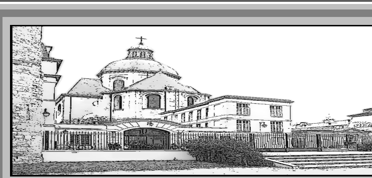
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 4 décembre
M.P.S.I.2

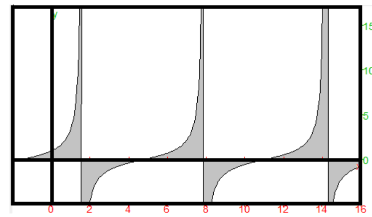


2024 2025

IS10

♡ 0 ♡ Résolvez $ch(x) = sh(x) + 2$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que les solutions de $y'_t + a_t.y_t = 0$ avec condition initiale $y_0 = K$ sont de la forme... ah non, je ne vais pas en plus donner la réponse ! 2 pt.



♡$_2$ Par son graphe, on dirait bien une tangente, oui mais de qui ? $x \longmapsto \dfrac{\sin(x) - \cos(x) + 1}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$. 2 pt.

♡$_3$ Montrez (par disjonction de cas ?) que dans $\mathbb{Z}$, Min est distributif sur Max. 2 pt.

♡ 4 ♡ Soit A un polynôme de degré d :$A = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i.X^i$ et B un polynôme de degré d' : $B = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} b_j.X^j$. Donnez le coefficient de X^k dans le produit $A.B$ et justifiez qu'il est nul pour k strictement plus grand que $d + d'$. 3 pt.

♡ 5 ♡ Donnez la forme logarithmique de la réciproque de la fonction sh , puis dérivez la fonction obtenue. 2 pt.

♢ 0 ♢ Montrez pour θ dans $]0, \ \pi[$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2.t.\cos(\theta) + 1}} = \ln\Big(\tan\Big(\frac{\pi + \theta}{4}\Big)\Big) - \ln\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)$ en pensant à mettre sous forme canonique la quantité sous le radical. 4 pt.

♢ 1 ♢ Calculez $\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in S_3 \\ 1 \leqslant k \leqslant 3}} \sigma(k)$ et $\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in S_3 \\ 1 \leqslant k \leqslant 3}} k^{\sigma(k)}$. 3 pt.

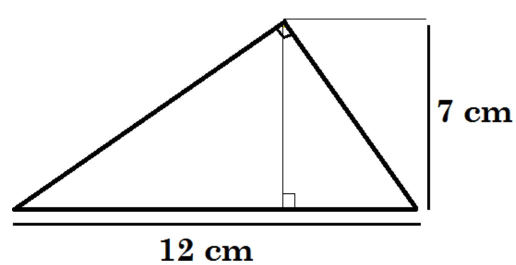
♠ 0 ♠ n est un entier naturel fixé, calculez $\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in S_n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \sigma(k)$ et $\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in S_n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} k^{\sigma(k)}$. 3 pt.

♢ 2 ♢ Sachant que $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ a pour décomposition en éléments simples$1 - \dfrac{26}{X+1} + \dfrac{24}{(X+1)^2} + \dfrac{20}{X+2}$ retrouvez P et Q. Calculez $\dfrac{P(2)}{Q(2)}$. Factorisez $P(X)$ et décomposez $\dfrac{Q(X)}{P(X)}$ en éléments simples. 5 pt.

♢ 3 ♢ Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} & 4 \\ -4 & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$. 3 pt.

♢ 4 ♢ Montrez par récurrence sur n, pour f de $[a, \ a+h]$ dans $\mathbb{R}$ (dérivable autant de fois qu'on veut) : $f(h) = \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.h^k\Big) + \int_0^1 \Big(\Big(\frac{(1-t)^n}{n!}\Big).\Big(h^{n+1}.f^{(n+1)}(t.h)\Big)\Big).dt$. 3 pt. On prend $f = x \longmapsto \ln(1+x)$. Calculez f', f'' et $f^{(3)}$. Déterminez $f^{(k)}(x)$ pour tout k. 3 pt. On rappelle la définition de la série harmonique alternée : $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Retrouvez : $|\ln(2) - A_n| = \Big|\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}.dt\Big| \leqslant \frac{1}{n+1}$. 3 pt.



♣♡$_0$ Le colleur voulait poser un exercice où la réponse est 42. Alors il a donné le triangle rectangle à droite et il a dit « calculez son aire ». Pourquoi va-t-il se faire défoncer par le professeur de la classe ? 2 pt.

♣♡$_1$ Combien l'équation $x^x = 2^{2048}$ a-t-elle de solutions entières ? Combien a-t-elle de solutions réelles ? 3 pt.

IS10 Questions de cours.

L'équation $ch(x) = sh(x) + 2$ donne $e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x} + 4$ (j'ai éliminé les dénominateurs).
Il reste $e^{-t} = 2$ soit $x = -\ln(2)$.

On pose $t = \tan(x/2)$ et on remplace

$$\frac{\sin(x) - \cos(x) + 1}{\sin(x) + \cos(x) - 1} = \frac{\dfrac{2.t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{\dfrac{2.t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 1} = \frac{2.t - 1 + t^2 + 1 + t^2}{2.t + 1 - t^2 - 1 - t^2} = \frac{2.(t^2+t)}{2.(t-t^2)} = \frac{1+t}{1-t}$$

On reconnaît alors la formule $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 = \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)}$ car $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Finalement, on reconnaît $\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et d'autres chemins permettent d'y arriver.

Pour la pure question de cours, on pose $z_t = y_t.e^{A_t}$ où A est une primitive de a.
On dérive : $z'_t = y'_t.e^{A_t} + y_t.(A'_t.e^{A_t}) = (y'_t + A'_t.y_t).e^{A_t} = (y'_t + a_t.y_t).e^{A_t}$.
Comme une exponentielle ne s'annule jamais, on a équivalence entre « y est solution de l'équation différentielle » et « $'_t$est identiquement nulle ».
Par théorème d'analyse, il y a équivalence avec z est constante.
On calcule sa valeur en 0, on trouve K si on a eu le bon goût de prendre pour A la primitive de a nulle en 0.
On a donc $\forall t,\ y_t.e^{A_t} = K$ et en divisant : $y_t = K.e^{-A_t}$avec $A_t = \displaystyle\int_0^t a_u.du$.

Min et Max sont deux lois internes sur $\mathbb{Z}$ (le minium de deux entiers relatifs est encore un entier relatif). On doit montrer ici $\forall(a,\ b,\ c) \in \mathbb{Z}^3,\ Min(a,\ Max(b,\ c)) = Max(Min(a,\ b),\ Min(a,\ c))$ *comme* $a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$
On disjoncte les cas (ordre total, il y en a six, mais on peut jouer sur des symétries) et on dresse un tableau

	$Max(b,c)$	$Min(a,\ Max(b,c))$		$Max(Min(a,b),\ Min(a,c)$	$Min(a,\ b)$	$Min(a,\ c)$
$a \leqslant b \leqslant c$	c	a		a	a	a
$a \leqslant c \leqslant b$	b	a		a	a	a
$b \leqslant a \leqslant c$	c	a		a	b	a
$b \leqslant c \leqslant a$	c	c		c	b	c
$c \leqslant a \leqslant b$	b	a		a	a	c
$c \leqslant b \leqslant a$	b	b		b	b	c

On prend donc deux polynômes $A = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i.X^i$ et $B = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j.X^j$ avec $a_i = 0$ pour $i > d$ et $b_j = 0$ pour $j > d'$ (et même $a_d \neq 0$ et $b_{d'} \neq 0$).
La définition du produit $A.B$ est $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k.X^k$ avec

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i.b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}.b_j$$

La convention sur les a_i nuls dès qu'on dépasse le degré permet de ne pas avoir des formules telles que $\displaystyle\sum_{i=Max(0,k-d')}^{Min(k,d)} a_i.b_{k-i}$.

Prenons $k = d + d'$ pour commencer et séparons la somme en trois

$$c_{d+d'} = \sum_{i=0}^{d+d'} a_i.b_{d+d'-i} = \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i.b_{d+d'-i}\right) + \left(a_d.b_{d+d'-d-i}\right) + \left(\sum_{i=d+1}^{d+d'} a_i.b_{d+d'-i}\right)$$

La somme $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i.b_{d+d'-i}\right)$ est nulle à cause des $b_{d+d'-i}$ et la somme $\left(\displaystyle\sum_{i=d+1}^{d+d'} a_i.b_{d+d'-i}\right)$ est nulle à cause des a_i.

Il ne reste que le terme du milieu, non nul (intégrité).

Prenons $k > d + d'$ et séparons en deux

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i} = \Big(\sum_{i=0}^{d} a_i.b_{k-i}\Big) + \Big(\sum_{i=d+1}^{k'} a_i.b_{k-i}\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{d} a_i.0\Big) + \Big(\sum_{i=d+1}^{k'} 0.b_{k-i}\Big) = 0$$

IS10 Intégrale.

On se donne x et on résout $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$ d'inconnue t en prenant la racine positive de l'équation $T - 2.x - \dfrac{1}{T} = 0$ d'inconnue T (avec $T = e^t$). On calcule le discriminant ($\Delta = 4 + 4.x^2$ toujours positif) et on ne garde donc que la plus grande des deux racines (une positive, une négative) : $T = x + \sqrt{x^2+1}$.

On explicite t et ensuite on peut dériver

$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1 + \dfrac{2.x}{2..\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$	$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

On peut aussi partir de $\forall x,\ sh(Argsh(x)) = x$, dériver et utiliser $ch(t) = \sqrt{1+sh^2(t)}$.

On met ensuite sous forme canonique

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2.t.\cos(\theta) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(t-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}}$$

Cette forme nous assure d'ailleurs que le dénominateur ne s'annulera jamais et que la quantité sous le radical sera toujours positive. On sort ensuite le sinus (sans valeur absolue, car on est sur $]0,\ \pi[$

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2.t.\cos(\theta) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(t-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}} = \frac{1}{\sin(\theta)}.\frac{1}{\sqrt{1 + \Big(\dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)^2}}$$

On peut calculer l'intégrale en changeant de variable $u = \dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et $du = \dfrac{dt}{\sin(\theta)}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2.t.\cos(\theta) + 1}} = \frac{1}{\sin(\theta)}.\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + \Big(\dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)^2}} = \int_{u=\dots}^{u=\dots} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

avec pour bornes $\dfrac{0-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et $\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ qui peuvent toutes deux nous rappeler quelquechose.
On intègre avec notre fonction $Argsh$ sous forme logarithmique

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2.t.\cos(\theta) + 1}} = \Big[\ln(x + \sqrt{x^2+1}\Big]_{u=-\cos(\theta)/\sin(\theta)}^{u=\tan(\theta/2)}$$

Mais que vaut $\ln\Big(\tan\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big) + \sqrt{1+\tan^2\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)}\Big)$? C'est $\ln\Big(\tan\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big) + \dfrac{1}{\cos(\theta/2)}\Big)$ et j'arrive même à $\ln\Big(\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} + \dfrac{1}{\cos(\theta/2)}\Big)$ et je peux pousser jusqu'à la tangente d'un angle en $\dfrac{\theta+\pi}{4}$.

Et on a aussi $\ln\Big(-\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sqrt{1+\dfrac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}}\Big)$ qui devient $\ln\Big(-\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2(\theta)}}\Big)$ et enfin $\ln\Big(\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)$. Le cours nous assure qu'on a maintenant $\ln\Big(\tan\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)\Big)$.

IS10 Matrices.

On nomme les coefficients $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 4 \\ -4 & d \end{pmatrix}$ et on résout : $1 + a.b = c$, $b - 3.b = -4$, $a - 3.a = 4$ et $a.b + 9 = d$.

On effectue : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & 1 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & 1 \\ b & c & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ f & 4 & g \\ h & i & 9 \end{pmatrix}$ donne $a - b = 0$, $a + c = 0$, $-b + c = 0$ (diagonale) ainsi que $3.a + b = f$, $4.b + a.c = h$, $3 - c = d$, $b + 5.c = i$, $-3 = e$, $g = -a + 5$

On trouve $a = b = c = 0$ avec les trois premières (bingo ! matrice triangulaire, et on termine le calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

IS10 Elements simples.

On commence par l'exercice niveau lycée

$$1 - \frac{26}{X+1} + \frac{24}{(X+1)^2} + \frac{20}{X+2} = \frac{(X+1)^2.(X+2) - 26.(X+1).(X+2) + 24.(X+2) + 20.(X+1)^2}{(X+1)^2.(X+2)}$$

On effectue $\begin{array}{ccccccc} X^3 & + & & & & X^3 \\ +4.X^2 & -26.X^2 & & +20.X^2 & = & -2.X^2 \\ +5.X & -78.X & +24.X & +40.X & & -9.X \\ +2 & -52 & +48 & +20 & & +18 \end{array}$

$$1 - \frac{26}{X+1} + \frac{24}{(X+1)^2} + \frac{20}{X+2} = \frac{X^3 - 2.X^2 - 9.X + 18}{(X+1)^2.(X+2)}$$

calcule puisque c'est demandé en 2 (sous les deux formes d'ailleurs) :

$$1 - \frac{26}{3} + \frac{24}{9} + \frac{20}{4} = 1 - \frac{26}{3} + \frac{8}{3} + 5 = 0 \ et\ 0 = \frac{8 - 2.4 - 9.2 + 18}{(X+1)^2.(X+2)}$$

Ceci nous offre une racine du numérateur. Et si on en profitait pour le factoriser ?

$$X^3 - 2.X^2 - 9.X + 18 = (X-2).(X^2-9) = (X-2).(X-3).(X+3)$$

On factorise donc pour pouvoir passer à l'inverse

$$\frac{1}{\dfrac{X^3 - 2.X^2 - 9.X + 18}{(X+1)^2.(X+2)}} = \frac{(X+1)^2.(X+2)}{(X-2).(X-3).(X+3)} = a + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3} + \frac{d}{X+3}$$

a correspond à la limite en $+\infty$ et il vaut 1.
On réduit au dénominateur commun (méthode des pôles) et on identifie avec le numérateur

$$(X+1)^2.(X+2) = \begin{array}{r} a.(X-2).(X+3).(X-3) \\ +b.(X-3).(X+3) \\ +c.(X-2).(X+3) \\ +d.(X-2).(X-3) \end{array}$$

On sait que ces coefficients existent (système de quatre équations pour quatre inconnues), on déterminer donc leurs valeurs par conditions nécessaires : en 2, en 3 et en -3. On a donc $(2+1)^3.(2+2) = 0 + b.(2-3).(2+3) + 0$ et ainsi de suite

$$\frac{1}{\dfrac{X^3 - 2.X^2 - 9.X + 18}{(X+1)^2.(X+2)}} = \frac{(X+1)^2.(X+2)}{(X-2).(X-3).(X+3)} = 1 - \frac{36}{5.(X-2)} + \frac{40}{3.(X-3)} - \frac{2}{15.(X+3)}$$

L'essentiel n'est pas la valeur exacte, mais la démarche et la compréhension, comme toujours. Et la propreté de votre copie.

IS10 Permutations et produits.

Dans $\prod\limits_{\substack{\sigma\in S_n\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \sigma(k)$ et $\prod\limits_{\substack{\sigma\in S_n\\ 1\leqslant k\leqslant n}} k^{\sigma(k)}$, il y a beaucoup de termes, tous entiers, positifs, et aucun n'est nul. Sinon, ça aurait été agréable.

Il y a combien de termes ? k peut prendre n valeurs, et il y a $n!$ permutations σ.

On commence par $\prod\limits_{\substack{\sigma\in S_3\\ 1\leqslant k\leqslant 3}} \sigma(k)$ et $\prod\limits_{\substack{\sigma\in S_n\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \sigma(k)$

Pour saisir, je prends donc n égal à 3, ce qui fera déjà 18 termes.

$\sigma(k)$	$\sigma = Id$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(2\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$
$k=1$	1	2	3	1	2	3
$k=2$	2	1	2	3	3	2
$k=3$	3	3	1	2	1	1

On doit multiplier tous les termes de ce tableau ? Il y en a bien 18, et six d'entre eux valent 1, six d'entre eux valent 2 et six d'entre eux valent 3.
Le produit vaut $1^6.2^6.3^6$ ce qui fait $(3!)^6$ (valeur 46 656 mais on s'en fout, on n'est pas plus avancé qu'avec 6^6) et on généralise en $(n!)^{n!}$.

Il faut quand même expliquer.

On regroupe les produits en $\prod\limits_{\sigma\in S_n} \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma(k)\Big)$, et dans chaque $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma(k)\Big)$, on a chaque entier de 1 à n une fois et une seule (bijection).
Chaque produit $dsp\Big(\prod_{k=1}^{n} \sigma(k)\Big)$ vaut donc $n!$. Et on a $n!$ tels produits (σ intervient juste comme compteur).

L'autre produit est plus lourd à cause des exposants.

$k^{\sigma(k)}$	$\sigma = Id$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(2\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$
$k=1$	1^1	1^2	1^3	1^1	1^2	1^3
$k=2$	2^2	2^1	2^2	2^3	2^3	2^1
$k=3$	3^3	3^3	3^1	3^2	3^1	3^2

On va lire par ligne et regroupe $1^{somme}.2^{somme}.3^{somme}$ et l'exposant $somme$ est le même pour tous ici : $1+1+2+2+3+3$.

Le produit vaut donc $1^{12}.2^{12}.3^{13}$ et il va se généraliser en $(n!)^{somme}$avec $somme = \dfrac{n.(n+1)}{2}.(n-1)!$.

Si vous aimez : $(n!)^{\frac{(n+1)!}{2}}$ dont je ne sais quoi faire.

On va cette fois écrire notre produit $\prod\limits_{k=1}^{n} \Big(\prod\limits_{\sigma\in S_n} k^{\sigma(k)}\Big)$ et regrouper les exposants en $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{somme_k}$ avec $somme_k = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \sigma(k)$.

Cette somme est faite de $n!$ termes dont certains valent 1, d'autres 2 et ainsi de suite.
Combien des $\sigma(k)$ valent 1 ? Exactement $(n-1)!$ car on a fixé une image par σ et il reste $(n-1)$ images à déterminer parmi $(n-1)$ nombres encore disponibles.
Combien des $\sigma(k)$ valent 2 ? Exactement $(n-1)!$ pour la même raison.

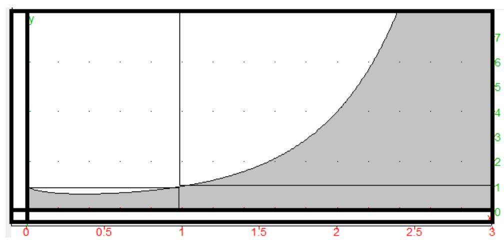
Bref, chacune des n valeurs est prise $(n-1)!$ fois. Et la somme vaut $(n-1)!.\sum\limits_{i=1}^{n} i$. On simplifie en $(n-1)!.\dfrac{n.(n+1)}{2}$ ce qui va se compacter en un joli $\dfrac{(n+1)!}{2}$.

IS10 Des exercices rapides.

Bon, on a pourtant bien $\dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{12.7}{2} = 42$.
Mais le triangle ne peut pas exister. En effet, si sa base vaut ici 12, c'est que le cercle inscrit a pour rayon 6. Et la distance du sommet B au diamètre $[LA,\ C]$ ne peut pas dépasser 6.
En revanche avec une base de 14 et une hauteur de 6 c'était jouable !

Regardons l'équation $x^x = 2^{2028}$ dans $\mathbb{N}$ et réfléchissons en terme de décomposition en produit de facteurs premiers.
Le membre de droite n'a qu'un facteur premier, c'est 2. Il faut donc qu'il en soit de même à gauche.
x est donc une puissance de 2, de la forme 2^a (a entier). L'équation devient $2^{a.2^a} = 2^{2048}$ puis par injectivité du logarithme de base 2 : $a.2^a = 2028 = 2^{11}$.
a est encore une puissance de 2 pour la même cohérence des décompositions, et l'unique solution est 2^3 puisque $2^3.2^8$ donne 2^{11}.
On confirme : $(2^8)^{2^8} = 2^{8.2^8} = 2^{8.256} = 2^{2048}$
Peut on avoir une solution dans $\mathbb{Z}$ (autre que celle de $\mathbb{N}$) ?
Si a est négatif et impair, a^a est négatif (exemple : $(-3)^{-3}$). Perdu.
Si a est négatif et pair, a^a est plus petit que 1 (comme $(-4)^{-4}$). Perdu aussi.

Et ensuite dans $\mathbb{R}$? On a quand même notre solution entière 2^8. On ne peut pas factoriser, l'équation n'est pas polynomiale.
Mais si on représente graphiquement l'application $x \longmapsto x^x$ sur $]0,\ +\infty[$.



Attention, $x \longmapsto x^x$ n'est pas croissante, en dépit des apparences et des affirmations de 80% des élèves.

On revient à la forme $e^{x.\ln(x)}$ et on dérive en $\left(1.\ln(x) + \dfrac{x}{x}\right).e^{x.\ln(x)}$. La dérivée s'annule et change de signe en $1/e$, avec un minimum.
La valeur en 0 (prolongement) est 1.
Les valeurs plus grandes que 1 ne sont donc atteintes qu'une fois. Notre équation n'a qu'une solution. Que ce soit dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$,dans $\mathbb{R}$.

Pour ce qui est de $\mathbb{C}$ je refuse de donner du sens à $(1+i)^{1+i}$.

IS10 Série harmonique alternée.

La formule $f(h) = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}.h^k\right) + \int_0^1 \left(\left(\dfrac{(1-t)^n}{n!}\right).\left(h^{n+1}.f^{(n+1)}(t.h)\right)\right).dt$ sera un de nos classiques (tu as vu le ventre du Télétubies ?). On la montre par récurrence ici, avec intégration par parties pour l'hérédité.
Pour n égal à 0, il n'y a qu'un terme dans la somme, et l'intégrale est simple

$$f(h) = \left(\frac{f^{(0)}(0)}{0!}.h^0\right) + \int_0^1 \left(\left(\frac{(1-t)^0}{0!}\right).\left(h^{0+1}.f^{(0+1)}(t.h)\right)\right).dt$$

Est ce vrai ? $f(h) = f(0) + \int_0^1 f'(t.h).h.dt$? Oui, il suffit d'intégrer en constatant que pour h fixé $t \longmapsto f(t.h)$ se dérive bien en $t \longmapsto h.f'(t.h)$.

$$f(0) + \int_0^1 f'(t.h).h.dt = f(0) + \Big[f(t.h)\Big]_{t=0}^{t=1} = f(0) + f(1.h) - f(0.h) = f(h)$$

Seule difficulté : on intègre en t et h est fixé.
Ou pour certains : il y a trop de variables.

Pour l'hérédité, on se donne n et on suppose la formule vraie à ce rang n

$$f(h) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.h^k\right) + \int_0^1 \left(\left(\frac{(1-t)^n}{n!}\right).\left(h^{n+1}.f^{(n+1)}(t.h)\right)\right).dt$$

et on intègre par parties

$\Big(\dfrac{(1-t)^n}{n!}\Big)$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{1}{n+1}.\Big(\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n!}\Big)$
$h^{n+1}.f^{(n+1)}(t.h)$	$\hookrightarrow$	$h^{n+1}.h.(f^{(n+1)})'(t.h)$

$$f(h) = \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.h^k\Big) + \Big[-\frac{1}{n+1}.\Big(\frac{(1-t)^{n+1}}{n!}\Big).h^{n+1}.f^{(n+1)}(t.h)\Big]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \Big(\Big(\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1).n!}\Big).\Big(h^{n+2}.f^{(n+2)}(t.h)\Big)\Big).dt$$

Une partie du terme crochet est nulle (en $t=1$ car l'exposant de $1-t$ est strictement positif).
L'autre partie vaut $+\dfrac{1}{n+1}.\Big(\dfrac{(1-0)^{n+1}}{n!}\Big).h^{n+1}.f^{(n+1)}(0.h)$ et donne le $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.h^{n+1}$ attendu.

J'espère avoir mis assez de balises pour que vous puissiez traiter cet exercice sans trop de difficultés.
Attention, les élèves qui n'ont toujours pas compris l'usage propre des dérivées se plantent et mettent trop de h^{n+1} dans $f^{(n+1)}(t.h)$.
Rappelons que $f^{(n+1)}(t.h)$ signifie « je calcule $f^{(n+1)}(x)$ puis je remplace x par $t.h$ ».
Ce n'est pas $(t \longmapsto f(t.h))^{(n+1)}$ (qui contient effectivement un h^{n+1} du aux dérivations de composées).

On considère l'application $x \longmapsto \ln(1+x)$ et on la dérive, avec intelligence. Une fois, deux fois, trois fois, et même plus.

$\ln(1+x)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{x+1}$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ $=(1+x)^{-2}$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{-2}{(x+1)^3}$ $=-(1+x)^{-3}$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{6}{(x+1)^{-4}}$ $24.(1+x)^{-4}$	$\hookrightarrow$

Si tu dérives $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{2.(x+1)}{(x+1)^4}$
Si tu dérives $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$ en $x \longmapsto -\dfrac{3.(x+1)^2}{(x+1)^6}$
Alors, tu ne seras jamais un matheux mon fils.
On travaille avec des exposants négatifs pour être efficace.

Le résultat général est un clignotant en $(-1)^{n+1}$ et une factorielle qui grimpe.

$$(x \longmapsto \ln(1+x))^{(n)} = (x \longmapsto (-1)^{n+1}.(n-1)!.(1+x)^{-n})$$

La formule est initialisée pour $n=1$ et $n=2$. On la suppose vraie à un rang n et on redérive

$$(x \longmapsto \ln(1+x))^{(n+1)} = (x \longmapsto (-1)^{n+1}.(n-1)!.(1+x)^{-n})'$$

$$(x \longmapsto \ln(1+x))^{(n+1)} = (x \longmapsto (-1)^{n+1}.(n-1)!(-n).(1+x)^{-n-1})$$

Les signes s'accumulent, la factorielle grimpe comme une stalactite, et l'exposant au dénominateur empire. La formule est validée.

Comme on s'y attend, on va appliquer la formule de la question précédente à cette fonction avec h égal à 1 (il faut bien faire un choix, et celui ci fait apparaitre un $\ln(2)$ et enlève les h^k dans la somme)

$$\ln(1+1) = \Big(\ln(1)\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.\frac{(-1)^{k+1}.(k-1)!}{(1+0)^k}.1^k\Big) + \int_0^1 \Big(\Big(\frac{(1-t)^n}{n!}\Big).\Big(1^{n+1}.\frac{(-1)^n.n!}{(1+t.1)^{n+1}}\Big)\Big).dt$$

Attention, le terme $k=0$ est à traiter à part, notre formule $f^{(n)}$ ne s'y prête pas. C'est une erreur de débutant, mais comme toute erreur de débutant, c'est déjà une erreur.

$$\ln(2) = (0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n.\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}.dt$$

Les factorielles se sont simplifiées, parfois jusqu'au bout, parfois jusqu'à un terme.

Comme dans le cours, on ne calcule pas l'intégrale, sauf à vouloir tourner en rond.
On a reconstruit la série harmonique, et si on la fait passer à gauche, il reste

$$\ln(2) - A_n = (-1)^n.\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}.dt$$

Si on passe à la valeur absolue, comme l'intégrale est positive, il reste bien

$$|\ln(2) - A_n| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}.dt$$

et le $(-1)^n$ nous confirme « une fois sur deux par excès, une fois sur deux par défaut ».
Il reste à majorer l'intégrale, non pas en la calculant (finie la Terminale), mais en majorant la fonction sous le signe somme (bonjour la Sup). On voit que $1+t$ dépasse toujours 1 :

$$|\ln(2) - A_n| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}.dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1)^{n+1}}.dt = \frac{1}{n+1}$$

On a la même majoration que dans le cours, et par encadrement encore, la série harmonique converge vers $\ln(2)$.

Ce serait étrange que dans le cours elle ait une limite, et dans l'IS une autre...