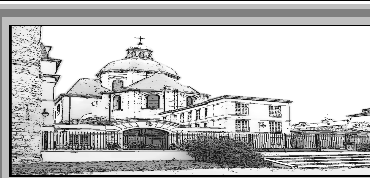
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 11 décembre
M.P.S.I.2



2024 2025

IS11

♡ 0 ♡ Rappelez sans démonstration les formules pour $\sum_{k=0}^{n} 1$, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$. 3 pt.

◇ 0 ◇ On pose pour tout n : $C_n = \sum_{k=0}^{n} k^5$.

Justifiez les deux formules : $C_{n+1} = C_n + (n+1)^5$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k^5 + 5.k^4 + 10.k^3 + 10.k^2 + 5.k + 1)$.

Complétez $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5 - \ldots}{5}$. 4 pt.

♡ 1 ♡ Démontrez pour tout couple d'entiers naturels (n, k) : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. 2 pt.

◇ 1 ◇ Il faut former un groupe de onze élèves de MPSI2, avec deux délégué à choisir parmi eux. Combien de façons de faire ?

Arthûr dit : on choisit 11 élèves parmi 48, puis parmi ces 11 élèves, on en choisit deux, donc $\binom{48}{11} + \binom{11}{2}$.

Arthür dit : on choisit 11 élèves parmi 48, puis parmi ces 11 élèves, on en choisit deux, donc $\binom{48}{11} \times \binom{11}{2}$.

Artuhr dit : il faut choisir deux délégués parmi 48 puis ces deux délégués choisissent neuf élèves parmi les 46 qui restent : $\binom{48}{2} + \binom{46}{9}$.

Hartur dit : il faut choisir deux délégués parmi 48 puis ces deux délégués choisissent neuf élèves parmi les 46 qui restent : $\binom{48}{2} \times \binom{46}{9}$. Qui a tort, qui a raison ? 2 pt.

◇ 2 ◇ La matrice M vérifie $M.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -86 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -61 \end{pmatrix}$. Retrouvez M, calculez $\det(M)$ et $Tr(M)$. Trouvez D diagonale vérifiant $\det(M) = \det(D)$ et $Tr(M) = Tr(D)$. Finissez de diagonaliser M (trouvez P et D et vérifiez que P est inversible). 5 pt.

◇ 3 ◇ La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrez par récurrence sur n : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$. 2 pt.

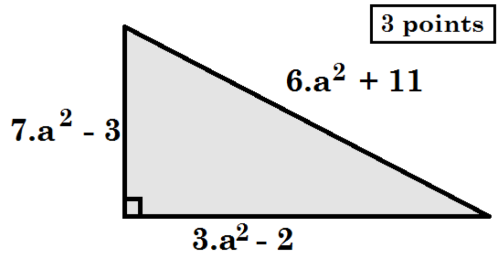
Déduisez : $\forall n,\ F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^n$ ainsi que $F_{2.n} = F_n.(F_{n-1} + F_{n+1})$. 2 pt.

On pose $G_n = Arctan(1/F_n)$. Montrez : $G_{2.n} = G_{2.n+1} + G_{2.n+2}$. 3 pt.

Déduisez : $\sum_{n=1}^{N} G_{2.n+1} = \frac{\pi}{4} - G_{2.N+2}$ pour tout N. Calculez $\sum_{p\ impair} Arctan\left(\frac{1}{F_p}\right)$. 2 pt.

♣ J'ai calculé $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et j'ai trouvé 73 509 832 413 696 puis $\sum_{k=0}^{n} k^3$ et j'ai trouvé 3 330 905 092 288 413 696 (pour le même n). Saurez vous retrouver n (avec Python ? à la physicienne ? au moins son nombre de chiffres ?). 3 pt.

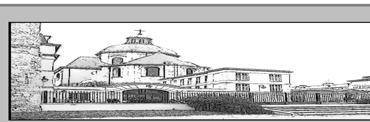
3 points



Retrouvez l'aire et le périmètre.

Cet entier a été choisi pour que ces deux sommes $\sum_{k=0}^{n} k^2$ aient les six mêmes derniers chiffres en écriture décimale (ici : 413 696).

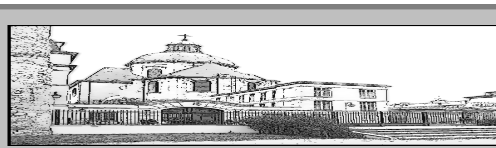
Écrivez un programme Python qui trouve l'entier n suivant vérifiant cette propriété. 3 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 11 décembre

M.P.S.I.2



2024 2025

IS11 CORRECTION

IS11 Sommes d'entiers.

$\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n.(n+1)}{2}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^4 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1).(3.n^2+3.n-1)}{30}$

Partant de $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^5$ on a évidemment $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} k^5 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^5 + (n+1)^5$ par relation de Chasles.

De l'autre côté, on reconnaît la formule du binôme $\sum\limits_{k=0}^{n}(k^5 + 5.k^4 + 10.k^3 + 10.k^2 + 5.k + 1) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^5$.

On ré-indexe et on ajoute le terme inutile

$$\sum_{k=0}^{n}(k^5 + 5.k^4 + 10.k^3 + 10.k^2 + 5.k + 1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 = \sum_{i=1}^{n+1} i^5 = \sum_{i=0}^{n+1} i^5$$

En séparant et en comparant nos deux formules, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^5 + 5.\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10.\sum_{k=0}^{n} k^3 + 10.\sum_{k=0}^{n} k^2 + 5.\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = C_{n+1} = C_n + (n+1)^5$$

On simplifie de chaque côté par $C_n$qui ne sert plus à rien

$$5.\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10.\sum_{k=0}^{n} k^3 + 10.\sum_{k=0}^{n} k^2 + 5.\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^5$$

On isole alors le terme qui nous intéresse

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - 2.\sum_{k=0}^{n} k^3 - 2.\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{5}.\sum_{k=0}^{n} 1$$

et on dit que le reste n'est que calcul

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - 2.\frac{n^2.(n+1)^2}{4} - 2.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6} - \frac{n.(n+1)}{2} - \frac{n+1}{5}$$

IS11 Dénombrement.

La formule de Pascal peut se montrer par dénombrement (parties à $k+1$ éléments parmi $n+1$, contenant ou non l'élément l'élément d'indice $n+1$) ou par calcul

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.(n+1-k-1)!} - \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!.(n-k)!}.\Big((n+1)-(k+1)\Big)$$

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} == \frac{n!.(n-k)}{(k+1)!.(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$$

Pour le choix d'élèves ensuite, les deux Arthur qui additionnent ont tort évidemment. Les possibilités se multiplient dans ce type de raisonnements.

	le groupe puis les délégués au sein du groupe	les délégués puis le groupe sans les délégués
Reste à choisir :	$\dbinom{48}{11}.\dbinom{11}{2}$	$\dbinom{48}{2}.\dbinom{46}{9}$
	$\dfrac{48!}{37!.11!}.\dfrac{11!}{9!.2!} = \dfrac{48!}{2!.46!}.\dfrac{46!}{9!.37!}$	

Il y a une belle égalité. On n'a pas à choisir. Deux des quatre Arthur ont raison.

C'est en fait la formule connue sous le nom de formule comité président si on ne choisit qu'un délégué dans le groupe de k élèves (au sein d'une classe de n élèves) :

$$\binom{n}{k}.k = n.\binom{n-1}{k-1} \text{ et ici } \binom{n}{k}.\binom{k}{2} = \binom{n}{2}.\binom{n-2}{k-2}$$

Elle peut servir à se déplacer en diagonale dans le triangle de Pascal.

> *Dans notre cas de figure, l'application numérique donne* 1 242 736 020 240 *(dix fois plus que le nombre de doigts de pieds d'humains depuis qu'il y a des humains sur terre).*

IS11 Une matrice.

Comment exploiter les informations $M.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -86 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -61 \end{pmatrix}$?

Déjà, on évite de poser la question sur le format de M.
Pour pouvoir calculer $M.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, il faut que M n'ait que deux colonne.
Et pour que $M.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} -24 \\ -86 \end{pmatrix}$, il faut que M ait deux lignes.

Vous ne vous êtes même pas posé la question ? Mauvais point, il faut réfléchir.
Vous avez estimé évident que M était de format 2 sur 2 : bon instinct physique.
Vous avez pris la peine de prouver que M était de format 2 sur 2 : bon esprit mathématique.
Vous avez posé la question : bon esprit critique.

> *Maintenant, on a encore trois démarches pour trouver M.*

Gros bourrin : je pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, j'écris les deux informations, j'ai un gros système, je déprime, et je le résous tant bien que mal. PC.

Scientifique bien formé : je pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, j'écris les deux informations telles que $\begin{matrix} 3.a & +2.b & = & -24 \\ 3.c & +2.d & = & -86 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 2.a & +b & = & -17 \\ 2.c & +d & = & -61 \end{matrix}$, j'ai un gros système, mais je vois qu'il se sépare en deux systèmes : un avec a et b $\begin{matrix} 3.a & +2.b & = & -24 \\ 2.a & +b & = & -17 \end{matrix}$ et un autre, du même modèle, avec c et d. Je résous avec moins d'angoisses. PSI.

Vrai scientifique (matheux quoi !). Je regroupe mes informations en une seule

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -86 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -61 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\left(\begin{array}{c\|c} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c\|c} -24 & -17 \\ -86 & -61 \end{array}\right)$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -17 \\ -86 & -61 \end{pmatrix}$

J'ai juste à multiplier à droite par un inverse

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -17 \\ -86 & -61 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & -17 \\ -86 & -61 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Vous avez l'impression que c'est une astuce incroyable et/ou déloyale ? Vous êtes physicien.
Vous trouvez ça joli et esthétique (car le chemin pour arriver au résultat est plus important que le résultat) : vous êtes matheux.

Bref, on peut calculer la trace et le déterminant

	trace	déterminant
$M = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ -36 & 11 \end{pmatrix}$	1	$-110 + 108 = -2$
$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	$a + b$	$a.b$

a et b sont les deux racines de $X^2 - X - 2$. On trouve -1 et 2. C'est bon signe, on est dans un exercice de maths.

On résout ensuite $M.P = P.D$ en imposant si on veut la première ligne de P

$$\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ -36 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que P est inversible (l'inverse n'est pas demandé).

IS11 Suite de Fibonacci.

On initialise $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ au rang 1 et même au rang 0.

Pour le rang 0, il suffit de remonter la relation : $F_1 = F_0 + F_{-1}$ qui donne $F_{-1} = 1$ et $\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Pour l'hérédité, il suffit de rédiger proprement. On se donne n quelconque. On suppose la formule vraie a u rang n e on calcule en utilisant au bon moment l'hypothèse de rang n et la formule de la suite de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Bref, des points vite gagnés, mais bien gagnés. Du bon travail de Sup.

L'idée est ensuite de passer au déterminant en notant M la matrice :

$$(-1)^n = (\det(M))^n = \det(M^n) = \det(\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix})$$

Qui par réflexe aurait tenté une récurrence sur la formule au lieu de la récurrence matricielle qui donne tout en une fois ?

Ensuite, doit on dire que c'est rusé d'écrire $M^{2.n} = M^n.M^n$?

$$\begin{pmatrix} F_{2.n-1} & F_{2.n} \\ F_{2.n} & F_{2.n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Et on en construit autant qu'on veut des comme ça, avec juste la formule sur M^n et $M^{2.n}$et autres. C'est des maths, on se sert !

Chaque $Arctan(1/F_n)$ existe (sauf pour n égal à 0). Et chaque G_n est un angle.
Pour prouver $G_{2.n+1} = G_{2.n} - G_{2.n+2}$, on va vérifier que ces deux angles ont la même tangente.
$\tan(G_{2.n+1}) = \dfrac{1}{F_{2.n+1}}$ par définition même de l'arctangente.

$$\tan(G_{2.n} - G_{2.n+2}) = \frac{\dfrac{1}{F_{2.n}} - \dfrac{1}{F_{2.n+2}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2.n+1}} . \dfrac{1}{F_{2.n+2}}} = \frac{F_{2.n+2} - F_{2.n}}{F_{2.n}.F_{2.n+2} + 1} = \frac{F_{2.n+1}}{(F_{2.n+1})^2}$$

au numérateur, j'ai utilisé $F_{2.n+2} = F_{2.n+1} + F_{2.n}$, et au dénominateur, j'ai utilisé $F_{2.n}.F_{2.n+2} - (F_{2.n+1})^2 = (-1)^{2.n+1}$ (si la formule du déterminant est vraie à tout rang n, elle l'est aussi au rang $2.n$).
Les deux angles ont la même tangente. Je n'irai pas prétendre qu'ils sont égaux. Sauf si je redeviens élève.

Il faut encore être sur un domaine où la tangente est injective.
Or, G_{n2n+1} est entre 0 et $\pi/2$ comme tout arctangente de réel positif.
Et la différence $\dfrac{1}{F_{2.n}} - \dfrac{1}{F_{2.n+2}}$ est positive (croissance de (F_k)) et plus petite que 1 majoration par $\dfrac{1}{2.n}$ et même par $\dfrac{1}{F_2}$). L'arctangente de ce réel est entre $Arctan(0)$ et $Arctan(1)$. On inclus dans $[0,\ \pi/2[$ pour se simplifier la vie.

Avec l'égalité des tangentes et l'intervalle, on peut conclure à l'égalité des angles.

Enfin, on va télescoper comme on s'y attend dans ce devoir.
Pour N donné, on somme les $G_{2.n+1}$ c'est à dire les $G_{2.n} - G_{2.n+2}$

$$\sum_{n=1}^{N} G_{2.n+1} = \sum_{n=1}^{N} G_{2.n} - G_{2.n+2} = G_{2.1} - G_{2.N+2}$$

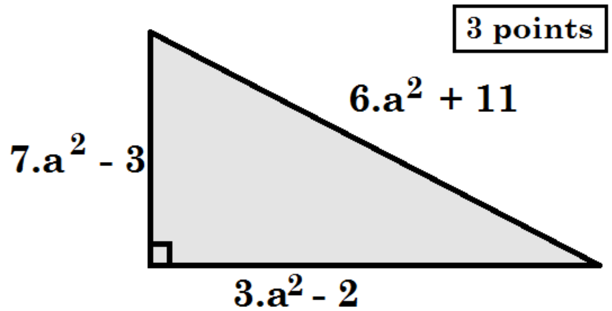
Or, G_2 vaut $Arctan\left(\frac{1}{1}\right)$ ce qui fait $\frac{\pi}{4}$.

Maintenant, pour récupérer tous les G_p avec p impair, il suffit de faire tendre N vers l'infini.
Or, $F_{2.N+2}$ tend vers l'infini, son inverse tend vers 0 et $G_{2.N+2}$ tend aussi vers 0.
On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} Arctan\left(\frac{1}{F_{2.n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Et comme il manque $Arctan\left(\frac{1}{F_1}\right)$ (de valeur $\frac{\pi}{4}$) pour avoir tous les indices impairs, on l'ajoute.

$$\sum_{p\ impair} Arctan\left(\frac{1}{F_p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} Arctan\left(\frac{1}{F_{2.n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

IS11 Un triangle.

3 points



Retrouvez l'aire et le périmètre.

L'élève qui n'a pas saisi où le prof voulait aller dit

$$\begin{array}{rcl} périmètre & = & 16.a^2+6 \\ aire & = & 21.a^4 - 23.a^2 + 6 \end{array}.$$

Mais quand même, qui est a ? Un paramètre ? Non. car le triangle est rectangle.
On impose donc l'équation

$$(3.a^2-2)^2 + (7.a^2-3)^2 = (6.a^2+11)^2$$

On développe, on regroupe $22.a^4 - 186.a^2 - 108 = 0$.
Et si on n'est pas formé aux maths et à l'intelligence, on calcule un discriminant atroce. Sinon, on simplifie déjà par 2 (mais on espérait mieux, franchement).
On factorise en $(a^2-9).(11.a^2+6)$. A part Raphaël, personne ne va aller chercher des longueurs imaginaires.
Mais de toutes façons, $a^2 = -6/11$ conduit à un triangle que je n'aime pas avec un côté négatif...

On garde $a^2 = 9$, le triangle $(60,\ 25,\ 65)$ a pour périmètre 150 et pour aire 750.

IS11 Somme des carrés et somme des cubes.

Comme on connaît les formules du cours, on a donc

$$n.(n+1).(2.n+1) = 6 \times (73509832413696)\ et\ n^2.(n+1)^2 = 4 \times (3330905092288413696)$$

Si on a droit à Python :

```
n= 0
while n*(n+1)*(2*n+1) != 6*73509832413696 :
....n += 1
```

Si on est en physique : $n^3/3 \simeq 73509832413696$ donc $n = \sqrt[3]{3 \times 73\,509\,832\,413\,696}$.

Sinon, on peut mathématiquement cerner l'ordre de grandeur de n avec la formule précédente :

$$\sqrt[3]{3 \times 7 \times 10^{13}} = \sqrt[3]{370.10^{12}} = \sqrt[3]{370}.10^4$$

$6^3 = 216$ et $7^3 = 346$. Notre entier est entre 60 000 et 70 000.

L'arithméticien dira ensuite que 3 330 905 092 288 413 696 doit être un carré parfait. Ça nous déblaie le terrain.
On peut si on en a le courage épuiser les puissances de 2 : 2^{18}. Puis de 3 : $2^{18}.3^4$.
Mais ensuite, je ne vois pas comment trouver $2^{18}.3^4.7^4.59^2.137^2$.

Ensuite, pour trouver les entiers tels que $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$ aient les six mêmes derniers chiffres, on peut avancer en boucle while avec des n+= 1, jusqu'à avoir coïncidence.

Comment savoir que deux entiers ont les mêmes six derniers chiffres ? Ils sont congrus modulo 10^6.

méthode correcte mais méchante avec l'ordinateur

```
n = 2
while ((sommecarres(n)-sommecubes(n)) % 1000000) == 0 :
....n += 1
```

avec deux procédures

```
def sommecarres(n) :
....return n*(n+1)*(2*n+1)//6
```

```
def sommcubes(n) :
....return n*n*(n+1)*(n+1)//4
```

Il sera quand même plus propre de former nos sommes au fur et à mesure :

```
n, scarres, scubes = 2, 5, 9
while ((scarres-scubes) % 1000000) != 0 :
....n += 1
....scarres += n*n
....scubes += n*n*n
```

Et même en réduisant au fur et à mesure pour travailler sur des nombres pas trop gros :

```
n, scarres, scubes = 2, 5, 9
while scarres != scubes :
....n += 1
....scarres = (scarres + n*n) % 1000000
....scubes = (scubes + n*n*n) % 1000000
```