



♡ 0 ♡ Exprimez $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$ avec une preuve. 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{n+2}{n+3}, \frac{2n+3}{n+2} \right] \right) = \left[1, \frac{3}{2} \right]$ par double inclusion. 3 pt.

◇ 0 ◇ a est un réel strictement positif donné. Justifiez pour tout n l'existence des intégrales suivantes 1 pt.

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch}(a) - \cos(x)} dx, J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\operatorname{ch}(a) - \sin(x)} dx, K_n = I_n + iJ_n$$

◇ 1 ◇ Complétez pour tout n et tout x : $e^{i.n.x} + 2.i.\operatorname{ch}(a).e^{i.(n+1).x} - e^{i.(n+2).x} = \dots(\operatorname{ch}(a) - \sin(x)).e^{i.(n+1).x}$ 1 pt.

◇ 2 ◇ Justifiez pour tout n : $K_n + 2.i.\operatorname{ch}(a).K_{n+1} - K_{n+2} = 0$. 3 pt.

◇ 3 ◇ On pose alors $U_n = \begin{pmatrix} K_n \\ K_{n+1} \end{pmatrix}$; trouvez la matrice M vérifiant $\forall n, U_{n+1} = M.U_n$. 1 pt.

◇ 4 ◇ On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i.e^a & i.e^{-a} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i.e^a & 0 \\ 0 & i.e^{-a} \end{pmatrix}$. Montrez $M = P.D.P^{-1}$ (peut être même sans calculer P). 2 pt.

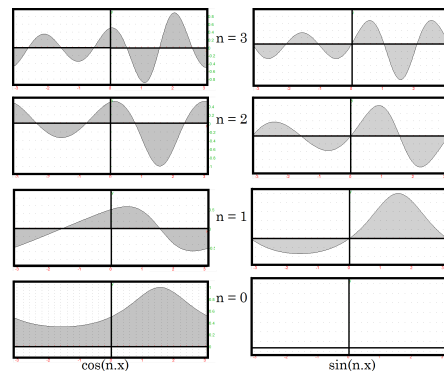
◇ 5 ◇ Dédisez alors la valeur de M^n puis de U_n en fonction de K_0, K_1 et n . 3 pt.

◇ 6 ◇ Montrez $K_0 = \frac{2.\pi}{\operatorname{sh}(a)}$ (changement de variable en $\tan(x/2)$, avec bornes devant infinie, factorisation canonique pouvant utiliser une simplification de $1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(a)}$ et changement de variable final en

$$u = \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} . t$$
 3 pt.

◇ 7 ◇ Calculez I_1 . 2 pt.

◇ 8 ◇ Calculez $\operatorname{ch}(a).K_0 - J_1$ puis trouvez la valeur de J_1 . 3 pt.



◇ 8 ◇ On définit $\sigma = (k \mapsto (k^3 + 1) \% 11)$. Vérifiez que σ est une permutation de $\operatorname{range}(11)$. 2 pt.

◇ 9 ◇ Donnez sa signature et son ordre. 2 pt.

◇ 10 ◇ Résolvez $\sigma^n(9) = 10$ d'inconnue n . Résolvez $\sigma^n(9) = 6$. Résolvez $\sigma^{2024}(k) = 4$ d'inconnue k . 3 pt.

◇ 11 ◇ Pouvez vous donner deux quadricycles φ vérifiant $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$. 1 pt.

◇ 12 ◇ Pouvez vous donner tous les bicycles p vérifiant $\sigma \circ p = p \circ \sigma$? 3 pt.

♣ Un élève prétend qu'on a : $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{4.x.|x|}{\sqrt{3}}\right)$. Il le prouve en quelques points comme $x = 0, x = 1/2, x = -\sqrt{3}/2, x = -1/2$ et $x = \sqrt{3}/2$. Vérifiez que pour l'instant il a raison. Donnez lui ensuite un contre-exemple. 2 pt. Trouvez la fonction qui lui manque : $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}(\text{truc en } x)$ (indication : posez $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$ et calculez $\tan(\theta)$, et ensuite faites le vrai travail de matheux). 3 pt.

[0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000]

3 points

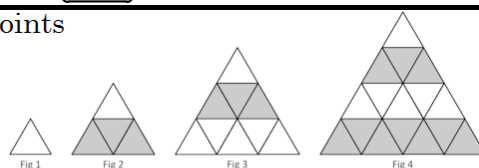


Figure	1	2	3	4	5
White triangles	1	1	6	6	
Grey triangles	0	3	3	10	

- Complete the table for figure 5.
- Find the total number of triangles for Figure 250.
- Find the percentage of grey triangles in Figure 250.





IS08

Intersection généralisée.



L'intersection est par définition $x \in \mathbb{R} \mid \forall n, \frac{n+2}{n+3} \leq x \leq \frac{2n+3}{n+2}$.

On doit montrer que tous les x de $[1, 3/2]$ vérifient ceci. J'écris juste

$$\frac{n+2}{n+3} \leq 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2}$$

et je justifie $\frac{n+2}{n+3} \leq 1$ en calculant $1 - \frac{n+2}{n+3}$ puis je prouve $\frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2}$ en trouvant le signe de la différence $\frac{2n+3}{n+2} - \frac{3}{2} = \frac{n}{2(n+2)}$.

Maintenant, il faut prouver que si x vérifie $\forall n, \frac{n+2}{n+3} \leq x \leq \frac{2n+3}{n+2}$, alors il est forcément entre 1 et $\frac{3}{2}$.

Le passage à la limite dans la première donne $1 \leq x$.

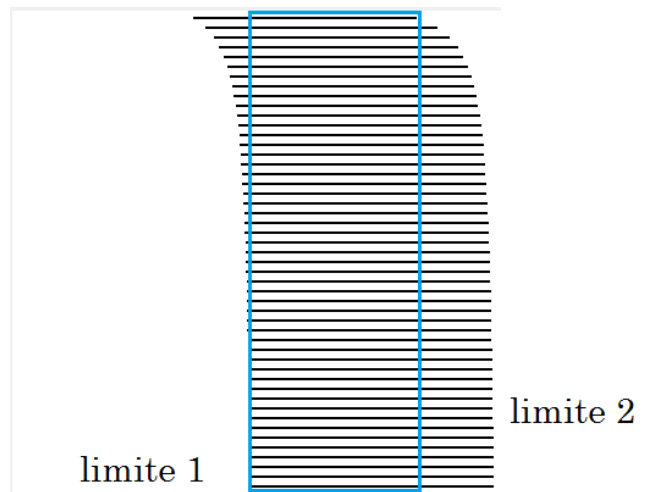
Le passage à la limite dans la seconde donne $x \leq 2$. Et ça ne permet pas de conclure. La condition n'est que nécessaire.

Mais si on a $\forall n, \frac{n+2}{n+3} \leq x \leq \frac{2n+3}{n+2}$ alors en particulier, on a $n=0, \frac{0+2}{0+3} \leq x \leq \frac{2 \cdot 0 + 3}{0+2}$ et cette fois le membre de droite donne ce qu'on voulait.

Le piège est qu'ici les intervalles ne sont pas inclus les uns dans les autres.

Pour l'intervalle final, la borne inférieure est bien la limite (non atteinte, mais approchée en croissant).

Et la borne supérieure est la première valeur (atteinte).



IS08

Intégrales.



Qu'est ce qui pourrait empêcher I_n et J_n d'exister ? La fonction sous le signe somme est continue dans les deux cas... tant qu'elle est définie.

Mais le dénominateur peut il s'annuler ?

L'équation $\operatorname{ch}(a) = \cos(x)$ d'inconnue x (et de paramètre a) se résout en fait très bien sans prise de tête avec des formules partout (on est en maths, non ?). On réfléchit : $\operatorname{ch}(a)$ est toujours plus grand que 1.

C'est du cours, ou c'est une étude graphique, ou un tableau de variations ou c'est même l'inégalité des moyennes $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq \sqrt{e^t \cdot e^{-t}} = 1$.

En revanche, $\sin(x)$ est toujours plus petit que 1 et ne pourra jamais être égal à $\operatorname{ch}(a)$.

On notera que par linéarité de l'intégrale et formules de Moivre, on a

$$K_n = I_n + i \cdot J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x)}{\operatorname{ch}(a) - \cos(x)} \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i \cdot n \cdot x}}{\operatorname{ch}(a) - \sin(x)} \cdot dx$$

ce qui explique les exponentielles complexes dans la suite.

On se donne x et n et on factorise la proposition

$$e^{i.n.x} + 2.i.ch(a).e^{i.(n+1).x} - e^{i.(n+2).x} = e^{i.(n+1).x} \cdot (e^{-i.x} + i.(e^a + e^{-a}) - e^{i.x})$$

On factorise $2.i$

$$e^{i.n.x} + 2.i.ch(a).e^{i.(n+1).x} - e^{i.(n+2).x} = 2.i.e^{i.(n+1).x} \cdot \left(\frac{e^{-i.x} - e^{i.x}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2.i} \right)$$

et on retrouve dans la parenthèse $ch(a) - \sin(x)$. Comme par hasard.

On fusionne es trois intégrales en une

$$K_n + 2.i.ch(a).K_{n+1} - K_{n+2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i.n.x} + 2.i.ch(a).e^{i.(n+1).x} - e^{i.(n+2).x}}{ch(a) - \sin(x)} .dx$$

Avec la question précédente, la simplification se fait

$$K_n + 2.i.ch(a).K_{n+1} - K_{n+2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(n+1).x} .dx$$

Mais on ne s'arrête pas en si bon chemin, on calcule cette intégrale.

Si on fait des vraies maths

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(n+1).x} .dx = \left[\frac{e^{i.(n+1).x}}{i.(n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i.(n+1).\pi} - e^{i.(n+1).(-\pi)}}{i.(n+1)} = \frac{2.\sin((n+1).\pi)}{(n+1)} = 0$$

(car $n+1$ est non nul (pour le dénominateur) et $(n+1).\pi$ est multiple de π).¹

Si on a peur d'écrire des bêtises

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(n+1).x} .dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+1).x) .dx + i. \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+1).x) .dx = \left[\frac{\sin((n+1).x)}{(n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} + i. \left[\frac{-\cos((n+1).x)}{(n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

et on trouve encore 0, ne n'oubliant pas le rôle essentiel de « $n+1 \neq 0$ ». Aux concours (en maths en tout cas), c'est cet oubli qui vous coûte des points, la partie calcul n'étant que niveau collège.

Réflexe d'élève qui n'a toujours rien compris :
je vais prouver la formule par récurrence sur n .
C'est une formule directe, neuneu !
Et c'est ensuite qu'elle va servir pour d'éventuelles récurrences.

On reformule : $\forall n, K_{n+2} = (2.i.ch(a)).K_{n+1} + K_n$ et même

$$\begin{pmatrix} K_{n+1} \\ K_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{n+1} \\ K_n + 2.i.ch(a)K_{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice M demandée est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2.i.ch(a) \end{pmatrix}$.

On ne vérifie pas $M = P.D.P^{-1}$ mais $M.P = P.D$ (qu'on multipliera ensuite à droite par P^{-1})

$$M.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2.i.ch(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i.e^a & i.e^{-a} \end{pmatrix} \text{ et } P.D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i.e^a & i.e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i.e^a & 0 \\ 0 & i.e^{-a} \end{pmatrix}$$

Les deux termes à calculer pour avoir l'égalité sont sur le même modèle

$$1 + i.e^a.2.i.ch(a) = 1 - e^a.(e^a + e^{-a}) = -e^{2.a}$$

et de même avec des e^{-a} . On confirme $M.P = P.D$ (et tant pis pour qui a calculé $P.D.P^{-1}$, on a aussi besoin de gens qui n'ont pas peur de calculer... même quand ça ne sert à rien).

1. sinon on a aussi $e^{i.N.\pi} = (-1)^N$

On calcule M^n en concaténant des $P.D.P^{-1}$ et en simplifiant les $P.P^{-1}$ tout au long

$$\begin{matrix} P & D & P^{-1} & \times & P & D & P^{-1} & \times & P & D & P^{-1} & \times & \dots & \times & P & D & P^{-1} \\ P & D & & I_2 & D & & I_2 & D & & \dots & D & & P^{-1} \\ P & D & & & D & & & D & & & D & & P^{-1} \\ P & & & & & & & D^n & & & & & P^{-1} \end{matrix}$$

Et si on n'aime que les froides mathématiques où tout est sans faille (mais où n ne saisit pas forcément pourquoi ça marche) : on fait une récurrence dont l'hérédité repose sur

$$M^{n+1} = M^n.M = (P.D^n.P^{-1}).(P.D.P^{-1}) = P.D^n.(P^{-1}.P).D.P^{-1} = P.D^n.D.P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$$

Par récurrence immédiate sur n

$$D^n = \begin{pmatrix} i.e^a & 0 \\ 0 & i.e^{-a} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (i.e^a)^n & 0 \\ 0 & (i.e^{-a})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^n.e^{n.a} & 0 \\ 0 & i^n.e^{-n.a} \end{pmatrix}$$

On termine le calcul

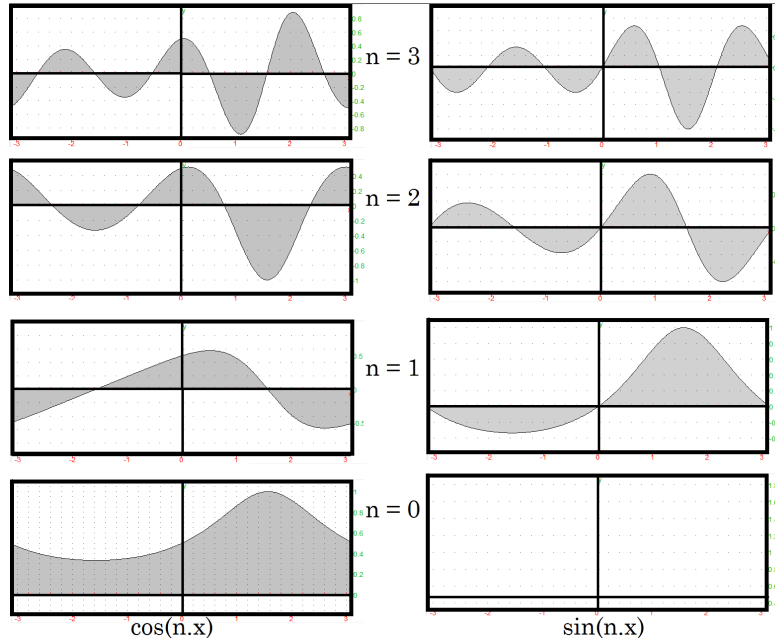
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i.e^a & i.e^{-a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i^n.e^{n.a} & 0 \\ 0 & i^n.e^{-n.a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i.e^{-a} & -1 \\ -i.e^a & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{i.(e^{-a} - e^a)}$$

$\frac{i^{n+1}.e^{(n-1).a} - i^{n+1}.e^{-(n-1).a}}{i.e^{-a} - i.e^a}$	$\frac{i^n.e^{-n.a} - i^n.e^{n.a}}{i.e^{-a} - i.e^a}$	K_0
$\frac{i^{n+2}.e^{n.a} - i^{n+2}.e^{-n.a}}{i.e^{-a} - i.e^a}$	$\frac{i^{n+1}.e^{-(n+1).a} - i^{n+1}.e^{(n+1).a}}{i.e^{-a} - i.e^a}$	K_1

Dis moi si tu as aimé cette étape calculatoire du raisonnement, je te dirai qui tu es.

Il est temps de rappeler que la suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison à gauche M^2 . Sans récurrence, on affirme

$$U_n = M^n.U_0 = \begin{pmatrix} truc_n & bidule_n \\ machin_n & solal_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}$$



Il faut encore calculer

$$K_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{ch(a) - \sin(x)}$$

et $K_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x) + i.\sin(x)}{ch(a) - \sin(x)}.dx$ par changement de variable universel : $t = \tan(x/2)$ (avec de la prudence au bout de l'intervalle)

$$K_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{ch(a) - \sin(x)}$$

$$K_0 = \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{ch(a) - \frac{2.t}{1+t^2}} \frac{2.dt}{1+t^2}$$

$$K_0 = \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \frac{2.dt}{t^2.ch(a) - 2.t + ch(a)}$$

On sort $ch(a)$ et on identifie remarquablement ou canoniquement

$$ch(a).t^2 - 2.t + ch(a) = ch(a). \left(t^2 - \frac{2.t}{ch(a)} + 1 \right)$$

2. la multiplication matricielle n'est pas commutative, il faut préciser de quel côté agit la raison

$$ch(a).t^2 - 2.t + ch(a) = ch(a). \left(\left(t - \frac{1}{ch(a)} \right)^2 - \frac{1}{ch^2(a)} + 1 \right)$$

$$K_0 = \frac{2}{ch(a)} \cdot \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{ch(a)} \right)^2 + \frac{sh^2(a)}{ch^2(a)}}$$

On factorise encore en sortant de force $\frac{sh^2(a)}{ch^2(a)}$ du dénominateur

$$K_0 = \frac{2}{ch(a) \cdot \frac{sh^2(a)}{ch^2(a)}} \cdot \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \frac{dt}{\left(\frac{ch(a)}{sh(a)} \cdot \left(t - \frac{1}{ch(a)} \right) \right)^2 + 1}$$

On simplifie encore et on prépare pour qui le veut un changement en $u = \frac{ch(a)}{sh(a)} \cdot t - \frac{1}{sh(a)}$ (donc $t = \dots$ et $dt = \frac{sh(a)}{ch(a)} \cdot dt$)

$$K_0 = \frac{2 \cdot ch(a)}{sh^2(a)} \cdot \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \frac{dt}{\left(\frac{ch(a)}{sh(a)} \cdot t - \frac{1}{sh(a)} \right)^2 + 1} = \frac{2}{sh(a)} \cdot \int_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow +\infty} \frac{du}{u^2 + 1}$$

On termine avec $\left[\text{Arctan}(u) \right]_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$ et on confirme la valeur de K_0 .

Le calcul de I_1 ne pose pas de problème, on a une forme en $\frac{u'}{u}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)}{ch(a) - \sin(x)} \cdot dx = \left[\ln(ch(a) - \sin(x)) \right]_{-\pi}^{\pi} = \ln(ch(a)) - \ln(ch(a)) = 0$$

Une astuce pour J_1 . On calcule

$$ch(a) \cdot K_0 - J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ch(a)}{ch(a) - \sin(x)} \cdot dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{ch(a) - \sin(x)} \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ch(a) - \sin(x)}{ch(a) - \sin(x)} \cdot dx$$

La fonction devient constante égale à 1. L'intégrale vaut $2 \cdot \pi$ (aire d'un rectangle).

On connaît K_0 et la différence $ch(a) \cdot K_0 - J_1$, on peut calculer J_1 .

Comme on a déjà I_1 , on tient K_1 .

On a donc le vecteur colonne $\begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}$. Avec $M^n \cdot K_1$ on trouve la valeur de U_n puis, en ne lisant qu'une ligne, de K_n .

En extrayant partie réelle et partie imaginaire, on trouve J_n et I_n .

	$n = 0$ [4]	$n = 1$ [4]	$n = 2$ [4]	$n = 3$ [4]
I_n	$-2 \cdot \frac{sh((n-1) \cdot a)}{sh^2(a)}$	0	$2 \cdot \frac{sh((n-1) \cdot a)}{sh^2(a)}$	0
J_n	0	$-2 \cdot \frac{sh((n-1) \cdot a)}{sh^2(a)}$		$2 \cdot \frac{sh((n-1) \cdot a)}{sh^2(a)}$

IS08

Permutation.



C'est horrible, on doit calculer des cubes, leur ajouter 1, puis les réduire modulo 11.

Non, c'est gentil. On doit calculer des carrés, les réduire modulo 11 puis calculer des cubes, ajouter 1 et les réduire modulo 11.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^2 \bmod 11$	0	1	4	9	16=5	25=3	36=3	49=5	64=9	81=4	100=1
$(k^2 \bmod 11) * k$	0	1	8	27=5	20=9	15=4	18=7	35=2	72=6	36=3	10
$\sigma(k)$	1	2	9	6	10	5	8	3	7	4	0

Combien de fois vous ai je dit « en maths on réfléchit avant de calculer » et bien souvent on n'a donc même pas à calculer !

Ou alors, on regarde en bas du devoir la liste des cubes.

Oui, mais se plaint l'élève « on doit quand même réduire modulo 11 ».

Sauf qu'on sait qu'un entier est congru à la somme alternée de ses chiffres modulo 11. C'est du cours.

Oui, le cours ça ne sert pas juste à faire des questions de cours, ça aide aussi à réfléchir...

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
$k^3 + 1$	1	2	9	28	65	126	217	344	513	730	1001
somme alternée	1	2	9	8-2=6	5-6=-1	6-2+1=5	7-1+2=8	4-4+3=3	3-1+5=7	0-3+7=4	1-0+0-1=0
$\sigma(k)$	1	2	9	6	10	5	8	3	7	4	0

Et on a bien une bijection de l'ensemble dans lui même.

On décompose en produit de cycles :

$$\sigma = \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 9\ 4\ 10)} \circ \overrightarrow{(3\ 6\ 8\ 7)} \circ \overrightarrow{(5)}$$

$$ppcm \quad -1 \quad \times \quad -1 \quad \times \quad 1 \quad \text{sigmanture} \quad 1$$

$$\quad \quad \quad 6 \quad , \quad 4 \quad , \quad 1 \quad \text{ordre} \quad 12$$

$\sigma^n(9) = 10$	$\sigma^n(9) = 6$	$\sigma^{2024}(k) = 4$	$\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$	$\sigma \circ p = p \circ \sigma$
une solution : 2	pas de solution	$\sigma^8(k) = 4$	$\overrightarrow{(3\ 6\ 8\ 7)}$	$\sigma \circ \varphi = \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 9\ 4\ 10)} \circ \overrightarrow{(3\ 8)} \circ \overrightarrow{(6\ 7)}$
$S = 2 + 6\mathbb{Z}$	$S = \emptyset$	$S = \{2\}$	$\overrightarrow{(3\ 6\ 8\ 7)}^{-1}$	$\sigma \circ \varphi = \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 9\ 4\ 10)}$
				$S = \emptyset$

Pourquoi ne peut on avoir $\sigma \circ \overrightarrow{(ab)} = \overrightarrow{(ab)} \circ \sigma$?

Les cycles qui commutent avec σ doivent être formés des mêmes cycles que σ . En tout cas, la condition est suffisante, et semble assez logique.

Raisonnons par l'absurde pour $\sigma \circ \overrightarrow{(ab)} = \overrightarrow{(ab)} \circ \sigma$.

On doit avoir (en l'appliquant sur a puis sur b) :

$$\sigma(b) = \overrightarrow{(ab)}(\sigma(a)) = \begin{matrix} b & \text{si} & \sigma(a) = a \\ a & \text{si} & \sigma(a) = b \\ \sigma(a) & \text{sinon} & \end{matrix} \quad \text{et aussi } \sigma(a) = \overrightarrow{(ab)}(\sigma(b)) = \begin{matrix} b & \text{si} & \sigma(b) = a \\ a & \text{si} & \sigma(b) = b \\ \sigma(b) & \text{sinon} & \end{matrix}$$

Mais on ne peut avoir $\sigma(a) = \sigma(b)$ puisque σ est injective.

Si on a $\sigma(b) = b$, b est le point fixe de σ . Mais ceci aurait lieu sous la condition $\sigma(a) = a$ qui demande que a soit aussi le point fixe de σ . Mais on ne peut avoir $a = 5 = b$.

Si on a $\sigma(b) = a$, on trouve alors $\sigma(a) = b$. Et ceci entraîne que σ contient un bicycle. Impossible.

IS08

l'élève qui invente des formules.



On dresse un tableau pour valider sa formule mais aussi pour l'invalider :

x	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{2}/2$
$\text{Arcsin}(x)$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/4$
$4.x. x /\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$4/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$
$\text{Arctan}(4.x. x /\sqrt{3})$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\text{Arctan}(4/\sqrt{3}) \neq \pi/2$	pas $\pi/4$

Sa formule n'est valide qu'en quelques points.

Que fait on pour x entre -1 et 1 ? (pour qu'existe l'arcsinus).

On pose donc $\theta = \text{Arcsin}(x)$ et on calcule

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Et là, le matheux hurle « attention au signe ! ». On a en effet écrit $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$. Et si ceci satisfait celui qui se focalise sur les calculs, ceci ne satisfait jamais le scientifique. On a au mieux $|\cos(\theta)| = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$, ou si on écrit mal $\cos(\theta) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$.

Mais voilà, par construction, $\theta = \text{Arcsin}(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et son cosinus est positif.

On peut donc finalement remonter : $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (la tangente est la bonne, et le domaine aussi !).

On a donc la formule $\text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (plus esthétique selon moi que la formule de l'élève).

IS08

Mind your decisions.



Par construction, sur la ligne k (indexation pythonienne commençant à 0) il y a $2k + 1$ triangles.

Avec l'indexation non pythonienne, sur la figure n , il y a n lignes de longueurs 1, 3, 5 jusqu'à $2n - 1$.

Sur la figure 5, il y a toujours autant de triangles gris que sur la 4 : il y en a 10.

Et il y a $6 + (9)$ triangles, ce qui en fait 15.

Sur la figure 250, les lignes ont pour longueurs $[1, 3, 5, 7, \dots, 497, 499]$.

Le nombre total de triangles est $\sum_{k=1}^{250} (2k - 1)$ qui se

développe en $2 \cdot \sum_{k=1}^{250} k - \sum_{k=1}^{250} 1$. On trouve 62 500.

Les triangles blancs correspondent aux k impairs, qu'on va noter $k = 2p + 1$ avec p de 0 à 124.

(la dernière ligne est grise)

3 points

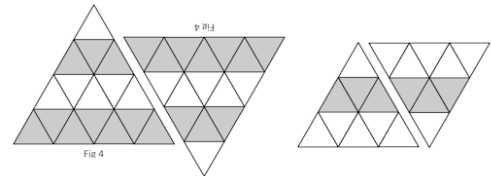
Figure	1	2	3	4	5
White triangles	1	1	6	6	
Grey triangles	0	3	3	10	

a) Complete the table for figure 5.
 b) Find the total number of triangles for Figure 250.
 c) Find the percentage of grey triangles in Figure 250.

Les triangles gris correspondent aux k pairs qu'on va noter $k = 2p$ pour p de 1 à 125.

Bilan : 31 125 triangles blancs, 31 375 triangles gris.

Je me demande si il y a un argument super joli en mettant deux triangles triangles côte à côte.



LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024

IS08
25- points

2025