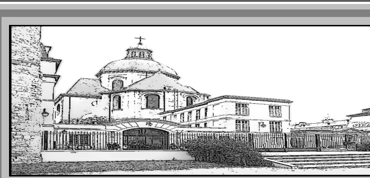
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 16 décembre

$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD12

◁0▷ On a croisé le « joli » résultat : $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}k^3=\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)^2$. On se demande si il existe p et q ainsi que r vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}k^p=\Big(\sum_{k=1}^{n}k^q\Big)^r$.
En considérant le degré et le terme dominant montrez : $p+1=r.(q+1)$ et $\frac{1}{p+1}=\Big(\frac{1}{q+1}\Big)^r$. Déduisez que la formule obtenue plus haut est le seul cas où on a une formule aussi agréable.

On sait (récurrence forte sur n) que $\sum_{k=0}^{n}k^p$ est un polynôme en n de degré $p+1$ et de terme dominant $\frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Vérification	$\sum_{k=0}^{n}k^0$	$\sum_{k=0}^{n}k$	$\sum_{k=0}^{n}k^2$	$\sum_{k=0}^{n}k^3$	$\sum_{k=0}^{n}k^4$
	$n+1$	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$	$\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$	$\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$	$\frac{n^5}{5}+\dots$

Quant à $\Big(\sum_{k=1}^{n}k^q\Big)^r$, c'est donc un polynôme en n de la forme $\Big(\frac{n^{q+1}}{q+1}+\dots\Big)^r$.

Son terme dominant est donc $\frac{n^{r.(q+1)}}{(q+1)^r}$.

En identifiant

degré	$p+1=r.(q+1)$
coefficient	$\frac{1}{p+1}=\frac{1}{(q+1)^r}$

Exemple — Dans le cas connu de $\sum_{k=0}^{n}k^3=\Big(\sum_{k=1}^{n}k^1\Big)^2$:

degré	$3+1=2.(1+1)$
coefficient	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{(1+1)^2}$

Ici, $r=2$.

On repart de $p+1=r.(q+1)$ et $p+1=(q+1)^r$.
On reporte et simplifie : $r=(q+1)^{r-1}$.

Si q vaut 0, alors r vaut 1 et p vaut 0. C'est un peu idiot : $\sum_{k=0}^{n}1=\Big(\sum_{k=1}^{n}0\Big)^1$. Pas innovant.

Si q vaut plus que 0, alors $q+1$ vaut au moins 2 et par comparaison 2^{r-1} dépasse très vite r : $3<2^2$, $4<2^3$ et ainsi de suite.

C'est donc que r vaut 0, 1 ou 2 .
- Si r vaut 0, p vaut -1 , c'est incohérent.
- Si r vaut 1, on aboutit à $p=q$, pas génial : $\sum_{k=0}^{n}k^p=\Big(\sum_{k=1}^{n}k^p\Big)^1$.
- Reste le cas $r=2$: $2<(q+1)^1$ sauf pour $q+1=2$ auquel cas on a $2=2^1$.

On résume : on a obtenu $r=2$ et $q=1$. Et en reportant : $p=3$. C'est la formule $\sum_{k=0}^{n}k^3=\Big(\sum_{k=1}^{n}k^1\Big)^2$.

◁1▷ Montrez : $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i^2-j^2|=\frac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i-j|^2=\frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

Partons du plus compliqué : $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i^2-j^2|$. Il y a $(n+1)^2$ termes (i et j varient de manière indépendante).

Séparons en trois $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}|i^2-j^2|$, $\sum_{0\leqslant i=j\leqslant n}|i^2-j^2|$ et $\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n}|i^2-j^2|$.
Celle du milieu est nulle.

Les deux autres sont égales par symétrie des rôles.
On se concentre sur $\sum\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n} (j^2-i^2)$.

On la découpe en $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} \Big(\sum\limits_{i=0}^{j-1}(j^2-i^2)\Big)$.

Pour chaque j, la somme $\sum\limits_{i=0}^{j-1}(j^2-i^2)$ est faite de j termes égaux à j^2 : total j^3

la somme $\sum\limits_{i=0}^{j-1} i^2$ réputée pour valoir $\dfrac{(j-1).j.(2.j-1)}{6}$

On somme ensuite ces termes $\dfrac{4.j^3+3.j^2-j}{6}$ en séparant $\dfrac{4}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \dfrac{4}{6}.\dfrac{j^2.(j+1)^2}{4}$

$\dfrac{3}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^2 = \dfrac{3}{6}.\dfrac{j.(j+1).(2.j+1)}{6}$

$\dfrac{1}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \dfrac{1}{6}.\dfrac{j.(j+1)}{2}$ (formules du cours)

Et on ré-assemble.

On pouvait aussi voir un tableau tel que

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

On perçoit bien le découpage en trois

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0		1	2	3	4
1			1	2	3
2				1	2
3					1
4					

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0				
1		0			
2			0		
3				0	
4					0

et

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

Et dans

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

on peut aussi très vite découper en diagonales

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2	2				
3		2			
4			2		

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3	3				
4		3			

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3					
4	4				

On a n fois le 1, $n-1$ fois le 2, $n-2$ fois le 3 et ainsi de suite.
On calcule donc $\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k).k$ et là le calcul est plus rapide : $n.\sum\limits_{k=0}^{n} k - \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

Avec cette même idée, la somme des carrés donne

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	4	9	16
1	1	0	1	4	9
2	4	1	0	1	4
3	9	4	1	0	1
4	16	9	2	1	0

On laisse tomber une diagonale, et on double $2.\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k).k^2$

(oui, en fait, la diagonale est comptée deux fois, mais elle est nulle).

Cette fois, c'est $2.n.\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k^3$. Et on a au final la formule indiquée.

◃2▹ ♣ Trouvez une application f continue vérifiant $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \dfrac{1}{n^2}$. Déduisez $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Quel rapport ? Fourier et Parseval.
Les $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt$ sont les coefficients de f sur l'espèce de base orthonormée des c_n.
Et $\displaystyle\sum_k \dfrac{1}{k^2}$ est la somme des carrés des composantes. C'est le carré de la norme de f.

On se dit que ça doit venir d'une intégration par parties ces $\dfrac{1}{n^2}$.

On calcule $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).t.dt = 0$
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).t^2.dt = \dfrac{4}{n^2}$ (primitive en $t \longmapsto \dfrac{t^2}{n}.\sin(n.t) + \dfrac{2.t}{n^2}.\cos(n.t) - \dfrac{2}{n^3}.\sin(n.t)$).
On propose donc $f = t \longmapsto \frac{t^2}{4}$ et on vérifie qu'elle convient.

Pour le produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \dfrac{1}{\pi}.\displaystyle\int_0^{2.\pi} P(t).Q(t).dt$, la famille des $t \longmapsto \cos(n.t)$ est orthonormée.
Si on ose dire qu'elle fait « comme une base », on récupère les coefficients de f sur cette « base » : $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \dfrac{1}{n^2}$.

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (a_n)^2$ serait le carré de la norme de f.

Or, ce carré de nomer vaut $\dfrac{1}{\pi}.\displaystyle\int_0^{2.\pi} (f(t))^2.dt$ ce qui fait ici $\dfrac{2.\pi^4}{5}$.
Ce n'est pas le résultat demandé ? Normal...
On a oublié les composantes suivant les $\theta \longmapsto \sin(n.\theta)$.

◃3▹ ♣☺ On définit : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t)).dt$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)).dx$, $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x-\pi/4)).dx$ et $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\sin(x)+\cos(x)).dx$.
Montrez : $I = L - J$, $J = K$. Calculez $L - K$ par trigonométrie. Déduisez la valeur de I.

Toutes les fonctions sous le signe somme sont continues. Toutes les intégrales existent.
On calcule $L - J$: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\sin(x)+\cos(x)).dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)).dx = \int_0^{\pi/4} \Big(\ln(\sin(x)+\cos(x)) - \ln(\cos(x))\Big).dx$ par linéarité.
Et justement, $\ln(\cos(x)+\sin(x)) - \ln(\cos(x)) = \ln\left(\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \ln\Big(1+\tan(x)\Big)$. On a bien I.

On part de $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)).dx$ et on veut trouver $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x-\pi/4)).dx$. Sachant que le développement de $\cos(x-\pi/4)$ donne autre chose, on se demande si on n'a pas un changement de variable à faire.
On part de J et on pose $\theta = \dfrac{\pi}{4} - x$. On a alors $J = \displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/4} \ldots = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=0} \ldots = -\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \ldots$. On a aussi $d\theta = -dx$, ce qui va rétablir les bornes.
On a donc $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)).dx = -\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=0} \cos(\pi/4-\theta).d\theta$. La seconde forme est bien celle de $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x-\pi/4)).dx$, avec une variable qui ne s'appelle plus x mais θ. Mais les variables sont muettes.

On regarde $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x-\pi/4)).dx$. On développe par formule de trigonométrie :

$$K = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)\Big).dx$$

On sépare par propriété du logarithme : $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \Big(\ln(\cos(x)+\sin(x)) + \ln(\sqrt{2}/2)\Big).dx$.

On sépare et on intègre $\int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}/2).dx = \frac{\pi}{4}.\ln(\sqrt{2}/2)$.

Finalement, $\boxed{K = L - \frac{\pi.\ln(2)}{8}}$

On rassemble tout ce qu'on sait : $I = L - J$, $J = K$ et $K = L - \frac{\pi.\ln(2)}{8}$.

On assemble : $\boxed{I = \frac{\pi.\ln(2)}{8}}$ et tout ça sans primitive !

◁4▷ n est un entier naturel donné. Montrez : $\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$.
Calculez aussi $\sum_{0\leq i\leq j} (j-i)$ et $\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} (j-i)$.
Combien de fois $j-i$ prend la valeur k (positif ou négatif d'ailleurs).

$\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$ se démontre de multiples façons.

Une faute m'avait fait proposer $\prod_{0\leq i\leq j} (j-i)$ qui n'avait pas de sens (où s'arrêtait j ?),
puis $\prod_{0\leq i\leq j\leqslant} (j-i)$ qui autorisait $i=j$!

Il y a certes la récurrence.
Ou un dénombrement sur le dessin.

Sinon, c'est direct si on renverse le produit, permute les π et voit j comme un compteur :

$$\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=0}^{j-1}(j-i)\Big) = \prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{k=1}^{j} k\Big) = \prod_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n} k = \prod_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=k}^{n} k\Big) = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}$$

On effectue le même type de manipulations sur la somme (ici, la condition $i<j$ peut être remplacée par $i\leqslant j$ sans différence, les termes en sus sont nuls) :

$$\sum_{0\leq i\leqslant j\leqslant n} (j-i) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j}(j-i)\Big) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{j} k\Big) = \sum_{j=0}^{n}\frac{j.(j+1)}{2} = \sum_{p=1}^{n}\binom{p+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{n.(n+1).(n+2)}{6}$$

L'autre somme est nulle, chaque terme $j-i$ croise son opposé $i-j$.

◁5▷ Combien y a-t-il de termes non nuls dans la somme $\sum_{i+j+k=20}\binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$? Montrez que cette somme vaut $\binom{57}{20}$. Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre ?
Indication $(1+X)^{23}.(1+X)^{21}.(1+X)^{13}$.

Dans $\sum_{i+j+k=20}\binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$, k ne peut pas dépasser 13 (que signifie $\binom{13}{17}$?).

Et par exemple pour k égal à 13, il reste la condition $i+j=7$. Il y a 8 couples possibles, de $(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$ jusqu'à $(7,0)$.

k	couples (i,j)
13	$(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$, $(7,0)$
12	$(0,8)$, $(1,7)$, $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$, $(7,1)$, $(8,0)$
11	$(0,9)$, $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$, $(7,2)$, $(8,1)$, $(9,0)$
10	$(0,10)$, $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $(4,6)$, $(5,5)$, $(6,4)$, $(7,3)$, $(8,2)$, $(9,1)$, $(10,0)$
9	$(0,11)$, $(1,10)$,$\dots$ $(4,7)$, $(5,6)$, $(6,5)$, $(7,4)$, $(8,3)$, $(9,2)$, $(10,1)$, $(11,0)$
8	$(0,12)$, $(1,11)$,$\dots$ $(5,7)$, $(6,6)$, $(7,5)$, $(8,4)$, $(9,3)$, $(10,2)$, $(11,1)$, $(12,0)$
7	et
6	ainsi
5	de
4	suite
3	jusqu'à
2	la ligne
1	finale
0	$(0,20)$, $(1,19)$, $(2,18)$, $(3,17)\dots(17,3)$, $(18,2)$, $(19,1)$, $(20,0)$

Total : 231 termes.

Ensuite, c'est du dénombrement. Imaginons une classe de MPSI2 de 57 élèves.
23 garçons, 21 filles et 13 chats (ce n'est pas plus absurde que les urnes et les boules).
On doit former un groupe de 20 élèves.
Il y a $\binom{57}{20}$ façons de le faire.
Mais on peut dire aussi : combien de garçons,
combien de fille
combien de chats ?
On choisit i garçons parmi 23 : $\binom{23}{i}$
j filles parmi 21 : $\binom{21}{j}$
k chats parmi 13 : $\binom{13}{k}$
On multiplie ces choix indépendants : $\binom{23}{i}.\binom{23}{j}.\binom{23}{k}$ (produit).
Mais il y a la contrainte de « un groupe de 20 élèves » d'où $i+j+k=20$.
Et on étudie toutes les possibilités (probabilités totales) en sommant $\sum_{i+j+k=20}.\binom{\dots}{\dots}$.

Ce binomial s'écrit $\frac{57.56.54.53.52.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.39.38}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20}$ avec 20 termes en haut et 20 termes en bas (c'est comme ça qu'il faut le voir dès qu'il s'agit de le calculer ou dénombrer, et pas comme $\frac{57!}{20.37}$).

On cherche les facteurs 13 en haut et en bas :

$$\frac{39.52}{13}.\frac{57.56.54.53.*.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.*.38}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.*14.15.16.17.18.19.20}$$

Il en reste un d'avance :

$$\binom{57}{20}=13^1.2^a.3^b.5^c.7^d.11^e.19.23.41.43.47.53$$

♣ On sait additionner les binomiaux en lignes *(2^n)*, en colonne *(Zou-Shi-Zhi)*. Mais que se passe-t-il si on les additionne en diagonale *(évidemment de direction Sud-Ouest vers Nord-Est, comme ci contre)* ? Écrivez la formule rigoureuse $\sum_{k=\triangle}^{\oslash}\binom{\otimes}{\odot}$. Émettez une conjecture. Prouvez la.
Et pour la somme alternée ?

0	1	0	0	0	***0***	0
1	1	1	0	***0***	0	0
1	1	2	***1***	0	0	0
2	1	***3***	3	1	0	0
3	***1***	4	6	4	1	0
$\nearrow$	1	5	10	10	5	1
1+4+3	1	6	15	20	15	6

◁ 6 ▷

Avec des binomiaux aberrants, c'est pratique : $\sum_{i+k=n}\binom{i}{k}=F_n$.

Sinon, c'est aussi $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{i}{n-i} = F_n$.

En ayant initialisé la suite de Fibonacci à 1 suivie de 1.

Et sans ces binomiaux nuls, c'est $\sum\limits_{i=[n/2]}^{n} \binom{i}{n-i} = F_n$

La preuve par récurrence est initialisée. Ladite récurrence sera à double hérédité.

Supposons en effet pour un n donné quelconque que l'on a à la fois $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{i}{n-i} = F_n$

et $\sum\limits_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n+1-i} = F_{n+1}$

Additionnons les deux :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n+1-i} = F_n + F_{n+1}$$

Par définition de la suite de Fibonacci :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En adjoignant un terme nul $\binom{n+1}{-1}$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En fusionnant les sommes :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{n-k} + \binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En appelant Pascal :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{i+1}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En décalant les indices :

$$\sum_{p=1}^{n+2} \binom{p}{n+2-p} = F_{n+2}$$

En ajoutant encore un terme nul :

$$\sum_{p=0}^{n+2} \binom{p}{n+2-p} = F_{n+2}$$

C'est la formule attendue.

Et visuellement

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	15	6

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6

et donc

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6
F_6						

◃7▹ Montrez l'existence d'une suite de polynômes P_n vérifiant $t^n + \frac{1}{t^n} = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right))$ pour tout entier naturel n et tout réel t non nul (on prouvera l'existence par récurrence double, et on ne cherchera pas à les expliciter).

On doit montrer *(par récurrence)* l'existence d'une suite de polynômes.
C'est plus intelligent que des formules comme $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$. Il ne s'agit pas de montrer une égalité mais l'existence d'un polynôme. En le construisant. Ou en montrant qu'il existe *(en le construisant à partir des précédents)*.

Initialisation : P_0, P_1 et P_2 existent

n	0	1	2	3
P_n	2	X	X^2-2	$X^3-3.X$
vérification	$1+\frac{1}{1}=2$	$t+\frac{1}{t}=\left(t+\frac{1}{t}\right)$	$t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2$	$t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3.\left(t+\frac{1}{t}\right)$

Hérédité. On se donne un n et on suppose que tous les polynômes existent jusqu'au rang n,vérifiant la relation.
On doit construire celui de rang $n+1$: $t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}} = P_{n+1}(\left(t+\frac{1}{t}\right))$?
Partons de $t^n + \frac{1}{t^n} = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right))$ (au rang n) et multiplions par $\left(t+\frac{1}{t}\right)$:

$$\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right).\left(t+\frac{1}{t}\right) = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right)).\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}} = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right)).\left(t+\frac{1}{t}\right) - \left(t^{n-1}+\frac{1}{t^{n-1}}\right)$$

et justement, par hypothèse de rang $n-1$:

$$t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}} = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right)).\left(t+\frac{1}{t}\right) - P_{n-1}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Le membre de droite est un polynôme en $\left(t+\frac{1}{t}\right)$, on l'appelle $P_{n+1}(\left(t+\frac{1}{t}\right))$ avec $P_{n+1}(X) = P_n(X)\times X - P_{n-1}(X)$.
La récurrence s'achève.

Remarque : L*a difficulté n'est pas de prouver une formule, mais de trouver la formule à prouver (le nouveau polynôme).*
En Terminale, la récurrence, c'est « prouver $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$ *» par exemple. On sait ce qu'on doit prouver, on fait des calculs.*
Ici, c'est « $\exists P_n$ *». C'est donc à vous de construire* P_{n+1}*, et on ne vous dit pas de montrer que* P_{n+1} *est égale à ceci ou cela. C'est en ça que c'est vraiment des maths. C'est à vous de construire. Il y a donc une part d'initiative : « je pose* $P_{n+1} = \ldots$ *».*

On vérifie quand même que chaque P_n *est bien un polynôme.*
Et on note au passage que le lien avec es polynômes de Tchebychev est visible si on y regarde de près $(2.\cos(\theta) = e^{i.\theta}+e^{-i.\theta} = t+\frac{1}{t}$ *en posant* $t = e^{i.\theta}$.

◃8▹ ♡ Résolvez l'équation $T_7(x) = \frac{e^{10}+1}{2.e^5}$ d'inconnue réelle x *(trouvez une solution et montrez aussi qu'il n'y en a qu'une)*.
Oui, polynômes de Tchebychev.

On résout sans en avoir l'air$T_7(x) = ch(5)$.
Or, on sait : $T_7(ch(\theta)) = ch(7.\theta)$.
Si on change de variable en posant $x = ch(\theta)$ (en cherchant a priori x dans $[1, +\infty[$), l'équation devient $ch(7.x) = ch(5)$.
On trouve $7.x = 5$.
On a donc une solution $S_x \cap [1, +\infty[= \left\{\frac{5}{7}\right\}$

Mais on a aussi $S_x \cap [-1, 1] = \emptyset$ car $\forall x \in [-1, 1]$, $T_7(x) \in [-1, 1]$ et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $T_7(x) < \frac{e^{10}+1}{2.e^5}$.
De même $S_x \cap]-\infty, -1] = \emptyset$ car $\forall x \in]-\infty, -1]$, $T_7(x) \in]-\infty, -1]$ (par imparité) et donc $\forall x \in]-\infty, -1]$, $T_7(x) < \frac{e^{10}+1}{2.e^5}$.

Bilan : $\boxed{S_x = \left\{\frac{5}{7}\right\}}$

◁9▷ Montrez que $\prod_{k=0}^{n} 2^{(k/2^k)}$ converge vers 4 quand n tend vers l'infini (on pourra dériver $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$).

Il suffit de trouver la limite de l'exposant : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ (oui, $\prod_{k=0}^{n} 2^{a_k} = 2^{\sum_k a_k}$, c'est l'évidence, non ?).

On peut l'obtenir en étudiant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, en dérivant puis en calculant en $x = \frac{1}{2}$.

On peut aussi écrire $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.\sum_{i=0}^{k-1} 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

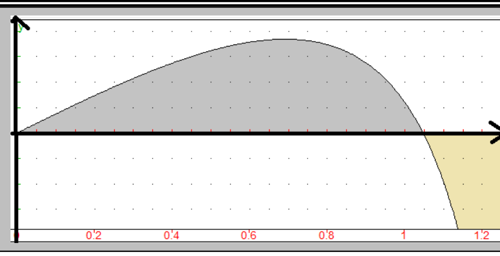
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

et ainsi de suite.
Bref, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - N.2^{-N} - 2^{1-N}$. Et il tend vers 2.

Notre limite vaut 2^2 ce qui fait 4.

◁10▷ Montrez : $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{1}{2}$.

Donnez le développement limité d'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\frac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}$.



L'intégrale existe par continuité.
Par règles de Bioche, on doit chercher le cosinus caché. Et on sort sa dérivée en forme de sinus.

$$\sin(3.\theta) = \sin(\theta).(4.\cos^2(\theta) - 1)$$

(Tchebychev de seconde espèce obtenue en dérivant $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$)

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}.d\theta = \int_{c=1}^{c=1/2} \frac{4.c^2-1}{1+(2.c^2-1)}(-dc) = \int_{1/2}^{1} \left(2 - \frac{1}{2.c^2}\right).dc = \left[2.c + \frac{1}{2.c}\right]_{1/2}^{1}$$

Tous calculs faits : $\frac{1}{2}$ comme attendu.

◁11▷ Pour tout n, on pose $\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$

Montrez que (B_n) est croissante, majorée par 2 (comparaison série intégrale, ou somme télescopique $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)}$).

Déduisez que (B_n) converge. On note $\boxed{\zeta(2)}$ sa limite.

Déduisez que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, la suite $B_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2.p}}$ converge.

On calcule pour tout n : $B_{n+1} - B_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite est croissante (série à termes positifs).

On majore :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On télescope, il reste $B_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

La suite est croissante, majorée (le majorant ne dépend bien plus de n), elle converge vers son plus petit minorant (inférieur ou égal à 2).

Terme à terme, on majore $\dfrac{1}{k^{2.p}}$ par $\dfrac{1}{k^2}$(l'exposant a augmenté).
On somme : $B_{p,n} \leqslant B_n \leqslant 2$ pour tout n (on veut un majorant ne contenant plus de n).
La suite $(B_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée. Elle converge.

On va prouver que $\zeta(2)$ vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$ par diverses méthodes.

I∼0) **Vitesse de convergence.**
Montrez que (B_n) et $\left(B_n + \dfrac{1}{n}\right)$ forment n couple de suites adjacentes, de limite $\zeta(2)$.

L'une doit croître, c'est (B_n).
L'autre doit décroître, c'est $\left(B_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

En effet : $\left(B_{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \dfrac{1}{n}\right) = \left(B_{n+1} - B_n\right) + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{n + (n+1).n - (n+1)^2}{(n+1)^2.n} \text{ ligne } *$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{(n+1)^2.n}$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) < 0$$

Une question simple, mais qui permet de tester votre intelligence. Si à la ligne $*$, vous avez mis comme dénominateur commun $(n+1)^2.n.(n+1)$, vous êtes pour moi définitivement perdus...

Celle qui décroît doit majorer celle qui croît : $\left(B_n + \dfrac{1}{n} > B_n\right)$.

La différence doit tendre vers 0 : c'est $\dfrac{1}{n}$.

On a alors le schéma usuel : $B_1 \leqslant B_2 \leqslant \ldots \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant C_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \ldots \leqslant C_2 \leqslant C_1$.
Ceci prouve que (B_n) est croissante majorée,
(B_n) converge vers son plus petit majorant λ, inférieur à tout C_k.
(B_n) est décroissante minorée,
(C_n) converge vers son plus grand minorant μ, supérieur à tout B_k.
λ et μ sont égaux car la différence $C_n - B_n$tendait vers 0
On ajoute donc

$$B_1 \leqslant B_2 \leqslant \ldots \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant \zeta(2) \leqslant C_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \ldots \leqslant C_2 \leqslant C_1$$

I∼1) Donnez un entier n pour lequel vous êtes sûr d'avoir $|B_n - \zeta(2)| \leqslant 10^{-5}$.

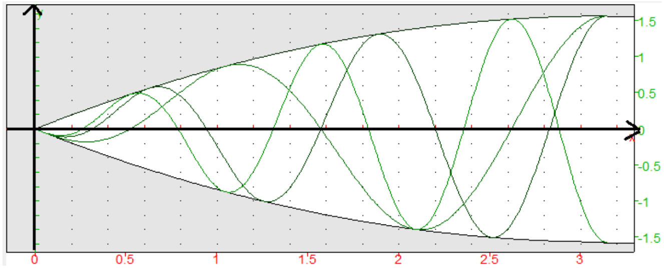
Pour avoir $\zeta(2) - B_n \leqslant 10^{-5}$ il suffit d'avoir $C_n - B_n \leqslant 10^{-5}$.
Le rang proposé vérifie $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-5}$.
Si vous avez le courage de calculer 10^5 termes dans la somme, je dis d'accord.

II∼0) **Première méthode (Fourier, Dirichlet).**
Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k.

Intégration par parties, ou primitive explicite (obtenue en la posant a priori) :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \left[\frac{k^2.t^2.\sin(k.t) - 2.k^2.\pi.t.\sin(k.t) + 2.k.t.\cos(k.t) - 2.\sin(k.t) - 2.k.\Pi.\cos(k.t)}{2.k^3.\pi}\right]_{t=0}^{\pi}$$

Il reste bien juste k^{-2}.



II$\sim$1) **Déduisez** : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\frac{\sin\Big(\frac{2.n+1}{2}.t\Big)}{2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}.dt.$

On part de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ avec la question précédente.
On trouve une somme d'intégrales qu'on transforme en intégrale d'une somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\sum_{k=1}^{n}\cos(k.t).dt$$

Il est temps de faire appel à Dirichlet et à son noyau

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k.t)=\frac{\sin\Big(\frac{2.n+1}{2}.t\Big)}{2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}$$

On fait passer $\frac{1}{2}$ de l'autre côté :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\sum_{k=1}^{n}\cos(k.t).dt=\int_0^{\pi}\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\Big(\frac{\sin\Big(\frac{2.n+1}{2}.t\Big)}{2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}-\frac{1}{2}\Big).dt$$

On isole $\displaystyle\int_0^{\pi}\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\frac{1}{2}.dt$ de valeur $\dfrac{-\pi^2}{6}$ (l'application est négative entre 0 et π).

On notera qu'on n'a pas le droit d'écrire $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k.t)=\frac{\sin\Big(\frac{2.n+1}{2}.t\Big)}{2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}-\frac{1}{2}$ en $t=0$ (point au borne de notre domaine).
Mais c'est un point isolé, et en ce point, notre application se prolonge quand même par continuité.

II$\sim$2) Montrez que $t\longmapsto\Big(\dfrac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\dfrac{1}{2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.

On utilise l'équivalent $\sin(\theta)\sim\theta$ (quand θ tend vers 0).
$\varphi(t)$ est équivalent à $\Big(\dfrac{t^2}{2.\pi}-t\Big).\dfrac{1}{2.\frac{t}{2}}$ c'est à dire $\Big(\dfrac{t}{2.\pi}-1\Big)$.
$\varphi(t)$ est équivalent à la constante non nulle -1. C'est donc qu'il tend vers -1.

Passons à la limite éventuelle des taux d'accroissement : $\dfrac{\varphi(t)+1}{t}$ (puisque $-\varphi(0)$ vaut $+1$).
On réduit au dénominateur commun :

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0}{t}=\frac{\Big(\frac{t^2}{2.\pi}-t\Big)+2.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}{2.t.\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)}$$

On utilise le développement limité $\sin(x) = x + o(x^2)$ quand x tend vers 0 :

$\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0}{t} = \dfrac{\dfrac{t^2}{2.\pi} + o(t^2)}{2.t.\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ (oui, $o(t^2)$ et $o(4.t^2)$ ou $\dfrac{o(t^2)}{4}$, c'est du pareil au même, ce sont des choses qui tendent vers 0 plus vite que t^2).

Passons aux équivalents pour le dénominateur $2.t.\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est équivalent à t^2.

Et le numérateur est équivalent à $\dfrac{t^2}{2.\pi}$ (puisque $f(t) + o(f(t))$ c'est « par définition même » équivalent à $f(t)$).

Le quotient est équivalent à la constante numérique $\dfrac{1}{2.\pi}$(après simplification des t^2).
Il tend donc vers ce nombre.
On a donc une limite des taux d'accroissements, c'est la définition de « dérivable ».
Le graphe en lui même n'a aucun intérêt.

Elle aurait pû ne pas être définie en 0, ou avoir une demi tangente verticale.
Ceci nous aurait empêché d'intégrer par parties.

II∼3) En intégrant par parties, montrez que $\int_0^\pi \varphi(t).\sin\left(\dfrac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Puisque φest dérivable, on va la dériver (en posant $k = \dfrac{2.n+1}{2}$) :

$$\int_0^\pi \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt = \Big[-\varphi(t).\frac{\cos(k.t)}{k}\Big]_0^\pi + \frac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt$$

Le terme crochet se calcule et tend vers 0 quand k tend vers l'infini (avec n).
L'autre terme se majore en valeur absolue :

$$0 \leqslant \Big|\frac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt\Big| \leqslant \frac{1}{k}.\int_0^\pi |\varphi'(t)|.|\cos(k.t)|.dt \leqslant \frac{1}{k}.\int_0^\pi |\varphi'(t)|.dt$$

Le majorant tend vers 0 quand k tend vers l'infini avec n.
Par encadrement, $\dfrac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt$ tend vers 0 aussi.

Conseil : Pour faire tendre une intégrale vers 0 (intégrale dépendant d'un paramètre n), la meilleure solution (au moins avec vos outils) est de l'encadrer.

Petit point à devoir compléter : φ est non seulement dérivable, même en 0, mais il faudrait vérifier qu'elle est C^1 (φ' est continue, pour que $\int_0^\pi \varphi'(t).dt$ ait un sens).

II∼4) Déduisez que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

C'est la conclusion logique de ce qui précède.

III∼0) **Entrainement.**
♡ Copiez une ligne de zêta, xi et sigma minuscule : ζ et ξ et ς.

$$\zeta\ \zeta$$

oui, c'est bon !

IV∼0) **Deuxième méthode (Wallis et parties).**
On pose pour tout n : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).dt$ et on pose aussi : $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$ et $K_n = \dfrac{J_n}{I_n}$.
Montrez : $I_n = \dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}$ (oui, Wallis).

C'est du « cours ».
On calcule la première : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (fonction constante).

On intègre I_{n+1} par parties :

$$I_{n+1}=\int_0^{\pi/2}\cos^{2.n+1}(t).\cos(t).dt=\Big[\cos^{2.n+1}(t).\sin(t)\Big]_{t=0}^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(2.n+1).\cos^{2.n}(t).\sin(t)\Big).\Big(\sin(t)\Big).dt$$

Le crochet est nul (merci le sinus en 0, merci le cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$).

Dans l'intégrale $(2.n+1).\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2.n}(t).\sin^2(t).dt$, on remplace $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$:

$I_{n+1}=(2.n+1).(I_n-I_{n+1})$ (le terme I_{n+1} est de retour).

On a donc obtenu : $\boxed{I_{n+1}=\dfrac{2.n+1}{2.n+2}.I_n}$

On met en boucle cette propriété avec ensuite un produit de pairs et un produit d'impairs.

Ou même, puisqu'on nous offre la formule, on effectue une récurrence pour établir en effet $I_n=\dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}$.

C'est vrai pour n égal à 0.

Supposons ensuite, pour n donné quelconque $I_n=\dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}$.

On passe au suivant : $I_{n+1}=\dfrac{2.n+1}{2.n+2}.I_n$

$$I_{n+1}=\frac{(2.n+1)}{2.(n+1)}.\binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$$

$$I_{n+1}=\frac{(2.n+1)}{2.(n+1)}.\frac{(2.n)!}{n!.n!}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$$

$$I_{n+1}=\frac{(2.n+1)!}{(n+1)!.n!}.\frac{\pi}{2.2^{2.n+1}}$$

$$I_{n+1}=\frac{(2.n+2)}{2.(n+1)}.\frac{(2.n+1)!}{(n+1)!.n!}.\frac{\pi}{2.2^{2.n+1}}\text{ (joli !)}$$

$$I_{n+1}=\frac{(2.n+2)!}{(n+1)!.(n+1)!}.\frac{\pi}{2^2.2^{2.n+1}}\text{ et c'est fini}$$

IV∼1) Montrez : $I_n=2.n.\displaystyle\int_0^{\pi/2}t.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t).dt$.

On repart de $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2.n}(t).dt$ et on intègre par parties :

$\cos^{2n}(t)$	$\hookrightarrow$	$-2.n.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t)$
1	$\hookleftarrow$	t

Le terme crochet est nul (en 0 c'est t et en $\dfrac{\pi}{2}$ c'est $\cos^{2.n}(t)$).

L'autre terme est exactement l'intégrale ci dessus.

IV∼2) Montrez : $J_{n-1}-J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2.\sin(t).\cos^{2.n-2}(t).\sin(t).dt$.

C'est direct $J_{n-1}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2.\cos^{2.n-2}(t).dt$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2.\cos^{2.n}(t).dt$

On soustrait, on réunit, on factorise $t^2.\cos^{2.n-2}(t)$ et on remplace $1-\cos^2(t)$ par $\sin^2(t)$ qu'on sépare même en deux facteurs, pourquoi pas.

IV∼3) Déduisez : $J_{n-1}-J_n=\dfrac{1}{2.n-1}.\Big(\dfrac{I_n}{n}+J_n\Big)$ (par parties).

IV∼4) Déduisez : $\dfrac{J_{n-1}}{I_n}-K_n=`\dfrac{1}{2.n-1}.\Big(\dfrac{1}{n}+K_n\Big)$ puis $K_{n-1}-K_n=\dfrac{1}{2.n^2}$.

IV∼5) Montrez pour tout t de $\Big[0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big]$: $t\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\sin(t)$.

IV∼6) Déduisez : $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}.I_n$ et $0\leqslant K_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}$.

IV∼7) Retrouvez la valeur de $\zeta(2)$.

V∼0) **Troisième méthode et généralisation (Viète et trigonométrie).**
On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$. Donnez son degré, son coefficient dominant, et vérifiez que ses racines sont les $\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ pour k de 1 à n inclus.

Tous les termes de $P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$ sont des puissances de X avec un coefficient réel devant. On a un polynôme.

Son terme de plus haut degré est pour k égal à 0 : $(-1)^0.\binom{2.n+1}{2.0+1}.X^{n-0}$.
Le degré est donc n et le coefficient dominant est $\binom{2.n+1}{2.0+1} = \frac{2.n+1}{1}$ ce qui fait $2.n+1$.

Quand on va factoriser, il ne faudra pas oublier ce coefficient dominant.

On va tester chaque $\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ en vérifiant que chaque $P\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)$ est nul.
Mais il faudra se méfier. Plusieurs variables s'appellent k et on risque d'écrire des bêtises.
On se donne k et on calcule

$$P\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)^{n-p} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\frac{\cos^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}{\sin^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$$

On factorise le terme $\frac{1}{\sin^{2.n}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$ non nul :

$$P\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big) = \frac{1}{\sin^{2.n}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}.\sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right).\sin^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$$

On peut commencer à penser à une formule du binôme pour $(\cos+\sin)^{2.n}$.
Mais il n'y a qu'un terme sur deux. Et il y a des signes moins.

Et on est en droit d'avoir l'illumination :
Développons $(\cos+i.\sin)^{2.n+1}$ et ne gardons que la partie imaginaire.

$$(\cos+i.\sin)^{2.n+1} = \sum_{q=0}^{2.n+1}\binom{2.n+1}{q}.\cos^{2.n+1-q}.(i)^q.\sin^q$$

$$i.\Im m\Big((\cos+i.\sin)^{2.n+1}\Big) = \sum_{\substack{0\leqslant q\leqslant 2.n+1\\ q\ impair}}\binom{2.n+1}{q}.\cos^{2.n+1-q}.(i)^q.\sin^q = \sum_{p=0}^{n}\binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n+1-(2.p+1)}.(i)^{2.p+1}.\sin^{2.p+1}$$

On a donc en sortant le i

$$\Im m\Big((\cos+i.\sin)^{2.n+1}\Big) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n-2.p}.(-1)^p.\sin^{2.p+1}$$

Mais si on l'applique en $x = \frac{k.\pi}{2.n+1}$ le premier membre est $\Im m\Big(e^{i.\frac{k.\pi}{2.n+1}}\Big)^{2.n+1}$ ce qui fait 0 (partie imaginaire d'un réel).
Le second membre est nul, et c'est lui notre $P\Big(\cot\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)$ (au facteur $\sin^{2.n}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ près, mais il n'y change rien).

On a donc bien prouvé $P\Big(\cot\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big) = 0$ pour tout k de 1 à n.

V$\sim$1) Déduisez : $P_n = (2.n+1).\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\right)$.

Les n réels cités à la question précédente sont tous racines du polynômes et sont tous distincts (stricte monotonie de la cotangente au carré sur l'intervalle $]0,\ \pi/2[$).
On en a n et le polynôme est de degré n.

On le factorise donc en $\prod_{k=1}^{n}(X - racine_k)$ avec en plus le coefficient dominant devant.

V$\sim$2) Montrez pour tout x de $\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$: $\sin(x) < x < \tan(x)$ puis $0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2(x) < 1$.

L'application $x \longmapsto x - \sin(x)$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 - \cos(x)$.
Sa dérivé est positive.
Cette application est croissante.
Comme elle est nulle en 0, elle est positive sur $]0,\ +\infty[$ et a fortiori sur $]0,\ \pi/2[$.

L'application $x \longmapsto \tan(x) - x$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 + \tan^2(x) - 1$.
On utilise les mêmes mots clefs : dérivée positive, application croissante, nulle en 0 donc positive.

Sur $]0,\ \pi/2[$ tous les termes de $\sin(x) < x < \tan(x)$ sont positifs. On peut élever au carré (monotonie) et passer aux inverses (stricte décroissance) :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\tan^2(x)} > 0$$

On tient donc déjà $0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2(x)$.

Ensuite, $\frac{1}{x^2} - \cot^2(x) =$
A faire.

V$\sim$3) Montrez ensuite pour tout entier p : $0 < \frac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x) < \frac{p}{x^{2.(p-1)}}$ (pensez aux identités remarquables de la famille de la série géométrique).

Il faut vraiment tout vous dire !

$$a^p - b^p = (a-b).(a^{p-1} + a^{p-2}.b + a^{p-3}.b^2 + \ldots + b^{p-1})$$

C'est la généralisation de $a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$ et $a^3 - b^2 = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$. Classique à connaître (d'ailleurs dans le programme). Proprement :

$$a^p - b^p = (a-b).\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^k$$

Et ceci se démontre en développant

$$(a-b).\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^k = \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k}.b^k - \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^{k+1}$$

et en télescopant.

On applique ici à $a = 1/x^2$ et $b = \cos^2(x)$ (positifs). On a donc

$$(x^{-2})^p - (\cot^2(x))^p = (x^{-2} - \cot^2(x)).\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{p-k-1}.cot^{2.k}(x)$$

Le membre de gauche est bien $\frac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x)$.

Les deux termes du membre de droit sont positifs, leur produit est positif. Ceci donne déjà $0 < \frac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x)$ que j'avais failli oublier (cela dit, c'est juste $x < \tan(x)$ qu'on élève à la puissance $-2.p$).

Mais revenons au produit $\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2(x)\right).\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{p-k-1}.cot^{2.k}(x)$; on majore chacun des deux facteurs positifs.
$(x^{-2}-\cot^2(x))$ est plus petit que 1 on l'a dit plus haut.

La somme contient p termes de la forme $\frac{\cot^{2.k}(x)}{x^{2.(p-k-1)}}$. Chacun est majoré par $\frac{\frac{1}{x^{2.k}}}{x^{2.(p-k-1)}}$ en utilisant $0<\cot^j(x)<\frac{1}{x^j}$ qui vient de $0<x<\tan(x)$.
On majore donc par $p.\frac{1}{x^{2.p-2}}$ (nombre de termes fois majorant de chacun).

V∼4) Déduisez : $0<\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p}}-\sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)<p.\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.(p-2)}}$.

Les réels $\frac{k.\pi}{2.n+1}$ sont tous entre 0 et $\pi/2$. On peut leur appliquer le résultat précédent

$$0<\frac{1}{x^{2.p}}-\cot^{2.p}(x)<\frac{p}{x^{2.(p-1)}}$$

$$0<\frac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}}-\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)<p.\frac{(2.n+1)^{2.p-2}}{\pi^{2.p-2}}.\frac{1}{k^{2.p-2}}$$

On a n encadrements que l'on peut sommer de $k=1$ à $k=n$ [1]

$$0<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}}-\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\right)<p.\frac{(2.n+1)^{2.p-2}}{\pi^{2.p-2}}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p-2}}$$

Dans le majorant de droite, on a sorti de la somme tout ce qui ne dépendait pas de k.
On sépare la première somme en deux : $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}}$ et $\sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ et on sort $\frac{(2.n+1)^{2.p}}{\pi^{2.p}}$ de la première.

V∼5) En exploitant les formules de Viète dans P_n après avoir divisé par $n^{2.p}$ (puis choisi $p=1$ et $p=2$), dédisez $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

On a montré plus qu'il ne faut. Prenons $p=1$ (c'est légitime) dans

$$0<\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p}}-\sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)<p.\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.(1-1)}}$$

On trouve

$$0<\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)<\sum_{k=1}^{n}1$$

La somme $\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ est la somme des racines du polynôme P du début.
C'est donc au signe près le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme « renormalisé » (divisé par son coefficient dominant).

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}=\binom{2.n+1}{1}.X^{n-k}-\binom{2.n+1}{3}.X^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$$

La somme des racines se calcule

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)=\frac{\binom{2.n+1}{3}}{\binom{2.n+1}{1}}=\frac{(2.n+1).(2.n).(2.n-1)}{6.(2.n+1)}=\frac{n.(2.n-1)}{3}$$

On remplace donc

$$0<\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n.(2.n-1)}{3}<\sum_{k=1}^{n}1=n$$

1. si on multiplie des inégalités, on surveille les signes ; si on les additionne, ça ne sert à rien

On divise par $\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^2$ pour isoler notre somme $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n.(2.n-1)}{3}.\frac{\pi^2}{(2.n+1)^2}<\frac{\pi^2.n}{(2.n+1)^2}$$

Le majorant $\dfrac{\pi^2.n}{(2.n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (degrés à comparer entre numérateur et dénominateur).

Par encadrement $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{n.(2.n-1)}{3}.\dfrac{\pi^2}{(2.n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Mais $\dfrac{n.(2.n-1)}{3}.\dfrac{\pi^2}{(2.n+1)^2}$ est équivalent à $dsp\frac{2.n^2}{3}.\frac{\pi^2}{4.n^2}$ et tend vers $\dfrac{2.\pi^2}{12}$ ce qui refait bien $\dfrac{\pi^2}{6}$.

VI∼0) **Compléments.**

Montrez : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2.p-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2.p)^2}=\dfrac{\pi^2}{24}$.

VI∼1) Calculez $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2.p-1)^4}$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2.p)^4}$.

VI∼2) Montrez : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\binom{2.k}{k}.k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

VI∼3) Montrez à la « Euler » : $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\prod\limits_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}+\dots\right)=\zeta(2)$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

VII∼0) **Accélération de la convergence.**

Pour tout k, on pose $v_k=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{k.(k+1)}$. Montrez : $\forall n,\ 0\leqslant v_n\leqslant\dfrac{1}{k^3}$.

VII∼1) Montrez que la série de terme général v_k converge et que sa somme vaut $\zeta(2)-1$.

VII∼2) Montrez : $0\leqslant\zeta(2)-1-\sum\limits_{k=1}^{n}v_k\leqslant\dfrac{1}{2.k^2}$ par comparaison série intégrale.

VII∼3) Pour quel entier n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n}v_k$ est elle une approximation de $\zeta(2)$ à 10^{-5} près ?

VII∼4) On pose ensuite $w_k=v_k-\dfrac{1}{k.(k+1).(k+2)}$. Exprimez $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_k$ à l'aide de $\zeta(2)$.

VII∼5) Pour quel entier n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n}w_k$ est elle une approximation de $\zeta(2)-\dfrac{5}{4}$ à 10^{-5} près ?

VII∼6) Écrivez une procédure Python qui pour n donné calcule $\sum\limits_{k=1}^{n}w_k$.

◃12▹ Décomposez la suite périodique $(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b,\dots)$ comme combinaison de (1^n) et $((-1)^n)$.
Décomposez la suite périodique $(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\dots)$ comme combinaison de (1^n) et (j^n) et $(j^{2.n})$.
Se décompose-t-elle à l'aide de (1^n) et (j^n) et $((-j)^n)$?

$(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b,\dots)=\dfrac{a+b}{2}.(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\dots)+\dfrac{a-b}{2}.(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\dots)$

(on trouve les deux coefficients par résolution d'un tout petit système)

$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\dots)$ s'écrit $\begin{array}{llllllllll}\frac{1}{3}\times & (1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots) \\ \frac{1}{3}\times & (1, & j, & j^2, & 1, & j, & j^2, & 1, & \dots) \\ \frac{1}{3}\times & (1, & j^2, & j, & 1, & j^2, & j, & 1, & \dots)\end{array}$

Peut on l'écrire $\begin{array}{lllllllll} a\times & (1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots) \\ b\times & (1, & j, & j^2, & 1, & j, & j^2, & 1, & \dots) \\ c\times & (1, & -j, & j^2, & -1, & j, & -j^2, & 1, & \dots)\end{array}$?

Le système conduit par exemple (colonnes 0 et 3) à $a+b+c=1$ et $a+b-c=1$ d'où $c=0$

puis $a+b=1$ et $a+j.b=0$ et $a+j^2.b=0$ (trois premières colonnes). Il y a contradiction.

◁13▷ ♡ Une série géométrique a pour somme (tous les termes de 0 à l'infini) 1, et la somme de ses carrés vaut 2. Retrouvez la raison.
Et la valeur du premier terme.

On note a le terme initial (non nul sinon la somme de la série est nulle), et r la raison (comprise entre -1 et 1 strictement sinon la série diverge).

Le jeu de conditions donne $\dfrac{a}{1-r}=1$ et $\dfrac{a^2}{1-r^2}=2$.

On a donc $a=1-r$ puis $a^2=(1-r)^2$.

En comparant avec $a^2=2.(1-r^2)$ on trouve $(1-r)^2=2.(1-r^2)$ et en simplifiant par $1-r$ non nul : $\boxed{r=\dfrac{-1}{3}}$

On reporte : $\boxed{a=\dfrac{4}{2}}$

On peut vérifier si nécessaire.

◁14▷ On définit $A=\begin{pmatrix}5&4&3&2&1\\5&4&3&2&0\\5&4&3&0&0\\5&4&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&5&5&5&5\\4&4&4&4&0\\3&3&3&0&0\\2&2&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&0\\3&4&5&0&0\\4&5&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Généralisez en donnant une formule pour le terme général de chacune de ces matrices en taille n *(du type $a_i^k=N+1-k$ si $i+k\leqslant n+1$).*

Montrez que la somme des coefficients de A_n vaut $\sum_{k=0}^{n}k^2$. Même question avec B_n et C_n.

Donnez le du terme général de $A_n+B_n+C_n$ *(combien y a-t-il de coefficients non nuls ?).*

Calculez la somme des coefficients de $A_n+B_n+C_n$. Quel résultat avez vous retrouvé ?

$A=\begin{pmatrix}5&4&3&2&1\\5&4&3&2&0\\5&4&3&0&0\\5&4&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}5&5&5&5&5\\4&4&4&4&0\\3&3&3&0&0\\2&2&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&0\\3&4&5&0&0\\4&5&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{pmatrix}$
$a_i^k=\begin{matrix}n+1-k & si & i+k\leqslant n+1\\ 0 & sinon & \end{matrix}$	$c_i^k=\begin{matrix}n+1-i & si & i+k\leqslant n+1\\ 0 & sinon & \end{matrix}$	$c_i^k=\begin{matrix}i+k-1 & si & i+k\leqslant n+1\\ 0 & sinon & \end{matrix}$

$$\sum_{i,k}a_i^k=\sum_{k\leqslant n}\Big(\sum_{i\leqslant n}a_i^k\Big)=\sum_{k\leqslant n}\Big(\sum_{i\leqslant n+1-k}(n+1-k)\Big)=\sum_{i=1}^{n}(n+1-k)^2$$

(compteur par colonne).

On renverse la somme et on a $\sum_{p=1}^{n}p^2$.

Pour B la somme se fait en ligne.
Pour C on somme en fonction de la valeur de $i+k$ avec les mêmes termes.

Le terme général de $A+B+C$ est à chaque fois $(n+1-k)+(n+1-i)+i+k-1$ ce qui fait $2.n+1$.
Du moins pour $i+k\leqslant n+1$. Sinon, on a 0.

Si on somme $\sum_{i,k}(a_i^k+b_i^k+c_i^k)$ est faite de termes tous égaux à $2.n+1$ ou 0.

On ne compte que les $2.n+1$. Il y en a $\dfrac{n.(n+1)}{2}$.

La somme vaut donc $\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$.

Mais en séparant en $\sum_{i,k}(a_i^k+b_i^k+c_i^k)$, on a $3.\sum_{k=1}^{n}k^2$.

En identifiant : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{3}.\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$.

François a posé l'addition suivante *(il a fait vite, il y a une infinité de termes, mais il a tout calculé)* : pouvez vous me dire quel sera le deux mille quinzième chiffre de la somme ?

0.	1													
+	0	2												
+	0	0	3											
+	0	0	0	4										
+	0	0	0	0	5									
+	0	0	0	0	0	6								
+	0	0	0	0	0	0	7							
+	0	0	0	0	0	0	0	8						
+	0	0	0	0	0	0	0	0	9					
+	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0				
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1			
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2		
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4

◁ 15 ▷ Vous avez un joli Rubik's Cube en Apéricubes de la Vache qui Rit. Un ver a décidé d'en goûter chacun des vingt sept petits cubes. Il se déplace en passant d'un cube à son voisin ayant une face commune *(pas de passage en diagonale)*. Il a commencé par le cube central. Pourra-t-il visiter tous les petits cubes ? Indication : coloriez les cubes en deux couleurs.

On va poser vraiment l'addition en espérant qu'il n'y a pas trop de chiffres qui remontent par des retenues ?
Non. On regarde qui cette somme est : $1.10^{-1} + 2.10^{-2} + 3.10^{-3} + 4.10^{-4} + \ldots$ malproprement.

Proprement c'est $\sum_n n.10^{-n}$.

Enfin, plus proprement, c'est la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^{N} n.10^{-n}$.

Comment calculer cette série qui ressemble à une série géométrique ?
En libérant une variable.

Posons $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$ dont la valeur est connue : $f(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ (tant que x ne vaut pas &).

On dérive : $f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} n.x^{n-1} = \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1).x^N}{1-x}.$[2].

On multiplie par x : $x.f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} n.x^n = x.\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1).x^{N+1}}{1-x}$.

On calcule en 10^{-1} : $x.f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} n.10^{-n} = \frac{1}{10}.\frac{1-10^{-N-1}}{(9/10)^2} - \frac{(N+1).10^{-N-1}}{9/10}$.

On fait tendre N vers l'infini : $\sum_{n=0}^{N} n.10^{-n} = \frac{1}{10}.\frac{1}{(9/10)^2}$.

Le nombre étudié vaut $\boxed{\frac{10}{81}}$

Surprise : | Ce nombre est finalement un rationnel !

Son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.
On pose la division 0.12345679012345679012345679012345679012345679012346...

Génial : c'est dès le début qu'on a une période, et elle est de 10.
Vous connaissez tous ses chiffres, et le 2015^{ieme} chiffre est un 5. Encadré d'un 4 et d'un 6.

Finalement, un exercice sur les séries numériques.

Pour le cube, colorions effectivement un cube sur deux en noir et un sur deux en blanc.
Disons que le cube central est blanc. Voici les trois coupes :

N	B	N
B	N	B
N	B	N

,

B	N	B
N	B	N
B	N	B

et

N	B	N
B	N	B
N	B	N

Le ver part d'un cube blanc. A chaque déplacement, il change de couleur puisqu'il passe d'un cube à un de ses voisins directs.
Il doit visiter vingt sept cubes :

$$BNBNBN...BNB$$

Il finira donc dans un cube blanc ! Donc pas dans un coin.

---

2. oui, on a dérivé un produit, avec un terme d'exposant -1 c'est plus simple

Remarque : En plus, il ne finira même pas sur un blanc, car il y a 14 noirs
13 blancs
Il ne pourra donc même pas tout visiter...

◁16▷ Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$	$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Montrez que (C_n) est croissante, majorée. Sa limite est notée γ et s'appelle la constante d'Euler *(et de Mascheroni, qui pour sa part en a calculé plusieurs décimales)*.
En étudiant $C_{2.n} - C_n$, montrez que $H_{2.n} - H_n$ converge vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.
Tant qu'on est là, montrez par récurrence sur n $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$ pour tout n.

♣♠ Essayez de démontrer

$\gamma = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{x - E(x)}{x^2} \mathrm{d}x$	$\gamma = -\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$

(où E est la fonction partie entière)

L'encadrement $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$ est un cadeau par comparaison série/intégrale, avec finalement un seul terme.
Pour tout t de $[n,\ n+1]$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}$. On intègre de n à $n+1$ *(intervalle pris dans le sens croissant)*. Le minorant est l'aire d'un rectangle. Le terme du milieu est une intégrale. le terme de droite est aussi l'aire d'un rectangle.

Mot clef : somme de Riemann.

On effectue le calcul de l'intégrale au milieu : $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.
On passe à l'opposé : $-\frac{1}{n+1} \geqslant -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geqslant -\frac{1}{n}$. On ajoute $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geqslant c_n \geqslant 0$.

L'inégalité de droite donne la croissance de C : $C_{n+1} - C_n = c_{n+1} \geqslant$ par définition des sommes[3].

Pour majorer, on se dit que l'autre inégalité doit servir en sommant pour k de 1 à n :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Cette fois, le majorant est une somme télescopique, de valeur $1 - \frac{1}{n+1}$.
On ne parle pas de limite, puisqu'on veut une majoration pour tout n et pas un comportement à l'infini :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

Mot clef : convergence des suites croissantes majorées, sommes télescopiques.

Le majorant ne dépend plus de n, la suite C est bien croissante, majorée. Elle converge vers son plus petit majorant.

Rien ne donne la valeur de ce majorant. On l'appelle γ, et on ne sait même pas si c'est un rationnel. Cela dit, si c'est un rationnel, l'écriture décimale son dénominateur a au moins 240 000 chiffres (source Wikipedia).
C'est Euler qui a croisé en premier cette constante. Et Mascheroni (abbé, enseignant en lettres, député, mathématicien de 1750 à 1800) a trouvé des méthodes de réarrangement de termes pour calculer γ avec une belle précision (pour l'époque). Il a étudié la géométrie des figures qu'on peut construire à la règle et au compas ; et même au compas tout seul. Le saviez vous, on peut avec un compas (et c'est tout) retrouver le centre d'un cercle qui a déjà été tracé... et pas juste en disant comme le physicien "*je regarde où il y a un trou dans la feuille*" ou comme l'ingénieur "*je mets un point au centre du cercle en visant bien*".

3. c'est Chasles, arrêtez de m'emm... en prétendant que c'est un télescopage

On a donc

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Dans la somme de droite, on télescope $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$ en $\ln(n+1)$ *(ou alors on recolle par relation de Chasles les intégrales d'où ceci vient)*. On a donc $\boxed{C_n = H_n - \ln(n+1)}$

On remplace $C_{2.n} = H_{2.n} - \ln(2.n+1)$ et on effectue

$$C_{2.n} - C_n = H_{2.n} - H_n - \ln\left(\frac{2.n+1}{n+1}\right)$$

On isole

$$H_{2.n} - H_n = C_{2.n} - C_n + \ln\left(\frac{2.n+1}{n+1}\right)$$

On fait tendre n vers l'infini. La différence $C_{2.n} - C_n$ tend vers $\gamma - \gamma$ c'est à dire 0. Le logarithme tend vers $\ln(2)$ par continuité de l'application logarithme *(quitte à écrire* $\ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$ *une dernière fois)*.

Le premier membre $H_{2n} - H_n$ a une limite, égale à $\boxed{\ln(2)}$ *(comme vu dans le cours et en T.D.)*.

On doit montrer $H_{2n} - H_n = A_{2.n}$ pour tout n, c'est à dire $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2.n}$

(un paquet de la série harmonique contre la série harmonique alternée).

On initialise avec n égal à 1 :

$H_2 - H_1 = \frac{1}{2}$	$A_2 = 1 - \frac{1}{2}$

, il y a égalité.

On suppose pour un n quelconque donné $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$.

On calcule :

$$H_{2.n+2} - H_{n+1} = H_{2.n} + \frac{1}{2.n+1} + \frac{1}{2.n+2} - \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)$$

On simplifie :

$$H_{2.n+2} - H_{n+1} = H_{2.n} - H_n + \frac{1}{2.n+1} - \frac{1}{2.n+2}$$

On calcule aussi :

$$A_{2.n+2} = A_{2.n} + \frac{1}{2.n+1} - \frac{1}{2.n+2}$$

En utilisant l'hypothèse $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$, on a alors $H_{2.n+2} - H_{n+1} = A_{2.n+2}$.

La propriété est bien héréditaire. C'est fini.

◃17▹ ♡ Simplifiez cette somme double $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant n}} \binom{n}{i}.2^{i+j}$.

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant n}} \binom{n}{i}.2^{i+j} = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.2^i\right).\left(\sum_{j=0}^{n} 2^j\right) = (1+2)^n.\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (2^{n+1}-1).3^n$$

◃18▹ La moyenne d'âge de cette famille (deux parents et les enfants) est de 20 ans. Mais si on ne compte pas la mère (qui a 40 ans), la moyenne d'âge est de 15 ans. Combien d'enfants ?

Notons S la somme de tous les âges *(enfants et parents)*, et e le nombre d'enfants.

On nous dit alors : $\frac{S}{e+2} = 20$ et $\frac{S-40}{e+1} = 15$.

C'est un système à résoudre. On trouve trois enfants. Et une somme des âges égale à 100.

On peut imaginer que le père a aussi quarante ans, et les enfants vingt à eux trois. Ce n'est pas incohérent.

Qui sera arrivé à un total de $2,73$ enfants et l'aura encadré. Ou même $-7,21$. Ou pourquoi pas $12+5.i$?

◁ 19 ▷

♡ Guillaume et Clément doivent vider un tonneau de cent litres. Guillaume le vide avec un broc de trois litres et Clément avec un broc de deux litres. Ils l'ont vidé en trente cinq brocs. Combien chacun ?
♣ Guillaume dispose de deux mèches qui brulent chacune en une heure *(mais pas de façon uniforme, on ne peut pas dire* "tiens, le quart a brulé, il s'est écoulé quinze minutes"*)*. Quelles sont les durées qu'il peut mesurer avec ces mèches :
une heure en en brulant une, deux heures en en brulant une puis l'autre, une demi heure en en brulant une par les deux bouts. Mais encore ?
Et avec trois mèches ? Et peut on les brûler dans votre camp ?
L'exercice peut être prolongé par la lecture d'un article de Delahaye dans Pour la Science sur les « nombres combustibles ».

Notons G le nombre de brocs vidés par Guillaume et C le nombre de brocs vidés par Clément.

On a alors le simple système $\begin{array}{ccccc} G & + & C & = & 35 \\ 3.G & + & 2.C & = & 100 \end{array}$ qu'on résout.

On trouve heureusement une solution entière.

Solution de matheux	Mais il y a plus simple : s'ils avaient eu chacun un broc de deux litres, en trente cinq brocs ils auraient vidé 70 litres. Comme ils ont vidé trente litres de plus, c'est que Guillaume a fait trente fois « un litre de plus ». Guillaume a donc transvasé 30 brocs. Ce flemmard de Clément 5.Total : $30 \times 3 + 5 \times 2 = 100$. Pour moi, les maths, c'est ça. Sinon, c'est ce que j'appelle de la mauvaise physique, c'est à dire de la mise en équation sans chercher à saisir l'essence des choses. Et pour moi, la vraie physique, c'est le même raisonnement que les maths, sans système.

durée	méthode
une heure	• brûler une mèche
deux heures	• brûler une mèche, puis la suivante
une demi heure	• brûler une mèche mais allumée à chaque bout, elle brûle deux fois plus vite
une heure et demi	• brûler une mèche normalement • allumer ensuite l'autre aux deux bouts
trois quarts d'heure	• allumer une mèche aux deux bouts • mais allumer l'autre en même temps à un de ses bouts quand la première a fini de bruler, il s'est écoulé une demi heure • allumer alors l'autre bout de la mèche à demi consumée elle devait encore brûler une demi heure, elle va se consumer en un quart d'heure

Il y a un article complet de Jean-Paul Delahaye dans Pour la Science sur les nombres dits « combustibles » qui peuvent s'obtenir sous cette forme.

◁ 20 ▷

♣ Calculez ces étranges produits $\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3}$ et $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n}$.

$\prod_{n=0}^{N} \sqrt[2^n]{3}$ a pour logarithme $\sum_{n=0}^{N} \frac{\ln(3)}{2^n}$ ($\sqrt[a]{b}$ c'est $b^{\frac{1}{a}}$ et ça a pour logarithme $\frac{\ln(b)}{a}$).

On simplifie cette somme :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\ln(3)}{2^n} = \ln(3).\frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

On fait tendre N vers l'infini (et on jette $\frac{1}{2^{N+1}}$). Il reste $2.\ln(3)$.

On revient au produit par l'exponentielle : $\prod_{n=0}^{N} \sqrt[2^n]{3} \longrightarrow_{N\to+\infty} 9$

ou si vous préférez : $\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3} = 9}$

Passons au logarithme de $\prod_{n=1}^{N} \sqrt[2^n]{3^n}$

Cette fois, on a $\sum_{n=1}^{N} \frac{n.\ln(3)}{2^n}$.

On a cette fois la série $\sum_{n=1}^{N} n.x^n$ avec x égal à $\frac{1}{2}$.

Le cours indique : $\sum_{k=1}^{n} k.z^k = \frac{z-(n+1).z^{n+1}+n.z^{n+2}}{(1-z)^2}$.

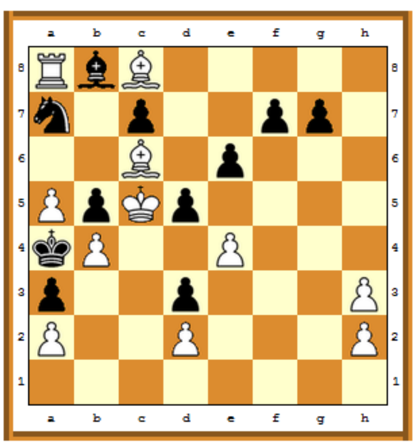
Dérivez $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$*, multimliez par* x.

Ici, z vaut $\frac{1}{2}$. Et $n.z^n$ tend vers 0 (croissances comparées).

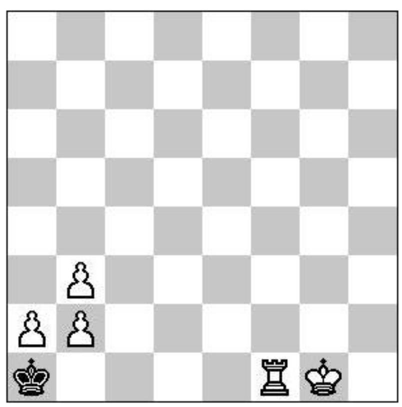
Bref, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n.\ln(3)}{2^n} = 2.\ln(3)$.

Cette fois encore : $\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n} = 9}$

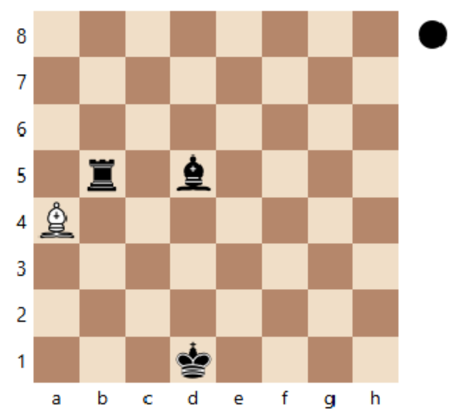
Dans cet exercice quand je le pose en I.S. ou en colle, trop de confusions sur $\sqrt[2^n]{a}$, avec des exposants dans le mauvais sens.
Rappel : $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ et $\sqrt[b]{a} = a^{1/b}$.



Les blancs jouent et font mat en un coup. En effet...



Les blancs viennent de roquer. Que venaient de faire les noirs ?



C'est aux noirs de jouer. Où est le roi blanc ?

◁21▷

https://ecole.apprendre-les-echecs.com/analyse-retrograde/

◁22▷

♡ Quand l'élève Yolett-Sassenbon développe $(2+3)^{2017}$ par la formule du binôme, quel est le plus grand coefficient binomial écrit, quel est le plus grand produit calculé ? *(conseil : signe de* $\binom{n}{k}.2^k.3^{n-k} - \binom{n}{k+1}.2^{k+1}.3^{n-k-1}$*).*

Les termes sont les $\binom{2017}{k}.2^n.3^{n-k}$.

On ne peut rien dire au premier coup d'œil : $k \longmapsto \binom{2017}{k}$ est d'abord croissant, puis décroissant

$k \longmapsto 2^k$ est croissant

$k \longmapsto 3^{2017-k}$ est décroissant

Exemple	$(2+3)^5$	2^5	$\binom{5}{1}.2^4.3$	$\binom{5}{2}.2^3.3^2$	$\binom{5}{3}.2^2.3^3$	$\binom{5}{4}.2.3^4$	3^5
		32	240	720	1080	810	243

On pose proprement $u_k = \binom{2017}{k}.2^k.3^{2017-k}$ et pour connaître les variations de la suite, on étudie la différence de deux termes consécutifs (et on la comparera à 0).

Ou leur quotient qu'on comparera à 1 car les entiers sont positifs : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\binom{2017}{k+1}.2^{k+1}.3^{2017-k-1}}{\binom{2017}{k}.2^{k+1}.3^{2017-k}}$.

On simplifie, il reste un 2 au numérateur, un 3 au dénominateur, et le quotient des binomiaux laisse deux termes :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2017-k)}{(k+1)}\frac{2}{3}$$

On compare à 1 : le basculement se fait pour $3.(k+1) = 2.(2017-k)$. On trouve 806.
Le plus grand est le terme d'indice 807.

◁23▷ ♣ On pose abusivement $\binom{n}{k} = \prod_{p=1}^{k} \dfrac{n-p+1}{p}$ le coefficient binomial de Newton *(même pour n non entier, mais quand même pour k entier)*.
Quel est le plus grand élément de la liste $\left|\binom{1/3}{k}\right|$ quand k va de 0 à 20 ?
Donnez le développement limité d'ordre 4 en $1/2$ de $x \longmapsto \binom{x}{4}$.
Quel est le module de $\binom{1+i}{4}$. Donnez un équivalent de $\sqrt[n]{\left|\binom{1+i}{k}\right|}$ quand k tend vers l'infini.
♠ Donnez un équivalent de $\left|\binom{1+i}{k}\right|$ quand k tend vers l'infini.
$♣^2$ Il parait que le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \longmapsto \binom{2.x}{x}$ est $1 + \dfrac{\pi^2}{6}.x^2 + 2.\zeta(3).x^3 + \dfrac{19}{360}.\pi^4.x^4 + o(x^4)_{x\to 0}$.

◁24▷ ♡ Un élève n'a retenu que la formule de Leibniz $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(k)}.v^{(n-k)}$, et n'a pas retenu la formule du binôme. Aidez le en lui demandant la dérivée d'ordre k de $x \longmapsto e^{a.x}$, puis la dérivée d'ordre n de $x \longmapsto e^{a.x}.e^{b.x}$.

Pour tout x, on a $(u.v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(k)}(x).v^{(n-k)}(x)$.
Or, pour tout k, $u^{(k)}(x) = a^k.e^{a.x}$, $v^{(n-k)}(x) = b^{n-k}.e^{b.x}$.
D'autre part, $(u.v)(x) = e^{(a+b).x}$ et $(u.v)^{(n)}(x) = (a+b)^n.e^{(a+b).x}$.
La formule $(u.v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(k)}(x).v^{(n-k)}(x)$ devient

$$(a+b)^{(n)}.e^{(a+b).x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k.e^{a.x}.b^{n-k}.e^{b.x}$$

On simplifie par $e^{a+b).x}$ (non nul) et on obtient $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k.b^{n-k}$.

Il existe aussi une méthode pour passer de la formule de Newton à celle de Leibniz, en étudiant deux opérateurs qui commutent.

◁25▷ On pose `M = [[-8, 6, 3], [-9, 7, 3], [0, 0, 1]]`. Donnez son polynôme caractéristique et son spectre. On pose $A = \dfrac{M+2.I_3}{3}$ et $B = \dfrac{I_3 - M}{3}$. Calculez $A.B$, $B.A$, A^2, B^2 et A^n pour tout n. Exprimez M à l'aide de A et B. Déduisez la forme de M^n.

On part de $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -9 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve sa trace : 0, son déterminant (dernière ligne) : -2, et la somme de ses mineurs de taille 2 : $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{vmatrix}$.

Le polynôme caractéristique se calcule aussi vite $\begin{vmatrix} -8-X & 6 & 3 \\ -9 & 7-X & 3 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X).\begin{vmatrix} -8-X & 6 \\ -9 & 7-X \end{vmatrix}$

Sous forme développée : $\boxed{X^3 - 3.X + 2}$ et sous forme factorisée $\boxed{(X-1)^2.(X-2)}$

Le spectre est $[1,\ 1,\ -2]$, en mentionnant que 1 est valeur propre double.

On sait que ça pose problème pour la diagonalisation. Mais ce n'est pas forcément un obstacle complet. Il se peut qu'on trouve un plan entiers de vecteurs propres pour la valeur propre 1. Ici, ce serait d'ailleurs le cas. Mais on va suivre une autre méthode.

On calcule donc $A = \dfrac{M + 2.I_3}{3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{I_3 - M}{3} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On effectue

	A	B
A	A	$0_{3,3}$
B	$0_{3,3}$	B

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = A}$

On initialise à 1, c'est évident, et pour l'hérédité : $A^{n+1} = A^n.A = A.A = A$. C'est tout.

Comment perdre des points sur cette question : écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = A$ au lieu de $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = A$. La formule n'est pas valable pour n égal à 0. *Comment perdre du temps sur cette formule (comme la grosse majorité des élèves hélas, mais ce n'est pas grave, il y a de la place en non étoile pour une majorité d'élèves...) : on calcule tout au niveau des coefficients avec des colonnes qui tombent sur des lignes... alors qu'on a fait une fois le seul calcul utile : $A^2 = A$; il ne reste plus qu'à travailler à l'étage des matrices tout de suite...*

On fait de même : $B^n = B$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

En fait, A et B sont des matrices de projecteurs.

On reconstruit : $\boxed{M = A - 2.B}$ On élève à la puissance n par la formule du binôme de Newton et tous ceux qui l'ont précédé *(on se doit de justifier : $A.B = B.A$)* $\boxed{M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.A^{n-k}.(-2.B)^k}$

Mais dans cette formule, dès que A rencontre B, il ne reste rien puisque $A.B = 0_{3,3}$.
Il n'y a que deux termes : $k = 0$ et $k = n$: $M^n = A^n + (-2)^n.B^n = A + (-2)^n.B$

$$M^n = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2)^n.\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3.(-2)^n & 2-2.(-2)^n & 1-(-2)^n \\ -3+3.(-2)^n & 3-2.(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aurait pu conjecturer vite cette formule, puis la prouver par récurrence sur n. *Le bloc $\begin{pmatrix} -2+3.(-2)^n & 2-2.(-2)^n \\ -3+3.(-2)^n & 3-2.(-2)^n \end{pmatrix}$ correspond à la diagonalisation élémentaire de $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$, comme on pouvait s'y attendre.*

◃26▹

I∼0) On définit la suite (B_n) par $\boxed{B_0 = 1 \text{ et } \forall n,\ B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.B_p}$ Calculez B_n pour n de 0 à 5.

n	formule	valeur
0	définition	1
1	$\binom{0}{0}.1$	1
2	$\binom{1}{0}.1 + \binom{1}{1}.1$	2
3	$\binom{2}{0}.1 + \binom{2}{1}.1 + \binom{2}{2}.2$	5
4	$\binom{3}{0}.1 + \binom{3}{1}.1 + \binom{3}{2}.2 + \binom{3}{3}.5$	15
5	$\binom{4}{0}.1 + \binom{4}{1}.1 + \binom{4}{2}.2 + \binom{4}{3}.5 + + \binom{4}{4}.15$	52

I∼1) Écrivez un script Python qui pour n donné calcule B_n.[a]

[a] niveau physique : `from math import binomial`, niveau PC : je reconstruis `binomial` mais en recréant déjà `factorielle`, niveau MP ou PSI : je reconstruis `binomial` mais sans factorielle, car je suis intelligent (pléonasme)

Dans tous les cas, on va calculer de proche en proche les B_k, en les stockant dans une liste qui grandit peu à peu. On l'initialise à 1, puis on calcule chaque nouveau terme par la formule (somme de 0 à n+1 inclus).
Le programme Python de l'utilisateur pour qui l'ordinateur est une boite noire qui calcule pour lui :

```
def B(n) :
....L = [1] #premier terme de la liste
....for k in range(n) : #on va avancer case par case
........S = 0 #un accumulateur
........for p in range(k+1) : #une somme de k+1 termes
............S += L[p]*binomial(k,p)#la formule de la somme
........L.append(S) #c'est bon, on le mémorise
....return L[-1] #seul le dernier terme importe
```

Le PC utilise la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

```
def Binomial(n, k) :
....return(Facto(n)//(Facto(k)*Facto(n-k)))
```

```
def Facto(n) :
....P = 1
....for k in range(1, n+1) :
........P *= k
....return P
```

Il est nul ! C'est ainsi que pour calculer $\binom{50}{1}$ il va calculer 50! et le diviser par 49!. Sans se rendre compte que ça fait 50.
Pas de sa faute, il a l'habitude de dépenser des sous sans réfléchir... Et pour aller à la boulangerie, comme on lui a dit « elle est en face du métro Saint-Paul, il retourne chez lui à vélo, puis il prend le métro jusqu'à Saint-Paul, il achète son croissant, il retourne chez lui en métro et revient au lycée à vélo.

Le PSI ne fait que les calculs utiles : $\binom{n}{k} = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}$ avec k termes en haut et en bas

```
def Binomial(n, k) :
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)//(i+1)
....return B
```

Le MP en fait moins au delà du milieu de la ligne.

```
def Binomial(n, k) :
....if 2*k > n : #fin de ligne
........k = n-k
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)//(i+1)
....return B
```

Le vrai élève de Prépas se dit que ligne après ligne, il recalcule plein de binomiaux. Et si il avançait avec la formule de Pascal ?

```
def B(n) :
....L = [1]
....Pascal = [1] #première ligne du triangle
....for k in range(n) :
........S = 0 #un accumulateur
........for p in range(k+1) : #la somme
............S += L[p]*Pascal[p] #la formule
........L.append(S) #le nouveau terme est calculé
........NewLine = [1] #passons à la ligne suivante du triangle
........for p in range(k) : #case par case
............NewLine.append(Pascal[p]+Pascal[p+1]) #la formule de Pascal
........NewLine.append(1) #le terme du bout
........Pascal = NewLine[ : ] #on recopie
....return L[-1]
```

I∼2) Montrez que (B_n) est une suite d'entiers naturels qui diverge vers $+\infty$.

Par récurrence forte, chaque terme de la liste est un entier positif.

La suite (B_n) est croissante puisque $B_{n+1} = \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{p}.B_p\Big) + B_n$.

En tant que suite d'entiers strictement croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Mieux encore, pour tout n, on a $B_n \geqslant 1$.
On reporte : $\forall n,\ B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.B_p \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = 2^{n-1}$.
On recommence : $\forall n,\ B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.B_p \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.2^{p-1} = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.2^p = \frac{3^{n-1}}{2}$.
On pourrait continuer ainsi sans arrêt.

I∼3) Montrez pour tout n : $B_n \geqslant 1$, $B_n \geqslant 2^{n-1}$, $B_n \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}$.

Récurrence forte ?

II∼0) On pose $\boxed{E = x \longmapsto e^{(e^x)}}$ Montrez pour tout n : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\exp.E^{(k)}$.

La formule $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\exp.E^{(k)}$ ressemble à une formule de Leibniz !

Si vous ne voyez pas ça, non seulement vous êtes foutu, mais en plus vous êtes un foutu crétin pour lequel j'ai fait une semaine de cours pour rien.
On dérive déjà une fois : $E'(x) = e^x.e^{(e^x)}$ en tant que composée $x \longmapsto \exp(x) \longmapsto \exp(\exp(x))$.

On reformule à l'étage des fonctions : $E' = \exp \times E$.

On dérive n fois car tout est n fois dérivable : $(E')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\exp^{(n-k)}.E^{(k)}$.

On a donc : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\exp.E^{(k)}$.

Déduisez $\forall n,\ e.B_n = E^{(n)}(0)$.

On applique en 0 : $\exp(0)$ vaut 1. On a donc $E^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.E^{(k)}(0)$.

La suite $(E^{(n)}(0))_n$ vérifie la même relation de récurrence que (B_n) .
Mais vous ne pouvez pas affirmer comme ça qu'elles sont donc égales ».
En effet, il reste le problème de « sont elles initialisées pareil ? ».

Rappel :
La suite nulle et la suite factorielle vérifient $u_{n+1} = (n+1).u_n$ pour tout n. Mais elles ne sont pas égales.
Les suites (5^n) et $((-3).5^n)$ vérifient la même relation $u_{n+1} = 3.u_n$ mais elles ne sont pas égales.
Les applications $\cos$ et $\sin$ vérifient $y'' = -y$. Mais elles ne sont pas égales.

Donc, si vous concluez juste avec une phrase trop simpliste, vous n'avez pas les points.
Il faut pour le moins citer le mot « récurrence », avec adjectif « forte ». Sans oublier l'initialisation.

Je vous la fais.
Pour tout n, on note (P_n) la proposition : $\forall k \leqslant n,\ E^{(k)}(0) = e.B_k$.
On initialise P_0 qui se borne à $E(0) = e$ et $B_0 = 1$.
Pour un n donné quelconque, on suppose $\forall k \leqslant n,\ E^{(k)}(0) = e.B_k$.

On reporte dans $E^{(n+1)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.E^{(k)}(0)$

$$E^{(n+1)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e.B_k$$
$$E^{(n+1)}(0)=e.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.B_k$$
$$E^{(n+1)}(0)=e.B_{n+1}$$

Et l'hérédité est établie.

Remarque : *Dans le sujet original de Mines-Ponts, on profitait de cette fonction E pour obtenir la formule $B_n=\frac{1}{e}.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$.*
Mais on avait besoin de théorèmes de seconde année sur les séries entières et les double limites.
L'idée était d'écrire $e^t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$ (formule de Taylor avec reste intégrale expédié à l'infini)
de l'appliquer en $t=e^x$: $E(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{k.x}}{k!}$
de dériver n fois : $E^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n.e^{k.x}}{k!}$ (en dérivant une somme infinie ?)
de calculer en 0 : $E^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$.

III~0) p est un entier naturel fixé, montrez que $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 à l'infini et est majorée.

La suite $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Il suffit de poser $u_k=\frac{2^k.k^p}{k!}$, de calculer

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{2^{k+1}.(k+1)^p}{(k+1)!}.\frac{k!}{2^k.k^p}=\frac{2.(k+1)^p}{k^p}.\frac{1}{k+1}$$

Le réel 2 ne bouge pas. Le quotient $\frac{(k+1)^p}{k^p}$tend vers 1 et $\frac{1}{k+1}$ tend vers 0.
On peut appliquer le théorème de comparaison logarithmique.
Bref, des croissances comparées...

Comme la suite (u_k) tend vers 0 , elle est bornée. On notera M_p un majorant si on en a besoin.

III~1) Déduisez que $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$ est une suite croissante majorée qui converge vers une limite qu'on va noter $\boxed{A_p}$ sans la calculer.

p est fixé. Dans $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$, c'est donc N (le nombre de termes) qui augmente [4].
On a évidemment

$$\sum_{k=0}^{N+1}\frac{k^p}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}=\frac{(N+1)^p}{(N+1)!}$$

positif. La suite est donc croissante.

On va la majorer par une quantité qui aura le droit de dépendre de p, mais pas de k (variable de sommation) ni de N variable de la suite.
On a montré que la suite $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ est majorée et on a noté M_p un majorant.
On a donc en multipliant : $\frac{k^p}{k!}\leqslant\frac{M_p}{2^k}$ pour tout k.

4. ne parlez pas de k c'est juste la variable muette de sommation

On somme de 0 à N :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\leqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{M_p}{2^p}=M_p.\frac{1-\dfrac{1}{2^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}\leqslant M_p.\frac{1}{\dfrac{1}{2}}$$

Le majorant ne dépend pas de N, on a gagné.

La suite $\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\Big)_N$ est croissante majorée, elle converge.
On ne sait rien en effet de sa limite (au mieux qu'elle est inférieure ou égale à $2.M_p$ sachant qu'on ne connaît même pas M_p).

III∼2) Calculez quand même A_0.

Pour p égal à 0, on étudie $\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\Big)_N$ (y compris pour 0^0, on est d'accord, ce n'est pas la limite, la forme indéterminée, 0 et 0 sont des entiers dans la formule).
Question d'habitude : $\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\Big)_N$ converge vers e^t. C'est ici le cas particulier $t=1$.
Mais il faut une preuve. Et elle repose sur notre outil : la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$e^1=\sum_{k=0}^{N}\frac{1^k.e^0}{k!}+\frac{1^{n+1}}{n!}.\int_0^1(1-t)^n.e^{t.1}.dt$$

On encadre le reste intégrale :

$$0\leqslant\frac{1^{n+1}}{n!}.\int_0^1(1-t)^n.e^{t.1}.dt\leqslant\frac{1}{n!}.\int_0^1 1.e.dt$$

Il tend vers 0, la série converge vers e^1.

Évidemment : *En Spé, le résultat $e^t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$ est un acquis du cours.*
Plus précisément « du cours sur les séries de fonctions et même sur les séries entières ».

III∼3) Montrez pour tout n : $A_{n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p$.

On va prouver $A_{n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p$ en partant du membre de gauche pour aboutir à celui de droite.

Rappel : *Combien de fois vous ai-je dit « la tendance naturelle du cerveau est quand même de mettre de l'ordre dans quelquechose de compliqué dans l'espoir d'en faire quelquechose de simple ».*
Ensuite,partir de la gauche pour finir à droite est la tendance naturelle de l'être humain quand il prend de l'âge. Georges Clemenceau en est le meilleur exemple, mais si vous suivez la politique, vous devez en connaître quelques uns...

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.\Big(\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\Big)$ par définition

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\Big)\Big)$ (limite d'une somme / somme des limites)

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N}\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.\frac{k^p}{k!}\Big)\Big)$ (interversion sur des sommes finies)

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}.\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.k^p\Big)\Big)$ (on a sorti un terme)

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}.(k+1)^n\Big)$ (formule du binôme)

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(k+1)!}.(k+1)^{n+1}\Big)$ (on a multiplié haut et bas par $k+1$, la belle idée)

$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{K=1}^{N+1}\frac{K^{n+1}}{K!}\Big)$ (ça prend forme, on a eu raison d'avoir l'idée au dessus)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{K=0}^{N+1} \frac{K^{n+1}}{K!} \right)$ (le terme $K = 0$ est nul !)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = A_{n+1}$ (définition, que ce soit N ou $N+1$ qui parte à l'infini, qu'importe).

III∼4) Donnez la relation entre (A_n) et (B_n) .

Cette fois encore, une récurrence forte. On peut la citer et ne pas la faire.
Pour tout n, $A_n = e.B_n$.

On a donc prouvé $\boxed{B_n = \frac{1}{e}.(x \longmapsto e^{e^x})^{(n)}(0) = \frac{1}{e}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}$

IV∼0) Pour tout λ strictement positif, on pose $\boxed{\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)}$ définie sur $]0, +\infty[$. Donnez les limites de ϕ_λ aux bornes de son domaine de définition[a]. Montrez que ϕ_λ admet un maximum, atteint en un unique réel qu'on notera α_λ (dont on prouvera l'existence mais qu'on ne déterminera pas explicitement).

[a] en 0, vous pourrez poser $x = \frac{1}{X}$ si la forme indéterminée vous embête

$\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$.
En 0, c'est $\ln(x)$ qui l'emporte et la fait tendre vers $-\infty$.

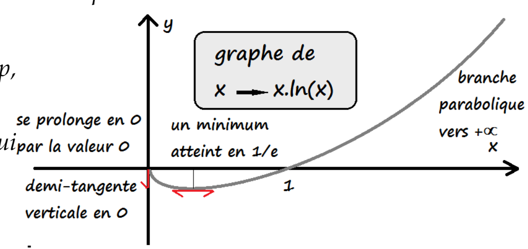
Classique :

La limite $x.\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 est un classique.

En Terminale, on ne la voit pas en général, mais en Sup, elle sert. Il fat la connaître.

Et c'est facile. Si x tend vers 0, on l'écrit $\frac{1}{X}$ avec X qui tend vers l'infini.

On remplace alors $x.\ln(x)$ par $\frac{-\ln(X)}{X}$.



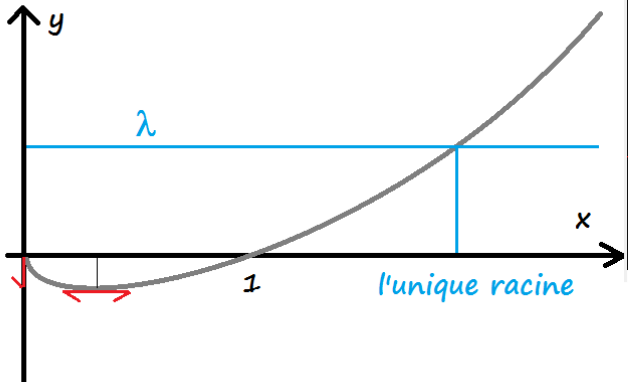
Et cette fois, c'est une limite usuelle, c'est le X du dénominateur qui l'emporte.

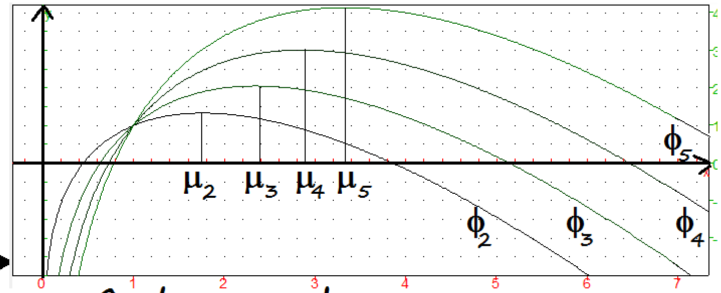
En $+\infty$, c'est $-x.\ln(x)$ qui l'emporte (écrivez $-x.\ln(x).(1 - \frac{1}{\ln(x)})$ si nécessaire).

A chaque extrémité de l'intervalle, elle tend vers un infini négatif. Entre les deux, elle doit bien avoir un maximum. Ou deux si elle est chameau !

On la dérive : $(\phi_\lambda)' = x \longmapsto -\ln(x) + \frac{\lambda}{x}$.
Et encore une fois : $(\phi_\lambda)'' = x \longmapsto -\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{x^2}$.
Et encore une fois... non, ça ne sert à rien.
$(\phi_\lambda)''$ est négative sur $]0, +\infty[$ (ϕ_λ est convexe).
$(\phi_\lambda)'$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, en 0 elle tend $+\infty$ et en $+\infty$ elle tend vers $-\infty$.
$(\phi_\lambda)'$ est d'abord positive, puis négative et s'annule une fois et une seule. Quelquepart.
ϕ_λ est donc croissante puis décroissante.
Elle admet un unique maximum. Atteint là où sa dérivée s'annule et change de signe.
Cet unique point où $(\phi_\lambda)'$ s'annule est le réel solution de $\boxed{x.\ln(x) = \lambda}$

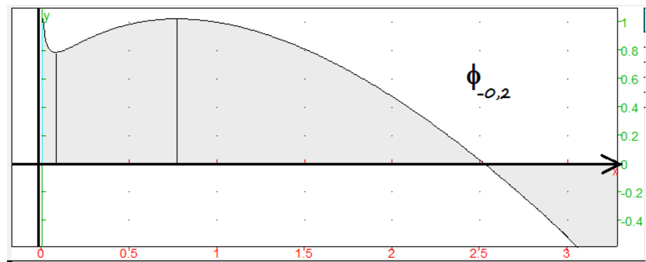
On va faire appel à une fonction auxiliaire : $x \longmapsto x.\ln(x)$ représentée un peu plus haut.
Pour chaque λ strictement positif, il y a bien un point et un seul où $x.\ln(x)$ vaut λ.



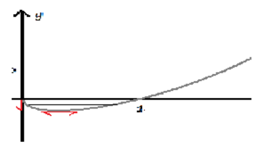


Quelques graphes

et leurs extrema



On notera que pour λ négatif (mais pas trop), l'équation $(\phi_\lambda)'(x) = 0$ admet deux solutions (toutes deux plus petites que 1), ce qui crée un graphe assez joli.



l'équation x.ln(x)= λ admet deux solutions.

IV∼1) Montrez pour tout x supérieur ou égal à -1 :

$$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$$

On se donne λ et x (plus grand que -1 pour que $\alpha_\lambda.(1+x)$ soit positif).
On veut prouver $\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$
On calcule chaque morceau$\phi_\lambda(\mu_\lambda.(1+x))$, $\phi_\lambda(\mu_\lambda)$, $(\mu_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x))$ et $\mu_\lambda.x.\ln(1+x)$ sachant que $\mu_\lambda.\ln(\mu_\lambda)$ vaut λ.

$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) =$	$\alpha_\lambda.(1+x)$	$-\alpha_\lambda.(1+x).\ln(\alpha_\lambda)$ $-\alpha_\lambda.(1+x).\ln(1+x)$	$\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ $+\lambda.\ln(1+x)$
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda) =$	α_λ	$-\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$	$+\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$
$(\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) =$	$\alpha_\lambda.x$ $-\lambda.x$	$-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ $+\lambda.\ln(1+x)$	
$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x) =$		$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	

On élimine les termes qui sont visiblement les mêmes.

$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) =$	A α_λ B $\alpha_\lambda.x$	C $-\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ $-\alpha_\lambda.x.\ln(\alpha_\lambda)$ E $-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ F $-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	D $\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ G $+\lambda.\ln(1+x)$
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda) =$	A μ_λ	C $-\alpha_\lambda.\ln(\mu_\lambda)$	D $+\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$
$(\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) =$	B $\alpha_\lambda.x$ $-\lambda.x$	E $-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ G $+\lambda.\ln(1+x)$	
$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x) =$		F $-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	

Il ne reste somme toute que $-\alpha_\lambda.x.\ln(\alpha_\lambda)$ dans le premier membre et $-\lambda.x$ dans le second.
Mais justement, $\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ est égal à λ.
Bref, il y a égalité.

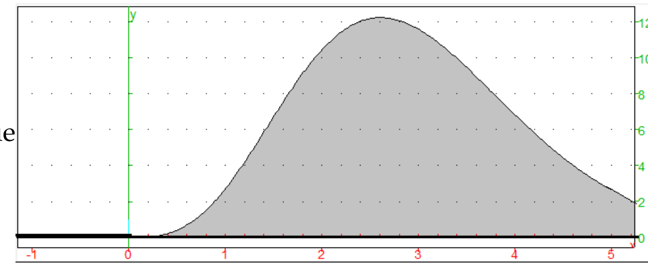
Remarque :

Dans le sujet de Mines-Ponts, la formule était admise.
C'est un peu dommage. La démonstration montrait votre capacité à organiser vos calculs proprement.
D'autre part, si vous vous contentez de « on simplifie le membre de droite, on retrouve celui de gauche », ce n'est pas suffisant.
Il faut indiquer qui part avec qui. Et préciser le rôle de $\mu_\lambda.\ln(\mu_\lambda) = \lambda$.
Sinon, ce n'est que du bluff. Et c'est très très dangereux et risqué.

V∼0) n est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On définit $\boxed{f_n = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x \leqslant 0 \\ e^x.x^{n-x-\frac{1}{2}} & si & x > 0 \end{array} \right.}$

Montrez que f_n admet sur $\mathbb{R}^+$ un maximum, atteint en un unique point $\boxed{\mu_n}$

Il faut établir que f_n admet un maximum (sur $\mathbb{R}^+$ parce que sur $\mathbb{R}^-$ elle est assez plate).
On recommence tout ? Ce serait étrange. Que vient on de faire avant ? D'étudier une application qui a justement un maximum sur $]0, +\infty[$.
Prenons la peine d'écrire x^{-x} dans $f_n(x)$ sous sa forme $e^{-x.\ln(x)}$ et l'idée prend forme.
$f_n(x) = e^x.\exp((-x+n-\frac{1}{2}).\ln(x)) = \exp(x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x))$ avec $\lambda = n - \dfrac{1}{2}$.



Par composition avec l'exponentielle, f admet un unique maximum en $\alpha_\lambda = \alpha_{n-0.5}$ qu'on note donc μ_n.

Ce réel μ_n est la solution de l'équation $t.\ln(t) = n - \dfrac{1}{2}$.

V∼1) f_n est elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de f_n est acquise sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) puis sur $]0, +\infty[$ (composée)

Reste sa continuité en 0. A gauche elle a une limite : 0.

A droite, on l'a vu, $x - x.\ln(x) + \left(n - \dfrac{1}{2}\right).x$ tend vers $-\infty$. Son exponentielle tend vers 0.

La limite à gauche en 0 est égale à la limite à droite en 0, et c'est la valeur de la fonction en 0.

La voilà continue en 0 aussi.

V∼2) f_n est elle dérivable sur $\mathbb{R}$ (même en 0 , à droite et à gauche ?).

Pour la dérivabilité, on a une demi-tangente horizontale à gauche.
A droite, on dérive f_n ? L'horreur. Il est facile de mal dériver $x \longmapsto x^{-x}$.[5]

Mais en fait, c'est quoi f_n dérivable ? C'est l'existence de la limite des taux d'accroissement : $\dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$.

Ici, à droite en 0 : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = e^x.x^{-x+n\frac{-3}{2}} = f_{n-1}(x)$.
On connaît la limite à droite en 0 : c'est 0.

La dérivée à droite et la dérivée à gauche en 0 sont égales, et valent 0.
f_n est dérivable en 0 de dérivée $(f_n)'(0) = 0$.

V∼3) Montrez : $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$ (pour info : $\ln(2^4) < 3$).

Pour encadrer $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$, il faut revenir à la caractérisation de μ_n : la solution de $t.\ln(t) = n - \dfrac{1}{2}$ d'inconnue t sur le domaine où l'application $t \longmapsto t.\ln(t)$ est croissante.
On donne un nom à l'application $t \longmapsto t.\ln(t)$ de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$: φ car on manque d'originalité (mais on peut alors parler de φ^{-1}).

La définition est alors $\mu_n = \varphi^{-1}\left(n - \frac{1}{2}\right)$.

On calcule : $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 2.\ln(2)$.[6] On encadre : $\varphi(1) < 1 - \dfrac{1}{2} < \varphi(2)$.

Ceci permet d'affirmer $0 \leqslant \mu_1 = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) < 2$.

5. oui : $(x \longmapsto x^{-x})' = (x \longmapsto -(1+\ln(x)).x^{-x})$
6. quand j'étais petit et déjà jeune, je connaissais $\ln(2) \simeq 0{,}693$ mais c'était à cause des circuits oscillants en électronique, pas vous ?

On affirme ensuite $2.\ln(2) < 2 - \dfrac{1}{2}$ d'où $\varphi(2) < 2 - \dfrac{1}{2} = \varphi(\mu_2)$ puis $2 < \mu_2$.

Cadeau ? | L'affirmation $2.\ln(2) < 2 - \dfrac{1}{2}$ est $4.\ln(2) \leqslant 3$.
C'est celle qui est offerte par l'énoncé.
Je rappelle que l'usage de la calculatrice était interdit sur cette épreuve de Mines-Ponts, dont je n'ai pas retrouvé le rapport de jury, désolé pour ceux qui sont friands de remarques et comparaisons.

V∼4) Montrez pour n supérieur ou égal à 3 : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.

Pour établir $\sqrt{n} < \mu_n < n$, il suffit d'établir $\varphi(\sqrt{n}) < n - \dfrac{1}{2} < \varphi(n)$.

L'inégalité de droite $n - \dfrac{1}{2} < n < n.\ln(n)$ est vraie dès que $\ln(n)$ est plus grand que 1. Justement, n vaut au moins 3.

L'inégalité de gauche est $\sqrt{n}.\ln(\sqrt{n}) < n - \dfrac{1}{2}$.

Elle se ramène à $\sqrt{n}.\ln(n) < 2.n - 1$ et même $0 < 2.\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln(n)$.

On étudie l'application différence $x \longmapsto 2.\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \ln(x)$. Elle se dérive en $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2.x.\sqrt{x}}$, ce qui fait $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x} + \dfrac{1}{2.x.\sqrt{x}}$.
Sa dérivée est positive sur $[1, +\infty[$. Elle croit. Elle est déjà positive en 1. Inutile d'en demander plus.

V∼5) Justifiez : $\mu_n = o(n)_{n\to+\infty}$ et $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

On tient : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.
On divise par n : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{\mu_n}{n} < 1$.
Le théorème des gendarmes est inopérant.

Rapport : | Je suis prêt à parier que le rapport du jury aura fait référence ici aux élèves ayant invoqué en coup de vent le théorème des gendarmes comme argument sans vérifier s'il était utilisable...
Que penser effectivement de tels élèves comme futurs ingénieurs ? Dangereux, non ?

On repart de ce qui caractérise μ_n : $\mu_n.\ln(\mu_n) = n - \dfrac{1}{2}$ (grand classique : étudier un objet non pour sa valeur qu'on ne peut pas donner mais pour ce qui le caractérise).

On divise : $\dfrac{\mu_n}{n}.\ln(\mu_n) = 1 - \dfrac{1}{2.n}$ encore : $\dfrac{\mu_n}{n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2.n}}{\ln(\mu_n)}$.
Or, μ_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini (là c'est bien l'encadrement $\sqrt{n} < \mu_n < n$).
Le quotient de droite tend vers 0. $dsp\frac{\mu_n}{n}$ tend vers 0, c'est la définition de $\mu_n = o(n)$.

Pour $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$, on calcule un quotient : $\dfrac{\mu_n.\ln(n)}{n}$.
On l'écrit même

$$\frac{\mu_n.\ln(\mu_n)}{n}.\frac{\ln(n)}{\ln(\mu_n)}$$

On peut remplacer :

$$\frac{\mu_n.\ln(n)}{n} = \frac{n - \dfrac{1}{2}}{n}.\frac{\ln(n)}{\ln(\mu_n)}$$

Le premier terme tend vers 1 classiquement (même un Terminale peut le dire...).
L'encadrement $\sqrt{n} < \mu_n < n$ donne juste $\dfrac{\ln(n)}{2} < \ln(\mu_n) < \ln(n)$ puis $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} < 1$.
Pas suffisant pour un équivalent. Mais l'élève eut espérer un bout de point si il a rédigé ça.

Mais on a encore une belle idée : $\mu_n.\ln(\mu_n) = n - \dfrac{1}{2}$ donc $\ln(\mu_n) + \ln(\ln(\mu_n)) = \ln\left(n - \dfrac{1}{2}\right)$.

On divise : $\dfrac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n - \dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln(\ln(\mu_n))}{\ln(n)}$.

Le terme $\dfrac{\ln\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)}$ converge vers 1 (niveau Sup $\dfrac{\ln\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{1}{2.n}\right)}{\ln(n)}$ tend vers 1).
Le terme $\dfrac{\ln(\ln(\mu_n))}{\ln(n)}$ est encadré par $\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ et $\dfrac{\ln(\ln(\sqrt{n}))}{\ln(n)}$. Il tend vers 0.

V∼6) Soit α un réel de $]0,\ 1[$, montrez : $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.

On termine avec $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.
Pour ce faire, on se donne α (et dans sa tête on se dit$\alpha = 0,8$ puisqu'il est entre 0 et 1).
On regarde le quotient $\dfrac{n^\alpha}{\mu_n}$. Ayant un équivalent de μ_n, on le fait intervenir :

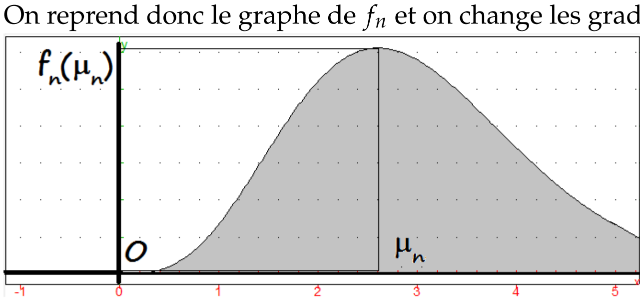
$$\frac{n^\alpha}{\dfrac{n}{\ln(n)}}\ \frac{\dfrac{n}{\ln(n)}}{\mu_n} = \frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}\ \frac{\dfrac{n}{\ln(n)}}{\mu_n}$$

L'exposant $1-\alpha$ est positif. La forme indéterminée $\dfrac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}$ tend vers 0. Et le terme $\dfrac{n}{\ln(n).\mu_n}$ tend vers 1.
Le produit tend vers 0 , et c'est ce qu'on attend pour un petit o.

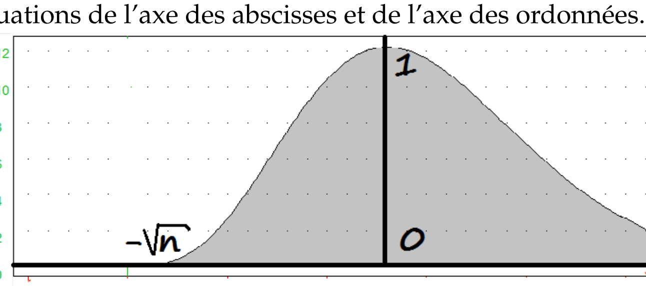
VI∼0) On définit ensuite $\boxed{g_n = x \longmapsto \dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)}$ Justifiez pour tout x :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n).g_n\Big(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}.x - \sqrt{n}\Big)$$

Malgré l'écriture $\dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$ un peu indigeste, c'est juste un changement d'échelle sur l'axe des abscisses $x \longmapsto f_n(a.x+b)$, et une dilatation sur l'axe des ordonnées. On divise la fonction par son maximum non nul, g_n est une fonction positive (f_n l'était) et son maximum vaut 1 (c'est $\dfrac{||f_n||_\infty}{f_n(\mu_n)}$ et justement, μ_n est l'en droit où f_n atteint son maximum).
On reprend donc le graphe de f_n et on change les graduations de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.



graphe de f_n



graphe de g_n

L'application g_n est d'abord nulle, puis croissante, elle atteint le niveau 1, et elle décroît en direction (asymptotique) de 0.

VI∼1) Donnez l'allure du graphe de g_n.

Il me semble que c'est fait.

VI∼2) Montrez que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ converge vers un réel qu'on notera tout naturellement $g(x)$ et que vous expliciterez.

x est fixé (on va appeler ça de la convergence « simple » ou « point par point »).
Supposons x positif. Que fait $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$? μ_n tend vers l'infini (questions précédentes) et $\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ tend aussi vers l'infini (rappel de l'équivalent de μ_n). Le terme dans la parenthèse $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ tend vers l'infini. Et à l'infini, $f_n$tend vers 0.
sauf que c'est f_n et que f_n dépend de n.

Et devant, on a $f(\mu_n)$ au dénominateur...

Il faut vraiment regarder ce qu'il y a dans cette fonction.
On rappelle $f_n(t) = e^t.t^{n-t-\frac{1}{2}} = \exp\Big(t.\ln(t) - t + n - \dfrac{1}{2}\Big) = \exp(\phi_{n-\frac{1}{2}}(t))$ puisque f_n est de la forme ϕ_λ avec λ égal à $n - \dfrac{1}{2}$.
Mais en plus, on prend $t = \mu_n.\Big(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$.
C'est donc la formule $\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+u))$ du IV...[7]
On a

$$\phi_{n-\frac{1}{2}}(\alpha_{n-\frac{1}{2}}.(1+u)) = \phi_{n-\frac{1}{2}}(\alpha_{n-\frac{1}{2}}) + \Big(\alpha_{n-\frac{1}{2}} - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \alpha_{n-\frac{1}{2}}.u.\ln(1+u)$$

Et celui qu'on a appelé $\alpha_{n-\frac{1}{2}}$ est celui qu'on a appelé ensuite μ_n.

$$\phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n.(1+u)) = \phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n) + \Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \mu_n.u.\ln(1+u)$$

Il faut mettre ceci dans une exponentielle (et ce ne sera pas fini), et diviser par $f_n(\mu_n)$. C'est à dire par $\exp(\phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n))$.
On voit donc une simplification :

$$\frac{f_n(\mu_n.(1+u))}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \mu_n.u.\ln(1+u)\Big)$$

Mais il faut encore remplacer u par $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

$$g_n(x) = \frac{f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) - \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Quand n tend vers l'infini, $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ tend vers 0.
On peut utiliser le développement limité du logarithme : $\ln(1+u) = u + o(u)$
$\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$g_n(x) = \frac{f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2.n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big) - \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.\frac{x}{\sqrt{n}} + \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

$$g_n(x) = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x^2}{2.n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big) - \mu_n.\frac{x^2}{n} + \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

$$g_n(x) = \exp\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{\mu_n.}{2.n}.x^2 + + \frac{x^2}{4.n} + n.o\Big(\frac{1}{n}\Big) + \mu_n;\Big(\frac{1}{n}\Big) - \mu_n.\frac{x^2}{n} + \mu_n.o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

Comme $n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ tend vers 0 (définition)
$\mu_n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ tend aussi vers 0 (car $\mu_n = o(n)$)

il ne reste que $g_n(x) = \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2} + o(1)\Big)$ et il tend vers $e^{-x^2/2}$.
On a donc : $g = x \longmapsto e^{-x^2/2}$, la célèbre gaussienne...

Remarque :	*On a travaillé sans se préoccuper de la partie nulle du graphe de* g_n. *En effet, quand n est trop petit et x négatif,* $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ *est négatif. Et on a donc* $f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = 0$. *Mais dès que n est assez grand,* $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ *est dans* $]-1,\ 1[$ *et* $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ *est positif. On est donc en droit d'utiliser la formule.*
Question :	*Quel élève se sera douté que c'est à cette question qu'il fallait utiliser la formule du IV1* $\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$ *avec* $\lambda = n - \dfrac{1}{2}$ *?* *Et même, quel professeur ?*

7. et on prendra ensuite u égal à $x/\sqrt{n}$

VI∼3) Montrez qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on a pour tout x de $]-\sqrt{n},\ +\infty[$:

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\frac{n}{2}.\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

Pour x plus grand que $-\sqrt{n}$, la formule à utiliser pour $g_n(x)$ est bien celle obtenue plus haut :

$$g_n(x) = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) - \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

On majore dans l'exponentielle :

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

car μ_n est positif, et $\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ positif.

Pardon ? Pourquoi $\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ est positif ?

Si x est positif, le logarithme est positif, le terme devant aussi.
Si x est négatif, c'est le logarithme d'un réel de $]0,\ 1[$, il est négatif,
mais le x devant aussi.

On approche quand même de la forme attendue par l'énoncé en $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\frac{n}{2}.\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$.

On a juste besoin de $\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big) \leqslant -\dfrac{n}{2}$.

Et c'est vrai parce que $\dfrac{\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big)}{n} \leqslant -\dfrac{n}{2}$ tend vers -1. A partir d'un certain rang, il est donc plus petit que $\dfrac{-1}{2}$.

Remarque : | *Reste à savoir ce qu'on fera ensuite de ça.*

VII∼0) On définit $\boxed{u = x \longmapsto \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}}$
Prolongez u par continuité en 0 pour qu'elle soit définie continue sur $]-1,\ +\infty[$. L'est elle sur $[-1,\ +\infty[$.

$\dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ n'est pas définie en 0, ni pour x plus petit que -1.

En 0, il n'est pas utile de séparer « à droite/à gauche ». C'est la même formule des deux côtés... Ce serait idiot de faire deux fois la même chose !
Mais on a quand même une belle forme indéterminée. Et il n'est pas aisé d'y voir des taux d'accroissement et une limite car justement, on a x^2 et non x au dénominateur.

Toutefois on peut écrire un développement de Taylor :

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2!}.\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$$

puisque $x \longmapsto \ln(1+x)$ a pour dérivées $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{2}{(1+x)^3}$

La différence $x - \ln(x)$ devient $x^2 + \dfrac{x^3}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$.

On divise par x^2 : $u(x) = 1 + \dfrac{x}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$.

On borne le contenu de l'intégrale (il dépend de x mais ça va), et on fait tendre x vers 0.

L'application u se prolonge en 1 par la valeur 1.

En -1, le logarithme tend vers $-\infty$ et le quotient tend vers $+\infty$ grâce au signe moins.

VII∼1) Démontrez que u est décroissante, et donnez son signe.

Pour le sens de variations de u, on la dérive.

On écrit $u' = \left(x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.\ln(1+x)\right)' = \left(x \longmapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.\ln(1+x) - \frac{1}{x^2.(1+x)}\right)$.
On réduit au dénominateur commun à la recherche du signe : $u' = \left(x \longmapsto \frac{2.(1+x).\ln(1+x) - x - x.(1+x)}{x^3.(1+x)}\right)$.
Le signe est celui du numérateur : $2.(1+x).\ln(1+x) - x^2 - 2.x$.
Bon, il serait négatif ce truc ?
Moi ça ne me dit rien. Alors on pose $v = x \longmapsto 2.(1+x).\ln(1+x) - x^2 - 2.x$ et on l'étudie sur $]-1, +\infty[$.
$v' = (x \longmapsto 2 + 2.\ln(1+x) - 2.x - 2)$.
Gagné : $v' = x \longmapsto 2.(\ln(1+x) - x)$.
v' est négatif. C'est une inégalité de convexité. Sinon, on re-dérive et on dresse un tableau de variations.
v est décroissante. Et nulle en 0.
v est donc d'abord positive, puis négative.

On divise par $x^2.(1+x)$ qui est d'abord négatif, puis positif.

Le quotient $\frac{2.(1+x).\ln(1+x) - x - x.(1+x)}{x^3.(1+x)}$ est donc toujours négatif.

L'application u aune dérivée négative. Elle décroit.

Et vers $+\infty$ elle tend vers 0.

C'est donc qu'elle reste positive.

Remarque : *L'idée de « une application/suite croissante qui tend vers 0 est forcément négative » est quand même un classique !*

VII∼2) Déduisez pour tout n supérieure ou égal à n_0 défini plus haut : $g_n(x) \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ pour tout x négatif
et $g_n(x) \leqslant \exp\left(-\frac{x - \ln(1+x)}{2}\right)$ pour tout x positif.

Si vous voulez la suite et même tout le reste de l'énoncé, c'est Mines-Ponts 2002 MP épreuve 1.
Le sujet est disponible sur le serveur de l'UPS, ainsi que des corrigés.

Au final, après encore une partie, le sujet Mines-Ponts arrive à $\boxed{B_n \sim_{n\to+\infty} \frac{e^{\mu_n}}{\mu_n.\sqrt{n}}.\left(\frac{\mu_n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$

Mais j'ai ajouté la partie Python, et étiré quelques questions pour vous, faute de matériel et de théorèmes.

◃27▹ Trouvez un nombre qui est soixante dix sept fois plus grand que le chiffre de ses unités.

On vaut $100.a + 10.b + c = 77.c$ en écrivant le nombre $\overline{abc}$.
$76.c$ doit être multiple de10. C'est que c vaut 5 (ou 0, solution trop facile !).
La solution est $\boxed{385}$ et c'est plié.

On pouvait aussi chercher tout de suite parmi les multiples de 77.

◃28▹ Le problème que Pavl Halmos aimait poser à ses étudiants : les concombres sont composés de quatre vingt dix neuf pour cent d'eau (si si, et nous, c'est plus que quatre vingt dix pour cent). Le Cours des Halles en bas de chez moi en a acheté cinq cent kilos. Mais après le week-end, ils ne sont plus formés que de quatre vingt dix huit pour cent d'eau. Combien de kilos lui reste-t-il à vendre ?

Les concombres sont constitués de matière non aqueuse et d'eau. Le pourcentage indiqué nous informe d'un rapport de masse : $\frac{masse\ d'eau}{masse\ totale} = \frac{99}{100}$. Connaissant la masse totale, on a la masse d'eau : 99×500 kilogrammes.
Et par soustraction, le un pour cent de la masse, c'est la matière non aqueuse : un pour cent des cinq cent kilos. Il a cinq kilos de matière qui ne soit pas de l'eau.

A la fin du week-end, il lui reste toujours ces cinq kilos de matière, et de l'eau. Combien ? Je ne sais pas, disons une masse m. Et on a cette fois : $\frac{m}{m+5} = \frac{98}{100}$. On effectue : $m = 245$. Putain de perte !

Ce qu'il lui reste est un stock de

5 kilos de matière non aqueuse	245 kilos d'eau	250 kilos de concombre

la moitié du stock s'est évaporée. Les concombres ont perdu la moitié de leur eau, et cela a juste fait passer un pourcentage de 99% à 98% ...

Hors sujet : *Ah, bientôt le retour de la saison des concombres, on va pouvoir remanger des légumes et fruits gorgés d'eau : concombres, tomates, melon, pêches...*
En attendant, on reste sur les légumes de saison (courges, cardes, raves...). Et les fruits de saison (pommes de garde...).

◁29▷ Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

La formule $\tan' = 1 + \tan^2$.

On lui applique la formule de Leibniz : $\tan^{(2.n+1)} = 0 + \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}.\tan^{(2.n-j)}$.

On l'applique en 0 : $\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}(0).\tan^{(2.n-j)}(0)$.

Ne restent que les termes d'indice impair dans le membre de droite (les dérivées d'indices pairs de la fonction sont nulles en 0) :

$$\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\tan^{(2.k-1)}(0).\tan^{(2.n-2.k+1)}(0)$$

C'est la formule souhaitée.

◁30▷ ♡ Sur que intervalle $(x \longmapsto (x^2-1).e^{2.x})^{(n)}$ est elle négative ? (oui, formule de Leibniz)

On applique la formule de Leibniz en posant $u = x \longmapsto x^2+1$ et $v = x \longmapsto e^{2.x}$.
Les dérivées de chacun sont connues, en particulier $u^{(k)} = 0$ (fonction nulle) pour $n \geqslant 3$.
On a donc $(u.v)^{(n)} = u.v^{(n)} + n.u'.v^{(n-1)} + \frac{n.(n-1)}{2}.u''.v^{(n-2)}$ et c'est tout.
On passe à l'étage des réels : $\forall x,\ (u.v)^{(n)}(x) = (x^2-1).2^n.e^{2.x} + n.(2.x).2^{n-1}.e^{2.x} + n.(n-1).2^{n-2}.e^{2.x}$ (formule valable y compris pour $n = 0$, 1 u 2 car les $n.(n-1)$ sont alors nuls).
On factorise : $(u.v)^{(n)}(x) = 2^{n-2}.(4.x^2 - 4 + 4.n.x + n^2 - n).e^{2.x}$.
Le signe est celui de $4.x^2 + 4.n.x + n^2 - n - 4$.
On calcule l'éventuel discriminant : $\Delta = 16.n + 64$, toujours positif.

Et la réponse est la dérivée n^{ieme} est négative sur $\boxed{\left[\frac{-n-\sqrt{n+4}}{2},\ \frac{-n+\sqrt{n+4}}{2}\right]}$

Rappel : Mathématiquement, des choses comme $(e^{2.x})^{(n-k)}$ ou $(x^2-1)^{(k)}$ sont des horreurs sans nom [a].
Ce qui a du sens, c'est $(x \longmapsto e^{2.x})^{(n)}$.
ou $u^{(n)}$ en ayant pose $u = x \longmapsto e^x$.
C'est pourquoi je dirai finalement le plus grand bien de la physique, où on dérive non pas des fonctions, mais des formules littérales.
Et avec la notation de Landau (utilisée aussi en maths), on peut écrire
$\frac{d^n((x^2-1).e^{2.x})}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\frac{d^k(x^2-1)}{dx^k}.\frac{d^{n-k}(e^{2.x})}{dx^{n-k}}$
Et là, c'est nickel, d'une grande rigueur, d'une énorme propreté. Bien plus facile que les formules $(u.v)^{(n)} = u.v^{(n)} + n.u'.v^{(n-1)} + \frac{n.(n-1)}{2}.u''.v^{(n-2)}$ dont on dit ensuite « et je les applique en x ».
Alors quoi ? Je reconnais que les physiciens sont plus rigoureux que les matheux sur ce coup là ? OUI !
Mais j'aoute une chose : la notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ (dite « de Landau ») appartient en fait au monde de l'informatique (dérivation formelle). Et je retombe sur les pattes de ma propre rigueur.

[a] enfin, si, j'ai bien un nom, mais il va vexer la partie de vous qui estime que la physique c'est bien

◁31▷ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ (Bioche toujours ? mais déjà, sont elles égales, et que vaut leur somme ?).

L'existence de ces intégrales ne pose pas de problème (continuité, dénominateur strictement positif).
Les changements de variable vont peut être créer des difficultés en $\frac{\pi}{2}$.

Déjà, de 0 à $\pi/2$, le sinus et le cosinus font la même chose, mais pas dans le même sens.
N'aurait on a pas $I = J$? Si.
Dans I on change de variable : $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$.
On a donc $d\theta = -dt$, puis $\cos(\theta) = \sin(t)$ et $\sin(\theta) = \cos(t)$. Et enfin $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \ldots = \int_{t=\pi/2}^{0} \ldots$.
Les bornes ont changé de sens, mais le $d\theta$ change le signe.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}.(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}.dt$$

Les deux intégrales sont égales.

Calculons alors leur somme :

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$$

Mais on rappelle $u^3 + v^3 = (u+v).(u+v).(u^2 - u.v + v^2)$.
On calcule donc ici

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(\theta)+\cos(\theta).\sin(\theta)+\sin^2(\theta)}.d\theta$$

On dit merci qui : merci Pythagore : $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos(\theta).\sin(\theta)}$.
Et même merci Bioche. Il nous dit de poser $t = \tan(\theta)$ (invariance par $\theta \longmapsto \theta + \pi$ qui ne change pas le $d\theta$ et change le signe du cosinus et du sinus).
L'intégrale devient $2.I = I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(\theta)}.\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} + \tan(\theta)}.d\theta$ en faisant attention en $\dfrac{\pi}{2}$.
On a donc

$$2.I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)+t} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Il peut être judicieux de poser $u = \dfrac{2.t+1}{\sqrt{3}}$ pour saisir et ne rien gâcher quand on intègre en $Arctan\Big(\dfrac{2.t+1}{\sqrt{3}}\Big)$.

Tous calculs faits : $\boxed{I = J = \dfrac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}}$ *(et Xcas le donne en moins d'une seconde...)*

◁ 32 ▷

I	S	A	A	C	N	E	W	T	**O**	**N**
	I	S	A	A	C	N	E	**W**	**T**	O
		I	S	A	**A**	**C**	**N**	**E**	W	T
			I	**S**	**A**	A	C	N	E	W
				I	S	A	A	C	N	E
					I	S	A	A	C	N
						I	S	A	A	C
							I	S	A	A
								I	S	A
									I	S
										I

◇0 Calculez $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)}$.

♡0 Simplifiez au maximum $\Big(x \longmapsto Arctan(\sqrt{e^x-1})\Big)$" en précisant le domaine de définition.

♣ De combien de façons pouvez vous lire ISAACNEWTON sur ce tableau en sachant que vous pouvez vous déplacer d'une case à la fois ?

On sépare la somme *(appelée S_n car de n elle dépend)* en trois :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)} = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)} + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)} + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)}$$

On identifie qui est Min qui est Max et on sépare suivant la variable la moins contraignante :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{j-1} 2^i.3^j\Big) + \sum_{i=0}^{n} 2^i.3^i + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{i-1} 2^j.3^i\Big)$$

On calcule chaque série géométrique *(raisons 2, 6 et 2)* :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} 3^j.\Big(\frac{2^j-1}{2-1}\Big) + \frac{6^{n+1}-1}{6-1} + \sum_{i=1}^{n} \Big(3^i.\frac{2^i-1}{2-1}\Big)$$

On a encore des séries géométriques :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(6^j - 3^j\right) + \frac{6^{n+1}-1}{6-1} + \sum_{i=1}^{n}\left(6^i - 3^i\right) = 2.\frac{6^{n+1}-6}{6-1} + 2.\frac{3^{n+1}-3}{3-1} + \frac{6^{n+1}-1}{6-1}$$

Au final :

$$\boxed{\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)} = \frac{3.6^{n+1}+2}{5} - 3^{n+1}}$$

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	1	3	9
$j=1$	3	6	18
$j=2$	9	18	36

L'application $x \longmapsto Arctan(\sqrt{e^x-1})$ nécessite que l'on prenne la racine d'un réel positif : $D_f = [0, +\infty[$.
Pour la dérivabilité, on évite « $\sqrt{0}$ » : $D_{f'} =]0, +\infty[$, et on dérive une composée :

$$x \underset{e^x}{\overset{\exp}{\longrightarrow}} e^x \underset{\frac{1}{2.\sqrt{\dots}}}{\overset{\sqrt{}}{\longrightarrow}} \sqrt{e^x-1} \underset{\frac{1}{1+(\dots)^2}}{\overset{Arctan}{\longrightarrow}} Arctan(\sqrt{e^x-1})$$

$$\left(x \longmapsto e^x.\frac{1}{2.\sqrt{e^x-1}}.\frac{1}{1+(\sqrt{e^x-1})^2}\right)$$

Il reste $\left(x \longmapsto \frac{1}{2.\sqrt{e^x-1}}\right)$ sur $]0, +\infty[$ et il faut redériver : $\boxed{\left(x \longmapsto \frac{-e^x}{4.(e^x-1)^{3/2}}\right)}$

En fait, on ne peut qu'avancer vers la droite ou remonter, car sinon les lettres ne s'enchainent pas.
Partant du premier I, un seul chemin

I	S	A	A	C	N	E	W	T	O	N

Partant du deuxième I, 10 chemins comme

					N	E	W	T	O	N
	I	S	A	A	C					

(il suffit de choisir la lettre à laquelle on remonte, ici le C).

Partant du troisième, on a $\binom{10}{2}$ chemins. Il suffit de choisir les deux instants où on va remonter :

									O	N
						N	E	W	T	
		I	S	A	A	C				

(ici, on est remonté sur C et T).

Partant du quatrième, on doit remonter trois fois. Et on a huit colonnes pour remonter, on a donc $\binom{10}{3}$ choix

										N
						N	E	W	T	O
			S	A	A	C				
			I							

I	S	A	A	C	N	E	W	T	O	N
	I	S	A	A	C	N	E	W	T	O
		I	S	A	A	C	N	E	W	T
			I	S	A	A	C	N	E	W
				I	S	A	A	C	N	E
					I	S	A	A	C	N
						I	S	A	A	C
							I	S	A	A
								I	S	A
									I	S
										I

Finalement, on somme $1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{4} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0}$
En effet, partant du dernier I, on n'a pas le choix, on monte.

Le total donne $\boxed{\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} \text{ et c'est } 1\ 024}$

Une astuce consiste aussi à partir de la fin. Pas le choix pour le dernier N : $\boxed{\text{N}}$. Pour le O qui précède, deux choix

O→	N
	O↑

.

Et on double à chaque lettre qui remonte :

T→	O→	N
	T↑	

et

		N
	T→	O↑
		T↑

.

On a au final 2^{10} choix en arborescence.

◁33▷ Calculez $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} ch(k.t)$ (noyau de Dir*hyp*chlet ?).

Ceci vaut $\frac{1}{2}.\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\big(e^{k.t}+e^{-k.t}\big)\Big)$

et on peut écrire $\frac{1}{2}.\Big(\sum_{k=0}^{0} e^{k.t}+\sum_{k=1}^{n} e^{k.t}+\sum_{k=-1}^{-n} e^{k.t}\Big)$ *(la première somme vaut 1).*

On replie agréablement en . $\sum_{k=-n}^{n} e^{k.t}$.

On reconnaît une série géométrique $\frac{1}{2}.\frac{e^{-n.t}-e^{(n+1).t}}{1-e^{t}}$.

On l'écrit $\frac{1}{2}.\frac{e^{(n+1).t}-e^{-n.t}}{e^{t}-1}$ et même $\frac{1}{2}.\frac{e^{(n+1).t}-e^{-n.t}}{e^{t}-1}.\frac{e^{-t/2}}{e^{-t/2}}$.

On a finalement $\boxed{\dfrac{sh\Big(\dfrac{2.n+1}{2}.t\Big)}{2.sh\Big(\dfrac{t}{2}\Big)}}$

Le coup de						
	1	$+e^{t}$	$+e^{2.t}$	$+e^{3.t}$	$+\dots$	$+e^{n.t}$
		$+e^{-t}$	$+e^{-2.t}$	$+e^{-3.t}$	$+\dots$	$+e^{-n.t}$

qui devient											
	$e^{-n.t}+$	$\dots$	$+e^{-3.t}$	$+e^{-2.t}$	$+e^{-t}$	$+1$	$+e^{t}$	$+e^{2.t}$	$+e^{3.t}$	$+\dots$	$+e^{n.t}$

est non seulement beau, mais aussi à connaître. Et à comprendre... visuellement.

◁34▷ z est un complexe plus petit que 1 en module.
Montrez : $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{+\infty} z^{k}$. Montrez $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^{p}}{1-z^{2.p}}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{z^{2.q+1}}{1-z^{2.q+1}}$.

Approche séries : on s'arrête à horizon fini, puis ont fait tendre cet horizon vers l'infini.

$$\sum_{n=0}^{N} z^{n}=\frac{1-z^{N+1}}{1-z}$$

(puisque z a un module plus petit que 1, il ne peut pas valoir 1).
Le terme z^{N+1} a pour module $|z|^{N+1}$. Il tend vers 0 quand N tend vers l'infini.
Finalement $1+z+z^2+\ldots+z^N$ tend vers $\frac{1}{1-z}$.
Et abusivement $1+z+z^2+\ldots+z^N+\ldots=\frac{1}{1-z}$.
Et toutes les maths sont dans le deuxième lot de « trois petits points », là où l'infini survient, qui est tout sauf intuitif mais absurde « N grand » ou même « très grand ».

Approche familles sommables.
On considère une somme indexée par $\mathbb{N}$. On prend une partie finie J de $\mathbb{N}$;
On veut majorer $\sum_{n\in J}|z^{n}|$ *(somme des modules pour raisonner « au pire »).*
On note N le plus grand élément de l'ensemble fini J, alors comme on ne fait que sommer des termes positifs :

$$\sum_{n\in J}|z^{n}|\leqslant\sum_{n=0}^{N}|z^{n}|=\sum_{n=0}^{N}|z|^{n}=\frac{1-|z|^{N+1}}{1-|z|}\leqslant\frac{1}{1-|z|}$$

On a donc $\Big\{\sum_{n\in J} \mid J\ partie\ finie\ de\ \mathbb{N}\Big\}$ qui est majoré. La famille est sommable.
On calcule alors la somme par la méthode « série numérique ».

Si z est de module plus petit que 1 (strictement évidemment), il en est de même de chaque $z^{2.p}$.
On peut remplacer : $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^{p}}{1-z^{2.p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(z^{p}.\sum_{n=1}^{+\infty}(z^{2.p})^{n}\Big)$ *(en prenant bien une variable nouvelle n différente de p).*

On distribue

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^{p}}{1-z^{2.p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}z^{p}.(z^{2.p})^{n}\Big)=\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}z^{p.(2;n+1)}\Big)$$

Formellement, on permute les sommes *(variables indépendantes, sommation en rectangle et pas en triangle)* :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2.p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z^p.(z^{2.p})^n \Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=1}^{+\infty} z^{p.(2.n+1)} \Big)$$

Chaque somme $\sum_{p=1}^{+\infty} z^{p.(2;n+1)}$ est une somme de série géométrique du type $\sum_{p=1}^{+\infty} t^p = \frac{t}{1-t}$ *(car on commence à 1)*.

On a donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2.p}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2;n+1})}{1-z^{2.n+1}}$$

C'est la formule demandée *(étape purement calculatoire, totalement exigible de tous les élèves de MPSI, même ceux se destinant à PSI)*.

Il faut quand même justifier l'interversion des sommes en montrant que la grande famille à double indice est sommable : $\sum_{\substack{1\leqslant p\\ 0\leqslant n}} z^{p.(2.n+1)}$.[8]

La consigne est de regarder « au pire » la somme des modules $\sum_{\substack{1\leqslant p\\ 0\leqslant n}} |z|^{p.(2.n+1)}$.

Il faut majorer $\sum_{(n,p\in J} z^{p.(2.n+1)}$ quand J décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

Mais toute partie finie est incluse dans un rectangle $[1,\ P] \times [0,\ N]$, et comme les termes additionnés sont positifs :

$$\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant P\\ 0\leqslant n\leqslant N}} |z|^{p.(2.n+1)}$$

On somme par tranche $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{p=1}^{P} |z|^{p.(2.n+1)} \Big)$

On effectue : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{|z|^{2.n+1} - |z|^{(P+1).(2.n+1)}}{1-|z|^{2.n+1}} \Big)$

On majore : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{|z|^{2.n+1}}{1-|z|^{2.n+1}} \Big)$

On majore encore : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{|z|^{2.n+1}}{1-|z|} \Big)$ car $|z|^{2.n+1} \leqslant |z| < 1$.

On sort la constante : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \frac{1}{1-|z|}.\sum_{n=0}^{N} |z|^{2.n+1}$.

On calcule la somme : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \frac{1}{1-|z|}.\frac{|z|-|z|^{2.N+3}}{1-|z|^2}$.

On majore encore : $\sum_{(n,p\in J} |z|^{p.(2.n+1)} \leqslant \frac{1}{1-|z|}.\frac{|z|}{1-|z|^2}$.

La majorant ne dépend plus de N ni de P (donc plus de J).

L'ensemble $\Big\{ \sum_{(n,p)\in J} |z^{p.(2.n+1)}| \mid J\ partie\ finie\ de\ \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\}$ est majoré.

La famille est sommable.

◁35▷ Soit σ une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez par l'absurde que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ est infini.
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}^*$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $2.\mathbb{N}$?

8. étape exigible des élèves de MPSI se destinant à MP et même à PSI, mais non exigible de leurs futurs profs des matières autres que les maths

◁36▷ ♡ n et k sont des entiers fixés, a et b sont deux complexes *(différents de 1 si nécessaire et autres conditions du même type)*. Simplifiez

$A = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$	$C = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$
$D = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$	$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$	$F = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$	$H = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$	$I = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$

On rappelle : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = (a+b)^n$ mais méfiez vous ici des indices et des variables...

$A = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$ k fixé, i compteur $A = (n+1).\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$ k fixé, série géométrique $B = \binom{n}{k}.\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$	$C = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$ k fixé, ligne entière $C = 2^n.a^{n-k}.b^k$
$D = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$ binôme en b $D = a^{n-k}.(1+b)^i$	$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$ géométriques $E = \binom{n}{k}.\Big(\frac{a^n.(1-b^{n+1})}{(1-a).(1-b)} - \frac{a^{n-1}.(1-\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}})}{(1-a).(1-\frac{b}{a})}$	$F = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$ somme ligne et géométrique $G = 2^n.\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$	$H = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$ binôme et géométrique $H = (1+a)^n.\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$	$I = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$ j compteur $(n+1).(a+b)^n$

Pour E et F, on a des sommes doubles dépendantes (et trois variables si nécessaire).

$$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$$

$$E = \binom{n}{k}.\sum_{j=0}^{n}\Big(b^j.\sum_{i=0}^{j} a^{n-i}\Big)$$

$$E = \binom{n}{k}.\sum_{j=0}^{n}\Big(b^j.\frac{a^n - a^{n-j-1}}{1-a}\Big)$$

$$E = \binom{n}{k}.\Big(\frac{a^n}{1-a}.\sum_{j=0}^{n} b^j - \frac{a^{n-1}}{1-a}.\sum_{j=0}^{n}\Big(\frac{b}{a}\Big)^j\Big)$$

A partir de G, on a des produits de sommes : $G = \Big(\sum_i \binom{n}{i}\Big).\Big(\sum_j a^{n-j}.b^j\Big)$.

◁37▷ Montrez que $\cos(x).\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{n}}\right)$ converge vers $\frac{\sin(2.x)}{2.x}$ quand n tend vers l'infini (en multipliant pas $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$).

Celui là, il est super joli.
On peut calculer effectivement le produit du premier membre.

$$\begin{array}{lllllllll}
 & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \ldots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2,}}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1,}}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n,}}\right) & \times\sin\left(\frac{x}{2^{n}}\right) \\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \ldots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2,}}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1,}}\right) & .\sin\left(\frac{2.x}{2^{n,}}\right) & .\frac{1}{2} \\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \ldots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2,}}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1,}}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-1,}}\right) & .\frac{1}{2} \\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \ldots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2,}}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-2,}}\right) & & .\frac{1}{4} \\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \ldots & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-3,}}\right) & & & .\frac{1}{8} \\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2}\right) & & & & & \frac{1}{2^{n-1}} \\
= & \cos(x) & .\sin\left(x\right) & . & & & & & \frac{1}{2^{n}} \\
= & \sin(2.x) & & & & & & & \frac{1}{2^{n+1}}
\end{array}$$

en utilisant moult fois la formule $\sin(\theta).\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2}$.

Il faut quand même bien compter les $\dfrac{1}{2}$.

On refait passer de l'autre côté : $\cos(x).\cos\left(\dfrac{x}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\dfrac{x}{2^{n,}}\right) = \dfrac{\sin(2.x)}{2^{n+1}.\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

Question : Risque-t-on de diviser par 0 ?
Pour x nul, c'est vrai. Mais alors l'exercice n'a aucune intérêt.
Mais sinon, dès que n est assez grand, $\dfrac{x}{2^n}$ est en valeur absolue plus petit que π (et non nul). Son sinus est alors non nul.
Remarquons que l'élève qui pense à soulever ce problème est digne de la classe étoile.

Peut on prouver ceci proprement sans points de suspensions, c'est à dire « comme dans un livre » ?

Oui, bien sûr. En repartant de la même idée de base : $\sin(\theta).\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2}$, mais en l'écrivant $\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2.\sin(\theta)}$.

Le produit devient :

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{2.x}{2^k}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$$

On sort les 2 : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$ (compteur)

On a alors un produit télescopique $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\left(\prod_{k=-1}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).\frac{1}{\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)}$

Il reste bien

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\sin\left(\frac{x}{2^{-1}}\right).\frac{1}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

Ma question : Vu comme ça, c'est beau, c'est propre, sans bavure, esthétique.
Mais est ce naturel ? Vous dites vous « mais oui, j'aurais dû y penser et simplifier ainsi ».
Ou avez vous besoin de la méthode « points de suspensions ».
Question ultime : comment faut il lire une correction d'exercice dans un livre ?

Mais on n'a pas fini. Il faut faire tendre n vers l'infini.

Et dans ce cas, on a une belle indétermination avec un $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ qui tend vers 0 et un 2^{n+1} qui tend vers l'infini.

Niveau terminale, on s'en sort avec $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers 0.[9]

9. en Terminale, on l'apprend par cœur ; en Sup, on le reconnaît et on dit que ça vient de $\dfrac{\sin(t)-\sin(0)}{t-0}$ qui tend vers $\sin'(0)$ c'est à dire $\cos(0)$ et ça devient une évidence et plus une formule « par-cœur ».

$$2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2.x.\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

(la seule difficulté c'est de compter les x et les puissances de 2).
L'ensemble tend vers $2.x.1$ quand n tend vers l'infini.

Niveau Sup : $\sin(\theta) \sim_{\theta\to 0} \theta$ (c'est la même formule, mais avec des équivalents, plus maniables).
Quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0 et peut prendre le rôle de θ :

$$2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \sim_{n\to+\infty} 2^{n+1}.\frac{x}{2^n} = 2.x$$

Être équivalent à un réel non nul *(car $2.x$ est un réel, il ne dépend plus de n)*, c'est tendre vers ce réel.
La forme indéterminée tend vers $2.x$.

Et le quotient $\dfrac{\sin(2.x)}{2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ converge vers $\boxed{\dfrac{\sin(2.x)}{x}}$

◁ 38 ▷ x est un entier au moins égal à 2. Quelle est la limite du produit $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{x^{(2^k)}}\right)$ quand n tend vers l'infini *(indication : multipliez par $1-\frac{1}{x}$).*

On simplifie :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right).\left(1+\frac{1}{x^2}\right).\left(1+\frac{1}{x^4}\right).\left(1+\frac{1}{x^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{x^{2^n}}\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{x^{2^{n+1}}}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right).}$$

On l'a par la méthode indiquée.
Ou par récurrence sur n.

Ou par produit télescopique en écrivant chaque $1+\frac{1}{x^{2^k}}$ sous la forme $\dfrac{1-\left(\frac{1}{x^{2^k}}\right)^2}{1-\frac{1}{x^{2^k}}}$.

Il ne reste qu'à faire tendre n vers l'infini. Il reste $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$ qu'on écrit $\dfrac{x}{x-1}$.