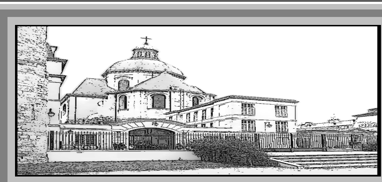
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 16 décembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD12

◁0▷ On a croisé le « joli » résultat : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$. On se demande si il existe p et q ainsi que r vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^p = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^q\Big)^r$.

En considérant le degré et le terme dominant montrez : $p+1 = r.(q+1)$ et $\dfrac{1}{p+1} = \Big(\dfrac{1}{q+1}\Big)^r$. Déduisez que la formule obtenue plus haut est le seul cas où on a une formule aussi agréable.

◁1▷ Montrez : $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} |i^2-j^2| = \dfrac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} |i-j|^2 = \dfrac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

◁2▷ ♣ Trouvez une application f continue vérifiant $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \dfrac{1}{n^2}$. Déduisez $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

◁3▷ ♣☺ On définit : $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t)).dt$, $J = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)).dx$, $K = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x-\pi/4)).dx$ et $L = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin(x)+\cos(x)).dx$.
Montrez : $I = L - J$, $J = K$. Calculez $L - K$ par trigonométrie. Déduisez la valeur de I.

◁4▷ n est un entier naturel donné. Montrez : $\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$.
Calculez aussi $\sum_{0\leq i\leq j} (j-i)$ et $\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} (j-i)$.
Combien de fois $j-i$ prend la valeur k (positif ou négatif d'ailleurs).

◁5▷ Combien y a-t-il de termes non nuls dans la somme $\sum_{i+j+k=20} \binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$? Montrez que cette somme vaut $\binom{57}{20}$. Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre ?
Indication algébrique : $(1+X)^{23}.(1+X)^{21}.(1+X)^{13}$.

Imaginons une classe de MPSI2 de 57 élèves.
23 garçons, 21 filles et 13 chats (ce n'est pas plus absurde que les urnes et les boules).
On doit former un groupe de 20 élèves. Combien de façons de faire ?

♣ On sait additionner les binomiaux en lignes *(2^n)*, en colonne *(Zou-Shi-Zhi)*. Mais que se passe-t-il si on les additionne en diagonale *(évidemment de direction Sud-Ouest vers Nord-Est, comme ci contre)* ? Écrivez la formule rigoureuse $\sum_{k=\triangle}^{\oslash} \binom{\otimes}{\odot}$. Émettez une conjecture. Prouvez la.

0	1	0	0	0	**0**	0
1	1	1	0	**0**	0	0
1	1	2	**1**	0	0	0
2	1	**3**	3	1	0	0
3	**1**	4	6	4	1	0
↗	1	5	10	10	5	1
1+4+3	1	6	15	20	15	6

◁6▷ Et pour la somme alternée ?

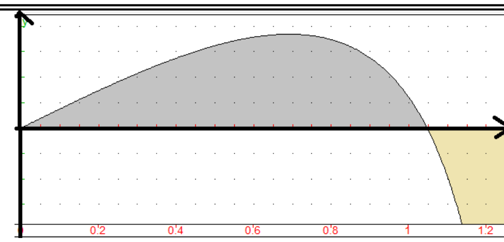
◁7▷ Montrez l'existence d'une suite de polynômes P_n vérifiant $t^n + \dfrac{1}{t^n} = P_n\Big(\Big(t+\dfrac{1}{t}\Big)\Big)$ pour tout entier naturel n et tout réel t non nul (on prouvera l'existence par récurrence double, et on ne cherchera pas à les expliciter).

◁8▷ ♡ Résolvez l'équation $T_7(x) = \dfrac{e^{10}+1}{2.e^5}$ d'inconnue réelle x *(trouvez une solution et montrez aussi qu'il n'y en a qu'une)*.

Oui, polynômes de Tchebychev.

◁9▷ Montrez que $\prod_{k=0}^{n} 2^{(k/2^k)}$ converge vers 4 quand n tend vers l'infini (on pourra dériver $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$).

◁10▷ Montrez : $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{1}{2}$.



◁11▷ Décomposez la suite périodique $(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b,\ldots)$ comme combinaison de (1^n) et $((-1)^n)$.
Décomposez la suite périodique $(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ldots)$ comme combinaison de (1^n) et (j^n) et $(j^{2.n})$.
Se décompose-t-elle à l'aide de (1^n) et (j^n) et $((-j)^n)$?

◁12▷ ♡ Une série géométrique a pour somme (tous les termes de 0 à l'infini) 1, et la somme de ses carrés vaut 2. Retrouvez la raison.
Et la valeur du premier terme.

◁13▷ On définit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Généralisez en donnant une formule pour le terme général de chacune de ces matrices en taille n *(du type $a_i^k = N+1-k$ si $i+k \leqslant n+1$)*.

Montrez que la somme des coefficients de A_n vaut $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Même question avec B_n et C_n.

Donnez le du terme général de $A_n + B_n + C_n$ *(combien y a-t-il de coefficients non nuls ?)*.
Calculez la somme des coefficients de $A_n + B_n + C_n$. Quel résultat avez vous retrouvé ?

François a posé l'addition suivante *(il a fait vite, il y a une infinité de termes, mais il a tout calculé)* : pouvez vous me dire quel sera le deux mille quinzième chiffre de la somme ?

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0. & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
+ & 0 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 3 & & & & & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & & & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

◁14▷ Vous avez un joli Rubik's Cube en Apéricubes de la Vache qui Rit. Un ver a décidé d'en goûter chacun des vingt sept petits cubes. Il se déplace en passant d'un cube à son voisin ayant une face commune *(pas de passage en diagonale)*. Il a commencé par le cube central. Pourra-t-il visiter tous les petits cubes ? Indication : coloriez les cubes en deux couleurs.

◁15▷ Pour tout n, on pose $\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$

Montrez que (B_n) est croissante, majorée par 2 (comparaison série intégrale, ou somme télescopique $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)}$).

Déduisez que (B_n) converge. On note $\boxed{\zeta(2)}$ sa limite.

Déduisez que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, la suite $B_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2.p}}$ converge.

On va prouver que $\zeta(2)$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$ par diverses méthodes.

I∼0) **Vitesse de convergence.**

Montrez que (B_n) et $\left(B_n + \frac{1}{n}\right)$ forment n couple de suites adjacentes, de limite $\zeta(2)$.

I$\sim$1) Donnez un entier n pour lequel vous êtes sûr d'avoir $|B_n - \zeta(2)| \leqslant 10^{-5}$.

II$\sim$0) **Première méthode (Fourier, Dirichlet).**

Montrez : $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k.

II$\sim$1) Déduisez : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.dt$.

II$\sim$2) Montrez que $t \longmapsto \left(\dfrac{t^2}{2.\pi} - t\right).\dfrac{1}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.

II$\sim$3) En intégrant par parties, montrez que $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

II$\sim$4) Déduisez que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

III$\sim$0) **Entrainement.**

♡ Copiez une ligne de zêta, xi et sigma minuscule : $\boxed{\zeta \text{ et } \xi \text{ et } \varsigma.}$

$\zeta\ \zeta$

IV$\sim$0) **Deuxième méthode (Wallis et parties).**

On pose pour tout n : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).dt$ et on pose aussi : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$ et $K_n = \dfrac{J_n}{I_n}$.

Montrez : $I_n = \dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}$ (oui, Wallis).

IV$\sim$1) Montrez : $I_n = 2.n.\displaystyle\int_0^{\pi/2} t.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t).dt$.

IV$\sim$2) Montrez : $J_{n-1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2.\sin(t).\cos^{2.n-2}(t).\sin(t).dt$.

IV$\sim$3) Déduisez : $J_{n-1} - J_n = \dfrac{1}{2.n-1}.\left(\dfrac{I_n}{n} + J_n\right)$ (par parties).

IV$\sim$4) Déduisez : $\dfrac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = {}^{‘}\dfrac{1}{2.n-1}.\left(\dfrac{1}{n} + K_n\right)$ puis $K_{n-1} - K_n = \dfrac{1}{2.n^2}$.

IV$\sim$5) Montrez pour tout t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}.\sin(t)$.

IV$\sim$6) Déduisez : $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}.I_n$ et $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}$.

IV$\sim$7) Retrouvez la valeur de $\zeta(2)$.

V$\sim$0) **Troisième méthode et généralisation (Viète et trigonométrie).**

On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$. Donnez son degré, son coefficient dominant, et vérifiez que ses racines sont les $\cot^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ pour k de 1 à n inclus.

V$\sim$1) Déduisez : $P_n = (2.n+1).\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(X - \cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\right)$.

V$\sim$2) Montrez pour tout x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\sin(x) < x < \tan(x)$ puis $0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2(x) < 1$.

V$\sim$3) Montrez ensuite pour tout entier p : $0 < \dfrac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x) < \dfrac{p}{x^{2.(p-1)}}$ (pensez aux identités remarquables de la famille de la série géométrique).

V$\sim$4) Déduisez : $0 < \left(\dfrac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p}.\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2.p}} - \sum_{k=1}^n \cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) < p.\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2.(p-2)}}$.

V$\sim$5) En exploitant les formules de Viète dans P_n après avoir divisé par $n^{2.p}$ (puis choisi $p = 1$ et $p = 2$), dédisez $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.

VI∼0) **Compléments.**
Montrez : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.
VI∼1) Calculez $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p-1)^4}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p)^4}$.
VI∼2) Montrez : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2.k}{k}.k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
VI∼3) Montrez à la « Euler » : $\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right) = \zeta(2)$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

VII∼0) **Accélération de la convergence.**
Pour tout k, on pose $v_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k.(k+1)}$. Montrez : $\forall n,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{k^3}$.
VII∼1) Montrez que la série de terme général v_k converge et que sa somme vaut $\zeta(2)-1$.
VII∼2) Montrez : $0 \leqslant \zeta(2) - 1 - \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \frac{1}{2.k^2}$ par comparaison série intégrale.
VII∼3) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} v_k$ est elle une approximation de $\zeta(2)$ à 10^{-5} près ?
VII∼4) On pose ensuite $w_k = v_k - \frac{1}{k.(k+1).(k+2)}$. Exprimez $\sum_{n=1}^{+\infty} w_k$ à l'aide de $\zeta(2)$.
VII∼5) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} w_k$ est elle une approximation de $\zeta(2) - \frac{5}{4}$ à 10^{-5} près ?
VII∼6) Écrivez une procédure Python qui pour n donné calcule $\sum_{k=1}^{n} w_k$.

◃16▹ Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$	$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Montrez que (C_n) est croissante, majorée. Sa limite est notée γ et s'appelle la constante d'Euler *(et de Mascheroni, qui pour sa part en a calculé plusieurs décimales)*.
En étudiant $C_{2.n} - C_n$, montrez que $H_{2.n} - H_n$ converge vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.
Tant qu'on est là, montrez par récurrence sur n $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$ pour tout n.

♣♠ Essayez de démontrer

$\gamma = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{x-E(x)}{x^2} \mathrm{d}x$	$\gamma = -\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$

(où E est la fonction partie entière)

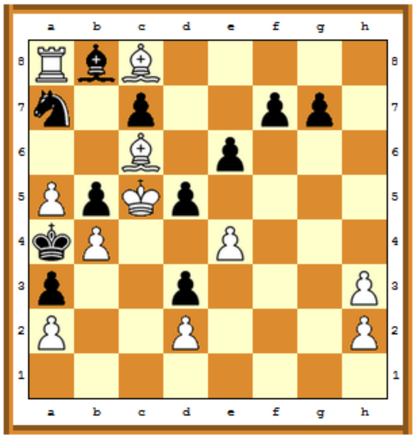
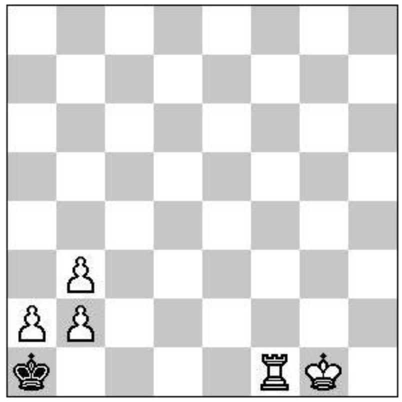
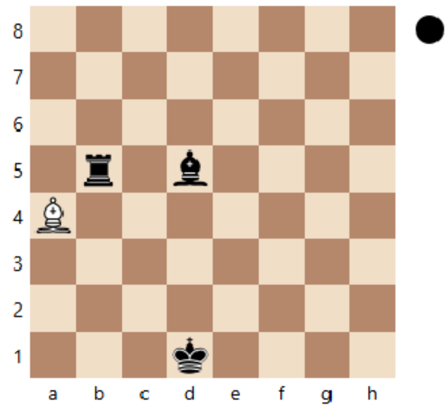
◃17▹ ♡ Simplifiez cette somme double $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant i\leqslant n}} \binom{n}{i}.2^{i+j}$.

◃18▹ La moyenne d'âge de cette famille (deux parents et les enfants) est de 20 ans. Mais si on ne compte pas la mère (qui a 40 ans), la moyenne d'âge est de 15 ans. Combien d'enfants ?

◃19▹ ♡ Guillaume et Clément doivent vider un tonneau de cent litres. Guillaume le vide avec un broc de trois litres et Clément avec un broc de deux litres. Ils l'ont vidé en trente cinq brocs. Combien chacun ?
♣ Guillaume dispose de deux mèches qui brulent chacune en une heure *(mais pas de façon uniforme, on ne peut pas dire* "tiens, le quart a brulé, il s'est écoulé quinze minutes"*)*. Quelles sont les durées qu'il peut mesurer avec ces mèches :
une heure en en brulant une, deux heures en en brulant une puis l'autre, une demi heure en en brulant une par les deux bouts. Mais encore ?
Et avec trois mèches ? Et peut on les brûler dans votre camp ?

L'exercice peut être prolongé par la lecture d'un article de Delahaye dans Pour la Science sur les « nombres combustibles ».

◁20▷ ♣ Calculez ces étranges produits $\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3}$ et $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n}$.

Les blancs jouent et font mat en un coup. En effet...

Les blancs viennent de roquer. Que venaient de faire les noirs ?

C'est aux noirs de jouer. Où est le roi blanc ?

◁21▷

https://ecole.apprendre-les-echecs.com/analyse-retrograde/

◁22▷ ♡ Quand l'élève Yolett-Sassenbon développe $(2+3)^{2017}$ par la formule du binôme, quel est le plus grand coefficient binomial écrit, quel est le plus grand produit calculé ? *(conseil : signe de* $\binom{n}{k}.2^k.3^{n-k} - \binom{n}{k+1}.2^{k+1}.3^{n-k-1}$*).*

◁23▷ ♣ On pose abusivement $\binom{n}{k} = \prod_{p=1}^{k} \frac{n-p+1}{p}$ le coefficient binomial de Newton *(même pour n non entier, mais quand même pour k entier).*

Quel est le plus grand élément de la liste $\left|\binom{1/3}{k}\right|$ quand k va de 0 à 20 ?

Donnez le développement limité d'ordre 4 en $1/2$ de $x \longmapsto \binom{x}{4}$.

Quel est le module de $\binom{1+i}{4}$. Donnez un équivalent de $\sqrt[n]{\left|\binom{1+i}{k}\right|}$ quand k tend vers l'infini.

♠ Donnez un équivalent de $\left|\binom{1+i}{k}\right|$ quand k tend vers l'infini.

$♣^2$ Il parait que le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \longmapsto \binom{2.x}{x}$ est $1 + \frac{\pi^2}{6}.x^2 + 2.\zeta(3).x^3 + \frac{19}{360}.\pi^4.x^4 + o(x^4)_{x\to 0}$.

◁24▷ ♡ Un élève n'a retenu que la formule de Leibniz $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(k)}.v^{(n-k)}$, et n'a pas retenu la formule du binôme. Aidez le en lui demandant la dérivée d'ordre k de $x \longmapsto e^{a.x}$, puis la dérivée d'ordre n de $x \longmapsto e^{a.x}.e^{b.x}$.

◁25▷ ♡ On pose `M = [[-8, 6, 3], [-9, 7, 3], [0, 0, 1]]`. Donnez son polynôme caractéristique et son spectre. On pose $A = \frac{M+2.I_3}{3}$ et $B = \frac{I_3 - M}{3}$. Calculez $A.B$, $B.A$, A^2, B^2 et A^n pour tout n. Exprimez M à l'aide de A et B. Déduisez la forme de M^n.

◁26▷

I∼0) On définit la suite (B_n) par $\boxed{B_0 = 1 \text{ et } \forall n,\ B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.B_p}$ Calculez B_n pour n de 0 à 5.

I∼1) Écrivez un script **Python** qui pour n donné calcule B_n.[1]

I∼2) Montrez que (B_n) est une suite d'entiers naturels qui diverge vers $+\infty$.

I∼3) Montrez pour tout n : $B_n \geqslant 1$, $B_n \geqslant 2^{n-1}$, $B_n \geqslant \dfrac{3^{n-1}}{2}$.

II∼0) On pose $\boxed{E = x \longmapsto e^{(e^x)}}$ Montrez pour tout n : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\exp.E^{(k)}$.

Déduisez $\forall n,\ e.B_n = E^{(n)}(0)$.

III∼0) p est un entier naturel fixé, montrez que $\left(\dfrac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 à l'infini et est majorée.

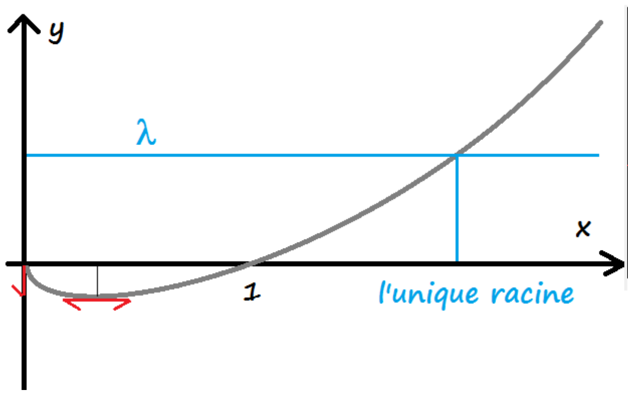
III∼1) Déduisez que $\left(\sum_{k=0}^{N} \dfrac{k^p}{k!}\right)_N$ est une suite croissante majorée qui converge vers une limite qu'on va noter $\boxed{A_p}$ sans la calculer.

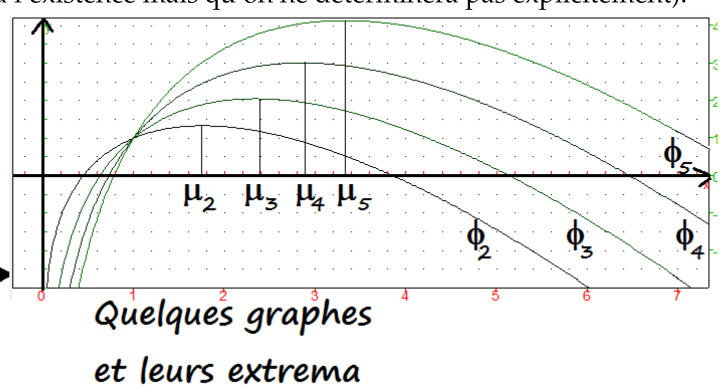
III∼2) Calculez quand même A_0.

III∼3) Montrez pour tout n : $A_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p$.

III∼4) Donnez la relation entre (A_n) et (B_n) .

IV∼0) Pour tout λ strictement positif, on pose $\boxed{\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)}$ définie sur $]0,\ +\infty[$.
Donnez les limites de ϕ_λ aux bornes de son domaine de définition[2]. Montrez que ϕ_λ admet un maximum, atteint en un unique réel qu'on notera α_λ (dont on prouvera l'existence mais qu'on ne déterminera pas explicitement).





IV∼1) Montrez pour tout x supérieur ou égal à -1 :

$$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$$

V∼0) n est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On définit $\boxed{f_n = x \longmapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \leqslant 0 \\ e^x.x^{n-x-\frac{1}{2}} & si \quad x > 0 \end{cases}}$

Montrez que f_n admet sur $\mathbb{R}^+$ un maximum, atteint en un unique point $\boxed{\mu_n}$

V∼1) f_n est elle continue sur $\mathbb{R}$?

---

1. niveau physique : `from math import binomial`, niveau PC : je reconstruis `binomial` mais en recréant déjà `factorielle`, niveau MP ou PSI : je reconstruis `binomial` mais sans factorielle, car je suis intelligent (pléonasme)
2. en 0, vous pourrez poser $x = \dfrac{1}{X}$ si la forme indéterminée vous embête

V$\sim$2) f_n est elle dérivable sur $\mathbb{R}$ (même en 0 , à droite et à gauche ?).

V$\sim$3) Montrez : $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$ (pour info : $\ln(2^4) < 3$).

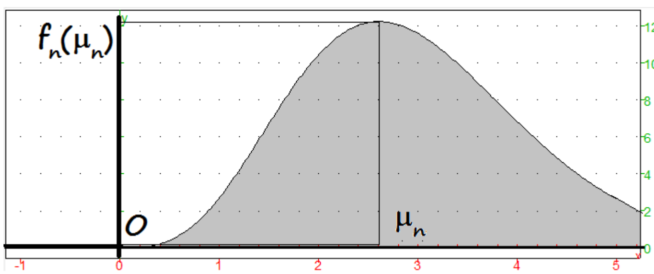
V$\sim$4) Montrez pour n supérieur ou égal à 3 : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.

V$\sim$5) Justifiez : $\mu_n = o(n)_{n\to+\infty}$ et $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$.
Rappel : $a_n = o(b_n)$ signfie $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 0. Rappele : $a_n \sim b_n$ signfie $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 1.

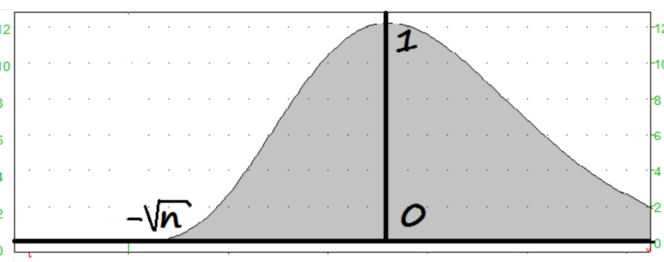
V$\sim$6) Soit α un réel de $]0,\ 1[$, montrez : $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.

VI$\sim$0) On définit ensuite $\boxed{g_n = x \longmapsto \dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)}$ Justifiez pour tout x :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n).g_n\Big(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}.x - \sqrt{n}\Big)$$



graphe de f_n



graphe de g_n

VI$\sim$1) Donnez l'allure du graphe de g_n.

VI$\sim$2) Montrez que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ converge vers un réel qu'on notera tout naturellement $g(x)$ et que vous expliciterez.

VI$\sim$3) Montrez qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on a pour tout x de $]-\sqrt{n},\ +\infty[$:

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\frac{n}{2}.\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

VII$\sim$0) On définit $\boxed{u = x \longmapsto \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$
Prolongez u par continuité en 0 pour qu'elle soit définie continue sur $]-1,\ +\infty[$. L'est elle sur $[-1,\ +\infty[$.

VII$\sim$1) Démontrez que u est décroissante, et donnez son signe.

VII$\sim$2) Déduisez pour tout n supérieure ou égal à n_0 défini plus haut : $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x^2}{4}\Big)$ pour tout x négatif et $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x-\ln(1+x)}{2}\Big)$ pour tout x positif.

Au final, après encore une partie, le sujet Mines-Ponts (2002 MP épreuve 1) arrive à $\boxed{B_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\mu_n}}{\mu_n.\sqrt{n}}.\Big(\dfrac{\mu_n}{e}\Big)^{n+\frac{1}{2}}}$
Mais j'ai ajouté la partie Python, et étiré quelques questions pour vous, faute de matériel et de théorèmes.

◃27▹ Trouvez un nombre qui est soixante dix sept fois plus grand que le chiffre de ses unités.

◃28▹ Le problème que Pavl Halmos aimait poser à ses étudiants : les concombres sont composés de quatre vingt dix neuf pour cent d'eau (si si, et nous, c'est plus que quatre vingt dix pour cent). Le Cours des Halles en bas de chez moi en a acheté cinq cent kilos. Mais après le week-end, ils ne sont plus formés que de quatre vingt dix huit pour cent d'eau. Combien de kilos lui reste-t-il à vendre ?

◁ 29 ▷ Exprimez $\tan'$ à l'aide de $\tan$. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\tan^{(2.k-1)}(0).\tan^{(2.n-2.k+1)}(0)$.

◁ 30 ▷ ♡ Sur que intervalle $(x \longmapsto (x^2-1).e^{2.x})^{(n)}$ est elle négative ? (oui, formule de Leibniz)

◁ 31 ▷ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ (Bioche toujours ? mais déjà, sont elles égales, et que vaut leur somme ?).

◁ 32 ▷

I	S	A	A	C	N	E	W	T	**O**	**N**
	I	S	A	A	C	N	E	**W**	**T**	O
		I	S	A	**A**	**C**	**N**	**E**	W	T
			I	**S**	**A**	A	C	N	E	W
				I	S	A	A	C	N	E
					I	S	A	A	C	N
						I	S	A	A	C
							I	S	A	A
								I	S	A
									I	S
										I

◇0 Calculez $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)}$.

♡0 Simplifiez au maximum $\left(x \longmapsto Arctan(\sqrt{e^x-1})\right)''$ en précisant le domaine de définition.

♣ De combien de façons pouvez vous lire ISAACNEWTON sur ce tableau en sachant que vous pouvez vous déplacer d'une case à la fois ?

◁ 33 ▷ Calculez $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} ch(k.t)$ (noyau de Dir*hyp*chlet ?).

◁ 34 ▷ z est un complexe plus petit que 1 en module.
Montrez : $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. Montrez $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2.p}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z^{2.q+1}}{1-z^{2.q+1}}$.

◁ 35 ▷ Soit σ une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez par l'absurde que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ est infini.
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}^*$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $2.\mathbb{N}$?

◁ 36 ▷ ♡ n et k sont des entiers fixés, a et b sont deux complexes *(différents de 1 si nécessaire et autres conditions du même type)*.
Simplifiez

$A = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$	$C = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$
$D = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$	$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$	$F = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$	$H = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$	$I = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$

On rappelle : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = (a+b)^n$ mais méfiez vous ici des indices et des variables...

◁ 37 ▷ Montrez que $\cos(x).\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{n,}}\right)$ converge vers $\frac{\sin(2.x)}{2.x}$ quand n tend vers l'infini (en multipliant pas $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$).

◁ 38 ▷ x est un entier au moins égal à 2. Quelle est la limite du produit $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{x^{(2^k)}}\right)$ quand n tend vers l'infini *(indication : multipliez par $1-\frac{1}{x}$).*