u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante? Est elle croissante à partir d'un certain rang?

On calcule les premiers termes.

7	-4	10	2	22	26	70
---	----	----	---	----	----	----

On peut affirmer : $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante.

La négation de suite croissante n'est pas « suite décroissante », c'est « il existe n tel que... ».

En revanche, à partir du rang 2, tous les termes de la suite sont positifs.

Récurrence : C'est vrai pour u_2 et u_3 .

Si pour un n donné, u_n et u_{n+1} sont positifs, alors u_{n+2} est positif (combinaison).

A partir du rang 3, la suite est croissante.

Direct : $u_{n+1} = u_n + 2.u_{n-1} \geq u_n$ puisque u_{-1} est positif.

Cette fois, pas de récurrence.

Ah, il faut savoir quand faire une récurrence, et quand faire une preuve directe.

Et ça, ce n'est pas un truc qui s'apprend par cœur comme une classification périodique ou une chanson de...

C'est une question d'intelligence.

◀28▶

Calculez ces versions trigonométriques et hyperboliques $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} .dt$ et $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)} .dt$.

Les deux intégrales existent par continuité des fonctions sous le signe somme (avec des dénominateurs jamais nuls).

Dans la première, on reconnaît le carré d'une tangente. Or, $1 + \tan^2 = \sec^2$.

On ajoute et soustrait 1 :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} .dt = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(\theta)) .d\theta - \int_0^{\pi/4} d\theta = [\tan(\theta) - \theta]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Pour $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)} .dt$, on fait de même en dérivant : $\left(\frac{sh}{ch}\right)' = \frac{ch}{ch} - \frac{sh}{ch^2} .sh = 1 - th^2$.

$$\text{On a donc } \int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)} .dt = \int_0^{\ln(2)} (th^2(t) - 1) .dt + \int_0^{\ln(2)} dt = [t - th(t)]_0^{\ln(2)} = \ln(2) - \frac{3}{5}$$

$$\text{On a en effet } th(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

◀29▶

Calculez (géométriquement pour l'une) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} .dt$ et $\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} .dt$.

La première se calcule géométriquement : l'aire d'un demi disque au dessus de l'axe $0x$, de rayon 1.

Mais on peut aussi poser $t = \sin(\theta)$ (en fait, proprement, on pose $\theta = \text{Arcsin}(t)$ pour définir l'intervalle) :

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1-t^2} .dt = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} .\cos(\theta) .d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) .d\theta$$

On linéarise car les sommes sont plus faciles à intégrer que les produits :

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1-t^2}.dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2.\theta)}{2}.d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2.\theta)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

L'autre est du même type mais hyperbolique.

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \int_a^b \text{ch}(\theta).(\text{ch}(\theta).d\theta) = \int_a^b \frac{1+\text{ch}(2.\theta)}{2}.d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sh}(2.\theta)}{4} \right]_a^b$$

avec b caractérisé par $\text{sh}(b) = 1$, ce qui donne $\frac{e^b - e^{-b}}{2} = 1$ soit $e^b + (-e^{-b}) = 2$
 $\frac{e^b}{e^b} \times \frac{e^{-b}}{e^{-b}} = 1$ soit $e^b \times (-e^{-b}) = -1$.

e^b est la racine positive de $X^2 + 2.X - 1$. On a donc $b = \ln(1 + \sqrt{1+1^2})$ et a est son opposé par imparité.

Le final est $\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

◀30▶ ♡ Calculez $\int_0^x \cos(\theta).d\theta$ en effectuant tous les changements de variable que peuvent préconiser les règles de Bioche.

L'intégrale existe, et on va tester les changements préconisés par Bioche, sur un intervalle convenable

changement	$\theta \rightarrow -\theta$	$\theta \rightarrow \pi - \theta$	$\theta \rightarrow \pi + \theta$	$\theta \rightarrow \theta + 2.\pi$
$\cos(\theta).d\theta$ donne	$\rightarrow -\cos(\theta).d\theta$	$\rightarrow -\cos(\theta).(-d\theta)$	$\rightarrow -\cos(\theta).(d\theta)$	$\rightarrow \cos(\theta).d\theta$
oui/non	non	oui	non	oui
		$s = \sin(\theta)$ et $\theta = \text{Arcsin}(s)$		$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
		$d\theta = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$		$d\theta = \frac{2.dt}{1+t^2}$

Le premier donne $\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{s=0}^{s=\sin(x)} \sqrt{1-s^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_{s=0}^{s=\sin(x)} ds = \sin(x)$.

Et le second : $\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{t=0}^{t=\tan(\theta/2)} \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2.dt}{1+t^2}$.

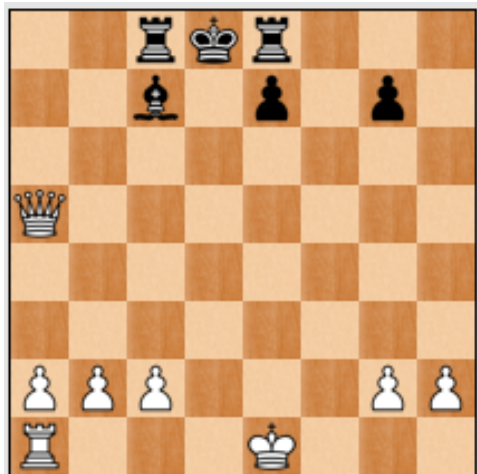
On reste perplexe, sauf si on se dit que ça va s'intégrer en sinus si tout va bien. On propose donc de dériver

$t \mapsto \frac{2.t}{1+t^2}$ et on trouve $t \mapsto \frac{2.(1+t^2) - 2.t.(2.t)}{(1+t^2)^2}$. Bingo !

$$\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{t=0}^{t=\tan(\theta/2)} \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2.dt}{1+t^2} = \left[\frac{2.t}{1+t^2} \right]_{t=0}^{\tan(\theta/2)} = \frac{2.\tan(\theta)}{1+(\tan(\theta/2))^2} = \sin(\theta)$$

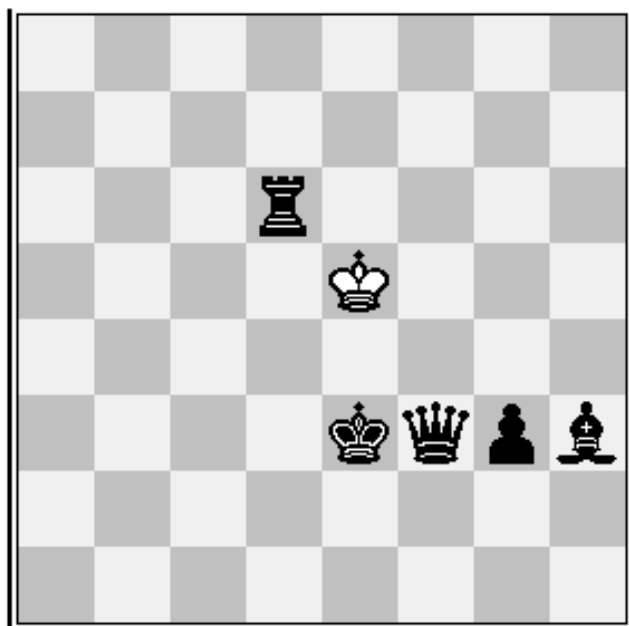
sous réserve d'être sur un intervalle gentil.

◀31▶ Deux exercices pour Lucas et quelques autres.



Montrez que le fou noir est un est fait un pion noir qui a été promu ; trouvez la case où il l'a été, et déduisez que le roi blanc ne peut plus roquer.

<http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/PbEch1.htm>



Les blancs viennent juste de jouer. Si si. Que viennent-t-ils de jouer ?

Indication : un pion a avancé deux coups avant.

32 Dérivez $a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$, puis calculez $\int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_{1/a}^a \frac{\operatorname{Atan}(x)}{x} dx$ pour tout a .
Pensez à écrire $\int_{u(a)}^{v(a)} f(t) dt$ sous la forme $F(v(a)) - F(u(a))$ pour pouvoir dériver en fonction de a .

Sur ce type de question en $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$, soit on a l'habitude et on le fait sans problème, soit on trouve plus prudent de baliser le terrain en introduisant une notation.

On note F une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ (on la nomme sans la connaître).

On doit alors dériver $a \mapsto F(a) - F\left(\frac{1}{a}\right)$.

On trouve $F'(a) + \frac{1}{a^2} \cdot F'\left(\frac{1}{a}\right)$ (on n'a pas oublié le $\frac{-1}{a^2}$, c'est compris).

On revient à f :

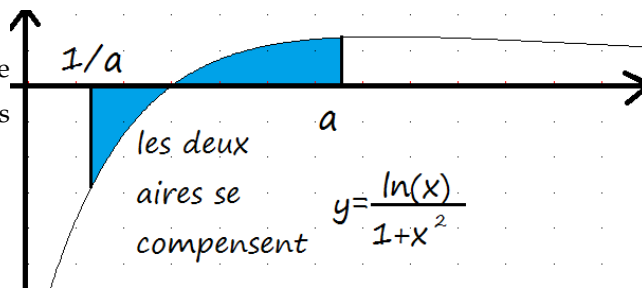
$$\left(a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx\right)' = \left(a \mapsto \frac{\ln(a)}{1+a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\ln(1/a)}{1+\frac{1}{a^2}}\right)$$

Trop fort ! On trouve 0 ! Si si.

L'application $a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ est donc constante sur l'intervalle d'étude (oubliez le mot intervalle et vous n'êtes pas digne d'être en Sup).

Et pour a égal à 1, les deux bornes sont confondues.

On a donc $\int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$ pour tout a .



On note ensuite G une primitive de $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$ et le même calcul donne

$$\left(a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\text{Atan}(x)}{x} dx \right)' = \left(a \mapsto \frac{\text{Arctan}(a)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} \right)$$

Cette fois, l'épiphanie⁴ est dans $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour a positif.

On a une dérivée en $a \mapsto \frac{\pi}{2a}$ et la valeur 0 en $a = 1$: $\int_{1/a}^a \frac{\text{Atan}(x)}{x} dx = \pi \cdot \frac{\ln(a)}{2}$

Et tout ça sans avoir de primitive explicite. Vous avez le droit de trouver superbe de savoir trouver le pH ou le pKa d'une solution saturée d'hydroxyde de sodium à pression constante, mais sincèrement, s'il y a bien des résultats qu'on va trouver esthétiques et beaux, c'est quand même ceux où une intégrale entre des bornes bien choisies se calcule alors qu'on n'a pas de primitive explicite...

Bon, ensuite, je sais, l'essentiel pour vous, c'est d'intégrer une bonne école, et donc de réussir les concours. Que vous êtes matérialistes...

◀ 33 ▶

Calculez $\sum_{k=0}^n \cos((2k+1)\theta)$ pour n donné dans \mathbb{N} et θ dans \mathbb{R} .

Il ne semble pas judicieux de replier ici en deux $\frac{e^{-(2n+1)i\theta}}{2} + \frac{e^{-(2n-1)i\theta}}{2} + \dots + \frac{e^{-i\theta}}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{3i\theta}}{2} + \dots + \frac{e^{(2n+1)i\theta}}{2}$, quoique.

C'est juste la partie réelle de $\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)\theta}$.

On met de côté le cas multiple de π et on applique la formule de la série géométrique (la raison est $e^{2i\theta}$ puisque on passe de $e^{i(2k+1)\theta}$ à $e^{i(2k+3)\theta}$:

$$\frac{e^{i\theta} - e^{i(2n+3)\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = \frac{e^{i(2n+3)\theta} - e^{i\theta}}{e^{2i\theta} - 1}$$

On multiplie haut et bas par $e^{-i\theta}$: $\frac{e^{i(2n+2)\theta} - 1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$ et même $\frac{e^{i(2n+2)\theta} - 1}{2i \sin(\theta)}$.

Seule la partie réelle nous intéresse, donc la partie imaginaire du numérateur.

Il reste $\frac{\sin((2n+2)\theta)}{2 \sin(\theta)}$

On pouvait aussi regarder le noyau de Dirichlet $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \cos(k\theta)$ de paramètres θ et $2n$

et lui soustraire le noyau de Dirichlet $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot 2\theta)$ de paramètres 2θ et n .

◀ 34 ▶

♥ Calculez $\sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right)$ puis $\sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^n 2^n \right)$ et enfin $\sum_{k=0}^{2014} \left(\sum_{n=k}^{2014} 2^n \right)$ (changez l'année si vous y tenez).

4. au sens de « compréhension soudaine de l'essence ou de la signification de quelque chose »

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) &= \sum_{n=0}^{2014} (2^{n+1} - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{2014} 2^{n+1} - 2015 \\ &= 2^{2016} - 2 - 2015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2014} \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) &= \sum_{n=0}^{2014} (n+1) \cdot 2^n \\ &= 2014 \cdot 2^{2015} + 1 \end{aligned}$$

il suffit de penser à $\sum_{n=0}^{2014} x^{n+1} = \frac{x - x^{2016}}{1-x}$, de dériver $\sum_{n=0}^{2014} (n+1) \cdot x^n = \frac{1 - 2016 \cdot x^{2015}}{1-x} + \frac{1 - x^{2016}}{(1-x)^2}$ et de calculer en $x = 2$.

$$\sum_{k=0}^{2014} \left(\sum_{n=k}^{2014} 2^n \right) = \sum_{k=0}^{2014} (2^{2015} - 2^k) = 2015 \cdot 2^{2015} - \sum_{k=0}^{2014} 2^k$$

On trouve cette fois $2015 \cdot 2^{2015} - 2^{2015} + 1$.

Bien d'autres approches sont possibles, par exemple en sommant les deux dernières.

◁35▷ \heartsuit Cet élève Izeurahai-Cranpla affirme $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (i+j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j)$ puisque de toutes façons, pour i et j nuls, $i+j$ ne compte pas. Prouvez lui qu'il a tort.

C'est vrai que pour i et j nuls, ça ne change rien. Mais si un seul est nul, il reste l'autre.

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Ici, n vaut 5

et

	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8
	5	6	7	8	9
	6	7	8	9	10

◁36▷ \heartsuit Calculez $\sum_{k=0}^n \frac{\cos(k \cdot \theta)}{\cos^k(\theta)}$ (on supposera que θ n'est pas un multiple de π).

Partie réelle d'une série géométrique de raison $\frac{e^{i \cdot \theta}}{\cos(\theta)}$ c'est à dire $1 + i \cdot \tan(\theta)$.

On met de côté les cas où $\tan(\theta)$ est nulle, et ceux où $\cos(\theta)$ est nul⁵.

On trouve alors $\frac{1 - \frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot \theta}}{\cos^{n+1}(\theta)}}{1 - (1 + i \cdot \tan(\theta))}$ et il faudra encore en extraire la partie réelle.

On simplifie les 1 et les $\frac{1}{i} : i \cdot \frac{1 - \frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot \theta}}{\cos^{n+1}(\theta)}}{\tan(\theta)}$.

On simplifie les $\cos(\theta)$ au dénominateur : $i \cdot \frac{\cos^{n+1}(\theta) - e^{i \cdot (n+1) \cdot \theta}}{\sin(\theta) \cdot \cos^n(\theta)}$.

On garde la partie réelle : $\left(\frac{\sin((n+1) \cdot \theta)}{\sin(\theta) \cdot \cos^n(\theta)} \right)$

I~0) **Première méthode (Fourier, Dirichlet).**

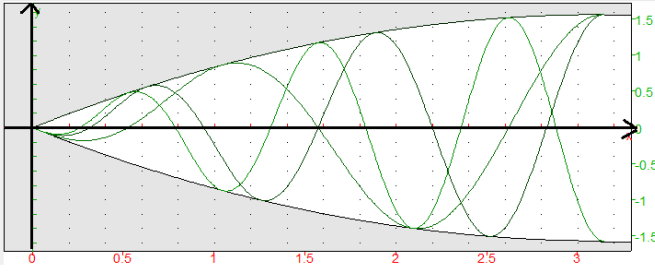
Montrez : $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2 \cdot \pi} - t \right) \cdot \cos(k \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k .

Intégration par parties, ou primitive explicite (obtenue en la posant a priori) :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2 \cdot \pi} - t \right) \cdot \cos(k \cdot t) \cdot dt = \left[\frac{k^2 \cdot t^2 \cdot \sin(k \cdot t) - 2 \cdot k^2 \cdot \pi \cdot t \cdot \sin(k \cdot t) + 2 \cdot k \cdot t \cdot \cos(k \cdot t) - 2 \cdot \sin(k \cdot t) - 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \cos(k \cdot t)}{2 \cdot k^3 \cdot \pi} \right]_{t=0}^\pi$$

Il reste bien juste k^{-2} .

5. refusé par l'énoncé normalement



I~1) Déduisez :
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot t\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot dt.$$

On part de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ avec la question précédente.

On trouve une somme d'intégrales qu'on transforme en intégrale d'une somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t) \cdot dt$$

Il est temps de faire appel à Dirichlet et à son noyau

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot t\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On fait passer $\frac{1}{2}$ de l'autre côté :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t) \cdot dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot t\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) \cdot dt$$

On isole $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot dt$ de valeur $-\frac{\pi^2}{6}$ (l'application est négative entre 0 et π).

On notera qu'on n'a pas le droit d'écrire $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot t\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$ en $t = 0$ (point au borne de notre domaine).

Mais c'est un point isolé, et en ce point, notre application se prolonge quand même par continuité.

I~2) Montrez que $t \mapsto \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.

On utilise l'équivalent $\sin(\theta) \sim \theta$ (quand θ tend vers 0).

$\varphi(t)$ est équivalent à $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{t}{2}}$ c'est à dire $\left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right)$.

$\varphi(t)$ est équivalent à la constante non nulle -1 . C'est donc qu'il tend vers -1 .

Passons à la limite éventuelle des taux d'accroissement : $\frac{\varphi(t) + 1}{t}$ (puisque $-\varphi(0)$ vaut +1).

On réduit au dénominateur commun :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \cdot t \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On utilise le développement limité $\sin(x) = x + o(x^2)$ quand x tend vers 0 :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} + o(t^2)}{2t \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad (\text{oui, } o(t^2) \text{ et } o(4t^2) \text{ ou } \frac{o(t^2)}{4}, \text{ c'est du pareil au même, ce sont des choses qui tendent vers 0 plus vite que } t^2).$$

Passons aux équivalents pour le dénominateur $2t \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est équivalent à t^2 .

Et le numérateur est équivalent à $\frac{t^2}{2\pi}$ (puisque $f(t) + o(f(t))$ c'est « par définition même » équivalent à $f(t)$).

Le quotient est équivalent à la constante numérique $\frac{1}{2\pi}$ (après simplification des t^2).

Il tend donc vers ce nombre.

On a donc une limite des taux d'accroissements, c'est la définition de « dérivable ».

Le graphe en lui-même n'a aucun intérêt.

Elle aurait pu ne pas être définie en 0, ou avoir une demi tangente verticale.

Ceci nous aurait empêché d'intégrer par parties.

I~3) En intégrant par parties, montrez que $\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Puisque φ est dérivable, on va la dériver (en posant $k = \frac{2n+1}{2}$) :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = \left[-\varphi(t) \cdot \frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \varphi'(t) \cdot \cos(kt) dt$$

Le terme crochet se calcule et tend vers 0 quand k tend vers l'infini (avec n).

L'autre terme se majore en valeur absolue :

$$0 \leq \left| \frac{1}{k} \int_0^\pi \varphi'(t) \cdot \cos(kt) dt \right| \leq \frac{1}{k} \int_0^\pi |\varphi'(t)| \cdot |\cos(kt)| dt \leq \frac{1}{k} \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt$$

Le majorant tend vers 0 quand k tend vers l'infini avec n .

Par encadrement, $\frac{1}{k} \int_0^\pi \varphi'(t) \cdot \cos(kt) dt$ tend vers 0 aussi.

Conseil : Pour faire tendre une intégrale vers 0 (intégrale dépendant d'un paramètre n), la meilleure solution (au moins avec vos outils) est de l'encadrer.

Petit point à devoir compléter : φ est non seulement dérivable, même en 0, mais il faudrait vérifier qu'elle est C^1 (φ' est continue, pour que $\int_0^\pi \varphi'(t) dt$ ait un sens).

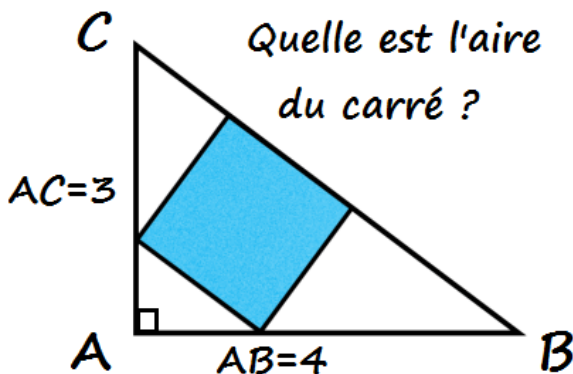
I~4) Déduisez que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

C'est la conclusion logique de ce qui précède.

Dans une vidéo, (l'excellent) Mickaël Penn passe par une longue récurrence pour calculer

$$1 * (2 * 4 * (8 * (\dots (2^{2020} * 2^{2021}) \dots)))$$

où la loi $*$ (non associative ?) est définie par $a * b = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Mais quand même, il y a plus simple, non ? C'est l'addition transformée par une bijection bien choisie, non ?



On donne des noms : les sommets s'appellent A , B et C (donc $BC = 5$ car le triangle est rectangle).

On nomme x le côté du carré à trouver.

On note B' et C' les points de contact sur les côtés. On note b et c les longueurs AB' et AC' .

Le triangle $(C'AB')$ est rectangle en A : $x^2 = b^2 + c^2$.

Mais il est aussi homothétique au triangle initial ($B'C'$ est parallèle à BC). On a donc $\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = r$ rapport d'homothétie pour passer du grand au petit.

Mais plusieurs triangles encore sont homothétiques au triangle initial (triangles rectangles avec un angle $\text{Arctan}(4/3)$).

$\frac{4-c}{5} = \frac{x}{3}$ petit triangle en bas à droite

$\frac{3-b}{5} = \frac{x}{4}$ petit triangle en haut à gauche

On élimine : $b = \frac{12-5x}{4}$ et $c = \frac{12-5x}{3}$.

On reporte dans le théorème de Pythagore pour le triangle en bas à gauche : $b = \left(\frac{12-5x}{4}\right)^2 + \left(\frac{12-5x}{3}\right)^2 = x^2$.

x vaut $\frac{60}{37}$ (ou $\frac{60}{13}$ qui est absurde, mais je ne vois pas trop pourquoi).

L'aire cherchée est le carré de ce x .

Sinon, on va encore plus vite en nommant D et E les points sur l'hypoténuse BC .

Par « triangles semblables » ou en mesurant la tangente des angles aux sommets : $\frac{CD}{x} = \frac{3}{4}$ et $\frac{x}{EB} = \frac{3}{4}$.

On a donc $CD = \frac{3x}{4}$ et $EB = \frac{4x}{3}$.

On somme $CD + DE + EB = 5$: $\frac{3x}{4} + x + \frac{4x}{3} = 5$. On retrouve le x mentionné plus haut.

◀38▶

Calculez ces trois sommes $I_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq k \leq n} i$, $J_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq k \leq n} j$ et $K_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq k \leq n} k$ et écrivez le script Python qui vous permettra de vérifier.

Commençons par I_n qui dépend de n , et dans lequel il y a beaucoup de monde : i , j et k bougent.

Et quand j bouge, le i que l'on somme reste le même. On va avoir des j et k qui vont servir de compteur.

On découpe suivant la valeur de k , puis de j (plus petit que k) et enfin de i :

$$I_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j i \right) \right)$$

$$I_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \left(\frac{j \cdot (j+1)}{2} \right) \right)$$

$$I_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \binom{j+1}{2} \right)$$

$$I_n = \sum_{k=0}^n \binom{k+2}{3}$$

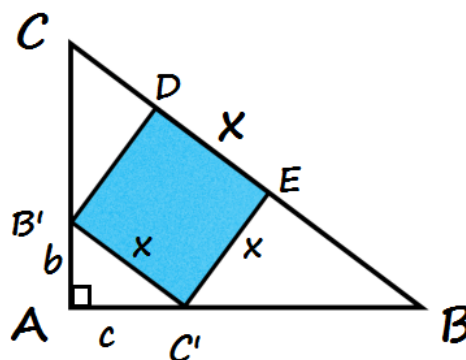
$$I_n = \binom{n+3}{4} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{24}$$

On dit merci à Zhu Shi Jie. Sinon, on pouvait aussi faire un bon usage des sommes des premiers entiers, de leurs carrés...

Pour J_n le découpage est le même, mais pas les sommes.

$$J_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j j \right) \right)$$

$$J_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k (j+1) \cdot j \right) \text{ (compteur)}$$



$$J_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k 2 \cdot \binom{j+1}{2} \right)$$

$$J_n = \sum_{k=0}^n \binom{k+2}{3}$$

$$J_n = 2 \cdot \binom{n+3}{4} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{12}$$

Pour K_n il y a encore plus de compteurs :

$$K_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j k \right) \right)$$

$$K_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k (j+1) \cdot k \right) \text{ (compteur)}$$

$$K_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k k \cdot \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} \right)$$

$$K_n = \sum_{k=0}^n 3 \cdot \binom{k+2}{3}$$

$$K_n = 3 \cdot \binom{n+3}{4} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{8}$$

Pour Python, on va imbriquer des boucles :

```
def Sommes(n) :
...In, Jn, Kn = 0, 0, 0
...for k in range(n+1) :
.....for j in range(k+1) :
.....for i in range(j+1) :
.....In += i
.....Jn += j
.....Kn += k
...return In, Jn, Kn
```

On donne $0 \leq n \leq k \leq N$.
 On choisit n entiers dans $\text{range}(1, N+1)$. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous plus petits que k ?
 Quelle est la probabilité que le plus grand des entiers tirés ait pour valeur k ?
 Retrouvez la formule de ZHU SHI JIE.

On compte le nombre total de tirages de n éléments parmi N : $\binom{N}{n}$.

On compte les cas favorables : les n entiers sont dans $\text{range}(1, k+1)$: $\binom{k}{n}$.

On effectue le quotient

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{k! \cdot n! \cdot (N-n)!}{N! \cdot k! \cdot (k-n)!}$$

(et l'hypothèse $0 \leq n \leq k \leq N$ nous exonère de la convention sur les binomiaux aberrants).

Le cas où le maximum vaut exactement k est la différence de deux ensembles : "le maximum est plus petit que k " privé de "le maximum est plus petit que $k-1$ ". Ou alors on écrit la réunion disjointe $\text{maximum} \leq k-1 \cup \text{maximum} = k = \text{maximum} \leq k$.

Bref, on trouve

$$P(\text{Max} = k) = \$ \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

On applique la formule des probabilités totales, pour dire que la somme $\sum_{k=0}^N P(\text{Max} = k)$ vaut 1 et on trouve

$$\sum_{k=0}^N \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^N \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$$

C'est la formule qui somme en colonne dans le triangle de Pascal.

◀40▶

♥ Montrez que la série de terme général $\frac{n+3}{n^3+3n^2+2n}$ converge et calculez sa somme.

Comme on doit calculer la somme, on se dit qu'il doit y avoir une formule pour les sommes partielles (on n'est pas encore en Spé).

On sent venir la décomposition en éléments simples. On factorise le dénominateur, et on va donc avoir trois coefficients à calculer par la méthode des pôles :

$$\frac{n+3}{n^3+3n^2+2n} = \frac{n+3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{3}{2n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

On somme à horizon fini : $\sum_{n=1}^N \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n} = \sum_{n=1}^N \frac{3}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{2}{n+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2(n+2)}$

On décale : $\sum_{n=1}^N \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n} = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \cdot \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$

On télescope ça ($\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 0$) : $\sum_{n=1}^N \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + o(1)_{N \rightarrow +\infty}$

J'en connais qui se sont pris la tête à calculer les termes résiduels : $-2 \cdot \left(\frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)$.

A quoi bon ? Ça va tendre vers 0.

Mais on ne met pas +0 ou +... ou « rien », on met $o(1)_{N \rightarrow +\infty}$.

Les mathématiques demandent de la précision, mais autorisent pour cela la concision...

On fait tendre N vers l'infini, il reste

$$\sum_{n=1}^N \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n} = \frac{5}{4}$$

◀41▶

Du côté de chez Roger Mansuy Vrai ou Faux :

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{[\ln(n)]} a^j$
B	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n j$	J	$\sum_{k=1}^n a^{2k} = \sum_{j=1}^{2n} a^j$
C	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n (n-j)$	K	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j}\right) = \sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}\right)$
E	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
F	$\sum_{k=1}^n (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+1}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
G	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2p}$	N	$\sum_{k=0}^n 3^k = 3^{n+1} - 1$
H	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2p+1}$	O	$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{k+1} - 1}{4}$

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{\lfloor \ln(n) \rfloor} a^j$
	Faux		Faux

Pour A il est tentant de dire que la moitié des termes a un signe plus et l'autre moitié un signe moins. Tout se compense ?

Mais il y a un nombre impair de termes... Regardez pour n égal à 2.

Pour I, dans $\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)}$ les exposants ne sont même pas entiers.

dans $\sum a^j$ ils le deviennent.

B	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n j$	J	$\sum_{k=1}^n a^{2k} = \sum_{j=1}^{2n} a^j$
	Vrai		Faux

La différence entre les deux membres de B : le nom de la variable muette. Et le fait que dans la seconde il y a $j = 0$ en plus, qui ne change rien.

Pour J, c'est une erreur classique, mais débile au possible si on regarde avec les points de suspension.

Dans $\sum_{k=1}^n a^{2k}$ il y a n termes et il n'y a que des exposants pairs : $a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n}$.

Dans $\sum_{j=1}^{2n} a^j$, il y a $2n$ termes, y compris les exposants impair : $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \dots + a^{2n-1} + a^{2n}$.

Question subsidiaire : alors pourquoi tant d'élèves transforment $\sum_{k=1}^n a^{2k}$ en $\sum_{j=1}^{2n} a^j$? Juste parce que c'est des formules et qu'ils ne veulent pas y voir une somme.

C	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n (n-j)$	K	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$
	Vrai		Faux

Le C est un renversement de somme. On y pose $j = n - k$ (ou $k = n - j$).

Quand k va de 0 à n , l'indice j fait de même.

Et on pouvait se permettre d'écrire $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k$.

Vérifiez : $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + (n-1) + \dots + (n-n+1) + (n-n)$.

Dans K, le terme $\sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$ n'a même pas de sens.

Quel est le rôle de i dans $\sum_{j=i}^n \left(\dots \right)$ quand ensuite il est censé varier ?

E	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
	Vrai		Faux

Le E est encore un retournement de somme. Rappelons les formule de renversement

k va de 0 à n	k va de 0 à $n-1$	k va de 1 à n
$j = n - k$	$j = n - 1 - k$	$j = n + 1 - k$
j va de n à 0	j va de $n-1$ à 0	j va de n à 1

Le L est faux, mais de peu.

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{i=0}^n (n-i+1) \text{ compteur}$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{k=0}^n (k+1) \text{ renversement de somme } k = n - i$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{p=1}^{n+1} p \text{ ré-indexation}$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Cela dit, il suffit de dire que pour n égal à 1, le second membre de $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ est nul, tandis que le premier se calcule

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=i}^1 1 = \left(\sum_{j=0}^1 1 \right) + \left(\sum_{j=1}^1 1 \right) = (1+1) + (1)$$

Carrément 3.

F	$\sum_{k=1}^n (u_k - 2.u_{k+1} + u_{k+2}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
	Faux		Vrai

F est fautive déjà pour n égal à 1.

$$\sum_{k=1}^n (u_k - 2.u_{k+1} + u_{k+2}) \text{ est une somme télescopique } \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

Et si on avait une faute de frappe ?

$$\sum_{k=1}^n (u_k - 2.u_{k+1} + u_{k+2}) \text{ était aussi télescopique.}$$

$$\text{C'est } \sum_{k=1}^n (d_k - d_{k+1}) \text{ avec } d_k = u_k - u_{k+1}.$$

Il reste $d_1 - d_{n+1}$ ce qui fait $u_0 - u_1 + u_{n+1} - u_n$.

M est la somme d'une série géométrique de raison 2, de premier terme 1 et de terme à venir 2^{n+1} .

G	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2,p}$	N	$\sum_{k=0}^n 3^k = 3^{n+1} - 1$
	Vrai		Faux

Dans G, les deux membres représentent la somme $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_n$ si n pair ($n = 2.q$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)
 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}$ si n impair ($n = 2.q + 1$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)

On vérifie le premier terme de chaque somme est bien a_0 , et le dernier est $a_n = a_{2.\lfloor n/2 \rfloor}$ si n pair

$a_{n-1} = a_{2.\lfloor n/2 \rfloor}$ si n impair (exemple $n = 7$: a_6 dans les deux cas)

N est encore une somme de série géométrique, de raison 3.

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$$

puisque la raison vaut 3.

H	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2,p+1}$	O	$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$
	Faux		Faux

Dans H, le premier membre représente la somme $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}$ si n pair ($n = 2.q$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_n$ si n impair ($n = 2.q + 1$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)

Le second contient un terme de trop si n est pair. Prenons $n = 6$.

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq 6 \\ k \text{ impair}}} a_k = a_1 + a_3 + a_5 \text{ et } \sum_{p=0}^{\lfloor 6/2 \rfloor} a_{2,p+1} = a_1 = a_3 + a_5 + a_7.$$

Dans O, il y a une erreur. k est muet. Il ne peut plus être présent dans la somme de droite :

$$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}$$

42 Trouvez a, b, c, d et e (si si !) pour avoir

$$\frac{24}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3} + \frac{d}{X-4} + \frac{e}{X-5}. \text{ Calculez } \sum_{4 \leq k} \frac{1}{\binom{k}{4}}.$$

$$\frac{24}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)} = \frac{-4}{X-1} + \frac{12}{X-2} - \frac{12}{X-3} + \frac{4}{X-4} + \frac{0}{X-5}$$

(beh oui quand même, e est nul !).

On les trouve par la méthode des pôles, ou en réduisant au dénominateur commun et en identifiant.

On somme, on télescope et il reste dans $\sum_{4 \leq k \leq n} \frac{1}{\binom{k}{4}}$ quelques termes, dont un lot qui tend vers 0 quand n tend vers

l'infini.

Il reste que la somme de la série $\sum_{4 \leq k} \frac{1}{\binom{k}{4}}$ vaut $\frac{4}{3}$

Proprement le télescope donne : $\sum_{4 \leq k \leq n} \frac{1}{\binom{k}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{n-2} + \frac{8}{n-1} - \frac{4}{n}$. Sans récurrence évidemment.

Ah oui, $\sum_{4 \leq k}$ est une somme avec une infinité de termes. C'est la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\sum_{4 \leq k \leq N}$.

43 Télescopez la somme $\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!}$.

$$\frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On télescope $\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k)!} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k)!}$

Il reste plusieurs termes (on a déjà isolé celui d'indice 0) :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \frac{-1}{1!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

44 ♡ Calculez $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (i - j)$

et calculez aussi $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j|$ (là, c'est plus ♠).

Quand il y a un terme positif dans la première, il y a le même avec un signe moins.

Et de toutes façons, $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} i$ et $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} j$ sont égales par « symétrie des rôles ».

La première somme est nulle.

La somme $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j|$ est faite de variables indépendantes (pour l'instant) : i et j .

Elle est faite de $(n+1)^2$ termes. On va sommer en lignes :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n |i - j| \right)$$

Maintenant, pour chaque i , on découpe en deux par relation de Chasles, pour distinguer les signes.

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} |i - j| + 0 + \sum_{j=i+1}^n |i - j| \right)$$

On efface alors la valeur absolue (sommées $i + (i-1) + (-i-2) + \dots + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-i)$):

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (i - j) + 0 + \sum_{j=i+1}^n (j - i) \right)$$

On calcule chacune de ces sommes arithmétiques $\sum_{j=0}^{i-1} (i - j) = i \cdot \frac{i+1}{2}$ (nombre de termes, moyenne, ou même renver-

sement et $\sum_{k=1}^i$)

$$\sum_{j=i+1}^n (j - i) = (n - i) \cdot \frac{1+n-i}{2} \text{ (même travail)}$$

On remplace :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i^2 + i}{2} + \frac{(n - i) \cdot (n - i + 1)}{2} \right)$$

On sépare en deux sommes et on réindexe la seconde :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i^2 + i}{2} \right) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{(n - i) \cdot (n - i + 1)}{2} \right)$$

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i^2 + i}{2} \right) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k^2 + k}{2} \right)$$

6

Il ne reste qu'à sommer $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$ et $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ (et diviser par 2).

On trouve $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j| = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}$ et ça doit cacher quelque chose, non ?

Sinon, on peut déjà dédoubler la somme et s'intéresser à un découpage « en diagonale » :

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	
$i = 0$	0	1	2	3	4	5	6	
$i = 1$	1	0	1	2	3	4	5	\searrow
$i = 2$	2	1	0	1	2	3	4	\searrow $n \cdot 1$
$i = 3$	3	2	1	0	1	2	3	\searrow
$i = 4$	4	3	2	1	0	1	2	\searrow $4 \cdot (n - 3)$
$i = 5$	5	4	3	2	1	0	1	\searrow $3 \cdot (n - 2)$
$i = 6$	6	5	4	3	2	1	0	\searrow $2 \cdot (n - 1)$
								$1 \cdot n$

La somme est le double de $\sum_{d=1}^n d \cdot (n - d)$.

Et après calcul, le résultat est le même...

◀45▶

♥ Encadrez $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$ par $\frac{1}{2 \cdot n}$ et $\frac{1}{n}$ (comptez les termes...). Déduisez la limite de cette suite.

Écrivez un script Python qui calcule (approximation réelle) cette somme pour n donné.

♣ Conjecturez à la calculatrice la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$ quand n tend vers l'infini (la démonstration viendra plus tard).

Le plus simple pour encadrer une somme ? On compte le nombre de termes, et on encadre chaque terme.

comme k^2 est entre 0 et n^2 , chaque $\frac{1}{k^2 + n^2}$ est entre $\frac{1}{2 \cdot n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$.

On somme de 1 à n car il y a n termes : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$ est entre $\frac{n}{2 \cdot n^2}$ et $\frac{n}{n^2}$.

6. c'est deux fois la même somme, est-ce normal selon vous ?

Avec $\frac{1}{2.n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2} \leq \frac{1}{n}$ et le théorème d'encadrement, la suite du milieu tend vers 0.

La chose à ne pas dire : chaque terme de la somme tend vers 0, donc la somme tend vers 0.
Mais ce n'est pas une somme de suites. Car le nombre de termes tend lui même vers $+\infty$.

Piège : $\left| \begin{array}{l} \text{Tenez, dans } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}, \text{ chaque } \frac{1}{n} \text{ tend vers } 0. \\ \text{Mais la somme } \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \text{ (n termes) vaut } 1 \text{ et ne tend pas vers } 0. \end{array} \right.$

```
def Somme(n) :
...S, n2 = 0, n*n
...for k in range(1,n+1) :
.....S += 1/(k*k+n2)
...return n*S
```

Vous devinez que ça va faire $\frac{n}{4}$? On le prouvera plus tard, avec les « somme de Riemann ».

◀46▶ Complétez : $\sum_{k=0}^n x^{2.\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = \sum_{p=0}^{n-1} (2.p + 1).x^{2.p}$ (découpage en tranches).

On découpe par tranches en fonction de la valeur de l'exposant, qui est un entier, mais qui augmente de 1 chaque fois qu'on passe par un carré parfait.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		24	25
x^0	x^1	x^1	x^1	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^4		x^4	x^4
$1.x^2$	$3.x^1$			$5.x^2$				$7.x^3$					$9.x^4$						

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} x^{2.\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = \sum_{p=0}^{n-1} (2.p + 1).x^{2.p}$$

Il y a n^2 termes dans la première somme qu'on regroupe en $\sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=p^2}^{p^2+2.p} x^{2.\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \right)$ puis $\sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=p^2}^{p^2+2.p} x^{2.p} \right)$ et il ne reste qu'à compter.

◀47▶ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^n k.k!$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

On écrit $k.k! = (k+1)! - k!$. On télescope en $\sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!)$ en $(n+1)! - 1$

◀48▶ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini du quotient de $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ pair}}} k$ par $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ impair}}} k$.

Le numérateur $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ pair}}} k$ est $\sum_{p \leq n} 2.p$ et se simplifie donc en $2 \cdot \frac{n.(n+1)}{2}$.

Le dénominateur $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ impair}}} k$ s'écrit $\sum_{p=0}^{n-1} (2.p + 1)$ et il vaut n^2 .

Le quotient $\frac{n^2 + n}{n^2}$ vaut $1 + \frac{1}{n}$ et converge vers 1.

◀49▶ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ (ayez le bon réflexe oublié de Terminale).

On conjugue, et on télescope :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{1} = \sqrt{n+1} - 1$$

◀ 50 ▶

Pour tout entier naturel n , on pose $P_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$, et $Q_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ puis $R_n = \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$.

Toutes les preuves pourront se faire par manipulations sur les produits (ou les sommes si vous passez au logarithme), sans récurrence.

$$\text{Prouvez : } P_n = \frac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^n k!\right)^2} = \prod_{j=1}^n j^{2j-n-1}.$$

$$\text{Prouvez } Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!} \text{ puis } R_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Déduisez que $\frac{P_{n+1} \cdot P_{n-1}}{(P_n)^2}$ converge vers e .

Utilisons, une fois n'est pas forcément coutume, la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dans le produit des $n+1$ coefficients binomiaux sur la ligne, on a donc $n+1$ fois $n!$ au numérateur.

Passons au dénominateur, fait de $\prod_{k=0}^n k!(n-k)!$ qu'on sépare en $\prod_{k=0}^n k! \cdot \prod_{k=0}^n (n-k)!$.

En ré-indexant par renversement le second terme, on a à nouveau $\prod_{i=0}^n i!$.

Les variables étant muettes, le dénominateur est bien $\left(\prod_{k=0}^n k!\right)^2$.

$$\text{On a bien établi } P_n = \frac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^n k!\right)^2}.$$

Dans ce quotient, on voit les entiers de 1 à n intervenir plus ou moins souvent.

Prenons le numérateur $\left(\prod_{j=1}^n j\right)^{n+1}$. On peut l'écrire $\left(\prod_{j=1}^n j^{n+1}\right)$ (distributivité de l'exposant).

Passons au dénominateur, et permutons les variables : $\prod_{k=1}^n k! = \prod_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k j\right)$

$$\prod_{k=1}^n k! = \prod_{1 \leq j \leq k} j \text{ forme compacte}$$

$$\prod_{k=1}^n k! = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{k=j}^n j\right) \text{ interversion des priorités}$$

$$\prod_{k=1}^n k! = \prod_{j=1}^n j^{n+1-j} \text{ (} k \text{ est juste un compteur)}$$

On élève au carré et on effectue le quotient :

$$P_n = \frac{\prod_{j=1}^n j^{n+1}}{\left(\prod_{j=1}^n j^{n+1-j}\right)^2}$$

Chaque j est là avec exposant $(n+1) - 2 \cdot (n+1-j)$, ce qui fait bien $2j - n - 1$.

Visuellement, le dénominateur était de la forme, par exemple pour n égal à 7 :

0!.7!			7	6	5	4	3	2	1
1!.6!		1		6	5	4	3	2	1
2!.5!		1	2		5	4	3	2	1
3!.4!		1	2	3		4	3	2	1
4!.3!		1	2	3	4		3	2	1
5!.2!		1	2	3	4	5		2	1
6!.1!		1	2	3	4	5	6		1
7!.0!		1	2	3	4	5	6	7	

Il reste à compter les occurrences de chaque entier, ne serait ce que dans un triangle.

On a trouvé $P_n = \prod_{j=1}^n j^{2 \cdot j - n - 1}$ et par la même $P_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} j^{2 \cdot j - (n+1) - 1}$.

Pour le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, on met de côté un terme de P_{n+1} :

$$Q_n = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} j^{2 \cdot j - n - 2}}{\prod_{j=1}^n j^{2 \cdot j - n - 1}} = (n+1)^{2 \cdot (n+1) - n - 2} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n j^{2 \cdot j - n - 2}}{\prod_{j=1}^n j^{2 \cdot j - n - 1}}$$

On a bien $Q_n = (n+1)^n \cdot \prod_{j=1}^n j^{(2 \cdot j - n - 2) - (2 \cdot j - n - 1)}$

puis $Q_n = (n+1)^n \cdot \prod_{j=1}^n j^{-1}$.

Le produit avec exposant « -1 » est juste une factorielle au dénominateur.

On a donc $Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

On parvient aussi à ce résultat en écrivant $Q_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \prod_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$ sachant qu'on a juste perdu le terme $\binom{n+1}{n+1}$ qui

était solitaire au numérateur, mais qui vaut 1.

On simplifie ensuite par argument de dénombrement ou par calcul brutal :

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{(n+1-k)}$$

Le numérateur devient immédiatement $(n+1)^{n+1}$ et le dénominateur se ré-indexe en $(n+1)!$.

Pour finir, on fait un quotient de quotients, mais sans y réfléchir :

$$R_{n-1} = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \quad (\text{sachez écrire spontanément } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}).$$

On simplifie $R_{n-1} = \frac{(n+1)^n}{n \cdot n^{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

En prenant le logarithme de R_{n-1} (classique), on trouve $\ln(R_{n-1}) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On l'écrit même $\ln(R_{n-1}) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$ avec $x_n = \frac{1}{n}$.

Ceci tend vers la dérivée du logarithme en 1 (limite des taux d'accroissements), ce qui fait 1.

Par continuité, puisque $\ln(R_{n-1})$ tend vers 1, on déduit que R_{n-1} tend vers e^1 (et R_n aussi bien sûr).

Quelques valeurs ? $\frac{P_6 \cdot P_4}{(P_5)^2} \simeq 2,48832$ à 10^{-5} près

$$\frac{P_{11} \cdot P_9}{(P_{10})^2} \simeq 2,59374$$

$$\frac{P_{16} \cdot P_{149}}{(P_{15})^2} \simeq 2,70927$$

$$\frac{P_{151} \cdot P_{149}}{(P_{150})^2} \simeq 2,70927$$

C'est quand même un peu lent...

◀51▶

Trouvez a et b sachant : $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

Une matrice carrée A de taille 2 vérifie $\text{Tr}(A) = 15$ et $\text{Tr}(A^2) = 30$. Calculez $\det(A)$.

$$\begin{array}{l} a + b = 15 \\ a^2 + b^2 = 30 \end{array} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{array}{l} a + b = 15 \\ a^2 + b^2 = 30 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 225 \end{array} \quad \text{puis à} \quad \begin{array}{l} a + b = 15 \\ a^2 + b^2 = 30 \\ a \cdot b = 195/2 \end{array}.$$

a et b sont les deux racines de $X^2 - 15X + \frac{195}{2}$.

On trouve $\frac{15 + i\sqrt{165}}{2}$ et son conjugué. On peut conclure en

$$S = \left\{ \left(\frac{15 + i\sqrt{165}}{2}, \frac{15 - i\sqrt{165}}{2} \right), \left(\frac{15 - i\sqrt{165}}{2}, \frac{15 + i\sqrt{165}}{2} \right) \right\} \text{ une paire de couples.}$$

Pour la matrice, si elle est diagonale, on retrouve notre exercice précédent.

On note a et b les deux coefficients diagonaux, et on a $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

On trouve $a \cdot b = 195/2$. Et c'est le déterminant.

Et si la matrice est semblable à une matrice diagonale, le résultat reste le même.

Et sinon, c'est encore vrai.

Il suffit de constater $M^2 - \text{Tr}(M) \cdot M = -\det(M) \cdot I_2$ pour toute matrice

$$\begin{pmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ a.c + c.d & b.c + d^2 \end{pmatrix} - (a + b) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b.c - a.d & 0 \\ 0 & b.c - a.d \end{pmatrix}$$

Il suffit ensuite de passer à la trace.

52

♡ Calculez $I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$, $J = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} \cdot t dt$ (par parties), $K = \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{(1+t^2)^2} dt$ et enfin $L = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$.

$$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

(forme en $\frac{u'}{u^2}$).

$$J = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} \cdot t dt = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(1+t^2)} dt = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\text{Arctan}(t)}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

t	\leftrightarrow	1
$\frac{t}{(1+t^2)^2}$	\leftrightarrow	$-\frac{1}{2(1+t^2)}$

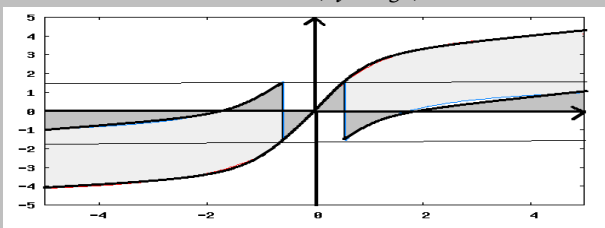
K se simplifie et s'intègre en arctangente : $\frac{\pi}{4}$.

Enfin, L est la différence $K - J$: $L = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Et toutes ces intégrales existent...

53

♡ Dérivez $t \mapsto 3 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{t^3 - 3t}{t^2 - 3}\right)$ et $t \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1}\right)$.



Expliquez ce graphe.

Les deux dérivées donnent $t \mapsto \frac{3}{t^2 + 1}$.

On a envie de dire que ces fonctions sont $t \mapsto 3 \cdot \text{Arctan}(t)$.

Mais il n'en est rien.

Il peut y avoir une constante de différence.

Et surtout, cette intégration pour remonter va dépendre de l'intervalle de travail. Et justement ces applications sont définies par intervalle.

De fait

	$] -\infty, -\sqrt{3}[$	$] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$	$] \sqrt{3}, +\infty[$	
$3 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{t^3 - 3t}{t^2 - 3}\right)$	$3 \cdot \text{Atan}(t)$	$3 \cdot \text{Atan}(t)$	$3 \cdot \text{Atan}(t)$	complété par les limites aux bornes ou la

valeur en 0 ou en des points particuliers.

	$] -\infty, -1/\sqrt{3}[$	$] -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$	$] 1/\sqrt{3}, +\infty[$
$Arctan\left(\frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1}\right)$	$3.Atan(t) + \pi$	$3.Atan(t)$	$3.Atan(t) - \pi$

Et cette application fait un saut quand elle n'est pas définie, afin que l'arctangente reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (alors que $3.Arctan(t)$ sort de l'intervalle en question).

Tout repose quand même dans cet exercice sur la formule $\tan(3\theta) = \frac{3 \cdot \tan(\theta) - \tan^3(\theta)}{3 \cdot \tan^2(\theta) - 1}$.

◀54▶ \heartsuit Résolvez $Arctan(x) + \frac{\pi}{6} = Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x .

Si x est positif, la question devient $Arctan(x) + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - Arctan(x) + \frac{\pi}{3}$.

On résout : $Arctan(x) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. On trouve $x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Et c'est cohérent.

Et pour x négatif : $Arctan(x) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} - Arctan(x) + \frac{\pi}{3}$. On trouve cette fois $x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Et c'est cohérent.

$$S = \left\{ \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

◀55▶ Résolvez

$x^2 - 5x + 6 < 0$	$(x^2 - 5x + 6 < 0) \Rightarrow (x > 5)$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 - 5x + 6 < 0)$
$x^2 - 5x + 6 < 0$ ou $x > 5$	$x^2 - 5x + 6 < 0$ et $x > 5$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$

 d'incon-

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Étude du signe d'un trinôme du second degré, orienté dans le sens « classique » : $S =]2, 3[$

Conseil : Pour le signe du trinôme, ne retenez pas « du signe de a à l'extérieur des racines ».

Visualisez la parabole, c'est tout.

Halte au « par cœur », vive le « par les yeux ».

$$(x^2 - 5x + 6 < 0) \Rightarrow (x > 5)$$

Quand est ce que l'implication serait fautive ? Quand on aurait $(x^2 - 5x + 6 < 0)$ et $(x \leq 5)$.

On doit donc refuser $(2 < x < 3)$ et $(x \leq 5)$.

On a donc $S =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

x	$] -\infty, 2]$	$] 2, 3[$	$[3, 5]$	$] 5, +\infty[$
Pour vérifier	assertion $(x^2 - 5x + 6) < 0$	False	True	False
	assertion $(x > 5)$	False	False	True
	implication	True	False	True

On rappelle que False implique (n'importe) est toujours vrai.

Si ma tante en avait...

$$(x > 5) \Rightarrow (x^2 - 5x + 6 < 0)$$

Finalement, c'est facile avec tableau

x	$] -\infty, 2]$	$] 2, 3[$	$[3, 5]$	$] 5, +\infty[$
assertion $(x > 5)$	False	False	False	True
assertion $(x^2 - 5x + 6) < 0$	False	True	False	False
implication	True	True	True	False

Ici, $S =]-\infty, 5]$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ ou } x > 5$$

Encore un tableau.

x	$] -\infty, 2]$	$] 2, 3[$	$[3, 5]$	$] 5, +\infty[$
assertion $(x > 5)$	False	False	False	True
assertion $(x^2 - 5x + 6) < 0$	False	True	False	False
disjonction	False	True	False	True

$S =]2, 3[\cup]5, +\infty[$ assez naturellement.

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ et } x > 5$$

Ici, naturellement, $S = \emptyset$

$$(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$$

Toujours vrai, heureusement. $S =] - \infty, +\infty[$

56 Montrez que l'application $x \mapsto x + \frac{4}{\pi} \cdot \text{Arctan}(x)$ (notée f) réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminez $f^{-1}(2)$. En dérivant $f(f^{-1}(x)) = x$ calculez aussi $(f^{-1})'(2)$. Est ce que $(f')^{-1}(2)$ existe ? Calculez $\int_0^2 f^{-1}(t) \cdot dt$.

$x \mapsto x + \frac{4}{\pi} \cdot \text{Arctan}(x)$ est continue, dérivable, strictement croissante comme somme d'applications croissantes.

Elle est injective par croissance stricte.

Elle est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (c'est ce que fait x et l'arctangente reste bornée). De même, $-\infty$ en $-\infty$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint tous les réels.

L'application réciproque ne peut pas être explicitée. mais pour calculer $f^{-1}(2)$, on résout $f(x) = 2$.

Une solution « simple » est $x = 1 : 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \text{Arctan}(1) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 2$.

On a pour tout $x : f(f^{-1}(x)) = x$. On dérive : $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$.

On calcule en $x = 2 : f'(f^{-1}(2)) \cdot (f^{-1})'(2) = 1$ puis $f'(1) \cdot (f^{-1})'(2) = 1$.

On effectue le calcul : $f'(1) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+1^2} : (f^{-1})'(2) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}}$

Pour l'intégrale, on trace le rectangle de côtés 1 et 2. On lui soustrait l'aire sous le graphe de f :

$$\int_0^2 f^{-1}(t) \cdot dt = 1 \cdot 2 - \int_0^1 f(x) \cdot dx$$

Mais l'intégrale $\int_0^1 \left(x + \frac{4}{\pi} \text{Arctan}(x)\right) \cdot dx$ nécessite de connaître $x \mapsto x \cdot \text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$.

On trouve $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\ln(2)}{\pi}$ (mention spéciale « calculable » du jury).

57 Montrez que les hauteurs du triangle de côtés 580, 609 et 841 sont entières. (ce triangle a une particularité, et ensuite, calculez son aire de plusieurs façons).

Déjà, ce triangle est rectangle. C'est le triangle (20, 21, 29) ayant subi une homothétie de rapport 29.

Deux de ses côtés sont des hauteurs.

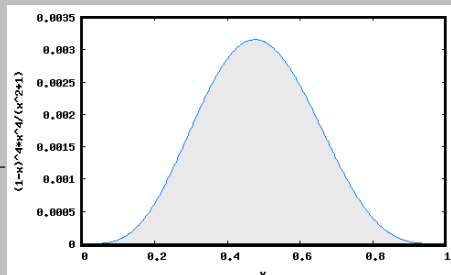
On calcule son aire de deux façons : hypoténuse fois hauteur inconnue, ou produit des deux côtés adjacents.

La hauteur issue de l'hypoténuse vaut donc $\frac{2 \cdot \text{aire}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a \cdot b}{c}$. On trouve 420.

Calculez le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 \cdot (1 - X)^4$ par $1 + X^2$.

Déduisez : $\int_0^1 \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2} \cdot dx = \frac{22}{7} - \pi$.

Donnez le maximum de $x \cdot (1-x)$ quand x décrit $[0, 1]$. Majorez l'erreur commise quand on remplace π par $22/7$.



58

On divise

$$\begin{array}{rcccc|cccc}
 X^8 & -4.X^7 & +6.X^6 & -4.X^5 & +X^4 & X^2 & + & 1 \\
 -(X^8) & & +X^6 & & & - & - & - \\
 & -4.X^7 & +5.X^6 & -4.X^5 & +X^4 & X^6 & -4.X^5 & +5.X^4 \\
 & -(-4.X^7) & & -4.X^5 & & & -4.X^2 & +4 \\
 & & 5.X^6 & & +X^4 & & & \\
 & & -(5.X^6) & & +5.X^4 & & & \\
 & & & & -4.X^4 & & & \\
 & & & & -(-4.X^4) & -4.X^2 & & \\
 & & & & & 4.X^2 & & \\
 & & & & & -(4.X^2) & +4 & \\
 & & & & & & -4 & \\
 \end{array}$$

Le quotient vaut $X^6 - 4.X^5 + 5.X^4 - 4.X^2 + 4$ et le reste -4 .

On décompose et on intègre :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} dx = \left[\frac{x^7}{7} - 4 \cdot \frac{x^6}{6} + 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + x - 4 \cdot \text{Arctan}(x) \right]_{x=0}^A$$

Tous calculs faits : $\left(\frac{22}{7} - \pi \right)$

Et vous savez quoi ? A l'élémentaire, on vous donne l'approximation $\pi \simeq \frac{22}{7}$ à ... oui, à quoi près ?

Beh justement, $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0, 1]$ (le maximum est au milieu, en $\frac{1}{2}$, sommet de la parabole, moyenne des racines).

On élève à la puissance 4, on divise par $1+x^2$ qui ne fait que varier entre 1 et 2 : $0 \leq \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2} \leq \frac{1}{2^8}$.

L'erreur se majore par 2^{-8} . On montre qu'elle est en fait de l'ordre de 2^{-10} même. Mais pas ici.

La valeur $\frac{22}{7}$ de l'école élémentaire est en fait la deuxième fraction continuée de π :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1}}}}}$$

◀59▶ Donnez une primitive de $x \mapsto e^{\text{Arcsin}(x)}$ (il faudra peut être intégrer deux fois par parties)..

Tout étant C^1 au moins sur un intervalle inclus dans $] -1, 1[$, on intègre par parties

$e^{\text{Arcsin}(t)}$	\leftrightarrow	$\frac{e^{\text{Arcsin}(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
1	\leftrightarrow	t

$$\int e^{\text{Arcsin}(t)} dt = [t \cdot e^{\text{Arcsin}(t)}] - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot e^{\text{Arcsin}(t)} dt$$

On recommence avec le nouveau terme en répartissant les morceaux différemment :

$e^{\text{Arcsin}(t)}$	\leftrightarrow	$\frac{e^{\text{Arcsin}(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	\leftrightarrow	$-\sqrt{1-t^2}$

$$\int e^{\text{Arcsin}(t)} dt = [t \cdot e^{\text{Arcsin}(t)}] - [\sqrt{1-t^2} \cdot e^{\text{Arcsin}(t)}] - \int e^{\text{Arcsin}(t)} dt$$

On fait passer de l'autre côté et on divise : $\left(\int e^{\text{Arcsin}(t)} dt = \left[\frac{t \cdot e^{\text{Arcsin}(t)} + \sqrt{1-t^2} \cdot e^{\text{Arcsin}(t)}}{2} \right] \right)$

Mais avez vous trouvé plus rapide ?

◀60▶ Montrez $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (k^3 - k)} = \frac{11}{9}$.

Pour calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (k^3 - k)}$, travaillons à horizon fini et calculons déjà $\sum_{n=2}^N \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (k^3 - k)}$ et même $\sum_{k=1}^n (k^3 - k)$.

Là, on a $\frac{(n.(n+1))^2}{4} - \frac{n.(n+1)}{2}$ qui devient $\frac{n.(n+1).(n-1).(n+2)}{4}$.⁷

Quand on effectue le quotient avec $\sum_{k=1}^n k$, on trouve

$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (k^3 - k)} = \frac{2}{(n-1).(n+2)}$$

On décompose en éléments simples et on finit par sommer $\frac{2}{3} \cdot \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right)$.

On ré-indexe et somme de 1 à N , on garde

$$\frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right)$$

On trouve bien $\frac{11}{9}$

◀ 61 ▶

Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{2 + \cos^2(x)} dx$ (Bioche ?).

Existence assurée avec le mot clef continuité (et la seule locution « dénominateur jamais nul ne suffit pas).

Le $\cos(x).dx$ me donne envie de poser $s = \sin(x)$, et d'ailleurs Bioche me le confirme.

Et le dénominateur est une fonction de s : $2 + \cos^2(x) = 3 - \sin^2(x)$.

L'intégrale devient $\int_0^1 \frac{ds}{3 - s^2}$. On décompose en $\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3} - s} + \frac{1}{\sqrt{3} + s} \right)$ puis on intègre en logarithme.

On trouve $\frac{\ln(\sqrt{3} + 1) - \ln(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}}$ et si on y tient $\frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$. Ce dernier passage, vous devez pouvoir le faire

tout seul, en simplifiant $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ en utilisant la quantité conjuguée.

◀ 62 ▶

♥ Démontrez : $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ pour A de taille 3 sur 2 et B de taille 2 sur 3. (la trace est la somme des termes de la diagonale (principale), et elle ne se calcule que si la matrice est carrée...

On écrit $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$ (ou le contraire pour les formats, mais qu'importe, les rôles sont

au final symétriques).

On constate déjà que les matrices produits existent.

Elles sont carrées (pas de même format il est vrai).

On calcule ce dont on a besoin.

C'est à dire pas tout.

Remarque :

Oh le bel exercice pour tester si vous êtes matheux ou juste terminable.

On peut certes calculer tous les termes des matrices produits.

Mais quels sont ceux dont on a besoin ? Juste ceux de la diagonale, pour la trace.

Qui donc a quand même tout calculé, juste parce que « calculer c'est rassurant », même si ça fait juste perdre du temps...

$$A.B = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + a'.\beta + a''.\gamma & ? \\ ? & b.\alpha' + b'.\beta' + b''.\gamma'' \end{pmatrix}$$

7. Cours : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n.(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2} \right)^2$

$$\text{Et de l'autre côté } B.A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\alpha' & ? & ? \\ ? & a'.\beta + b'.\beta' & ? \\ ? & ? & a''.\gamma + b''.\gamma' \end{pmatrix}$$

Les deux matrices ont des formats différents.

Mais la somme des trois ou deux termes diagonaux donne une somme des six mêmes produits.

$$\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A) = a.\alpha + a'.\beta + a''.\gamma + b.\alpha' + b'.\beta' + b''.\gamma''$$

63 Il paraît que $3.\text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right) = \pi$. Mais même si la calculatrice du physicien le valide avec treize décimales, seul le cerveau du mathématicien peut le justifier. Cadeau : $117^2 = 13\,689$.

Le nombre $3.\text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right)$ est un réel positif. On l'encadre rapidement : $0 < \text{Arctan}(3/4) \leq \pi/4$ et $0 \leq \text{Arccos}(44/125) \leq \pi/2$. Notre réel est dans $]0, 5.\pi/4[$. Si on montre que sa tangente est nulle, il n'aura pas d'autre choix que d'être nul.

On pose $\alpha = \text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right)$ et $\beta = \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right)$. On a immédiatement : $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$, $\tan(2.\alpha) = \frac{2.\frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}$.

On a aussi $\tan(\beta) = \sqrt{\frac{1}{(44/125)^2} - 1} = \frac{117}{44}$ car par chance $125^2 - 44^2$ est un carré parfait.

On termine : $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{117}{44}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{117}{44}} = -\frac{24}{7}$. Le calcul se termine avec $\tan(2.\alpha) = -\tan(\alpha + \beta)$ qui donne bien $\tan(3.\alpha + \beta) = 0$.

64 \heartsuit N est tel que $N/2$ est un carré parfait, $N/3$ un cube parfait et $N/5$ une puissance cinquième d'entier. Et N est non nul, évidemment. Trouvez en un (*pensez à décomposer N en produit de facteurs premiers*).

On veut $\exists(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, $N = 2.a^2$, $N = 3.b^3$, $N = 5.c^5$.

Écrivons N comme produit de facteurs premiers : $N = 2^a . 3^b . 5^c . 7^d . 11^e \dots$

Dire qu'un nombre est un carré revient à dire que les exposants sont tous pairs.

Dire qu'un nombre est un cube revient à dire que ses exposants sont tous multiples de 3.

Et ainsi de suite.

On demande donc pour $N/2$: $a - 1$, b , c , d , e sont tous pairs.

On demande aussi pour $N/3$: a , $b - 1$, c , d et autres sont tous multiples de 3.

Enfin, avec $N/5$, on en vient à exiger que a , b , $c - 1$, d , e et ainsi de suite soient multiples de 5.

Déjà, d , e et les autres sont à la fois multiples de 2, 3 et 5, ce sont des multiples de 30.

L'exposant a vérifie est multiple de 3 et 5 (*donc de 15*), mais congru à 1 modulo 2 : a est de la forme $15 + 30.k$ avec k entier.

L'exposant b est multiple de 2 et 5 (*donc de 10*) et congru à 1 modulo 3 : $10 + 30.p$ avec p entier.

On fait de même pour c de la forme $6 + 30.q$.

N est de la forme $2^{15+30.k} . 3^{10+30.p} . 5^{6+30.q} . 7^{30.r} . 11^{30.s}$ et ainsi de suite.

La solution la plus petite est $(2^{15} . 3^{10} . 5^6)$ Et on vérifie : $\frac{N}{2} = (2^7 . 3^5 . 5^3)^2$, $\frac{N}{3} = (2^5 . 3^3 . 5^3)^3$ et $\frac{N}{5} = (2^3 . 3^2 . 5^1)^5$.

65 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{3.t}$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t . \cos(t)$ et $t \mapsto e^t . \cos(t + 1)$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 3 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t . \cos(2.t)$ et $t \mapsto e^{3.t}$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 4 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t . \cos(3.t)$ et $t \mapsto e^{3.t} . \cos(t)$.

Si on nous donne deux solutions (dont aucune n'est multiple de l'autre), on a deux valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$.

On a l'équation caractéristique : $(\lambda - 1) . (\lambda - 3) = 0$ puis l'équation différentielle $y'' - 4.y' + 3.y = 0$.

$t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$ sont des combinaisons de $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \sin(t)$.
 Puis de $t \mapsto e^t \cdot e^{i \cdot t}$ et $t \mapsto e^t \cdot e^{-i \cdot t}$.

Le spectre est $\{1+i, 1-i\}$ et l'équation est $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Dans $t \mapsto e^t \cdot \cos(2t)$ et $t \mapsto e^{3t}$, on a deux valeurs propres $1+2i$ et 3 .

On complète avec une troisième valeur propre : $1-2i$.

On a donc l'équation caractéristique $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda - 3)$.

Et l'équation différentielle $y^{(3)} - 5y'' + 11y' - 15y = 0$.

Enfin on complète le spectre $\{1+3i, 3+i\}$ en $\{1+3i, 1-3i, 3+i, 3-i\}$.

Équation $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 32y'' - 80y' + 100y = 0$.

◁66▷ ♡ Donnez une matrice qui se diagonalise en $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

C'est écrit sur le ventre du Teletubbies : $M \cdot P = P \cdot D$.

Et donc $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$

◁67▷ ♡ Résolvez le système $\begin{cases} a'_t = 4a_t + b_t \\ b'_t = 2a_t + 3b_t \end{cases}$. Façon physicien bricoleur : ajustez k pour que $a_t + k \cdot b_t$ vérifie une équation $y'_t = \mu \cdot y_t$.

Façon physicien ayant lu des livres de maths : diagonalisez la matrice.

Façon matheux : bâchez ces calculs et cherchez à comprendre le lien entre les deux méthodes.

On pose $y_t = a_t + k \cdot b_t$.

On dérive : $y'_t = a'_t + k \cdot b'_t = (4a_t + b_t) + k \cdot (2a_t + 3b_t)$

On voudrait qu'elle soit de la forme $\mu \cdot y_t$ c'est à dire $a_t + k \cdot \mu \cdot b_t$.

On va donc pouvoir donner une valeur à k et à μ : $\begin{matrix} 4 & +2k & = & \mu \\ 1 & +3k & = & k \cdot \mu \end{matrix}$.

On reporte la première dans la seconde : $\begin{matrix} k & = & \frac{\mu-4}{2} \\ 1 & +3 \cdot \frac{\mu-4}{2} & = & \frac{\mu-4}{2} \cdot \mu \end{matrix}$.

μ est solution d'une équation du second degré : $\mu^2 - 7\mu + 10 = 0$.

On a deux valeurs possibles : 2 et 5.

Et pour chacune, on a la valeur de k associée.

$y_t = a_t - b_t$	$z_t = a_t + \frac{1}{2} \cdot b_t$
$y'_t = 2 \cdot y_t$	$z'_t = 5 \cdot y_t$
$y_t = y_0 \cdot e^{2 \cdot t}$	$z_t = z_0 \cdot e^{5 \cdot t}$

On a donc $\begin{matrix} a_t & -b_t & = & (a_0 - b_0) \cdot e^{2 \cdot t} \\ 2a_t & +b_t & = & (2a_0 + b_0) \cdot e^{5 \cdot t} \end{matrix}$.

On peut combiner pour récupérer $\begin{matrix} a_t & = & \frac{a_0 - b_0}{3} \cdot e^{2 \cdot t} & + & \frac{2a_0 + b_0}{3} \cdot e^{5 \cdot t} \\ b_t & = & -2 \cdot \frac{a_0 - b_0}{3} & + & \frac{2a_0 + b_0}{3} \cdot e^{5 \cdot t} \end{matrix}$.

Remarque : En Terminale on vous aurait donné « comme par hasard » $y_t = a_t - b_t$ et $z_t = a_t + \frac{b_t}{2}$ et on vous aurait demandé de vérifier qu'ils étaient « comme par hasard » solutions d'une équation différentielle.

Et si on diagonalisait : $\begin{pmatrix} a'_t \\ b'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$.

Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
7	10	$X^2 - 7X + 10$	$\{2, 5\}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

On pose alors $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_t - b_t}{3} \\ \frac{2a_t + b_t}{3} \end{pmatrix}$.

On reporte : $\begin{matrix} u'_t & = & 2 \cdot u_t \\ v'_t & = & 5 \cdot v_t \end{matrix}$.

On résout : $u_t = u_0 \cdot e^{2 \cdot t}$ et $v_t = v_0 \cdot e^{5 \cdot t}$ avec $u_0 = \frac{a_0 - b_0}{3}$ et $v_0 = \frac{2a_0 + b_0}{3}$.

On remonte : $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a_0 - b_0) \cdot e^{2t} \\ (2a_0 + b_0) \cdot e^{5t} \end{pmatrix}$

C'est la même chose.

Mais dans un cas on les appelle y_t et z_t et dans l'autre u_t et v_t (à un facteur 3 près qui est le déterminant de P).

◀ 68 ▶

Résolvez $\sqrt{t^2 + 6t + 10} \cdot y'_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t .

Résolvez $\sqrt{t^4 + 6t^2 + 10} \cdot y'_t + t \cdot y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t .

Le cours dit : les solutions de $y'_t + a_t \cdot y_t = 0$ sont de la forme $y_t = y_0 \cdot e^{-A_t}$ où A est la primitive de a , nulle en 0.

Remarque : $t^2 + 6t + 10$ reste strictement positif sur \mathbb{R} (calculez Δ). On peut diviser et la mettre sous forme $y'_t + a_t \cdot y_t = 0$.

On a juste à intégrer $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 + 1}} = \left[\ln \left((x+3) + \sqrt{(x+3)^2 + 1} \right) \right]_0^t$.

On a un logarithme, mais aussi un signe moins : $t \mapsto \frac{A}{(t+3) + \sqrt{(t+3)^2 + 1}}$ avec A qui dépend de la valeur en 0 (on préférera utiliser la valeur en -3 , voyez vous pourquoi?).

Mais quitte à utiliser la quantité conjuguées : $t \mapsto A \cdot \left(\sqrt{t^2 + 6t + 10} - (t+3) \right)$

Rappel : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ s'intègre en $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

On peut l'obtenir en proposant de dériver la fonction $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

$$\left(t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right)' = \left(t \mapsto \frac{1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}} \right)$$

et tout qse simplifie.

On peut aussi écrire $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{i} \cdot \int \frac{d(i \cdot t)}{\sqrt{1-(i \cdot t)^2}} = \frac{\text{Arcsin}(i \cdot t)}{i}$.

Il ne reste plus qu'à résoudre $\frac{e^{i \cdot \theta} - e^{-i \cdot \theta}}{2i} = i \cdot t$ d'inconnue θ de manière purement formelle avec un logarithme à la fin (totalement contestable).

On peut aussi changer de variable dans $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t = \text{sh}(x)$. On trouve alors

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{\text{ch}(x) \cdot dx}{\sqrt{1+\text{sh}^2(x)}} = \int \frac{\text{ch}(x) \cdot dx}{\sqrt{\text{ch}^2(x)}}$$

Comme le cosinus hyperbolique est positif, il ne reste que $\int dx$ c'est à dire $x - x_0$.

Reste à déterminer x à parti de t en résolvant . On pose $X = e^x$ et on résout $X - \frac{1}{X} = 2 \cdot t$ et on garde la racine positive.

Pour l'autre, on va devoir intégrer $\int_0^t \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$.

On l'écrit $\int_0^t \frac{(x+3) \cdot dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} - 3 \cdot \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 + 1}}$.

et on trouve $\left[\sqrt{x^2 + 6x + 10} - 3 \cdot \ln \left(\sqrt{x^2 + 6x + 10} + (x+3) \right) \right]$.

On trouve donc les solutions $t \mapsto A \cdot e^{-\sqrt{t^2 + 6t + 10}} \cdot \left(t + 3 + \sqrt{t^2 + 6t + 10} \right)^3$ avec A dépendant des conditions initiales.

◀ 69 ▶

Calculez pour tout réel a strictement positif $\int_{x=1/a}^a \left(\int_{y=0}^1 \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) \cdot dx$.

Pour tout x , on calcule $\int_{y=0}^1 \frac{dy}{x^2 + y^2}$ en l'écrivant $\frac{1}{x^2} \cdot \int_{y=0}^1 \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Si nécessaire, on change de variable en po-

sant $u = \frac{y}{x}$, en tout cas, on trouve $\left[\frac{\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right]_0^1$ c'est à dire $\frac{\text{Arctan}(1/x)}{x}$.

Il est important dans ce calcul que x soit non nul, et ce sera le cas entre a et $1/a$.

On doit ensuite se donner a et calculer $\int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$.

Pour a égal à 1, c'est facile, mais sinon ?

Mais sinon, l'intégration par parties n'est pas pertinente, elle donne un logarithme qu'on n'apprécie pas trop.

Notons I_a cette intégrale, et effectuons un changement de variable : $u = \frac{1}{t}$ pour voir :

$$I_a = \int_{u=1/a}^a \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{t=1/a}^{1/a} t \cdot \text{Arctan}(t) \cdot \frac{-dt}{t^2} = \int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

Elle ressemble à l'autre. On va profiter d'une relation agréable sur l'arctangente en somment $I_a + I_a$:

$$I_a + I_a = \int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) + \text{Arctan}(u)}{u} du \text{ (variables muettes)}$$

$$\text{On remplace : } I_a + I_a = \int_{1/a}^a \frac{\pi}{2u} du = \frac{\pi}{2} \cdot [\ln(u)]_{u=1/a}^a = \frac{\pi \cdot 2 \cdot \ln(a)}{2}$$

$$\text{La valeur est donc } I_a = \frac{\pi \cdot \ln(a)}{2}$$

On pouvait aussi nommer F une primitive de $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t}$ et écrire $I_a = F(a) - F\left(\frac{1}{a}\right)$ et dériver $F'(a) + \frac{1}{a^2} \cdot F'\left(\frac{1}{a}\right)$, simplifier, profiter de $I_1 = 0$ et remonter à I_a pour tout a .

◀70▶ On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Rétrouvez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n \cdot (n+1)}$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$S = 1 + S$$

Décomposition en éléments simples / compteur / télescopage / définition / permutation des sigmas.

◀71▶ ♡ La suite u est définie par u_0 et u_1 donnés et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Exprimez u_2, u_3, u_4 et u_5 à l'aide de u_0 et u_1 .

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice M vérifiant $U_{n+1} = M \cdot U_n$ pour tout n . Calculez sa trace et son déterminant. Trouvez une matrice diagonale D vérifiant $\text{Tr}(D) = \text{Tr}(M)$ et $\det(D) = \det(M)$. Trouvez P inversible (de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$) vérifiant $M \cdot P = P \cdot D$. Explicitez alors D^n, M^n et U_n à l'aide de n . Donnez la forme explicite de u_n pour tout n .

Pouvez vous choisir u_0 et u_1 pour avoir $u_{10} = 10$ et $u_{20} = 20$?

$$\text{On écrit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a sa trace et son déterminant : 5 et 6.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 6$.

Son spectre est $\{2, 3\}$.

$$\text{Une matrice diagonale est } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On confirme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On diagonalise : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 3^n - 2^n \\ 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n & 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

On a donc $u_n = (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n) \cdot u_0 + (3^n - 2^n) \cdot u_1$ qu'on peut aussi prouver par récurrence sur n .

On sort la liste des termes :

u_0	u_1	$-6 \cdot u_0 + 5 \cdot u_1$	$-30 \cdot u_0 + 19 \cdot u_1$	$-114 \cdot u_0 + 65 \cdot u_1$	$-190 \cdot u_0 + 211 \cdot u_1$	$-1266 \cdot u_0 + 665 \cdot u_1$	
-------	-------	------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	--

On veut $u_{10} = 10$ et $u_{20} = 20$.

Il suffit de résoudre $10 = (3 \cdot 2^{10} - 2 \cdot 3^{10}) \cdot u_0 + (3^{10} - 2^{10}) \cdot u_1$

$$20 = (3 \cdot 2^{20} - 2 \cdot 3^{20}) \cdot u_0 + (3^{20} - 2^{20}) \cdot u_1$$

C'est un système d'inconnues u_0 et u_1 et de matrice $\begin{pmatrix} (3 \cdot 2^{10} - 2 \cdot 3^{10}) & (3^{10} - 2^{10}) \\ (3 \cdot 2^{20} - 2 \cdot 3^{20}) & (3^{20} - 2^{20}) \end{pmatrix}$.

La matrice est inversible. Il y a une solution.⁸

◀72▶ ♡ La matrice M vérifie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Trouvez la diagonalisez la.

On pose ses quatre coefficients et on résout des systèmes : $\begin{cases} a + 5b = 3 \\ c + 5d = 15 \end{cases}$ et $\begin{cases} a + 3b = 2 \\ c + 3d = 6 \end{cases}$

qu'on regroupe en $\begin{cases} a + 5b = 3 \\ a + 3b = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} c + 5d = 15 \\ c + 3d = 6 \end{cases}$.

Ça c'est si on est physicien, et c'est déjà bien.

Mais il y a mieux, si on est matheuse !

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ se ramène à $M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$.

Et il ne reste plus qu'à écrire en multipliant à droite par l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

Dans les deux cas on trouve $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -15/2 & 9/2 \end{pmatrix}$

Remarque : *C'est évidemment le même résultat. Ensuite, si vous trouvez que la première méthode est celle que vous utiliserez toujours, je n'y peux rien, c'est votre droit, on a besoin aussi de physiciens (en fait non, on a besoin d'ingénieurs et de techniciens de haut niveau, c'est tout).*

Si vous trouvez que la seconde est plus esthétique, vous avez le sens des mathématiques (et de l'économie de moyens).

Ensuite, pour diagonaliser, vous pouvez utiliser la méthode de base, c'est à dire chercher D diagonale et P inversible vérifiant $M \cdot P = P \cdot D$ (ou encore $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$)

Vous vous dites que D sera facile à trouver : elle doit avoir la même trace et le même déterminant que M :

$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -15/2 & 9/2 \end{pmatrix}$	$Tr(M) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$	$\det(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6$
$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	$Tr(m) = \alpha + \beta$	$\det(D) = \alpha \cdot \beta$
α et β sont les racines de $X^2 - 5X + 6$		

On trouve que α et β valent 2 et 3. On peut choisir $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ tout comme $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ce qui changera si on prend une ou l'autre, c'est la matrice P).

Il reste à trouver P vérifiant $M \cdot P = P \cdot D$ (et on ne part surtout pas sur $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ qui donne des équations moches).

8. réponse de matheux : il y a une solution ; question de physicien : alors c'est quoi ; re-réponse de matheux : tu m'as juste demandé si il y en avait une

On demande donc $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On se rend compte que les systèmes sont dégénérés (deux fois les mêmes équations).

Ce n'est pas qu'on se soit trompé, bien au contraire.

On peut choisir arbitrairement le premier coefficient de chaque vecteur de P (les deux réels a et b).

On se fixe par simplicité $a = b = 1$.

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ donne } \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{c}{2} = 2 \\ -\frac{15}{2} + \frac{9c}{2} = 2c \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{c'est juste } c = 3 \\ \text{c'est juste } c = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{et } \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{d}{2} = 3 \\ -\frac{15}{2} + \frac{9d}{2} = 3d \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{c'est juste } d = 5 \\ \text{c'est juste } d = 5 \end{array} \right.$$

On résume : $\boxed{\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

Mais en fait, il y a plus simple.

Diagonaliser c'est trouver les coefficients de D et les colonnes de P vérifiant $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Ou si vous préférez $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \beta \cdot b \\ \alpha \cdot c & \beta \cdot d \end{pmatrix}$.

Et cette fois, reprenons le point de vue « deux colonnes » : $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$
 et $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

On cherche donc des vecteurs très particuliers : sous l'effet de M ils ne tournent pas, ils sont juste transformés en un de leurs multiples.

Et justement, les données de l'énoncé sont $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ c'est à dire $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
 et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'énoncé donne directement deux vecteurs propres avec leurs valeurs propres.

La matrice est déjà diagonalisée : $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de valeur propre 2

Les deux colonnes de P sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

les deux termes diagonaux de D sont 3 et 2 (dans le même ordre).

Si vous venez de comprendre tout à coup l'idée de la diagonalisation grâce à ça, vous avez gagné un temps fou en maths, mais aussi en physique.

				4		2
			1			
		3		3		
2				1		
				2		3
	1	4				
	4					4

1			3			1
		3				3
	1					3
				3		4
	4			4		
		1				
			3		2	
2						

		3			3	
	2					
2					4	3
		3				1
4					4	2
4				1		2

						3
			3			1
3						
						3
						3
1						

	3			1		
		3		3		
3						
				2		
2						1

				2		
						2
				3		
		3				
			2			
					1	
2						