LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 29 novembre
$\mathcal{M.P.S.I.}$2

2024 2025

IS09

♡ 0 ♡ Exprimez $\tan(\theta)$ à l'aide de $\sin(2.\theta)$ et $\cos(2.\theta)$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Donnez une primitive de $\sin^{-1}$ et justifiez : $\int_{\pi/3}^{\pi/4}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}+\frac{1}{\cos(\theta)}\right).d\theta = \ln\left(1+\frac{2.\sqrt{3}}{3}\right)$. 4 pt.

♡ 2 ♡ Montrez : $2.Arcsin(3/5) = Arccos(7/25)$. 2 pt.

♡ 3 ♡ Qui de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ et se $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ décompose en produit de tricycles ? 2 pt.

◊ 0 ◊ D'ailleurs décomposez la en produit de tricycles. 2 pt.

♠ 0 ♠ L'objectif de cet exercice est de montrer qu'on ne peut pas écrire la fonction exponentielle comme somme de fonctions réelles périodiques (attention aux arguments trop rapides, une somme de fonctions périodiques peut ne pas être périodique, comme on l'a vu dans l'IS précédente, si leurs périodes n'ont pas de commune mesure ; et je connais des fonctions périodiques (non continues) non bornées).
On suppose qu'il existe une décomposition de l'exponentielle exp comme somme de n fonctions périodiques f_1 à f_n $\forall t,\ e^t = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ (f_k a pour période le réel non nul p_k). En effectuant $\frac{e^{t+p_n}-e^t}{e^{p_n}-1}$ montrez qu'alors exp est combinaison de $n-1$ fonctions périodiques. Concluez. 4 pt.

◊ 1 ◊ Les trois suites (a_n), (b_n) (c_n) et (d_n) vérifient

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$a_n = 2.a_{n-1}$	$b_n = n^2.b_{n-1}$	$c_n = 2^n.c_{n-1}$	$d_n = 2.(d_{n-1})^2$	et $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 1$

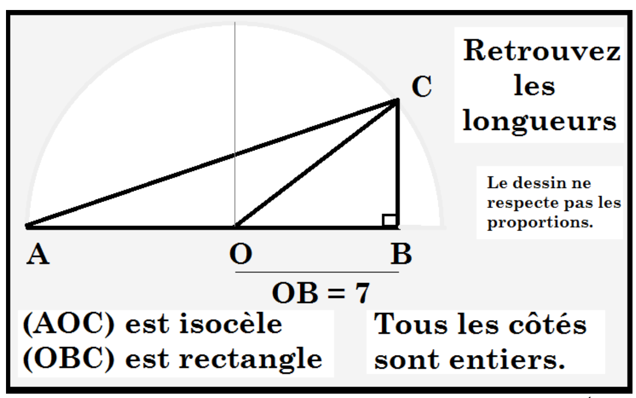
Exprimez a_{100}, b_{100}, c_{100} et d_{100}. 4 pt.
Lesquels acceptez vous de calculer explicitement par un programme Python ? 1 pt.

$2^t.y'_t + t^2.y_t = 0$ et $y_0 = 1$. Calculez $y_{1/\ln(2)}$. 4 pt.

$$\tan(x+y) = 2.\tan(x-y)$$
$$\Rightarrow \sin(2.x) = 3.\sin(2.y)$$

2 pt.

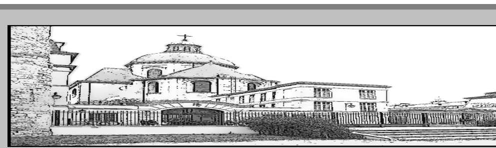
♣ $y'_t = t.y_t - 1 \Leftrightarrow y_t = \cfrac{1}{t+\cfrac{1}{t+\cfrac{2}{t+\cfrac{3}{t+\frac{4}{t+\dots}}}}}$. 6 pt.



◊ 2 ◊ Les suites $a_n$et $b_n$sont liées par $\forall n,\ a_{n+1} = 3.a_n + 2.b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2.b_n$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Trouvez M vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$. Trouvez D diagonale vérifiant $M.P = P.D$. Calculez D^n, M^n et a_n pour tout n. 5 pt.

$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = k.(q^2-p^2)$, $b = k.(2.p.q)$, $c = k.(q^2+p^2)$.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 29 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025
IS09
CORRECTION

IS09 Questions de cours.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(2.\theta)}{1+\cos(2.\theta)} = \frac{1-\cos(2.\theta)}{\sin(2.\theta)}$$

Le cours donne une primitive de $\frac{1}{\sin}$ utilisable sur $]0,\ \pi[\ :\ \theta \longmapsto \ln(\tan(\theta/2))$. Et pour le cosinus, on translate avec $\theta \longmapsto \ln\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)$.
Ici, on somme par linéarité et l'intégrale vaut

$$\Big[\ln\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} + \Big[\ln\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

On a besoin de

$$\tan\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\Big(\frac{\pi}{8}\Big) = \frac{1-\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\tan\Big(\frac{5.\pi}{12}\Big) = \frac{1-\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}+2,\ \tan\Big(\frac{3.\pi}{8}\Big) = \frac{1-\cos(3.\pi/4)}{\sin(3.\pi/4)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}+1$$

Bref, on est confronté à

$$\ln\Big(\frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+1}\Big) = \ln\Big(\frac{1+2.\sqrt{3}/3:}{2-1}\Big) = \ln\Big(1+\frac{2.\sqrt{3}}{3}\Big)$$

Pour comparer $2.Arcsin(3/5) = Arccos(7/25).$, plaçons les dans un intervalle utile, puis comparons leurs cosinus.

$$\cos(2.Arcsin(3/5)) = 1-2.\sin^2\Big(Arcsin\Big(\frac{3}{5}\Big)\Big) = 1-2.\Big(\frac{3}{5}\Big)^2 = \frac{25-2.8}{25} = \frac{7}{25}$$

Mais avoir le même cosinus ne suffit pas. Toutefois, les deux sont entre 0 et π (double d'un réel de $[0,\ \pi/2]$ et réel de $[0,\ \pi]$).
Sur cet intervalle, le cosinus est injectif. On peut identifier les deux angles.

Par réflexe, on décompose en produit de cycles et on calcule la signature :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{(1\ 2\ 5\ 8)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)} \circ \overrightarrow{(6\ 7)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 5\ 8\ 6\ 7)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)}$
$(-1).(-1).(-1) = -1$	$(-1).(-1) = 1$

Les tricycles ont pour signature 1. Tout produit de tricycles a pour signature 1.
La première permutation n'est pas un produit de tricycles.

Mais est-on sûr si la seconde l'est ?
Le cours donne-t-il la réciproque (la réponse est oui, mais c'est plutôt un exercice : les tricycles engendrent A_n).
D'ailleurs, on nous demande de le faire, alors.

Je décompose déjà en produit de bicycles.

$$\overrightarrow{(1\ 2\ 5\ 8\ 6\ 7)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)} = \Big(\overrightarrow{(1\ 7)} \circ \overrightarrow{(1\ 6)} \circ \overrightarrow{(1\ 8)} \circ \overrightarrow{(1\ 5)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)}\Big) \circ \overrightarrow{(3\ 4)}$$

Ensuite, je sais que quand deux bicycles ont un élément commun, leur composée est un tricycles : $\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b)} = \overrightarrow{(a\ b\ c)}$

$$\overrightarrow{(1\,2\,5\,8\,6\,7)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} = \left(\overrightarrow{(1\,7)} \circ \overrightarrow{(1\,6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,8)} \circ \overrightarrow{(1\,5)}\right) \circ \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$$

Mais les deux derniers n'ont pas d'élément commun. Justement, on va insérer un bicycle au carré qui ne sert à rien

$$\overrightarrow{(1\,2\,5\,8\,6\,7)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} = \left(\overrightarrow{(1\,7)} \circ \overrightarrow{(1\,6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,8)} \circ \overrightarrow{(1\,5)}\right) \circ \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(2\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,3)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$$

et maintenant on a nos tricycles

$$\overrightarrow{(1\,2\,5\,8\,6\,7)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} = \left(\overrightarrow{(1\,6\,7)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,5\,8)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,2\,3)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(2\,3\,4)}\right)$$

Il y a d'autres méthodes.
En avez vous vu en colles ? C'est vrai que ça aide.
Sinon, pour corriger, je regarderai juste si le produit que vous proposez donne bien la permutation de l'énoncé, dans la mesure où il n'y a pas de méthode universelle et où toute réponse intelligente rapporte des points.

IS09

Trois qsuites qui sont quatre, comme les mousquetaires chez Alexandre Dumas.

On calcule les premiers termes si vraiment on en a besoin pour une récurrence, puis on donne les formules

suite	$a_n = 2.a_{n-1}$	$b_n = n^2.b_{n-1}$	$c_n = 2^n.c_{n-1}$	$d_n = 2.(d_{n-1})^2$
formule	$a_n = 2^n$	$b_n = (n!)^2$	$c_n = \sqrt{2^{n.(n+1)}}$ $c_n = 2^{1+2+3+\ldots+n}$	$d_n = 2^{(2^n-1)}$

Pour la suite (d_n), on peut conjecturer après le calcul des premiers termes

$d_0 = 1$	$d_1 = 2.1^2 = 2$	$d_2 = 2.2^2 = 2^3$	$d_3 = 2.(2^3)^2 = 2^7$	$d_4 = 2.(2^7)^2 = 2^{15}$	$d_5 = 2.(2^{15})^2 = 2^{31}$	$d_6 = 2.(2^{31})^2 = 2^{63}$

On peut certes mener une récurrence si on a l'esprit P.S.I. ou M.P. tout court : $d_n = 2^{(2^n-1)}$.

La recherche a initialisé la propriété, et pour l'hérédité :
on se donne n entier quelconque, on suppose $d_n = 2^{(2^n-1)}$ et on calcule

$$d_{n+1} = 2.(d_n)^2 = 2.(2^{(2^n-1)})^2 = 2.2^{2.(2^n-1)} = 2^{(1+2^{n+1}-2)} = 2^{(2^{n+1}-1)}$$

C'est beau, ça passe tout seul.

Mais si on est un élève qui vise l'étoile, on se dit que c'est la suite $(2.d_n)$ qui doit être bien car elle aura un exposant plus cool : $2.d_n = 2^{2^n}$.
Et même, ce serait donc la suite $\delta_n = \ln(2.d_n)$ qui mérite le détour.
La relation de récurrence nous dit

$$\delta_{n+1} = \ln(2.d_{n+1}) = \ln(2.2.(d_n)^2) = \ln((2.d_n)^2) = 2.\ln(2.d_n) = 2.\delta_n$$

Et là, plus de récurrence : (δ_n) est une suite géométrique de raison 2, c'est fini !

Si vous trouvez la seconde démonstration plus classe que la première, vous pouvez viser la M.P.
Si la seconde démonstration vous plait moins que la récurrence, vous êtes P.S.I. dans l'âme.

Des programmes pour les calculer ?

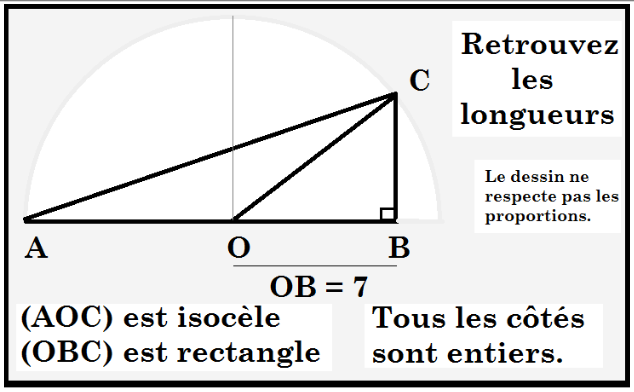
$a_n = 2^{100}$	$b_{100} = (100!)^2$

`2**n`
 	
`p = 1`
`for k in range(100) :`
`....p *= 2`
	`from math import *`
	
	`p = 1`
	`for k in range(1, 101) :`
	`....p *= k*k`

$c_{100} = 2^{5050}$	$d_{100} = 2^{1267650600228229401496703205375}$
`2**5050`	`stop !`

Bon, Python ne va pas refuser un nombre à 5050 chiffres en binaire (1521 chiffres en décimal, ça passe).
d_{100} n s'envisage même pas.

IS09 Deux triangles.



On commence par le triangle rectangle (OBC) (rectangle en B). Il est non seulement rectangle (en B) mais aussi à côtés entiers.
Il existe donc trois entiers vérifiant $OB = k.(q^2 - p^2)$, $BC = k.(2.p.q)$ et $OC = k.(q^2 + p^2)$ (les homothéties sont éventuellement autorisées).
Mais comme 7 est premier, on a forcément $k = 1$ puis $(q + p).(q - p) = 7$. On n'a pas le choix : la somme vaut 7 et la différence 1 : $7 = 4^2 - 3^2$.
On trouve alors les deux autres côtés (dessin non proportionnel en effet) : $2.4.3$ et $4^2 + 3^2$.

C'est le triplet $(7,\ 24,\ 25)$.

L'isocélisme du triangle (AOC) donne $AO = 25$ puis par relation de Chasles : $AB = 32$.

On regarde à présent le grand triangle $(A,\ B,\ C)$, rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 32^2 + 24^2 = (4.8)^2 + (3.8)^2 = 8^2.(4^2 + 3^2) = 8^2.5^2$$

L'hypoténuse vaut 40, mais sans calculer $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = (40)^2$.
Bon, c'est vrai, ça fait peu de différence en temps de calcul. mais en esthétisme et en efficacité, ça sent les maths au moins !

IS09 Equation différentielle.

On met l'équation $2^t.y'_t + t^2.y_t = 0$ sous la forme $y'_t + t^2.2^{-t}.y_t = 0$ ou même $\dfrac{y'_t}{y_t} = -t^2.2^{-t}$ si on est physicien (mais alors on l'avoue).
On pose donc $a_t = t^2.2^{-t}$ et on en cherche la primitive nulle en 0 en intégrant deux fois par parties

$$\int_0^t u^2.2^{-u}.du = \left[u^2.\frac{2^{-u}}{-\ln(2)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{2.t.2^{-t}}{\ln(2)}.du = \ldots = \left[-\frac{t^2.2^{-t}}{\ln(2)} - \frac{2.t.2^{-t}}{(\ln(2))^2} - \frac{2^{-t}}{(\ln(2))^3}\right]_0^t$$

Oui, j'ai écrit $\displaystyle\int_0^t f(u).du$ et pas $\displaystyle\int_0^t f(t).dt$. Mais sinon, si on dit juste qu'on veut une primitive, on propose et vérifie

$$t \longmapsto -\frac{t^2.2^{-t}}{\ln(2)} - \frac{2.t.2^{-t}}{(\ln(2))^2} - \frac{2^{-t}}{(\ln(2))^3}$$

Pour se simplifier la vie, on prend la primitive nulle en 0

$$t \longmapsto -\frac{t^2.2^{-t}}{\ln(2)} - \frac{2.t.2^{-t}}{(\ln(2))^2} + \frac{(1 - 2^{-t})}{(\ln(2))^3}$$

On colle un signe moins, on met dans une exponentielle
On tient nos solutions :$t \longmapsto \exp\Big(-\dfrac{t^2.2^{-t}}{\ln(2)} - \dfrac{2.t.2^{-t}}{(\ln(2))^2} + \dfrac{(1 - 2^{-t})}{(\ln(2))^3}\Big)$
En maths, je persiste à vous recommander directement $y_0.\exp\Big(-\int_0^t a_u.du\Big)$ bien plus logique et naturelle que l'aller retour « je mets une constante puis je la calcule avec la condition initiale ».

On calcule en $t = \dfrac{1}{\ln(2)}$ (qui ne se simplifie pas) :

$$y_{1/\ln(2)} = e^{\frac{5-2.e}{e.(\ln(2)))^3}}$$

IS09 Exponentielle et somme de fonctions périodiques.

On part dans un raisonnement par l'absurde.

On suppose donc $\forall t,\ e^t = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ avec chaque $f_k$périodique de période p_k(non nulle).
En particulier

$$\forall t,\ e^{t+p_n} = \sum_{k=1}^{n} f_k(t+p_n) = f_n(t+p_n) + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t+p_n) = f_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t+p_n)$$

Mais en même temps : $e^t = f_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t+p_n)$.
En soustrayant :

$$e^{t+p_n} - e^t = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(f_k(t+p_n) - f_k(t)\Big)$$

Mais par propriété de l'exponentielle, le premier membre vaut aussi $e^t.(e^{p_n}-1)$.
On divise par $e^{p_n}-1$ (non nul, puisque p_n n'est pas nul)

$$e^t = \frac{e^{t+p_n}-e^t}{e^{p_n}-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k(t+p_n)-f_k(t)}{e^{p_n}-1}$$

cette formule est vraie pour tout n.
Et dans la somme il y a $n-1$ termes.
Et chaque terme est une fonction périodique. En effet, si on pose $g_k(t) = \dfrac{f_k(t+p_n)-f_k(t)}{e^{p_n}-1}$ alors on a bien

$$g_k(t+p_k) = \frac{f_k(t+p_k+p_n)-f_k(t+p_k)}{e^{p_n}-1} = \frac{f_k(t+p_n)-f_k(t)}{e^{p_n}-1} = g_k(t)$$

(les fonctions sont changées, mais pas les périodes).

On a donc montré, avec nos notations

$$\Big(\exists(f_1,\dots f_n),\ p = \sum_{k=1}^{n} f_k\Big) \Rightarrow \Big(\exists(g_1,\dots g_{n-1}),\ p = \sum_{k=1}^{n-1} g_k\Big)$$

On a prouvé, en notant P_n la propriété « exp est une somme de n fonctions périodique »

$$\forall n\ P_n \Rightarrow P_{n-1}$$

Et de quoi parle le programme de colles ? de la descente infinie de Fermat.

S'il existait un n_0 tel que P_{n_0}soit vraie, alors on aurait une suite d'entiers naturels strictement décroissante. On aurait notre contradiction.

Bilan : aucune propriété P_nn'est vraie. exp ne peut pas être somme d'applications périodiques.

> *Celà dit,* exp *est combinaison d'une application* $2.i.\pi$ *périodique.*
> *Et ce que je ne peux pas faire dans mon raisonnement, c'est diviser par* $e^{p_n}-1$ *si j'accepte* $p_n = 2.i.\pi$.

IS09 Suites entrelacées.

Les suites $a_n$et b_n étant liées par $\forall n,\ a_{n+1} = 3.a_n + 2.b_n$ *et* $b_{n+1} = a_n + 2.b_n$, on a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.a_n + 2.b_n \\ a_n + 2.b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

La raison à gauche est donc $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisqu'on a nous a donné P, il suffit de constater

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrences immédiates : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $M = P.D^n.P^{-1}$ puis enfin $U_n = M^n.U_0$.

On termine les calculs (puis on vérifie la véracité de la formule pour $n = 0$ et $n = 1$ pour voir si on ne s'est pas trompé)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \frac{1}{3} = \frac{1}{3} . \begin{pmatrix} 2.4^n + 1 & 2.4^n - 2 \\ 4^n - 2 & 4^n + 1 \end{pmatrix}$$

et en multipliant par U_0 : $\boxed{a_n = \frac{2.4^n + 1}{3}.a_0 + \frac{2.4^n - 2}{3}.a_1}$

IS09 Trigonométrie.

On suppose $\tan(a + b) = 2.\tan(a - b)$ (sans se préoccuper du domaine, l'énoncé semble assez souple là dessus).

On remplace tan par sin / cos et on effectue des produits en croix

$$\sin(a + b).\cos(a - b) = 2.\sin(a - b).\cos(a + b)$$

On utilise $\sin(p).\cos(q) = \frac{\sin(p + q) + \sin(p - q)}{2}$ de chaque côté

$$\frac{\sin((a + b) + (a - b)) + \sin((a + b) - (a - b))}{2} = \sin((a - b) + (a + b)) + \sin((a - b) - (a + b))$$

On fait passer le 2 de l'autre côté

$$\sin(2.a) + \sin(2.b) = 2.\big(\sin(2.a) + \sin(-2.b)\big)$$

A droite il restera un seul $\sin(a)$ et à gauche trois $\sin(2.b)$.

C'est même un raisonnement par équivalences.

IS09 Une question étrange avec une équation différentielle.

On va se permettre tout ce qu'on veut, puisque la formule à trouver contient elle même des points de suspension.

On part de $y' - (t.y - 1)$ avec l'espoir d'obtenir 0.

On divise par y comme tout physicien qui se respecte

$$\frac{y'}{y} - t + \frac{1}{y}$$

Et quand je calcule $\frac{1}{y} - t$ j'ai $\left(t + \cfrac{2}{t + \cfrac{3}{t + \cfrac{4}{t + \frac{5}{t + \dots}}}}\right) - t$ c'est à dire $\cfrac{2}{t + \cfrac{3}{t + \cfrac{4}{t + \frac{5}{t + \dots}}}}$.

Et qui est $\dfrac{y'}{y}$? C'est la dérivée de $\ln(y)$, c'est à dire de $\ln\left(\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t+\dfrac{2}{t+\dfrac{3}{t+\frac{4}{t+\ldots}}}}}\right)$. Et quand je dérive $-\ln\left(t+\dfrac{2}{t+\dfrac{3}{t+\dfrac{4}{t+\frac{5}{t+\ldots}}}}\right)$