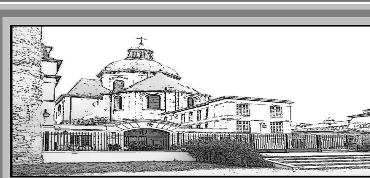
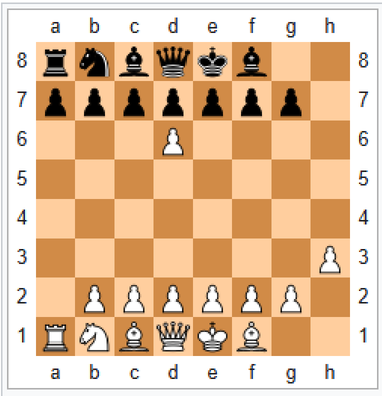
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 6 janvier
M.P.S.I.2



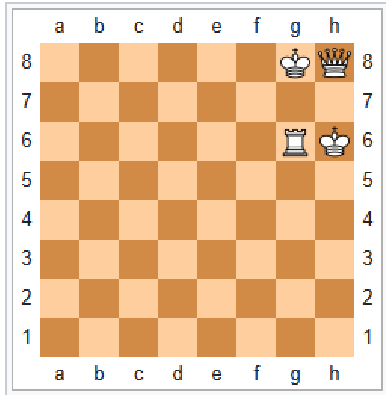
2024 2025

TD13

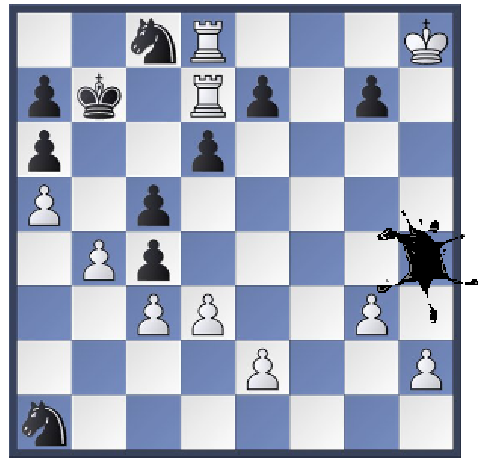
◁0▷ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1+5.i & -4 \\ -8 & 1-7.i \end{pmatrix}$ *(notée M)*. Calculez la partie réelle de la trace de M^4 et le déterminant de M^5.



Prouvez que le pion parti de h7 est mort mais après avoir été promu.



Mais qui est blanc, qui est noir ici ? Et ces deux rois ont ils tout deux été veuf de leurs reine ?



Mais il y a quoi en h4 ?

◁1▷ https://scienceblogs.com/evolutionblog/2014/04/06/sunday-chess-problem-15

◁2▷ Diagonalisez ces trois matrices $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

◁3▷ ♡ La suite u est donné par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et pour tout n, $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Pour tout n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Complétez A pour avoir $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. Calculez sa trace, son déterminant. Trouvez D diagonale et semblable à A. Levez A à la puissance n. Calculez u_n pour tout n.
♡ En Terminale, on vous aurait demandé de regarder la suite a définie par $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$ pour tout n. Vérifiez qu'elle est géométrique de raison 3. Montrez que b définie par $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ pour tout n est aussi géométrique. Calculez a_n et b_n pour tout n.
Comprenez le rapport avec la diagonalisation qui dit : $P^{-1}.U_{n+1} = D.(P^{-1}.U_n)$.

◁4▷ On note I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments (application f de E dans E vérifiant $f \circ f = Id_E$). Calculez I_n pour n de 0 à 3. Prouvez $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$. Calculez I_n pour n de 0 à 5.

◁5▷ ♡ Si E est un ensemble fini, y a-t-il plus d'applications de E vers $P(E)$ ou de $P(E)$ vers E ?

◁6▷ On travaille avec les entiers 0 et 1 et les opérations modulo 2. Il y a donc 2^4 matrices carrées de taille 2 sur 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Complétez les classes, là où je n'ai mis que des exemples

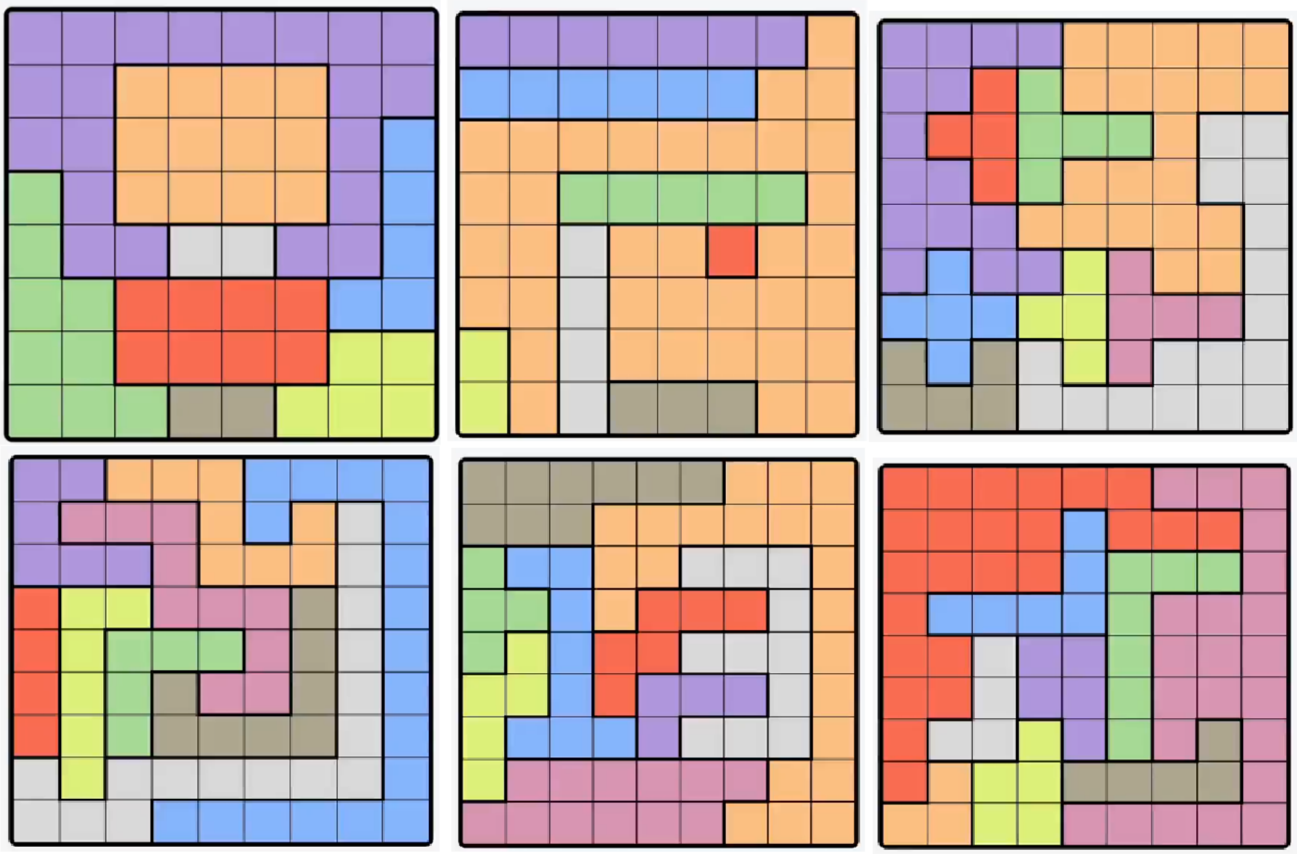
	$\det = 0$	$\det = 1$
$trace = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$trace = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

n'a pas d'inverse	est son propre inverse	a uun inverse mais ce n'est pas elle même
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Regroupez en classe d'équivalence pour la relation « être semblable à ».

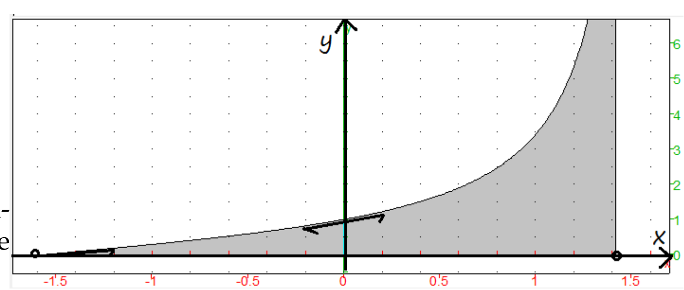
	déterminant égal à 0		déterminant égal à 1	
$trace = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$trace = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$			

◃7▹ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Pouvez vous compléter ?



◃8▹

◃9▹



On pose $I = \left] \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$

et $f = x \longmapsto \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.

Déterminez $f^{(n)}$ pour n de 0 à 3.

Justifiez que le graphe de f est celui indiqué ci contre (y compris limite et dérivée

I∼0) en $-\pi/2$).

I∼1) Montrez qu'il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

I∼2) Montrez que pour tout n, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{N}$.

I∼3) Montrez : pour tout x : $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$.

I∼4) Pour tout n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Montrez : $2.\alpha_1 = (\alpha_0)^2 + 1$ et $2.\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}$.

On pourra démontrer pour tout couple de fonctions $(u,\ v)$: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ (ou l'utiliser directement si il a été vu en cours), puis l'appliquer à u et v bien choisies.

I∼5) Écrivez un script `Python` qui prend N en entrée et calcule les α_n pour n de 0 à N.

II∼0) Montrez pour tout n et tout $x$de $I \cap \mathbb{R}^+$: $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$ (indication : Taylor).

II∼1) Déduisez que pour tout x de $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ la série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ converge vers une somme qu'on notera $g(x)$ (c'est à dire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$).

Rappel : on appelle série de terme général a_n la suite (A_N) défnie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Ici, croissez et majorez.

II∼2) On admettra que l'on peut (sous des conditions ici validées) dériver $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ comme une limite de sommes (alors qu'il s'agit d'une limite de sommes) et permuter les sommes doubles (familles sommables). Montrez $2.g'(x) = 1 + (g(x))^2$.

II∼3) Déduisez $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

III∼0) Montrez que la seule application à la fois paire et impaire est $x \longmapsto 0$.

III∼1) Déduisez, par analyse et synthèse, que pour toute application ϕ de I dans $\mathbb{R}$ il existe un unique couple $(p,\ i)$ avec p paire et i impaire vérifiant $\phi = p + i$.
Précisez qui sont p et i dans les cas $\phi = x \longmapsto 3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$
$\phi = x \longmapsto e^x$
$\phi = x \longmapsto \cos(x - \varphi_0)$ pour φ_0 fixé

III∼2) Montrez aussi : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$.

III∼3) Pour tout entier naturel n, exprimez $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

III∼4) Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

◃10▹ Calculez $\int_{u=0}^{1} \frac{du}{2 + \sqrt{1-u^2}}$ (vous pourrez poser $u = \sin(\theta)$ et ensuite $t = \tan(\theta/2)$).

◃11▹ Calculez $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}.d\theta$ en posant $u = \sqrt{\tan(\theta)}$.

◃12▹ Montrez, par récurrence sur n, pour f et g dérivables autant de fois qu'on veut : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}$.

En appliquant ce résultat à $f = x \longmapsto 1 + x^2$ et $g = Arctan'$, montrez :
$(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$.

◃13▹ ♡ On pose $f = x \longmapsto x^3.e^{2.x}$. Calculez rapidement $f^{(n)}(1)$.

◃14▹ Calculez $\sum_{n=0}^{2017} \left(\sum_{k=0}^{n} z^k \right)$ pour tout complexe z différent de 1.

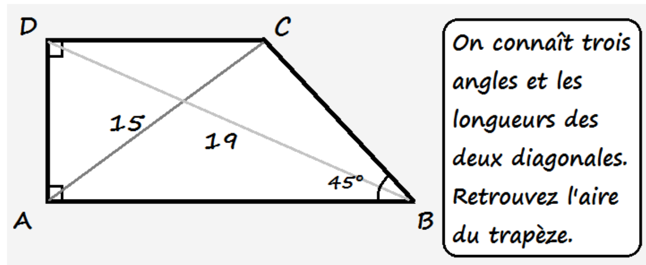
◃15▹ ♡ Montrez que si $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(2+x)$ (notée g) sont impaires, alors f est périodique.

◃16▹ Pour tout entier naturel on pose : $f_n = x \longmapsto x^n.e^{1/x}$. Calculez $(f_n)^{(n+1)}$ pour n de 0 à 3. Émettez une conjecture.
Montrez : $(f_{n+1})' = (n+1).f_n - f_{n-1}$. Démontrez votre résultat par récurrence sur n.

φ est une application de classe C^∞. Pour tout n on définit $h_n = x \longmapsto x^n.h\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculez $(h_n)^{(n+1)}$ en utilisant au bon moment la formule de Leibniz.

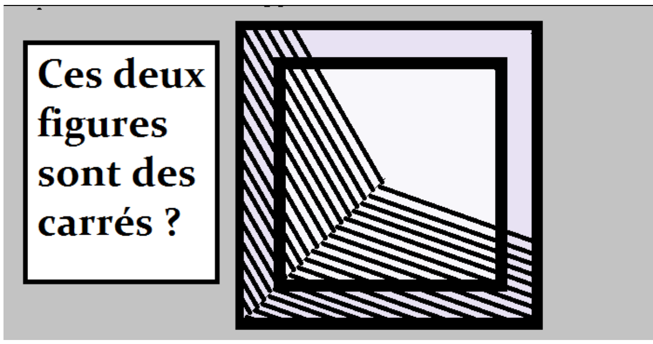
◁ 17 ▷ Calculez $(\sin^3)^{(10)}(0)$ et $(\sin^3)^{(11)}(0)$.

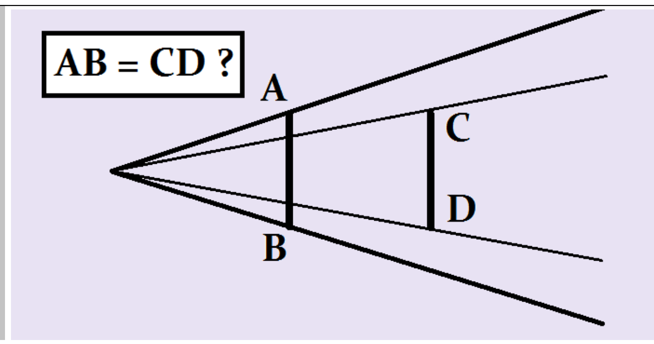
Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de

◁ 18 ▷ $\prod_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$.





◁ 19 ▷ ♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C.
Exprimez A comme combinaison de B et C.

◁ 20 ▷ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 ayant pour trace 1 et pour déterminant 1 a pour puissance sixième I_2.

◁ 21 ▷ Montrez pour toute matrice carrée de taille 2 sur 2 : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$.
Exprimez $\det(M)$ à l'aide de $(Tr(M))^2$ et $Tr(M^2)$.

Montrez qu'on n'a pas forcément pour M carrée de taille 3 sur 3 : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_3 = 0_{3,3}$.
Montrez, pour M carrée de taille 3 que $M^3 - Tr(M).M^2 + \dfrac{Tr(M)^2 - Tr(M^2)}{2}.M$ est un multiple de I_3(quel coefficient reconnaissez vous ?).

◁ 22 ▷ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ *(notée M)* pour qu'elle ait même trace et même déterminant que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(notée T)*. Calculez T^n pour tout n *(soit par récurrence, soit par* $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n$*)*. Calculez M^n.

◁ 23 ▷ Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 0 & \\ 3 & & 4 \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

◁ 24 ▷ Quelle est la valeur du plus grand terme de $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018}$? (oui, on diagonalise)

◁ 25 ▷ ♡ La suite u est définie par u_0 donné et $u_{n+1} = 3.u_n - 2^n$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix}$ pour tout n. trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. Diagonalisez la. Calculez u_n pour tout n en fonction de u_0. Pour quels u_0 la suite reste-t-elle positive ?

◃26▹ ♡ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n. La formule obtenue est elle cohérente pour n négatif ?

◃27▹ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ mais pas leur somme ni leurs produits.

◃28▹ Se souvenant de la relation $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ l'élève Hirai du Bahu prétend : $Tr(A.B.C) = Tr(A.C.B)$ pour tout triplet (A, B, C) de matrices de formats compatibles. Montrez qu'il a tort.

◃29▹ On a diagonalisé : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (formule $M = P.D.P^{-1}$). Donnez des diagonalisations de M avec une autre matrice diagonale D'.

Donnez des diagonalisations de M avec d'autres matrices de passage P'.

Diagonalisez M^2 et M^{-1} et ${}^tM$ (${}^tM$ c'est $\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$, on rappelle ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$).

◃30▹ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 8 sur 8, quel est le signe de chacun des termes suivants :
$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$.

◃31▹ Dans $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

◃32▹ Calculez $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx$ (ça a l'air compliqué, mais pourtant...).

◃33▹ ♡ Si A est une matrice à coefficients complexes a_i^k, on note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_i^k}$ *(conjugué)*. Montrez : $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Montrez que $Tr({}^tA.\overline{A})$ est un réel positif. Que pouvez vous dire si il est nul ?

◃34▹ Soit A une matrice à coefficients entiers, dont les termes diagonaux sont impairs et les termes hors de la diagonale pairs *(ceux ci peuvent donc être nuls)*. Montrez que le déterminant de A est impair. Déduisez que A est inversible.
Vous pouvez commencer par traiter l'exercice en taille 2 ou 3.

Mais sinon, pensez à travailler modulo 2, dans la matrice elle même, avec la grosse formule du déterminant...

◃35▹ Montrez que D est réel *(il vaut d'ailleurs 39, mais je ne vous recommande pas de le calculer, juste de prouver qu'il est réel)*.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1-2.i & 3-i \\ 1-i & 2 & i & 2-i \\ 1+2.i & -i & 0 & 1+3.i \\ 3+i & 2+i & 1-3.i & 4 \end{vmatrix}$$

Pensez à comparer $\det(M)$ et $\det({}^tM)$).

◃36▹ On va étudier les matrices antisymétriques (${}^tA = -A$) et aller en direction du résultat : le déterminant d'une matrice réelle antisymétrique est le carré d'une formule en les coefficients de la matrice (le Pfaffien). Les questions sont largement issues d'une épreuve de Polytechnique-ESPCI, filière P.C. de 2003 (quel âge aviez vous ?)[1]

IV∼0) On se fixe un entier n qui pourra le temps de quelques questions prendre une valeur imposée. On note E_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ *(n composantes nulles sauf la i^{eme} qui vaut 1)*. On note A_n l'espace des matrices antisymétriques de taille n sur n *(rappel : ${}^tA = -A$)*. Montrez que c'est un espace vectoriel pour les lois usuelles, donnez sa dimension et donnez une base à l'aide des $E_i.{}^tE_j$ *(on ne demandera pas de prouver que c'est une base)*[2].

1. n'allez pas aux toilettes avec votre smartphone pour essayer de récupérer le corrigé, j'ai modifié l'intitulé et le déroulement des questions à ma façon, et viré les parties difficiles.

2. essayez en taille 2 : $E_1.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1.{}^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $E_2.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

IV∼1) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire est forcément nul.

IV∼2) L'élève A dit que le produit de deux matrices antisymétriques est symétrique, et B dit que le produit de deux matrices antisymétriques est antisymétrique. Mettez les d'accord. *Cette question n'était pas dans le sujet de Polytechnique.*

IV∼3) Est il vrai que les matrices antisymétriques de taille 2 forment un supplémentaire [3] de l'ensemble des matrices de trace nulle ? Pouvez vous donner dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ un sous-espace vectoriel qui soit à la fois supplémentaire de l'ensemble des matrices symétriques, mais aussi de l'ensemble des matrices de trace nulle ?

IV∼4) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 2 est le carré de la forme linéaire $A \longmapsto^t E_1.A.E_2$.

V∼0) On définit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'elles ont le même déterminant. Calculez $A.B$ et déduisez que $\det(A)$ est le carré d'une application sur les coefficients de A que vous préciserez *(attention, ne pas oublier un détail)*.

V∼1) On définit le script suivant

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
....if n % 2 == 0 :
........return 0
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
....return M
```

Montrez qu'il définit une matrice antisymétrique, et calculez son déterminant.

V∼2) Soit D_n une matrice diagonale de taille n sur n ; calculez en fonction du déterminant de D_n le déterminant de la matrice de taille $2.n$ par blocs : $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & -D_n \\ D_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$.

V∼3) Soit A une matrice antisymétrique, on suppose que A^2 est nulle. Montrez que A est nulle *(indication qui n'était pas dans le sujet : calculez ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ pour tout i)*.

VI∼0) Dans cette partie, A est une matrice réelle antisymétrique vérifiant $A^2 + I_n = 0$. Montrez que n est pair (on posera alors $n = 2.m$) et que A est inversible. Soit U un vecteur. A quelle condition $(U,\ A.U)$ est elle libre ?

VI∼1) On pose : $F = \{V \in \mathbb{R}^n \mid {}^tU.V = 0 \ et \ {}^t(A.U).V = 0\}$. Montrez que F est un espace vectoriel, quelle est sa dimension. Montrez : $\forall V \in F,\ A.V \in F$.

VI∼2) Déduisez l'existence d'une famille de vecteurs $(U_1, \dots U_m)$ telle que $(U_1, \dots U_m, A.U_1, \dots A.U_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs deux à deux orthogonaux, et normés.
L'orthogonalité de deux vecteurs V et W c'est ${}^tV.W = 0$. Un vecteur normé vérifie ${}^tV.V = 1$.

VII∼0) Soit A une matrice antisymétrique. Montrez que $(U, V) \longmapsto^t U.A.V$ (notée ϕ_A^1) est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.

VII∼1) Une forme multilinéaire est dite alternée si elle donne 0 dès que deux vecteurs d'indices voisins sont égaux : $\forall i,\ U_i = U_{i+1} \Rightarrow \phi(U_1, \dots, U_i, U_{i+1}, \dots U_n) = 0$ *(ce n'est pas (encore) la même définition que dans le cours)*.
Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ change de signe dès qu'on échange deux vecteurs d'indices voisins.

---

3. attention, ne confondez pas supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire de A dans E est un espace vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B (exemples : l'axe imaginaire est supplémentaire de l'axe réel dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel)

Montrez alors que $\phi(U_1,\dots U_n)$ est nul dès que deux vecteurs d'indices distincts sont égaux.

VII∼2) On définit maintenant $\phi_A^2 = (U_1, U_2, U_3, U_4) \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_3, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$. Montrez que c'est une forme quadrilinéaire alternée.

VII∼3) On prend ici $n = 4$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant

$$\forall (U_1,\dots U_4) \in (\mathbb{R}^4)^4,\ \phi_A^2(U_1,\dots U_4) = Pf(A).\det(U_1,\dots U_4)$$

VII∼4) Explicitez $Pf(A)$ à l'aide des coefficients de A.

VIII∼0) On définit ensuite $\phi_A^3(U_1,\dots U_6) = \sum_{k=2}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1}, U_{k+1}\dots, U_6)$ *(la notation étant ambigüe, le premier terme de la somme est $\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^2(U_3, U_4, U_5, U_6)$et le dernier est $\phi_A^1(U_1, U_6).\phi_A^2(U_2, U_3, U_4, U_5)$)*. Montrez que c'est une forme hexalinéaire alternée.

VIII∼1) On prend ici $n = 6$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant

$$\forall (U_1,\dots U_6) \in (\mathbb{R}^6)^6,\ \phi_A^3(U_1,\dots U_6) = Pf(A).\det(U_1,\dots U_6)$$

VIII∼2) Soit A une matrice antisymétrique de taille 6 et M une matrice de taille 6. Montrez que ${}^tM.A.M$ est antisymétrique. Montrez $Pf({}^tM.A.M) = \det(M).Pf(A)$.

Concluez : les élèves de P.C. qui traitent un tel problème sont des matheux pur jus.

◃37▹ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{vmatrix}$ /4 est le carré de l'aire du triangle *(indication : $\det(M.{}^tM)$ et Triangle $= \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$).*

◃38▹ ♡ A et B sont deux matrices carrées de taille n vérifiant $A.B = B.A$. On définit la matrice par blocs de taille $2.n$: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

Montrez : $M^k = \begin{pmatrix} A^k & k.B.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel k (avez vous un argument plus esthétique que la récurrence sur ?).

Si $P(X)$ est un polynôme ($P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$), on pose pour toute matrice carrée C : $P(C) = \sum_{k=0}^{d} a_k.C^k$). Montrez $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & B.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

◃39▹ Un élève prétend que si A et B sont deux matrices carrées de taille n alors on a $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2)$. Montrez par un contre-exemple simple pour n égal à 2 qu'il a tort. Montrez qu'en revanche, son résultat est vrai si $A.B$ est égal à $B.A$ *(on pourra utiliser les matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ de part et d'autre)* . Montrez que si A et B sont réelles, qu'elles « commutent » ou non, on a quand même $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+$.

On pourra utiliser $\det(\begin{pmatrix} C & D \\ 0_n & C' \end{pmatrix}) = \det(C).\det(C')$.

◃40▹ Montrez que si A est une matrice diagonalisable, alors la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & A \end{pmatrix}$ l'est sont aussi.

La matrice $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & A \\ A & 0_{n,n} \end{pmatrix}$ l'est elle aussi ?

◃41▹ ♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y_t^{(3)} + a_t.y''_t + b_t.y_t + c_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$. Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u^{(3)} & v^{(3)} & w^{(3)} \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ ($\forall t$).

◁ 42 ▷ ♡ Une suite u est définie par $\exists(\alpha,\ \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha.(u_n)^\beta$.
Exprimez u_n à l'aide de u_0, α, β et n (c'est ♡ mais ça peut être long quand même).

Pensez quand même à raisonner sur le log, et à transformer $\ln(u_n)$ en $\ln(u_n) - \alpha$ pour que cette nouvelle suite soit géométrique.

◁ 43 ▷ ♡ On donne $A(1,1)$, $B(2,4)$ et $C(5,3)$. Placez D sur la droite (BC) pour que (ABD) ait pour aire 2.

◁ 44 ▷

Bintou vient de faire une partie de puissance 4 ou morpion contre Aïssata qui s'est conclue par un nul. Il n'y a aucun alignement de quatre croix ni de quatre cercles, que ce soit en ligne, colonne ou diagonale. Version Bintou : Retrouvez le contenu des cases qui manquent. Combien de solutions ?
Version I.P.T. : une matrice de taille 5 sur 5 contient des 0 et des &, il faut vérifier qu'il n'y a aucun alignement de quatre pions.

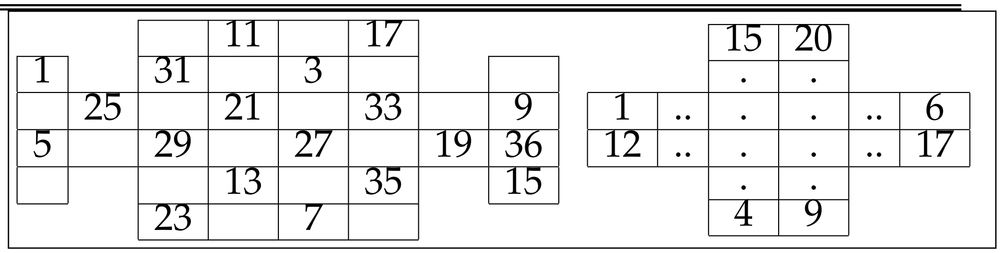
χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ			
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

◁ 45 ▷ Une matrice carrée `M` *(tableau donné sous forme de liste de listes)* est dite magique si chaque somme en ligne est égale à chaque somme en colonne, elle même égale à chaque somme des diagonales. Écrivez un script Python qui vérifie si une matrice passée en argument est un carré magique.

Par exemple `test([[16, 3, 9, 6], [2, 13, 7, 12], [5, 10, 4, 15], [11, 8, 14, 1]])` devra répondre `True`.

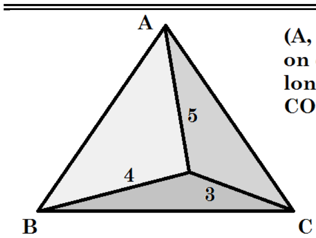
Complétez en carré magique $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ & 8 & & 5 \\ & & 6 & \\ & 14 & & \end{pmatrix}$.

◁ 46 ▷ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :



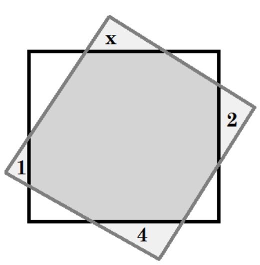
◁ 47 ▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $A.B$ et diagonalisez la (valeurs propres α et β).
Trouvez U, V et W non nuls vérifiant $(B.A).U = \alpha.U$, $(B.A).V = \beta.V$ et $(B.A).W = 0_3$.
Diagonalisez $B.A$. Calculez $Tr((A.B)^n)$ et $Tr((B.A)^n)$ pour tout entier naturel n.

◁ 48 ▷



(A, B, C) est équilatéral, on connaît les trois longueurs AO, BO et CO. Retrouvez son aire.

Les deux carrés ont le même côté. On connaît les aires de trois triangles qui dépassent, retrouvez celle du quatrième.



Guillaume Deslandes se déplace le long de l'axe des entiers relatifs. Il part de la position initiale m (dans $\mathbb{Z}$) et avance à chaque instant d'une même pas p (dans $\mathbb{Z}$). De votre côté, à chaque instant n (dans $\mathbb{N}$), vous pouvez poser une question $G(k)$: « Guillaume est il en k » (k dans $\mathbb{Z}$), et Clément vous répond juste par oui pou par non. Saurez vous trouver le position de Guillaume en un nombre fini de questions ?

◁ 49 ▷ u_0 est entre 0 et 1. On définit $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrez que la suite converge, vers 0 (en décroissant).[4]
Étudiez la convergence de la série de terme général $(u_n)^2$ et du produit infini de terme général $(1 - u_n)$ (il y a du télescopage dans l'air).

4. dans l'ordre : existence, encadrement par 0 et 1, positivité, décroissance, convergence, limite