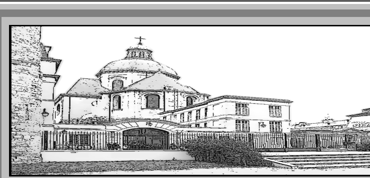
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 6 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025

TD13

◁0▷

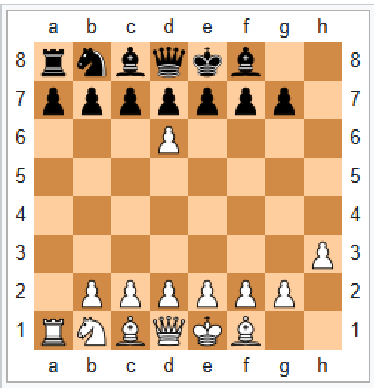
Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1+5.i & -4 \\ -8 & 1-7.i \end{pmatrix}$ *(notée M)*. Calculez la partie réelle de la trace de M^4 et le déterminant de M^5.

Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$2-2.i$	$4-2.i$	$X^2-(2-2.i).X+4-2.i$	$\{1+i,\ 1-3.i\}$	$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-3.i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2.i \end{pmatrix}$

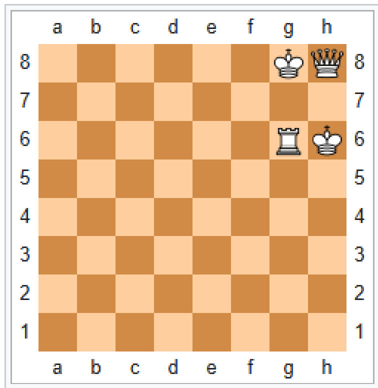
La formule $M = P.D.P^{-1}$ donne $M^4 = P.D^4.P^{-1}$ puis $Tr(M^4) = Tr(D^4) = (1+i)^4 + (1-3.i)^4$.
On développe : $Tr(M^4 = 24 + 96.i$ et on garde juste 24.

Le déterminant est un cadeau : $\det(M^5) = (\det(M))^5 = 2^5.(2-i)^5 = 32.(-38-41.i)$.

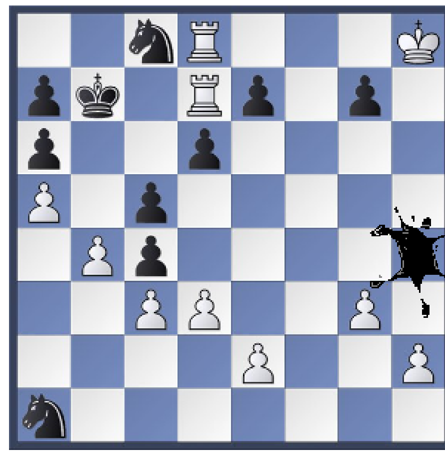
◁1▷



Prouvez que le pion parti de h7 est mort mais après avoir été promu.



Mais qui est blanc, qui est noir ici ? Et ces deux rois ont ils tout deux été veuf de leurs reine ?

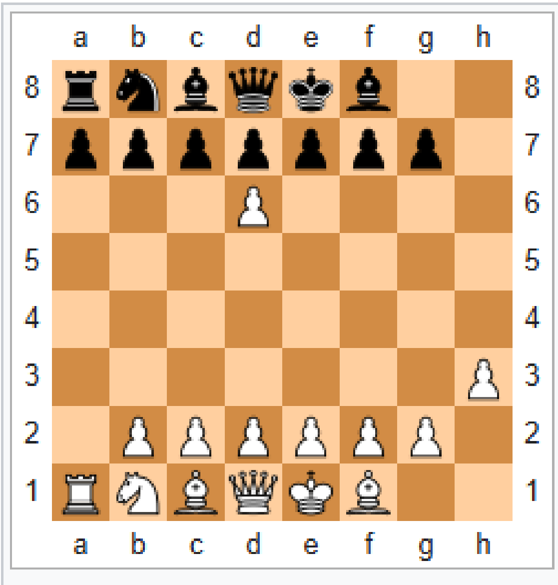


Mais il y a quoi en h4 ?

https://scienceblogs.com/evolutionblog/2014/04/06/sunday-chess-problem-15

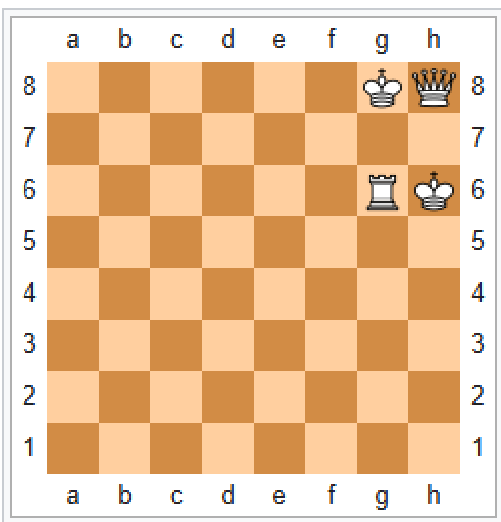
Y a-t-il déjà eu une promotion ?

Si oui sur quelle case ?



Un pion se déplace d'une ou deux cases en restant sans changer de colonne sauf s'il capture une pièce adverse, auquel cas il change nécessairement de diagonale. Le nombre de changements de colonne par des pions est donc inférieur ou égal au nombre de pièces adverses capturées par des pions. De plus un pion ne recule pas.

Le pion blanc en d6 a effectué au moins 3 changements de colonne. Il ne manque que 3 pièces aux Noirs donc celles-ci ont toutes été prises par ce pion, y compris le pion noir initialement en h7. Celui-ci a donc nécessairement dû se promouvoir en dame ou en cavalier pour ensuite sortir se faire prendre par le pion blanc. Comme il ne manque que 2 pièces blanches, la promotion n'a pu se faire qu'en h1.



Quelle pièce est à qui ?

Dans ce deuxième exemple, il s'agit de déterminer quelles pièces appartiennent aux Blancs, et quelles pièces appartiennent aux Noirs.

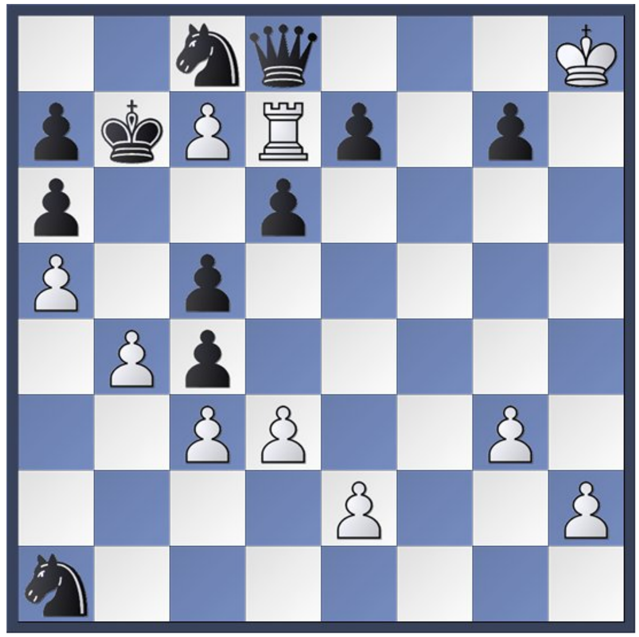
Comme les deux Rois ne peuvent pas être en échec simultanément, la Tour et la Dame appartiennent donc au même camp. L'un des Rois est ainsi simultanément en échec par deux pièces ennemies3. Cette configuration n'est possible que dans le cas d'un échec à la découverte.

La seule possibilité est qu'un pion en g7 se soit promu en h8.

On a donc au dernier coup : g7xh8=D+4.

Les pièces du diagramme sont donc les suivantes : Blancs : Rh6, Dh8, Tg6 Noirs : Rg8.
Gideon Husserl, feenschach (de), 1986

We are to imagine that this position occurred in the course of an actual game of chess. You should assume that the players always made legal moves, but they did not always make sensible moves.
Now direct your attention to the square h4. There is supposed to be a piece standing on that square, but the family dog came in and knocked it off the board. The piece is now hopelessly mixed in with the other captured pieces. Your task is to determine which piece is supposed to be standing on h4. I want both the color and the denomination.



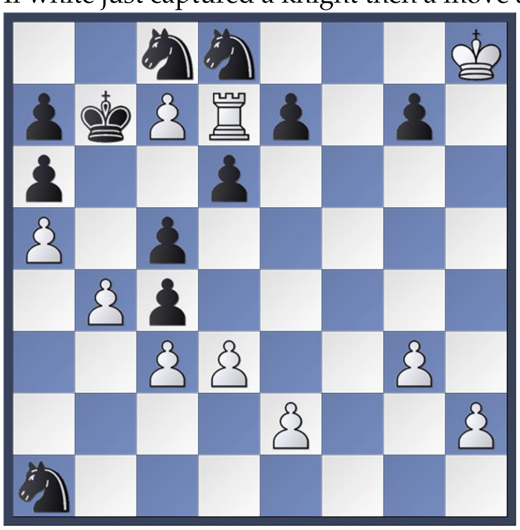
Quite a challenge! If you have never seen such things before, you might be uncertain how to begin. The key is that this position arose in the course of a legal game of chess. That suggests a way forward. You see, black is now in check. That means white has just moved. What move did he make to give this check?
Since the rook on d7 has no legal last move, we quickly realize there is only one possibility: A white pawn on c7 just captured a black piece on d8 and promoted to a rook. Why a rook and not a queen? Who cares! We care about legal moves, not sensible moves.

We conclude that just prior to white's last move there was a black piece standing on d8. Which piece was it? If it was a queen, then the position a move ago must have been this :
Do you see why this is impossible? Now it is white who is in check, but black has no possible last move to deliver this check.

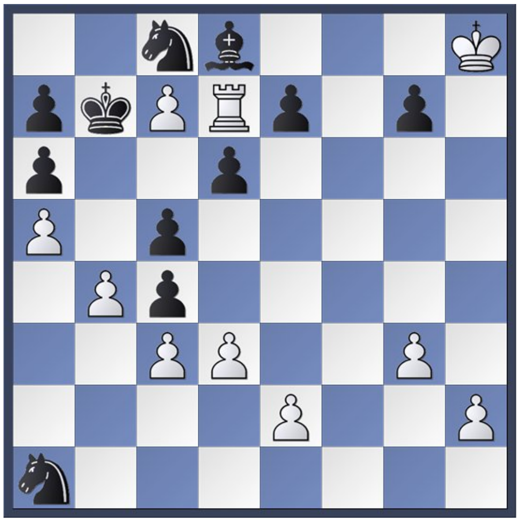
So this is impossible.

It is likewise impossible that white just captured a rook.

If white just captured a knight then a move ago the position looked like this :



Surely it jumps out at you that there are three black knights on the board. That means that, in this scenario, the one missing black pawn must have promoted to a knight sometime earlier in the game.
A final possibility is that white captured a black bishop :



This is a very interesting possibility. Black's dark-squared bishop started the game on f8. But the pawns on e7 and g7 have plainly not moved during the game. This means that the bishop could never have escaped from f8, and must simply have been captured there. Which means that any dark-squared bishop standing on d8 must have been a promoted pawn.

We have thus shown that the one missing black pawn promoted to either a bishop or a knight. We don't know which, but that is OK.

We now have enough information to show that the missing piece is white. For suppose otherwise. What black piece could possibly be standing on h4 ? Certainly not a rook or a queen, as then both kings would be in check at the same time, which is not possible. It is not the missing black pawn, since that pawn promoted. It cannot be the piece to which the pawn promoted, since that piece was captured on d8. And it cannot be a knight or a bishop, since that would entail a second pawn promotion, but black is only missing one pawn.

That exhausts the possibilities.
So far, so good ! But how can we determine which white piece it is ? This is where things get tricky. The key is to ask yourself about the promoting black pawn. It must have started its life on h7. This is clear from a consideration of black's pawn structure. The pawn on a6 clearly started on b7, while the pawn on c4 could only have started on f7.
Now, the pawn on h7 could not have plowed straight down the h-file, since the white pawn on h2 is in its way. So it must have made at least one capture. Can we be more precise ? Indeed we can ! You see, since white has ten pieces on the board he is missing six. One of those is the pawn that promoted. That leaves five pieces available for capture. The black pawn on a6 made one capture, while the black pawn on c4 made three. That only leaves one piece available for the h-pawn. We conclude that the black pawn on h7 made one capture over to the g-file and then promoted on g1.
Let's keep going. On what square did the black pawn make its capture ? The obvious answer is that the pawn marched down to h3, and then captured on g2, thereby getting around the white pawn on g3. This turns out to be correct, but we need to eliminate another possibility. It could be that the white pawn on g3 began the game on f2. If that is true, then the black pawn could have made its capture anywhere on the g-file, promoted on g1, and then at some later time the white pawn on f2 captured over to g3.
I claim, though, that this is impossible. Notice that black also has ten pieces on the board, leaving six available for capture. Suppose that the pawn now on g3 started on f2. Then it made one capture. Also, the white pawn that just promoted must have started on g2. It made four captures to get to c7, and then a fifth capture when it promoted. That makes a total of six captures, perfectly balanced by black's six missing pieces. It seems that the account balances perfectly, until you remember that the black dark-squared bishop was captured at home on f8 ! So really there were only five black pieces available for capture, which means this scenario entails one too many.
It follows that the black h-pawn really did make its capture on g2 after all. Do you see why this is relevant ?
Five of the six missing white pieces were captured by pawns during the game, while the sixth is currently standing on h4. We actually know the precise squares on which the five pieces were captured : a6, e6, d5, c4, g2. What do those squares have in common ? They are all white squares. All of the missing white pieces were captured on white squares.
But there is exactly one white piece that simply cannot be captured on a white square : the dark-squared bishop. That makes the conclusion inescapable : the missing piece is a white bishop.
What do you think ?

◃2▹ Diagonalisez ces trois matrices $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

	Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	8	15	$X^2 - 8..X + 15$	$\{3, 5\}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	6	8	$X^2 - 6..X + 8$	$\{4, 2\}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

On prend les relations $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

et on en fait une grande relation :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de la forme $M.P = P.D$.

Remarque : | Oui, il suffisait d'avoir de l'initiative.
Pardon : il fallait avoir de l'initiative.

◁3▷ ♡ La suite u est donné par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et pour tout n, $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Pour tout n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Complétez A pour avoir $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. Calculez sa trace, son déterminant. Trouvez D diagonale et semblable à A. Levez A à la puissance n. Calculez u_n pour tout n.
♡ En Terminale, on vous aurait demandé de regarder la suite a définie par $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$ pour tout n. Vérifiez qu'elle est géométrique de raison 3. Montrez que b définie par $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ pour tout n est aussi géométrique. Calculez a_n et b_n pour tout n.
Comprenez le rapport avec la diagonalisation qui dit : $P^{-1}.U_{n+1} = D.(P^{-1}.U_n)$.

Évidemment $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ de trace 5 et de déterminant 6.

On peut choisir $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec les deux valeurs propres 2 et 3.

On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (pour ce choix de D ; pour l'autre choix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$).

Par concaténation et récurrences évidentes : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Par calcul : $M^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2.3^n & 3^n - 2^n \\ 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Et on prend la peine de vérifier $M^0 = \begin{pmatrix} 3.1 - 2.1 & 1 - 1 \\ 3.2 - 2.3 & 3 - 2 \end{pmatrix}$ et $M^1 = \begin{pmatrix} 3.2 - 2.3 & 3 - 2 \\ 12 - 18 & 9 - 4 \end{pmatrix}$.

Avec l'argument suite géométrique de raison M (à gauche) : $u_n = (3.2^n - 2.3^n).u_0 + (3^n - 2^n).u_1$.

Regardons comme proposé $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$.
On constate : $a_{n+1} = u_{n+2} - 2.u_{n+1}$
$a_{n+1} = (5.u_{n+1} - 6.u_n) - 2.u_{n+1}$
$a_{n+1} = 3.u_{n+1} - 6.u_n$
$a_{n+1} = 3.a_n$
La suite a est géométrique de raison 3.
On a immédiatement $a_n = 3^n.a_0$.

De même, $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ vérifie $b_{n+1} = 2.b_n$.
Par récurrence immédiate : $b_n = 2^n.b_0$.

On a le système $\left\{ \begin{array}{lll|} u_{n+1} & -2.u_n & = 3^n .a_0 \\ u_{n+1} & -3.u_n & = 2^n .b_0 \end{array} \right.$, on combine pour retrouver u_n.
Et on retrouve la même formule.

Mais si on y regarde de plus près. Qui sont a_n et b_n ?

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$! Oui : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1}.U_n$.

Et on aboutit à $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.a_n \\ 2.b_n \end{pmatrix} = D.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Puis par récurrence terminalesque $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n.a_0 \\ 2^n.b_0 \end{pmatrix} = D^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

La résolution de $\left\{ \begin{array}{ccc|} u_{n+1} & -2.u_n & = & a_n \\ u_{n+1} & -3.u_n & = & b_n \end{array}\right.$ c'est celle de $P^{-1}.U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Elle donne $U_n = P.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ne croyez vous pas qu'en mettant tout bout à bout on n'a pas $U_n = P.D^n.P^{-1}$?

Simplement, en Terminale, on vous donne a_n et b_n c'est à dire en fait P^{-1}

vous constatez qu'elles sont géométriques, c'est à dire que vous regardez D au lieu de M

vous travaillez sur a_n et b_n c'est à dire avec D^n au lieu de M^n

vous revenez à u_n en repassant de « l'univers D » à « l'univers M «

Comprendre ces liens, c'est s'épargner des trucs de toutes sorte à apprendre par cœur.

Ou en tout cas, en avoir quatre fois moins à apprendre par cœur.

◁ 4 ▷

On note I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments (application f de E dans E vérifiant $f \circ f = Id_E$). Calculez I_n pour n de 0 à 3. Prouvez $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$. Calculez I_n pour n de 0 à 5.

On dresse les premières listes, avec les notations des permutations, puisque les involutions sont forcément bijectives, égales à leur propre inverse :

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$Id_\emptyset$	Id	Id et $\tau_{1,2}$	Id et trois transpositions $\tau_{1,2}$
1	1	2	4

On suppose connus les nombre d'involutions pour les ensembles à n et $n+1$ éléments, et on prend un ensemble à $n+2$ éléments : $\{a_1, \ldots a_{n+2}\}$. Il y a alors deux types d'involutions incompatibles suivant que $f(a_{n+2})$ est ou non égal à $f(a_{n+2})$.

Si $f(a_{n+2})$ est égal à a_{n+2} *(et c'est autorisé)*, il ne reste plus à f qu'à induire une involution sur $\{a_1, \ldots a_{n+1}\}$; il y en a donc I_{n+1}.

Si $f(a_{n+2})$ est un autre des $n+1$ éléments a_k, alors on a $f(a_k) = a_{n+2}$ involution, et f induit une involution sur les n éléments restant ; il y en a cette fois I_n.

On somme et on a $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$.

On calcule alors les suivants :

$n=4$	$n=5$
10	26

On justifie d'ailleurs la réponse $I_4 = 10$ en donnant la liste :

Id	$\binom{4}{2}$ *transpositions en* $\tau_{a,b}$	*3 couples* $\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d}$

pour la dernière case, il suffit de savoir "avec qui tourne 1".

◁ 5 ▷

Si E est un ensemble fini, y a-t-il plus d'applications de E vers $P(E)$ ou de $P(E)$ vers E ?

Posons $Card(E) = n$. On sait alors : $Card(P(E)) = 2^n$ (rappel : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ par exemple, ou nombre d'applications de E dans $\{True,\ False\}$).

On rappelle aussi que l'ensemble des applications de A dans B se note B^A et a $Card(B)^{Car(A)}$ éléments ($Card(B)$ choix d'image pour chacun des $Card(A)$ éléments de A).

applications de E vers $P(E)$		applications de $P(E)$ vers E
$(2^n)^n = 2^{n^2}$	$\leqslant$	$n^{(2^n)}$

$n^2.\ln(2)$ $\qquad$ $2^n.\ln(n)$

Si besoin est, on compare les logarithmes pour se convaincre.

◁ 6 ▷

On travaille avec les entiers 0 et 1 et les opérations modulo 2. Il y a donc 2^4 matrices carrées de taille 2 sur 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Complétez les classes, là où je n'ai mis que des exemples

	det = 0	det = 1
trace = 0	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
trace = 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

n'a pas d'inverse	est son propre inverse	a un inverse mais ce n'est pas elle même
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Regroupez en classe d'équivalence pour la relation « être semblable à ».

	déterminant égal à 0		déterminant égal à 1	
trace = 0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
trace = 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$			

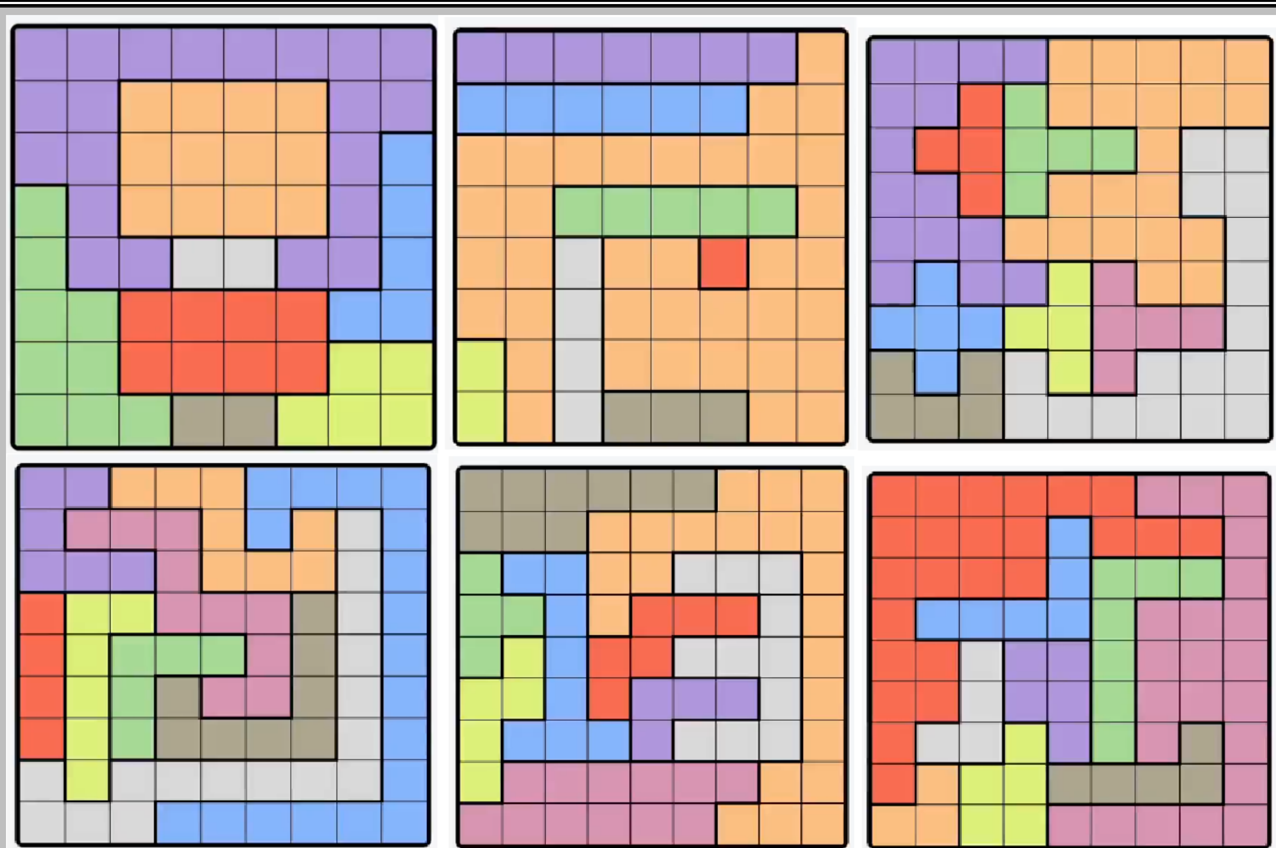
◁7▷

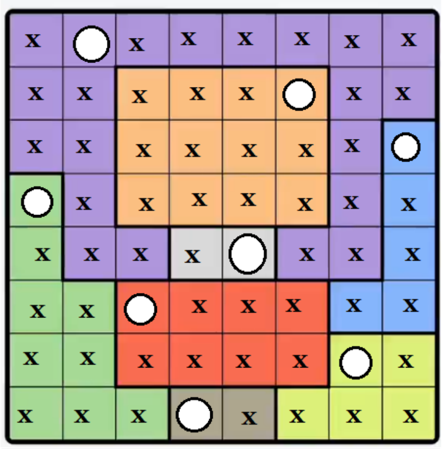
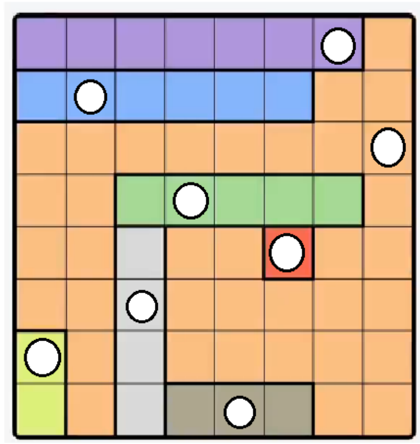
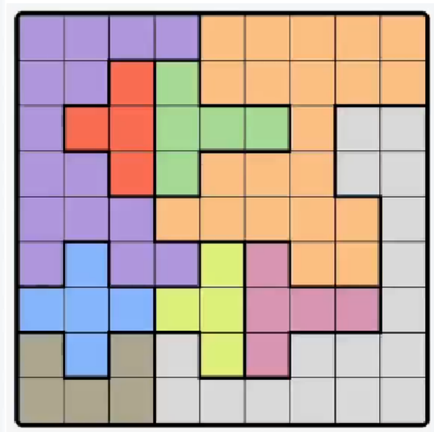
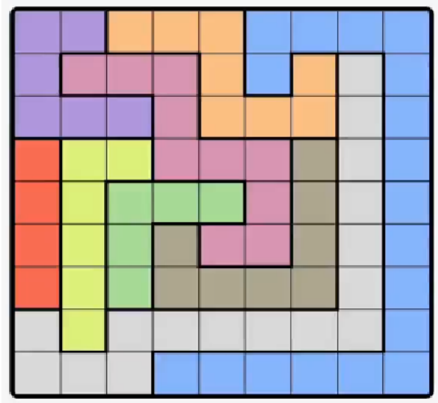
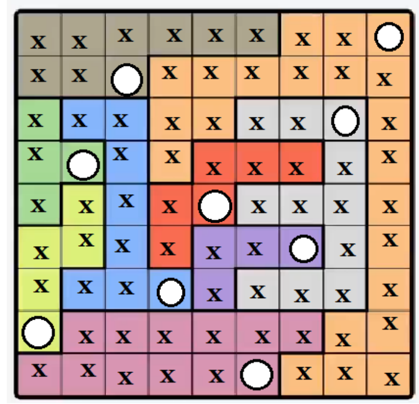
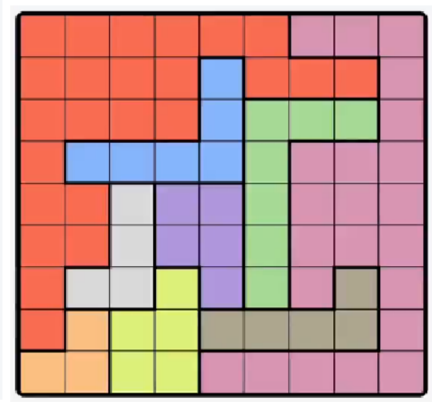
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Pouvez vous compléter ?

Finalement huit équations pour huit inconnues.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

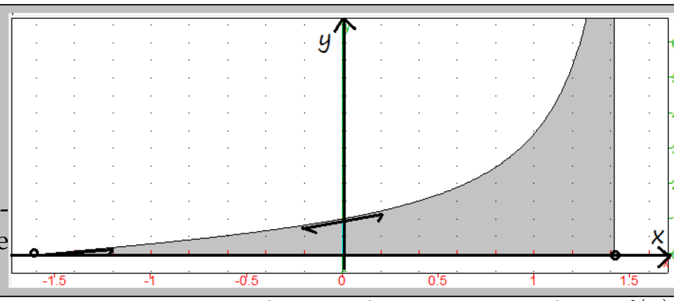
◁8▷



◃9▹

On pose $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
et $f = x \longmapsto \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.
Déterminez $f^{(n)}$ pour n de 0 à 3.
Justifiez que le graphe de f est celui indiqué ci contre (y compris limite et dérivée en $-\pi/2$).



I~0)

En tant que composée, f est de classe C^∞ et on peut commencer le travail, en écrivant plutôt $f(x) = (1+\sin(x)).\cos^{-1}(x)$.

A la première étape, la formule en $\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$ est d'usage légitime :

$f' = x \longmapsto \frac{\cos(x).\cos(x)+\sin(x).(1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$. On simplifie déjà en $\boxed{f' = \frac{1+\sin}{\cos^2}}$

Je l'ai écrit ici à l'étage des fonctions. Et un correcteur sanctionnera partiellement une réponse comme $f' = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$ qui mélange les étages.

On l'écrit $(1+s).c^{-2}$ et on redérive en $(0+c).c^{-2}+(1+s).(-2).(-s).c^{-3}$.

On réduit au dénominateur commun : $\frac{c^2+2.s.(1+s)}{c^3}$.

On reformule $f'' = x \longmapsto \frac{(1+s)^2}{c^3}$ On notera qu'on peut aussi écrire $f'' = x \longmapsto \frac{(1+s)^2}{c.(1-s).(1+s)}$ et même $f = \frac{c}{(1-s)^2}$ même si ça n'a aucun intérêt.

Comme on a lu la suite de l'énoncé, on se dit qu'une forme avec « seulement du sinus en haut » est la plus simple. On remplace donc chaque c^2 par $1-s^2$.

On redérive : $f^{(3)} = x \longmapsto \frac{c.2.(1+s)}{c^3} + (1+s)^2.\frac{(-3).(-s)}{c^4}$.

On réduit au dénominateur commun : $f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{c^2.2.(1+s)+(1+s)^2.3.s}{c^4}$.

On remplace les $\cos^2$ par $1-\sin^2$ et on trouve $\boxed{f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}}$

Ceux qui en sont à des choses en $\dfrac{2.(1+s)^1.c.c^3-3.(-s).c^2.(1+s)^2}{(c^3)^2}$ doivent être largués. Et surtout, ils doivent couper l'envie au correcteur de simplifier, comparer à la réponse simple attendue.

On simplifie et on synthétise dans un tableau :

$f^{(0)}(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
$\dfrac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))^2}{\cos^3(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}$

Le rapport du jury ne parle pas de tableau, mais avouez que pour le lecteur/correcteur, ce n'est pas mal.
Attention, pas de conclusion trop hâtive à partir des deux premières dérivées.

Rapport du jury : les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter vers une suppression des $\cos(x)$.

La dérivée de f est positive. f est donc croissante.
Quand x tend vers $\pi/2$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0, la fraction tend vers l'infini.

En 0, on a la valeur de la fonction et de sa dérivée.

En $-\pi/2$, on a une forme indéterminée, car numérateur et dénominateur tendent vers 0.
On pose « naturellement » : $x = -\dfrac{\pi}{2}+h$: $f\Big(h-\dfrac{\pi}{2}\Big) = \dfrac{1-\cos(h)}{\sin(h)}$ (trigonométrie)
on peut réagir en physicien : je connais mes développements limités

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\Big(1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)}{h} = \frac{h}{2}+o(h)$$

on identifie un prolongement par continuité par la valeur 0
et on a la demi tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$

on peut réagir en matheux : je connais ma trigonométrie :

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{2.\sin^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{h}{2}\right).\cos\left(\dfrac{h}{2}\right)} = \tan\left(\frac{h}{2}\right)$$

on peut prolonger par la valeur 0
et on a même l'équivalent $f\Big(h-\dfrac{\pi}{2}\Big) \sim_{h\to 0} \dfrac{h}{2}$

on peut réagir en élève astucieux : je pense à l'arc moitié

$$f(x) = \frac{1+\dfrac{2.t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2+2.t}{1-t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1-t).(1+t)}$$

avec $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$f(x) = \tfrac{1+t}{1-t} = \frac{1+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{x}{2}\right)$$

la fonction se prolonge en $-\frac{\pi}{2}$ sans effort et se dérive même

$$f'(x) = \frac{1}{2}.\Big(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big)$$

C'est une question de cours que j'ai ajoutée personnellement par rapport au sujet initial de seconde année.

Quand j'ai posé le problème en 2020, les réponse sur le fait que c'était le bon graphe étaient bien trop laconiques.
En gros, on me disait « beh oui, elle est croissante ». mais rien sur son asymptote verticale, sur sa valeur en $-$'pi/2, sur l'existence de tangentes.

Bref, pour vous un graphe c'est trois points bien placés sur le dessin (approche rapide)
ou douze points bien placés (approché débilitante des tableaux de valeurs de seconde)

ou quatre cent points bien placés (approche numpy de la physique).

Non, c'est des tangentes, des asymptotes, bref, des résultats fins.

I∼1) Montrez qu'il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

On a l'existence des premiers polynômes : $P_0 = 1 + X$, $P_1 = (1 + X)^2$, $P_2 = (1 + X)^2$...

On suppose, pour un n quelconque donné, que P_n existe vérifiant $\forall x,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.
On redérive pour montrer que P_{n+1} existe, en le construisant :
$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos(x).P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} + P_n(\sin(x)).\dfrac{-(n+1).(-\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.
On réduit au dénominateur commun :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^2(x).P_n'(\sin(x)) + (n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

On remplace :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-\sin^2(x)).P_n'(\sin(x)) + (n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

On définit alors $\boxed{P_{n+1} = (n+1).X.P_n(X) + (1-X^2).P_n'}$
Il existe.
Et c'est un polynôme.
Et il vérifie $\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

L'essentiel de la récurrence est l'EXISTENCE. Et pas forcément la formule. Chaque chose en son temps.
Déjà, les variables. Et ensuite, on met en route l'autre partie du cerveau : le côté physicien qui calcule.
Et ce n'est pas une insulte. C'est juste l'ordre des priorités de vos raisonnements.

Cela dit, la formule encadrée permet de les calculer de proche en proche. Et si on est en devoir à la maison, on a le temps de vérifier la cohérence de P_1, P_2 et P_3.

Rapport du jury : Confusion fréquente entre $P(\sin(x))$ et $P \times \sin(x)$.
On remarque une maladresse à passer des polynômes en $\sin(x)$ à des polynômes en X.

La formule $P_{n+1} = (n+1).X.P_n(X) + (1-X^2).P_n'(X)$ que l'on a écrite pour prouver l'existence des P_n au sein d'une récurrence va servir maintenant pour des récurrences.
P_0 est le polynôme $1 + X$, de degré 1, unitaire à coefficients positifs.
Pareil pour P_1.

I∼2) Montrez que pour tout n, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Supposons pour un n donné que P_n est unitaire de degré n à coefficients entiers positifs.
Alors $(n+1).X.P_n(X) + (1-X^2).P_n'(X)$ est une somme de polynômes à coefficients entiers. C'est un polynôme à coefficients entiers.
Mais unitaire ? Et coefficients positifs ? Il y a quand même un $1 - X^2$ qui introduit un signe moins.

On écrit $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k.X^k$ ou même $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.X^k$ avec $a_n = 1$.

On calcule $P_n' = n.X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$

$$-X^2 P_n' = -n.X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$$

$$(n+1).X.P_n(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n+1).a_k.X^{k+1}$$

On somme : $P_{n+1}(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1).a_k.X^{k+1} + n.X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1} - n.X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$.

Déjà le terme en X^{n+1} est le terme de plus haut degré
a pour coefficient $(n+1)-n$ ce qui fait 1.
Le nouveau polynôme est unitaire.
Le coefficient de X^{k+1} est ensuite $(n+1).a_k - k.a_k$ issu des sommes « naturelles »
$(k-2).a_{k-2}$ issue de la somme décalée $\sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$ $(k \geqslant 2)$
Cette somme est positive. Chaque coefficient de $P_{n+1}(X)$ est positif ou nul.

Rapport du jury : Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

Ah oui, combien d'élèves ne lisent pas la question en entier, se contentent de « c'est un polynôme » quand il est demandé « polynôme à coefficients entiers ».
On dirait que vous êtes resté au collège où on vous mâche le travail « polynôme, puis polynôme à coefficients entiers, puis polynôme à coefficients entiers positifs ».

I∼3) Montrez : pour tout x : $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$.

La relation $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$ est un cadeau. Il suffit de calculer... Mais elle est là pour préparer la suite.

I∼4) Pour tout n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Montrez : $2.\alpha_1 = (\alpha_0)^2 + 1$ et $2.\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}$.
On pourra démontrer pour tout couple de fonctions $(u,\ v)$: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ (ou l'utiliser directement si il a été vu en cours), puis l'appliquer à u et v bien choisies.

On l'applique en 0 : $2.f'(0) = 1 + (f(0))^2$. Et avec nos notations, c'est $2.\alpha_1 = 1 + (\alpha_0)^2$! justement !

Maintenant, comme on sait que f est de classe C^∞, on peut dériver n fois la relation $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$ vraie en tout point.
La formule de Leibniz donne $2.(f')^{(n)} = 0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}.f^{(n-k)}$ (à l'étage des fonctions).
n est dans $\mathbb{N}^*$ pour que la dérivation de 1 donne 0.
On applique en 0 : $2.f'^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}(0).f^{(n-k)}(0)$.
Et avec nos notations, c'est $\boxed{\alpha_{n+1} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}}{2}}$ (on sait que ce sera quand même un entier car P_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$).

Rapport du jury : Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

Là, ce n'est pas moi qui le dis. Mais presque une fois par semaine, c'est moi qui le dis.

I∼5) Écrivez un script `Python` qui prend N en entrée et calcule les α_n pour n de 0 à N.

Pour calculer des termes consécutifs, c'est la formule ci dessus qui va servir. On va créer une liste qu'on va allonger peu à peu, en créant le nouveau terme comme somme.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S = 0
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += binomial(n,k)*L[k]*L[n-k]
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

Et on aura crée une procédure pour calculer les coefficients binomiaux :

```
def Binomial(n, k) :
....if k == 0 :
........return(1)
....return((n-k+1)*binomial(n,k)//k)
```

Et voici les premières valeurs
[1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981, 1903757312]

En fait le mieux serait de les construire pas à pas dans la somme, plutôt que de tout reprendre à chaque fois.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S, bin = 0, 1 #la somme et le binomial
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += bin*L[k]*L[n-k]
............bin = bin*(n-k)//(k+1) #actualisation du coefficient binomial
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

C'est moi qui ai ajouté cette question Python... Le sujet (filière P.C.) n'osait pas en demander. Je trouve cela dommage.

II∼0) Montrez pour tout n et tout $x$de $I \cap \mathbb{R}^+$: $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$ (indication : Taylor).

Dans $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$, le premier membre ressemble vraiment à un développement de Taylor entre 0 et x.
f est de classe suffisante pour écrire

$$f(0+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$$

On comprend qu'il suffit de montrer que le reste intégrale $\frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$ est positif.

Comme x est positif, le terme $\frac{x^{n+1}}{n!}$ l'est aussi.

Ensuite, dans l'intégrale, $(1-t)^n$est positif, et $\frac{P_{n+1}(\sin(t.x))}{(\cos(t.x))^{n+1}}$ est positif.

En effet, $\sin(t.x)$ et $\sin(t.x)$ sont positifs car $t.x$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Et le polynôme P_{n+1} est à coefficients positifs (question en fin de partie précédente).
La combinaison $P_{n+1}(\sin(t.x))$ est positive.

<u>Rapport du jury :</u> Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégrale. certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que P_n est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

II∼1) Déduisez que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ la série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ converge vers une somme qu'on notera $g(x)$ (c'est à dire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$).

Rappel : on appelle série de terme général a_n la suite (A_N) définie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Ici, croissez et majorez.

La série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ est croissante.

En effet, quand on calcule la différence de deux sommes partielles $\sum_{n=0}^{N+1} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$, il reste $\frac{\alpha_{N+1}}{(N+1)!}.x^{N+1}$ qui est positif comme on l'a dit dans la positivité du reste dans la formule de Taylor.

La suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n\right)_N$ est croissante, majorée (le majorant $f(x)$ ne dépend pas de N, c'est bon).
Elle converge.

La grande naïveté serait de dire « elle converge vers $f(x)$ juste parce que c'est le majorant proposé. Mais il est peut être trop large !
Une suite majorée par 4 ne converge pas forcément vers 4, elle peut converger vers e ou π ou n'importe quoi encore.
Bon, certes, ici, on montrera que c'est encore vers le majorant trouvé dans l'énoncé que la série va converger...

II$\sim$2) On admettra que l'on peut (sous des conditions ici validées) dériver $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ comme une limite de sommes (alors qu'il s'agit d'une limite de sommes) et permuter les sommes doubles (familles sommables). Montrez $2.g'(x) = 1 + (g(x))^2$.

On dérive formellement : $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.k.x^{k-1}$ (en ne commençant qu'au terme d'indice 1 puisque le terme constant a une dérivée nulle).

On décale les indices et simplifie la factorielle : $2.g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2.\alpha_{n+1}}{n!}.x^n$.

On développe ensuite le carré : $g(x).g(x) = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{i!}.x^i\Big).\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{j!}.x^j\Big)$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{\alpha_i.\alpha_j}{i!.j!}.x^{i+j} \text{ en écrivant une double somme}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{(i+j)!}{i!.j!}\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en forçant la main}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en voyant le binomial}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{n} \Big(\sum_{i+j=n} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j\Big).\frac{x^n}{n!} \text{ en regroupant par exposant}$$

c'est ce qu'on appelle le « produit de Cauchy »

On reconnaît alors la formule qui calcule de proche en proche les α_i : $(g(x))^2 = \sum_n \alpha_{n+1}.\frac{x^n}{n!}$.

II$\sim$3) Déduisez $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

f et g sont définies au moins sur le même domaine,

vérifient la même équation différentielle $2.y' = 1 + (y^2)$

vérifient la même condition initiale

elles sont donc égales dira le physicien, et même le mathématicien qui dispose du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et unicité des solutions d'équations différentielles.

Rapport du jury : Oubli fréquent : « la même condition initiale ».

Mais en fait, il y a une solution propre, niveau Sup.
On définit $F = x \longmapsto Arctan(f(x)$ et $G = x \longmapsto Arctan(g(x))$.
On les dérive : $F' = x \longmapsto \frac{f'(x)}{1+(f'(x))^2}$ et $G' = x \longmapsto \frac{g'(x)}{1+(g'(x))^2}$.

La coïncidence des équations différentielles donne $F' - G' = 0$.
On intègre de 0 à x : $F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$ (mille fois plus propre et rigoureux que $F(x) - G(x) = C^{te}$ qui n'a de sens qu'en amphi de physique).
Or, $F(0) = G(0)$, donc pour tout x, $F(x) = G(x)$ (mille fois plus judicieux que de dire « et ensuite je détermine la constante en 0).

III$\sim$0) Montrez que la seule application à la fois paire et impaire est $x \longmapsto 0$.

Prenons une fonction ϕ à la fois paire et impaire. On traduit : $\forall x,\ f(x) = f(-x)$
$\forall x,\ f(-x) = -f(x)$

On met bout à bout : $\forall x,\ f(x) = -f(x)$.
On arrange : $\forall x,\ 2.f(x) = 0$.
L'application f est nulle.
Et bien sûr, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Les fonctions constantes sont paires, mais seule la constante nulle est aussi impaire.

III∼1) Déduisez, par analyse et synthèse, que pour toute application ϕ de I dans $\mathbb{R}$ il existe un unique couple $(p,\ i)$ avec p paire et i impaire vérifiant $\phi = p + i$.
Précisez qui sont p et i dans les cas $\phi = x \longmapsto 3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$
$\phi = x \longmapsto e^x$
$\phi = x \longmapsto \cos(x - \varphi_0)$ pour φ_0 fixé

Pour prouver qu'une application quelconque ϕse décompose en somme « paire plus impaire », on va raisonner par analyse et synthèse. L'analyse nous permettra de dire « si il y a une décomposition, ce ne peut être que » et la partie synthèse dira « oui, et c'est bien une décomposition ».

Donc, je triche et je vous donne tout de suite la décomposition : $\phi = \Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\Big) + \Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\Big)$.

On confirme : cette somme donne bien ϕ.

l'application $\Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\Big)$ est bien paire : $\dfrac{\phi(-x)+\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$

l'application $\Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\Big)$ est bien impaire : $\dfrac{\phi(-x)-\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}$

Maintenant, l'analyse, parce que sinon, vous allez me dire « mais comment on pouvait deviner ça ? ».
facile. Supposons que p et i existent vérifiant $\phi = p + i$.
On a alors $\phi(x) = p(x) + i(x)$
$\phi(-x) = p(-x) + i(-x)$
$\phi(-x) = p(x) - i(x)$ par parité et imparité

On combine première et dernière ligne, et on trouve $p(x) = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$.

Cette étape d'analyse prouve l'unicité de la décomposition (si elle existe, on n'a pas le choix) et nous souffle à l'oreille laquelle proposer et vérifier.

Mais à quoi servait la question « la seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle » ?

A faire une question « de cours ».

A permettre devoir l'unicité par ce biais : si f admet deux décompositions $\phi = p_1 + i_1$ et $\phi = p_2 + i_2$, alors on a $p_2 - p_1 = i_1 - i_2$.
Cette différence est donc à la fois paire (c'est $p_2 - p_1$) et impaire (c'est $i_1 - i_2$).
Elle est donc nulle.
Et on a donc $p_1 = p_2$ et $i_1 = i_2$.

Mon énoncé demandait des décompositions, il suffisait de les proposer :

fonction	paire		impaire
g$3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$	$= 3.x^4 + 4.x^2 - 1$	$+$	$5.x^3 + 2.x$
e^x	$= ch(x)$	$+$	$sh(x)$
$\cos(x - \varphi_0)$	$= \cos(\varphi_0).\cos(x)$	$+$	$\sin(\varphi_0).\sin(x)$

et vérifier... (synthèse)

III∼2) Montrez aussi : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et $\dfrac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$.

On a montré : $f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{k!}.x^k$.

On décompose alors f en « paire+impaire » sous chacune des deux formes.

$\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$		$\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{k!}.x^k$	
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$+\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sum_{k\ pair} \dfrac{\alpha_k}{k!}.x^k$	$+ \sum_{k\ impair} \dfrac{\alpha_k}{k!}.x^k$

Par unicité de la décomposition, on peut identifier :

paire	$\dfrac{1}{\cos(x)} = \sum_n \dfrac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$
impaire	$\tan(x) = \sum_n \dfrac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Mais au fait, qu'est ce qui dit que $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ et $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ sont bien les parties paire et impaire de f ?
Est ce juste parce que les exposants sont respectivement pairs et impairs ?
C'est tentant. ; et sinon, $\sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.(-x)^{2.n} = \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$
et $\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.(-x)^{2.n+1} = -\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Rapport du jury : Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formes attendues.

III~3) Pour tout entier naturel n, exprimez $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On peut ensuite identifier $\tan(x) = \sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et l'écrire même $\tan(x) = \sum_k \frac{A_k}{k!}.x^k$ avec $A_k = 0$ si k pair et $A_k = \alpha_{2.n+1}$ si k impair de la forme $2.n+1$.
On identifie avec la formule de Taylor (ou on dérive plein de fois et on calcule en 0) : $\tan^{(k)}(0) = A_k$.
Pour k pair, $\tan^{(k)}(0) = 0$
Pour k impair (de la forme $2.n+1$) : $\tan^{(k)}(0) = \tan^{(2.n+1)}(0) = \alpha_{2.n+1}$.

Rapport du jury : Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment n ou $2n+1$ dans la même égalité.

III~4) Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

La formule $\tan' = 1 + \tan^2$.
On lui applique la formule de Leibniz : $\tan^{(2.n+1)} = 0 + \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}.\tan^{(2.n-j)}$.
On l'applique en 0 : $\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}(0).\tan^{(2.n-j)}(0)$.
Ne restent que les termes d'indice impair dans le membre de droite (les dérivées d'indices pairs de la fonction sont nulles en 0) :

$$\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\tan^{(2.k-1)}(0).\tan^{(2.n-2.k+1)}(0)$$

C'est la formule souhaitée.

Rapport du jury : Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec Q5 » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de Q5.

◁0▷ Calculez $\int_{u=0}^{1} \frac{du}{2+\sqrt{1-u^2}}$ (vous pourrez poser $u = \sin(\theta)$ et ensuite $t = \tan(\theta/2)$).

L'existence ne pose pas de problème, et le cours nous enjoint à poser $t = \sin(\theta)$ pour simplifier ensuite $\sqrt{1-\sin^2}$.
Mais en fait, non, $t = \sin(\theta)$ est ambigu. On va poser $\theta = Arcsin(t)$ qui définit θ dans le bon intervalle pour avoir le cosinus positif.
L'intégrale devient $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta).d\theta}{2+\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta).d\theta}{2+\cos(\theta)}$.
Notre ami Bioche n'a pas grand chose à dire, à part $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ou plutôt $\theta = 2.Arctan(t)$.

L'intégrale devient cette fois $\int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$ et même $2.\int_0^1 \frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)}.dt$.

On décompose $\frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)}$ en éléments simples.

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)} = \frac{a.t+b}{3+t^2} + \frac{c.t+d}{1+t^2}$$

Il faut déterminer quatre constantes, alors que le dénominateur est de degré 4, c'est cohérent.
On a besoin de $\frac{a.t+b}{3+t^2}$ et pas juste de $\frac{b}{3+t^2}$ car après tout, on doit pouvoir intégrer avec des termes en log.
On a besoin de $\frac{c.t+d}{1+t^2}$ et pas juste de $\frac{d}{1+t^2}$ car il va venir d'une décomposition sur $\mathbb{C}$en $\frac{\alpha}{t+i} + \frac{\beta}{t-i} = \frac{(\alpha+\beta).t+(-\alpha.i+\beta.i)}{1+t^2}$.

On décompose en se disant qu'en fait, on a juste $t^2 = T$:

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)} = \frac{1-T}{(3+T).(1+T)} = \frac{-2}{3+T} + \frac{1}{1+T} = \frac{-2}{3+t^2} + \frac{1}{1+t^2}$$

On peut intégrer en arctangentes et trouver finalement $\boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{2.\sqrt{3}.\pi}{9}}$

◁1▷ Calculez $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}.d\theta$ en posant $u = \sqrt{\tan(\theta)}$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}.d\theta$ pose un petit problème en $\pi/2$, mais on va intégrer jusqu'à a et on le fera tendre vers $\frac{\pi}{2}$ ensuite (oui, par valeur inférieure).
On pose donc $u = \sqrt{\tan(\theta)}$ et $\theta = Arctan(u^2)$. On dérive : $du = \frac{2.u.du}{1+u^4}$.
On doit alors calculer $\int_0^{\alpha} \frac{2.u^2}{1+u^4}.du$.
Il faut décomposer en éléments simples :

$$1+X^4 = X^4+2.X^2+1-2.X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}.X)^2 = (X^2-\sqrt{2}.X+1).(X^2+\sqrt{2}.X+1)$$

On doit donc trouver quatre constantes : $\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{a.X+b}{X^2-\sqrt{2}.X+1} + \frac{a'.X+b'}{X^2+\sqrt{2}.X+1}$.
Il n'est pas absurde de réduire au dénominateur commun et résoudre le système :

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Big(\frac{X}{X^2-\sqrt{2}.X+1} - \frac{X}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)$$

On intègre ensuite en créant artificiellement les logarithmes :

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1} - \frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big) + \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{X^2-\sqrt{2}.X+1} + \frac{1}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)$$

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1} - \frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big) + \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{\Big(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Big(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}}\Big)$$

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1} - \frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big) + \frac{1}{4}.\Big(\frac{2}{\Big(2.X-\sqrt{2}\Big)^2+1} + \frac{2}{\Big(2.X+\sqrt{2}\Big)^2+1}\Big)$$

Entre 0 et l'infini, les termes en logarithmes se simplifient ensemble. les termes en arctangente s'accumulent et il reste

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(\theta)}.d\theta = \int_0^{+\infty}\frac{2.t^2}{1+t^4}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{2}}$$

◁2▷ Montrez, par récurrence sur n, pour f et g dérivables autant de fois qu'on veut : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}$.
En appliquant ce résultat à $f = x \longmapsto 1+x^2$ et $g = Arctan'$, montrez :
$(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$.

La première formule est la formule de Leibniz.
Elle commence à $n = 0$ en écrivant $(f.g)^{(0)} = f.g = 1.f^{(0)}.g^{(0)}$.
Mais je préfère à $n = 1$: $(f.g)^{(1)} = f'.g + f.g' = 1.f^{(1)}.g^{(0)} + 1.f^{(0)}.g^{(1)}$.

Supposons la formule vraie à un rang n quelconque donné, et prouvons la au rang $n+1$ en re-dérivant :

$$(f.g)^{(n+1)} = \Big((f.g)^{(n)}\Big)' = \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\Big(f^{(n-k)}.g^{(k)}\Big)'$$

On sépare en deux sommes :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k+1)}$$

On ré-indexe la seconde :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{p-1}.f^{(n+1-p)}.g^{(p)}$$

On fusionne les deux sommes en vérifiant qu'aux rangs 0 et $n+1$ tout est cohérent quand même :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big).f^{(n-k+1)}.g^{(k)}$$

La formule de Pascal permet de reconnaître $(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)}$. La formule est validée à tout ordre.

Prenons $f = x \longmapsto 1+x^2$ et $g = Arctan'$.
Mais c'est trop bête, leur produit est $x \longmapsto 1$.C'est une fonction constante.
Quand on va la dériver n fois, il ne va rien rester : $(f.g)^{(n)} = (x \longmapsto 0)$.

Mais sinon, quand on dérive trop f il ne reste rien non plus :

$f^{(0)}(x) = 1+x^2$	$f^{(1)}(x) = 2.x$	$f^{(2)}(x) = 2$	pour $k \geqslant 3$: $f^{(k)}(x) = 0$

On peut arrêter la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}.g^{(n-k)}$ à $k = 2$.
Il reste d'un côté 0 et de l'autre $\binom{n}{0}.(1+x^2).g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}.2.x.g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}.2.g^{(n-2)}(x)$.
On remplace les binomiaux par leur valeur, et $g^{(k)}$ par $Arctan^{(k+1)}$ et c'est la bonne formule.

◁3▷ ♡ On pose $f = x \longmapsto x^3.e^{2.x}$. Calculez rapidement $f^{(n)}(1)$.

Formule de Leibniz : $f^{(n)}(x) = x^3.2^n.e^{2.x} + \binom{n}{1}.3.x^2.2^{n-1}.e^{2.x} + \binom{n}{2}.6.x.2^{n-2}.e^{2.x} + \binom{n}{3}.6.2^{n-3}.e^{2.x}$.
On calcule en 1 : $(n^3+3.n^2+8.n+8).2^{n-3}.e$.

◁4▷ Calculez $\sum_{n=0}^{2017}\Big(\sum_{k=0}^{n}z^k\Big)$ pour tout complexe z différent de 1.

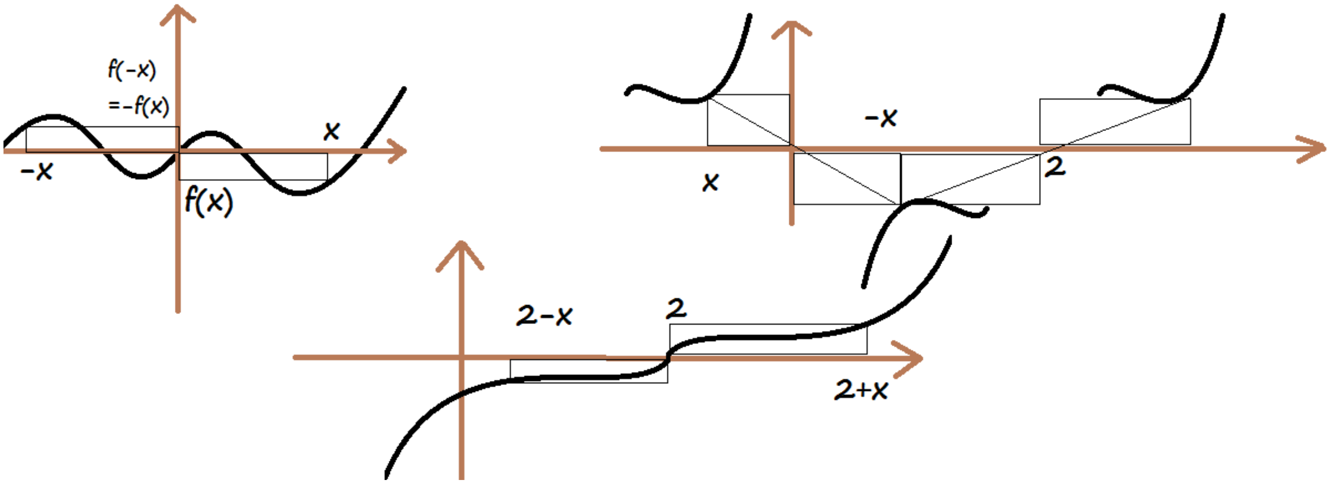
$$\sum_{n=0}^{2017}\Big(\sum_{k=0}^{n}z^k\Big) = \sum_{n=0}^{2017}\Big(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\Big) = \frac{1}{1-z}.\Big(\sum_{n=0}^{2017}1 - \sum_{n=0}^{2017}z^{n+1}\Big)$$

$$\sum_{n=0}^{2017}\Big(\sum_{k=0}^{n} z^k\Big) = \sum_{n=0}^{2017}\Big(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\Big) = \frac{2018}{1-z} - \frac{z-z^{2019}}{(1-z)^2}$$

◁5▷ ♡ Montrez que si $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(2+x)$ (notée g) sont impaires, alors f est périodique.

f impaire, c'est $\forall x,\ f(-x) = -f(x)$.
$g = x \longmapsto f(x+2)$ est impaire, c'est $\forall x,\ g(-x) = -g(x)$ et en remplaçant : $\forall x,\ f(-x+2) = -f(x+2)$.

Ici, le graphe de f a deux centres de symétrie : le point $(0,0)$ et le point $(2,\ 0)$.
Et graphiquement, ceci donne (en les mettant bout à bout) une période.
Proprement, et même sans intuition :
$f(x+4) = f((x+2)+2) = -f(-(x+2)+2) = -f(-x) = -(-f(x)) = f(x)$.
Imparable. Mais on se retrouve parfois à tourner en rond avant d'y arriver.



◁6▷ Pour tout entier naturel on pose : $f_n = x \longmapsto x^n.e^{1/x}$. Calculez $(f_n)^{(n+1)}$ pour n de 0 à 3. Émettez une conjecture.
Montrez : $(f_{n+1})' = (n+1).f_n - f_{n-1}$. Démontrez votre résultat par récurrence sur n.
φ est une application de classe C^∞. Pour tout n on définit $h_n = x \longmapsto x^n.h\Big(\frac{1}{x}\Big)$. Calculez $(h_n)^{(n+1)}$ en utilisant au bon moment la formule de Leibniz.

Un classique souvent posé avec juste la dernière question.
Posé à l'oral, il permet pour moi de voir qui a bien compris comment raisonner, et qui cafouille encore.
n intervient à deux endroits dans le x^n de la fonction
et dans le $f^{(n)}$ de l'ordre de dérivation.
La récurrence ne peut donc pas porter juste sur le nombre de dérivation d'une fonction.

On dérive deux fois $x \longmapsto x.f\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

trois fois $x \longmapsto x^2.f\Big(\frac{1}{x}\Big)$

quatre fois $x \longmapsto x^3.f\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

Mais on devra dériver $n+1$ fois $x \longmapsto x^n.f\Big(\frac{1}{x}\Big)$, et on ne saura guère de choses de sa dérivée première, seconde, troisième... juste la $+1^{ieme}$.

Et il faudra relier $\Big(x \longmapsto x^{n-1}.f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)^{(n)}$ à $\Big(x \longmapsto x^n.f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)^{(n+1)}$

et pas $\Big(x \longmapsto x^{n-1}.f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)^{(n)}$ à $\Big(x \longmapsto x^{n-1}.f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)^{(n+1)}$

◁7▷ Calculez $(\sin^3)^{(10)}(0)$ et $(\sin^3)^{(11)}(0)$.

Comment interpréter $(\sin^3)^{(10)}(0)$? C'est déjà là dessus qu'on va vous juger.
Entrons à l'intérieur de la formule : $\sin^3$ est une fonction (c'est $x \longmapsto \sin^3(x)$).
Les parenthèses en l'air disent qu'on va la dériver dix fois.
Et le (0) dit qu'on va calculer cette dérivée dixième en 0.
C'est comme $f^{(n)}(a)$ avec $a = 0$, $n = 10$ et $f = \sin^3$ quoi !

Maintenant, c'est un exercice sur la formule de Leibniz ? Mais avec trois termes ?

Non, c'est déjà un exercice de trigonométrie.
On va linéariser $\sin^3$ pour la rendre facile à dériver.

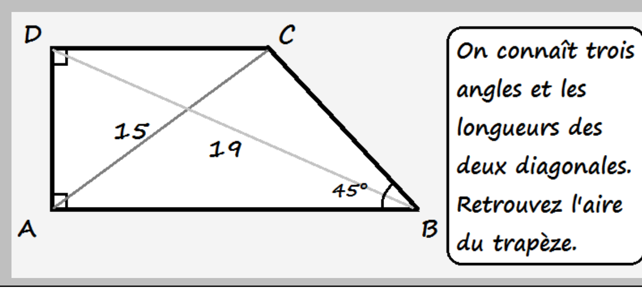
$$\sin^3(x) = \Big(\frac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2.i}\Big)^3 = \frac{e^{3.i.x} - e^{-3.i.x} - 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x}}{8.i^3} = \frac{3.\sin(x) - \sin(3.x)}{4}$$

On va pouvoir dériver autant de fois qu'on veut :

$f(x) =$	$\frac{3.\sin(x)}{4}$	$-\frac{\sin(3.x)}{4}$
$f'(x) =$	$\frac{3.\cos(x)}{4}$	$-\frac{3.\cos(3.x)}{4}$
$f''(x) =$	$-\frac{3.\sin(x)}{4}$	$+\frac{9.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(3)}(x) =$	$-\frac{3.\cos(x)}{4}$	$+\frac{27.\cos(3.x)}{4}$
$f^{(4)}(x) =$	$\frac{3.\sin(x)}{4}$	$-\frac{81.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(10)}(x) =$	$-\frac{3.\sin(x)}{4}$	$+\frac{3^{10}.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(11)}(x) =$	$-\frac{3.\cos(x)}{4}$	$+\frac{3^{11}.\cos(3.x)}{4}$

On calcule en 0 : $f^{(10)}(0) = 0$ (normal pour une application impaire
$f^{(11)}(0) = \frac{3^{11} - 3}{4}$

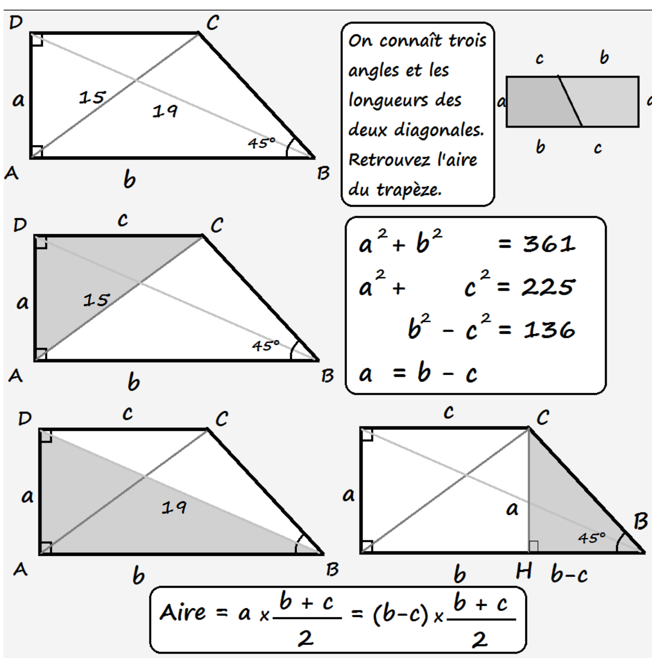
Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de
$\prod_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$.

◁8▷

Les deux exercices sont sans rapport.
C'est juste pour la mise en page.



On commence par nommer a, b et c les longueurs des trois côtés deux à deux orthogonaux.
Dans le triangle rectangle (DAB), on a $a^2 + b^2 = 19^2$.
Dans le triangle rectangle (CDA), on a $a^2 + c^2 = 15^2$.
On soustrait : $(b - c).(b + c) = 136$.

Mais le demi-carré (CHB) (ou triangle rectangle iso-demi-sel) nous renseigne : $a = b - c$.

Or, l'aire d'un trapèze est « hauteur fois moyenne des bases ».
C'est donc ici $a.\frac{b+c}{2}$. Ce qui fait $(b - c).\frac{b+c}{2}$.
En regroupant $\boxed{Aire = 68}$ (unité ?)

Déjà, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{16}{k}$ vaut 2^{16} (développement de $(1+1)^{16}$ par la formule du binôme). L'exposant de 13 est donc 0.

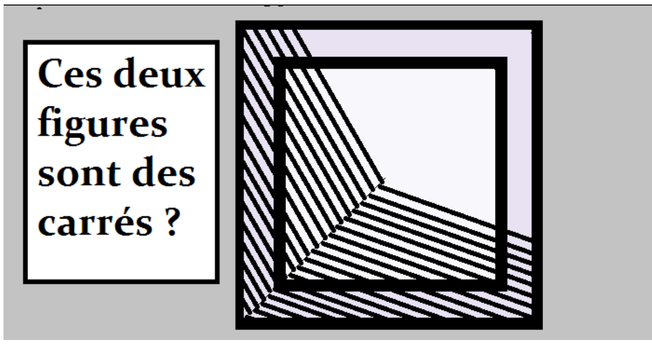
Regardons ensuite ce produit de $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$:

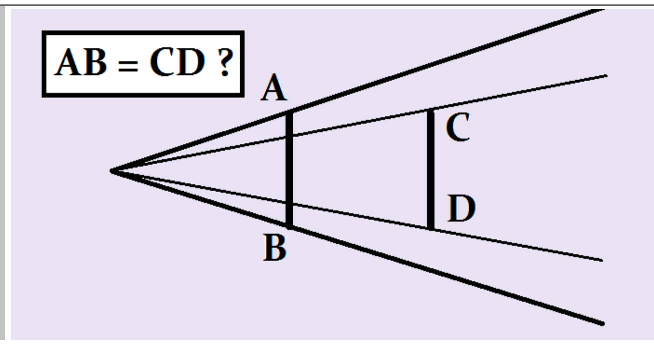
$$\frac{16!}{16!.0!}.\frac{16!}{15!.1!}.\frac{16!}{14!.2!}.\frac{16!}{13!.3!}.\frac{16!}{12!.4!}.\frac{16!}{11!.5!}.\frac{16!}{10!.6!}.\frac{16!}{9!.7!}.\frac{16!}{8!.8!}.\frac{16!}{7!.9!}.\frac{16!}{6!.10!}.\frac{16!}{5!.11!}.\frac{16!}{4!.12!}.\frac{16!}{3!.13!}.\frac{16!}{2!.14!}.\frac{16!}{1!.15!}.\frac{16!}{0!.16!}$$

Dans cette énumération, ne regardons que les termes contenant un facteur 13 (et jamais plus de toutes façons) :

$$\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}$$

On compte : dix sept au numérateur
huit au dénominateur.
Notre produit contient exactement 17^9 (et c'est même $2^{49}.3^6.5^9.7^8.11^5.13^9$).





◁9▷ ♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C.
Exprimez A comme combinaison de B et C.

Une bonne fois pour toutes : $A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$. C'est toujours vrai.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2+b.c & b.(a+d) \\ c.(a+d) & b.c+d^2 \end{pmatrix} \end{matrix} = (a+d).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a.d-b.c).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la formule de Hamilton et Cayley. Et elle admet une généralisation en taille n sur n, mais évidemment avec n termes, et c'est le polynôme caractéristique qui revient.

On développe

$$B.C = (A - 2.I_2).(A - 5.I_2) = A^2 - 2.A - 5.A + 10.I_2 = 0_{2,2}$$

et de même $C.B = 0_{2,2}$.
B et C sont permutables mais en plus, les produits seront nuls.

$B^2 = A^2 - 4.A + 4.I_2$ car A et I_2 commutent.

$$B^2 = (7.A - 10.I_2) - 4.A + 4.I_2$$

$$B^2 = 3.A - 6.I_2$$

$$B^2 = 3.B$$

De même $C^2 = A^2 - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = (7.A - 10.I_2) - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = -3.A + 15.I_2$
$C^2 = (-3).C$

	B	C
B	$3.B$	$0_{2,2}$
C	$0_{2,2}$	$-3.C$

On combine ensuite $B = A - 2.I_2$ avec $C = A - 5.I_2$ pour arriver à $A = \dfrac{5.B - 2.C}{3}$.
On peut appliquer la formule du binôme car B et C sont permutables (de même que $\dfrac{5}{3}.B$ et $\dfrac{-2}{3}.C$).
On obtient a priori $n+1$ termes : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \left(\dfrac{5}{3}.B\right)^{n-k} . \left(\dfrac{-2}{3}.C\right)^{n-k}$.
Mais il n'en reste que deux car $B.C$ et $C.B$ donnent la matrice nulle : $A^n = \left(\dfrac{5}{3}.B\right)^n + \left(\dfrac{-2}{3}.C\right)^n$ ($k = 0$ et $k = n$).
De plus, en mettant en boucle $B^2 = 3.B$, on obtient $B^n = 3^{n-1}.B$. Et de même $C^n = (-3)^{n-1}.C$.
Il reste cette fois $A^n = \dfrac{5^n}{3}.B + \dfrac{2^n}{3}.C$.
Et de fait, c'est encore la diagonalisation de A présentée d'une autre façon...

◁10▷ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 ayant pour trace 1 et pour déterminant 1 a pour puissance sixième I_2.

La formule de Cayley-Hamilton dit pour une matrice de taille 2 : $M^2 = Tr(M).M - \det(M).I_2$.
Sous nos hypothèses : $M^2 = M - I_2$ (Cayley)
$M^3 = M^2 - M$ (on multiplie par M)
$M^3 = (M - I_2) - M = -I_2$ (on remplace)
$M^3 = (-I_2)^2 = I_2$ (sans redescendre jusqu'aux coefficients)

◁11▷ Montrez pour toute matrice carrée de taille 2 sur 2 : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$.
Exprimez $\det(M)$ à l'aide de $(Tr(M))^2$ et $Tr(M^2)$.

Montrez qu'on n'a pas forcément pour M carrée de taille 3 sur 3 : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_3 = 0_{3,3}$.
Montrez, pour M carrée de taille 3 que $M^3 - Tr(M).M^2 + \dfrac{Tr(M)^2 - Tr(M^2)}{2}.M$ est un multiple de I_3(quel coefficient reconnaissez vous ?).

On prend M avec quatre coefficients $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calcule

M^2	$-Tr(M).M$	$+\det(M).I_2$	Total
$\begin{pmatrix} a^2+b.c & a.b+b.d \\ a.c+d.c & b.c+d^2 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} a^2+a.d & a.b+b.d \\ a.c+d.c & a.d+d^2 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} a.d-b.c & 0 \\ 0 & a.d-b.c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule

$Tr(M^2)$	$(Tr(M))^2$
$a^2 + 2.b.c + d^2$	$a^2 + 2.a.d + d^2$

et on a donc $\det(M) = a.d - b.c = \dfrac{(Tr(M))^2 - Tr(M^2)}{2}$
Et on peut rapprocher des formules de Viète.

Pour éviter les généralisations trop rapides, on montre qu'on n'a pas forcément $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_3 = 0_{3,3}$, ce n'est pas la peine de chercher en toute généralité. Un contre-exemple suffit.
Et ce contre-exemple, on le construit à l'aide d'une matrice assez simple.
Assez simple signifie qu'on va éviter de rempir avec dans l'ordre 1, 2, 3, 4 et ainsi de suite.
On va mettre un maximum de 0 (mais pas jusqu'à la matrice nulle ou la matrice unité).
Mais comme on ignore ce qu'est exactement le déterminant d'une matrice de taille 3, on va montrer avec une matrice bien choisie que même avec un coefficient , on n'a pas $M^2 - Tr(M).M + \lambda.I_3 = 0_{3,3}$.
On tente au hasard $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on calcule $M^2 - Tr(M).M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On aura beau y ajouter un multiple de I_3 on n'aura pas la matrice nulle $0_{3,3}$.

Il est temps de mettre neuf coefficients et de calculer la trace et les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

On ne garde que les trois termes diagonaux de la matrice M^2 et on trouve

$$\frac{(Tr(M))^2 - Tr(M^2)}{2} = a.b' + a.c'' + b'.c'' - a'.b - a''.c - b''.c'$$

Et dire qu'on va multiplier M par ça.

On calcule ensuite

$$Tr(M).M^2 = (a+b'+c'').\begin{pmatrix} a^2+b.a'+c.a'' & a.b+b.b'+c.b'' & a.c+b.c'+c.c'' \\ a.a'+b'.a'+a''.c' & a'.b+b'^2+b''.c' & a'.c+b'.c'+c'.c'' \\ a.a''+a'.b''+a''.c'' & a''.b+b'.b''+b''.c'' & c''^2+a''.c+b''.c' \end{pmatrix}$$

Ensuite, on compare les coefficiencts de $\begin{pmatrix} a^2+b.a'+c.a'' & a.b+b.b'+c.b'' & a.c+b.c'+c.c'' \\ a.a'+b'.a'+a''.c' & a'.b+b'^2+b''.c' & a'.c+b'.c'+c'.c'' \\ a.a''+a'.b''+a''.c'' & a''.b+b'.b''+b''.c'' & c''^2+a''.c+b''.c' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

avec ceux de

$$Tr(M).M^2 - \frac{(T(M))^2 - T(M^2)}{2}.M$$

déjà hors de la diagonale. On trouve qu'ils vont se simplifier.
Et sur la diagonale, il reste des termes, mais trois fois le même terme.
Et ce terme c'est $a.b'.c''+a'.b''.c+a''.b.c'-a.b''.c'-a'.b.c''-a''.b'.c$. C'est $\det(M)$.

Bref, on a bien la formule mais les calculs sont atrices.
Il faut souhaiter qu'il existe une preuve agréable.

Oui, elle existe, c'est l'agorithme de Fadeev.

◁12▷ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ *(notée M)* pour qu'elle ait même trace et même déterminant que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(notée T)*.
Calculez T^n pour tout n *(soit par récurrence, soit par* $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n$*)*. Calculez M^n.

$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour la trace puis $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ pour le déterminant.

On peut calculer T^npar récurrence, c'est loin d'être une faute de goût, et c'est même bien.
Mais on peut aussi utilise r la formule du binôme : $T^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n$ et les deux matrices sont permutables.

$$T^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-k}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

(on met l'exposant simple sur la matrice « compliquée »).
Mais dès que k a atteint ou dépassé 2, il ne reste rien de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$.

La somme se limite à deux termes : $T^n = 1.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + n.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1$.

On trouve $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n.2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

Et pour M^n ? On peut tenter de la diagonaliser. mais elle ne se diagonalise pas.
En effet, la seule matrice D possible serait $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. mais on ne eut pas avoir $M = P.(2.I_2).P^{-1}$ sans avoir tout de suite $M = I_2$, ce qui n'est pas le cas.

On peut tenter de rendre M semblable à T. Avec une matrice de passage P bien choisie.
On peut aussi tenter $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Les deux matrices commutent. Et $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-k}.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 + n.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1}.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n.2^{n-1}.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n.2^{n-1} & -n.2^{n-1} \\ n.2^{n-1} & 2^n + n.2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

◃13▹ Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 0 & \\ 3 & & 4 \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

Dans $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ e & 1 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ g & 0 & h \\ 3 & i & 4 \end{pmatrix}$, on donne des noms aux coefficients, et on résout de petites équations comme $1 + e = 2$.

On trouve finalement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

◃14▹ Quelle est la valeur du plus grand terme de $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018}$? (oui, on diagonalise)

On va calculer $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018}$ en diagonalisant. Disons le tout de suite :

Trace	Déterminant	Valeurs propres	Diagonale	Passage
-2	-3	1 et -3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Formule obtenue par récurrence : $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^{2018} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

On a quatre coefficients

$3 - (-3)^{2018}$	$\dfrac{(-3)^{2018} - 1}{2}$
$12 - 12.(-3)^{2018}$	$3.(-3)^{2018} - 2$

et le plus grand est $\boxed{3.(-3)^{2018} - 2}$

20314834051542953369733134720530847092601651327810912741336005906468015460620657655970658550755755596459
27206954432480413186166405878164110031288954170986733309264050445838468504498778699177789361771869614187
64567428099641648129655516267538794843266057792747557014699384722378084893999764382542357746920375242228
82127638656486898488816429728430946129470383142585463903695777055034475630726142621422862969391620078417
41637816483019030536893460148101171782562064520251485785859119437328196648101903890701482615485865832441
86571624887389810665913720330601826117915258468713158018130586298825043202449812443297973121759340911166
27150013227589101964352621718272239775254098670244245774859485142350819180229456542171563960510568477937
28422425953481621244536777888697666022911601660615917213688613387319271603000479001551126897575642846623
70632565476898320900521968470367377925134185011112343144991048603310014468837285143057275436645893662918
6286950719322952375577741465

◃15▹ ♡ La suite u est définie par u_0 donné et $u_{n+1} = 3.u_n - 2^n$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix}$ pour tout n. trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. Diagonalisez la. Calculez u_n pour tout n en fonction de u_0. Pour quels u_0 la suite reste-t-elle positive ?

$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.u_n - 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix}$ puis par récurrence évidente : $U_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On diagonalise $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Sans efforts : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On avait même sans effort : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 27 & -19 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ *et sincèrement, ce n'était pas dur de deviner, généraliser, prouver...*

On a donc $u_n = 3^n.u_0 + (2^n - 3^n)$.
Ou si on préfère $\boxed{u_n = 3^n.(u_0 - 1) + 2^n}$

Pour u_0 égal à 1, la suite est (2^n). Elle est positive.
Pour u_0 plus grand que 1, tous les termes sont positifs.
Pour u_0 plus petit que 1, $3^n.(u_0 - 1)$ l'emporte sur 2^n et la suite tend vers $-\infty$. Elle devient négative à partir d'un certain rang (en l'occurrence $-\dfrac{\ln(1 - u_0)}{\ln(3/2)}$).

◃16▹ ♡ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n. La formule obtenue est elle cohérente pour n négatif ?

Posons $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $I_3.N + N.I_3$: on aura le droit d'utiliser la formule du binôme.

Mais on a aussi $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que pour les puissances suivantes.

La formule du binôme n'a que trois termes :

$$(I_3 + N)^n = I_3 + \binom{n}{1}.N + \binom{n}{2}.N^2 + 0_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n.(n-1)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n.(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$ qu'on pouvait aussi prouver par récurrence sur n.

Pour n négatif, il n'y a pas de binomiaux, mais la formule $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n.(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$ peut être proposée :

M^{-1} est elle égale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$? On le vérifie en calculant le produit de M et de cette chose. On trouve I_3.
La formule est cohérente pour $n = -1$.

Et après ? Écrivons par exemple la formule pour $n = 10$ et pour $n = -10$. l'une est vraie et pour l'autre, on hésite :

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 55 & 10 & 1 \end{pmatrix} \; et \; M^{-10} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 45 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue le produit, pour vérifier. Il donne I_3. C'est donc bien qu'on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 45 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 55 & 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 45 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \left(M^{10}\right)^{-1}$ et on écrira $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 45 & -10 & 1 \end{pmatrix} = M^{-10}$.
On fait de même pour n quelconque. la formule est donc validée pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Et l'argument « beh non, car $\binom{-10}{1}$ n'existe pas » tombe à l'eau. Ce n'est pas parce que le chemin utilisé pour parvenir à la formule est bloqué que la formule est erronée.

◃17▹ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ mais pas leur somme ni leurs produits.

	Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	-1	$X^2 - 1$	$\{-1,\ 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	0	-1	$X^2 - 1$	$\{-1,\ 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	0	0	X^2	$\{0,\ 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	*
$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	-2	1	$X^2 + 2.X + 1$	$\{-1,\ -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*
$B.A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	-2	1	$X^2 + 2.X + 1$	$\{-1,\ -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*

Pourquoi $A + B$ n'est pas diagonalisable ? la seule matrice possible serait $D = 0_{2,2}$.
Mais alors on aurait $A + B = P.0_{4,4}.P^{-1} = 0_{4,4}$, et ça, c'est faux.

De même, pour $A.B$ la seule matrice possible est $-I_2$. Et on aurait $A.B = P.(-I_2).P^{-1} = -I_2$ et c'est faux.

Idée | Quand il y a une valeur propre en double, il y a comme un problème. La seule façon pour la matrice d'être alors diagonalisable (avec donc $D = \alpha.I_2$) est d'être déjà égale à I_2.

◃18▹ Se souvenant de la relation $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ l'élève Hirai du Bahu prétend : $Tr(A.B.C) = Tr(A.C.B)$ pour tout triplet $(A,\ B,\ C)$ de matrices de formats compatibles. Montrez qu'il a tort.

Un contre-exemple suffira.

On va au plus simple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A.B.C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Tr(A.B.C) = 1$
$A.C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A.C.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Tr(A.C.B) = 0$

Remarque : *En fait, on a $TR(A.B.C) = Tr((A.B).C) = Tr(C.(A.B)) = Tr(C.A.B)$. Mais on ne peut pas « faire passer C entre A et B ».*

On peut écrire les six permutations et les regrouper en deux familles

$Tr(A.B.C)$	$Tr(C.A.B)$	$Tr(B.C.A)$
$Tr(A.C.B)$	$Tr(C.B.A)$	$Tr(B.A.C)$

◃19▹ On a diagonalisé : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (formule $M = P.D.P^{-1}$). Donnez des diagonalisations de M avec une autre matrice diagonale D'.
Donnez des diagonalisations de M avec d'autres matrices de passage P'.
Diagonalisez M^2 et M^{-1} et ${}^tM$ (${}^tM$ c'est $\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$, on rappelle ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$).

Évidemment, si on change D il faut changer P.
Et on n'a guère le choix sur la matrice D puisque les valeurs propres sont imposées.
On prend donc l'autre matrice diagonale $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Comme les vecteurs propres ne changent pas, tout ce qui va changer, c'est l'ordre dans lequel on va les citer (dans P donc dans P^{-1}).

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Gardons la même matrice D. Les colonnes de toute matrice de passage seront faites de vecteurs propres. On peut prendre les mêmes, ou leurs opposés :

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ou leurs doubles $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

On a même la forme générale : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\alpha & 1.\beta \\ 3.\alpha & 2.\beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2/\alpha & -1/\alpha \\ -3/\beta & 2/\beta \end{pmatrix}$ avec α et $beta$ non nuls.

Pour M^2, on a juste $M^2 = P.D^2.P^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et il en est de même de toutes les puissances de M :

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Y compris $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : c'est la même matrice P, car si U est vecteur propre de M ($M.U = -3.U$), alors il est aussi vecteur propre de M^{-1} ($M^{-1}.U = \dfrac{U}{-3}$).

Sinon, on écrit $M = P.D.P^{-1}$ puis $M^{-1} = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1}$ en vertu de $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ qui figure dans le cours.

Enfin, en repartant de $M = P.D.P^{-1}$ et en transposant : ${}^tM = {}^t(P^{-1}).{}^tD.{}^tP$ (cette fois, c'est ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$).
La matrice D reste a même, mais il faut remplacer P par ${}^t(P^{-1})$ (d'inverse ${}^tP$).

$$\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il suffit de vérifier là encore.

Un exercice dont je regrette qu'on ne le trouve pas dans les livres...

◁ 20 ▷ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 8 sur 8, quel est le signe de chacun des termes suivants :
$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$.

$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$	$a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$	$a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{(1\,3\,6\,2\,5)} \circ \overrightarrow{(4\,7\,8)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,5)} \circ \overrightarrow{(2\,7\,8\,4\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,8)} \circ \overrightarrow{(2\,7)} \circ \overrightarrow{(3\,6)} \circ \overrightarrow{(4\,5)}$
$(-1)^4.(-1)^2$	$(-1)^2.(-1)^4$	$(-1)^1.(-1)^1.(-1)^1.(-1)^1$
signe plus	signe plus	signe plus

Un cycle de longueur n a juste besoin de $n-1$ transpositions, donc $n-1$ changements de signes.

◁ 21 ▷ Dans $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

$\begin{vmatrix} & & 12 & \\ & & & 27 \\ 35 & & & \\ & 9 & & \end{vmatrix}$ est bien présent dans le déterminant.

On veut son coefficient : $\begin{vmatrix} 12 & & & \\ & & & 27 \\ & & 35 & \\ & 9 & & \end{vmatrix}$ un signe moins

$\begin{vmatrix} 12 & & & \\ & 27 & & \\ & & 35 & \\ & & & 9 \end{vmatrix}$ un deuxième signe moins

Total : deux signes moins, ce qui fait un signe plus (signature de $\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$).

◁ 22 ▷ Calculez $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx$ (ça a l'air compliqué, mais pourtant...).

C'est quoi ce x^x ? C'est $e^{x.\ln(x)}$. Avec x positif *(ou nul ? oui on prolonge par continuité $x.\ln(x)$ tend vers 0 en 0)*.
Cette intégrale existe-t-elle ? On va se ramener à des distances finies :
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx = \int_1^a (1+\ln(x)).e^{-x.\ln(x)}.dx$.
Zéro effort ! C'est $u'.e^u$. On peut changer de variable si nécessaire avec $u = x.\ln(x)$.
On intègre explicitement en $\Big[-e^{-x.\ln(x)}\Big]_1^a$. On trouve $1 - \dfrac{1}{a^a}$.

On fait tendre a vers l'infini : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx = 1}$

Moi je l'aime cet exercice, avec son intégrale qui a l'air si atroce et qui est si simple au final.
Soit dit en passant, le logiciel de calcul formel Xcas (ou Maple) ne trouve pas la réponse si on ne lui souffle pas le changement de variable.

◁ 23 ▷ ♡ Si A est une matrice à coefficients complexes a_i^k, on note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_i^k}$ *(conjugué)*. Montrez : $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Montrez que $Tr({}^tA.\overline{A})$ est un réel positif. Que pouvez vous dire si il est nul ?

On transforme par exemple $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$.

On calcule $\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}}.\overline{a_2^{\sigma(2)}}\ldots\overline{a_n^{\sigma(n)}}$ (définition)

$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}}$ (conjugué du produit)

$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} \overline{Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}}$ (la signature est réelle, elle est son propre conjugué)

$\det(\overline{A}) = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}}$ (conjugué de la somme)

$\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

Le terme général de ${}^tA.\overline{A}$ est $c_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j.\overline{a_j^k}$ où α_i^j est le terme de ligne i et colonne j de ${}^tA$.

Par définition de la transposée : $c_i^k = \sum_{j=1}^n a_j^i.\overline{a_j^k}$.

Sur la diagonale : $c_i^i = \sum_{j=1}^n a_j^i.\overline{a_j^i}$

Par calcul dans $\mathbb{C}$: $c_i^i = \sum_{j=1}^n |a_j^i|^2$.

On somme pour avoir la trace : $Tr({}^tA.\overline{A}) = \sum_{i,j} |a_j^i|^2$ (n^2 termes).

C'est une somme de carrés de modules, c'est un réel, et ce réel est positif.

Si cette somme est nulle, alors chaque module carré est nul (encadrer $0 \leqslant |a_p^q|^2 \leqslant \sum_{i,j} |a_j^i|^2 = 0$ car c'est un des termes de la somme).
La matrice est nulle.

Pour saisir en petite taille : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\overline{a}+c.\overline{c} & \\ & b.\overline{b}+d.\overline{d} \end{pmatrix}$.

◁ 24 ▷ Soit A une matrice à coefficients entiers, dont les termes diagonaux sont impairs et les termes hors de la diagonale pairs *(ceux ci peuvent donc être nuls)*. Montrez que le déterminant de A est impair. Déduisez que A est inversible.
Vous pouvez commencer par traiter l'exercice en taille 2 ou 3.
Mais sinon, pensez à travailler modulo 2, dans la matrice elle même...

La taille n'est pas précisée. Appelons la n.
On calcule $\det(A)$ modulo 2. C'est

$$\Big(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)}\Big)\ mod\ 2$$

Mais par compatibilité des sommes modulo 2, c'est aussi

$$\sum_{\sigma\in S_n} \Big(Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)}\ mod\ 2\Big)$$

Comme les signatures valent 1 ou -1 modulo 2, on peut aussi les éliminer :

$$\det(A)\ mod\ 2 = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\Big(a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)}\ mod\ 2\Big)$$

Et par compatibilité des produits, c'est

$$\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}\ldots \alpha_n^{\sigma(n)}$$

où les α_i^k sont les a_i^k modulo 2.

Bref, le déterminant de la matrice modulo 2 c'est le déterminant de la matrice modulo 2.

Pardon : « le déterminant de la matrice » modulo 2 c'est aussi le déterminant de « la matrice modulo 2 »

Et ici, la matrice modulo 2, c'est I_n. De déterminant 1.

Modulo 2, le déterminant vaut 1.
Il ne peut donc pas être nul.
La matrice est inversible.

Sinon, plus sobrement, on efface de $\det(A)$ tous les termes pairs.
Or, dès que σ est différente de Id, il y a dans $a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$ au moins un coefficient pair (venant de « hors de la diagonale »).
Modulo 2, chacun de ces termes s'en va.
Il reste $\det(A) = \sum\limits_{\sigma=Id} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$.
Et ce produit est impair.

◃25▹ Montrez que D est réel *(il vaut d'ailleurs 39, mais je ne vous recommande pas de le calculer, juste de prouver qu'il est réel)*.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1-2.i & 3-i \\ 1-i & 2 & i & 2-i \\ 1+2.i & -i & 0 & 1+3.i \\ 3+i & 2+i & 1-3.i & 4 \end{vmatrix}$$

La matrice à coefficients complexes dont il faut calculer le déterminant a une particularité : quand on la transpose, on obtient son conjugué (les $a+i.b$ deviennent des $a-i.b$). Or, une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
Si on décide de poser comme dans tous les sujets de concours $\overline{A}$ la matrice conjuguées de A , de terme général $\alpha_i^k = \overline{a_i^k}$, on a des formules faciles à prouver : $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, ou $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ (en écrivant $\overline{\sum\limits_{j=1}^{n} a_i^j \times b_j^k} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_i^j \times b_j^k} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_i^j} \times \overline{b_j^k}$), mais aussi $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Il suffit en effet d'écrire

$$\overline{\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \overline{Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}} \dots \overline{a_n^{\sigma(n)}}$$

car la signature est un réel.
Fort de ce résultat, on écrit donc

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$$

Le déterminant est son propre conjugué ; il est réel.

◃26▹ On va étudier les matrices antisymétriques (${}^tA = -A$) et aller en direction du résultat : le déterminant d'une matrice réelle antisymétrique est le carré d'une formule en les coefficients de la matrice (le Pfaffien). Les questions sont largement issues d'une épreuve de Polytechnique-ESPCI, filière P.C. de 2003 (quel âge aviez vous ?)[a]

a. n'allez pas aux toilettes avec votre smartphone pour essayer de récupérer le corrigé, j'ai modifié l'intitulé et le déroulement des questions à ma façon, et viré les parties difficiles.

Moi je dirais un mois ou deux, non ?

IV∼0) On se fixe un entier n qui pourra le temps de quelques questions prendre une valeur imposée. On note E_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ *(n composantes nulles sauf la i^{eme} qui vaut 1)*. On note A_n l'espace des matrices antisymétriques de taille n sur n *(rappel : ${}^tA = -A$)*. Montrez que c'est un espace vectoriel pour les lois usuelles, donnez sa dimension et donnez une base à l'aide des $E_i.{}^tE_j$ *(on ne demandera pas de prouver que c'est une base)*[a].

a. essayez en taille 2 : $E_1.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1.{}^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $E_2.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On montre que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
La matrice nulle est antisymétrique.

Si A et B sont antisymétriques, alors on a

$$^t(A+B) =^t A +^t B = -A - B = -(A+B)$$

On prend cette fois A antisymétrique et α réel. On a alors

$$^t(\alpha.A) = \alpha.^tA = \alpha.(-A) = -(\alpha.A)$$

Une base est formée des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, différences de matrices du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or, chacune de ces matrices est de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ce sont donc des $E_i.(^tE_k)$.
Et la base cherchée est formée des $E_i.(^tE_k) - E_i.(^tE_k)$.
Il y a une condition : $i \neq k$ (sinon, on a la matrice nulle.
Il y a aussi la condition $i < j$ pour ne pas prendre une matrice puis quelques temps plus tard son opposée.
On garde donc $\boxed{E_i.(^tE_k) - E_i.(^tE_k) \text{ avec } 1 \leqslant i < k \leqslant n}$

La condition $1 \leqslant i < k \leqslant n$ donne un ensemble de cardinal $\sum_{k=1}^{n}(k-1)$.

On trouve $\boxed{\dim(A_n) = \dfrac{n.(n-1)}{2}}$

IV∼1) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire est forcément nul.

Prenons une matrice A antisymétrique de taille $2.p+1$. On a alors $^tA = -A$. On passe au déterminant : $\det(^tA) = \det(-A)$. Or, une matrice et sa transposée ont le même déterminant, et le déterminant est une forme multilinéaire en ses vecteurs : $\det(A) = (-1)^{2.p+1}.\det(A)$. La seule solution est $\det(A) = 0$.
On est débarrassé des matrices antisymétriques de taille 3, 5 et autres. Leur déterminant est un carré, celui de 0.

Rapport du jury : un grand classique qui se démontre en une ligne ! Mais curieusement, cette question n'a pas été réussie par plus de la moitié des candidats, dont beaucoup d'entre eux ont cherché à faire une récurrence improbable. Elle fait donc partie des quelques questions qui ont permis de faire la différence ; d'autres seront indiquées aussi dans le rapport.

IV∼2) L'élève A dit que le produit de deux matrices antisymétriques est symétrique, et B dit que le produit de deux matrices antisymétriques est antisymétrique. Mettez les d'accord. *Cette question n'était pas dans le sujet de Polytechnique.*

On peut prendre A et B antisymétriques : $^tA = -A$ et $^tB = -B$. On a alors $^t(A.B) =^t B.^tA = -B.(-A) = B.A$. Mais ça ne fait pas $A.B$.
Faute de conclusion, on se dit qu'on va construire un contre-exemple, en prenant deux matrices antisymétriques, de taille 3, car en taille 2 tout va trop bien.
On tente au hasard :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Ah oui, pour une question négative, on attend une réponse par contre-exemple, avec le mot souligné.

Si le hasard n'avait rien donné, on aurait dû prendre la forme générale :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a.\alpha - b.\beta & & \\ & & -a.\beta \\ & -\alpha.b & \end{pmatrix}$$

Mais il est bien plus rigoureux de donner des vraies valeurs que de se contenter d'une forme générale.

IV~3) Est il vrai que les matrices antisymétriques de taille 2 forment un supplémentaire[a] de l'ensemble des matrices de trace nulle ? Pouvez vous donner dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ un sous-espace vectoriel qui soit à la fois supplémentaire de l'ensemble des matrices symétriques, mais aussi de l'ensemble des matrices de trace nulle ?

a. attention, ne confondez pas supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire de A dans E est un espace vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B (exemples : l'axe imaginaire est supplémentaire de l'axe réel dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel)

Encore une question personnelle, de vérification de la connaissance du cours.

type de matrice	nom	forme	base	dimension
antisymétriques	$A_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$	1
trace nulle	$T_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$	3
symétriques	$S_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$	3

Pour les dimensions, tout va bien : $dim(A_2(\mathbb{R})) + dim(T_2(\mathbb{R})) = 4 = dim(M_2(\mathbb{R}))$.
Mais il reste un problème d'intersection : $A_2(\mathbb{R})$ est inclus dans $M_2(\mathbb{R})$.
On a donc $dim(A_2(\mathbb{R}) + T_2(\mathbb{R})) = dim(A_2(\mathbb{R})) + dim(T_2(\mathbb{R})) - dim(A_2(\mathbb{R})) = 3 \neq dim(M_2(\mathbb{R}))$

D'ailleurs, les matrices $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ ne forment pas une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.

$$0.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On veut ensuite un sous-espace E vérifient $E \oplus S_2(\mathbb{R}) = E \oplus T_2(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$.
Sa dimension vaudra 1. Il suffit donc d'une matrice pour l'engendrer.
cette matrice ne devra ni être dans $S_2(\mathbb{R})$, ni avoir une trace nulle. Et c'est tout ce qu'on lui demande.
Je propose $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$, mais il y a des milliers d'autres solutions.
Vérifiez ensuite que les deux familles suivantes sont libres et sont donc des bases de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$:

$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$
$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

(argument : on peut rapidement reconstruire la base canonique avec chacune, et elles ont le bon cardinal)

IV~4) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 2 est le carré de la forme linéaire $A \longmapsto {}^t E_1.A.E_2$.

En taille 2, une matrice antisymétrique a pour forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a réel. On calcule : $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$. C'est bien un carré. Et on a aussi

$${}^t(E_1).A.E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a$$

On assimile la matrice de taille 1 au réel ; on élève au carré et on a a^2 comme attendu.

V~0) On définit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'elles ont le même déterminant. Calculez $A.B$ et déduisez que $\det(A)$ est le carré d'une application sur les coefficients de A que vous préciserez *(attention, ne pas oublier un détail)*.

Il faut passer du déterminant de $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ à celui de $\begin{vmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{vmatrix}$ sans modification. Ou avec un nombre pair de changements de signes.

$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \end{vmatrix}$ deux échanges de lignes

$\begin{vmatrix} -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & f & -b & -d \\ -f & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & a \\ d & e & -a & 0 \end{vmatrix}$ deux échanges de colonnes

$\begin{vmatrix} 0 & f & -b & -d \\ -f & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & a \\ d & e & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -f & b & d \\ f & 0 & c & e \\ -b & -c & 0 & -a \\ -d & -e & a & 0 \end{vmatrix}$ une transposition

On n'a pas fini. Finalement, je crois que la meilleure solutions est de développer les deux déterminants :

$$a^2.f^2 + b^2.e^2 + c^2.d^2 - 2.a.b.e.f + 2.a.c.d.f - 2.b.c.d.e$$

Je suis triste de n'avoir pas trouvé de meilleure démonstration...

On effectue le produit $A.B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

avec $\alpha = a.f - b.e + c.d$.
On passe au déterminant : $\det(A.B) = \alpha^4$ et donc $\det(A).\det(B) = \alpha^4$.
Or, A et B ont le même déterminant : $\det(A)^2 = (a.f - b.e + c.d)^4$.
On passe à la racine : $\det(A) = (a.f - b.e + c.d)^2$.

Ah non, tiens, on peut avoir aussi $\det(A) = -(a.f - b.e + c.d)^2$.
Il faut faire un choix, et ne pas se contenter de "on passe à la racine".
On étudie la formule brute pour $\det(A)$:

$$\sum_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}$$

On y trouve le terme $Sgn(\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}).a.d.f.(-c)$ précisément pour σ égale au cycle $\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$ (signature -1). On a donc un terme $+a.d.f.c$.

On en a même deux, l'autre venant de $\begin{array}{cccc} & & & c \\ -a & & & \\ & -d & & \\ & & -f & \end{array}$ avec σ égale à $\overrightarrow{(1\,4\,3\,2)}$.

On a donc dans $\det(A)$ le terme $+2.a.d.f.c$.
Si l'on avait $\det(A) = -(a.f - b.e + c.d)^2$, on aurait $-2.a.d.f.c$. C'est donc faux.
Par élimination : $\boxed{\det(A) = (a.f - b.e + c.d)^2}$

V$\sim$1) On définit le script suivant

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
....if n % 2 == 0 :
........return 0
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
....return M
```

Montrez qu'il définit une matrice antisymétrique, et calculez son déterminant.

On étudie le script qui visiblement prend en entrée une liste (instruction len et usage de crochets).

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
```

On mesure une fois pour toutes la longueur de la liste, c'est plus pratique, et moins couteux pour le programme et pour le lecteur.

```
....if n % 2 == 0 :
........return 0
```

Si la liste est de longueur paire, on sort et on donne 0. C'est normal, car on va construire une matrice antisymétrique de taille $n+1$ sur $n+1$.

```
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
```

On crée une matrice de taille $n+1$ (nombre pair).

```
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
```

On se promène dans $2.(n+1)$ cases de la matrice. On met $L[i]$ en position M_i^{j+1} et son opposé en position M_{i+1}^i. Ailleurs, il reste des 0.

```
....return M
```

On retourne une matrice, et elle est bien antisymétrique. En taille impaire, son déterminant est tout de suite nul... A quoi ressemble cette matrice ?

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les déterminants par développements : $(a_0)^2$, $(a_0.a_2)^2$ et enfin $(a_0.a_2.a_4)^2$.
On constate que a_1, a_3 n'ont aucun rôle.

On propose une formule : $\boxed{\Big(\prod_{k=0}^{[n/2]} L[2.k]\Big)^2 \text{ ou encore } (a_0.a_2.a_4\ldots)^2}$ qui est plus claire mais ambigüe.

On la démontre par récurrence sur la taille des matrices. Cette récurrence est déjà initialisée.
En taille $2.p$, on développe par rapport à la dernière colonne où il n'y a qu'un terme. Il est en position impaire. Son cofacteur est un déterminant comme $\begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{vmatrix}$ qu'on développe par rapport à la dernière ligne *(terme de position diagonale, pondération en signe plus)*.
On retrouve alors la matrice en taille $2.(p-1)$. Et on voit que l'avant dernier terme de la liste n'a joué aucun rôle.
En notant $M(L)$ la matrice, on a $\det(M([a_0, \ldots a_n]) = (a_n)^2. \det(M([a_0, \ldots a_{n-2}])$.
Si la liste est de longueur impaire, on terme sur une matrice nulle, le déterminant est nul.
Si la liste est de longueur paire, on récupère le carré du produit des termes d'indices pairs, comme indiqué, par récurrence directe.

V∼2) Soit D_n une matrice diagonale de taille n sur n ; calculez en fonction du déterminant de D_n le déterminant de la matrice de taille $2.n$ par blocs : $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & -D_n \\ D_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$.

On doit donc calculer un déterminant comme $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

On peut développer en ligne ou colonne, et aboutir ici à $(d_1.d_2)^2$ et $(d_1.d_2.d_3)^2$ si l'on n'a pas fait d'erreur en route.
On généralise en $(\det(D))^2$.
Mais il faut le prouver.
On peut inventer de toutes pièces une formule pour le déterminant d'une matrice par blocs. Il n'y en a pas, ou alors sous de grosses conditions.
On peut développer en colonne et ligne en prenant garde aux signes moins.
Et puis, on peut le jouer simple. Si si !
On échange les colonnes. Proprement, on échange C_1 avec C_{n+1}, C_2 avec C_{n+2} et plus généralement C_k avec C_{n+k}.

La matrice obtenue est $\begin{vmatrix} -d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix}$ et plus généralement $\begin{vmatrix} -D_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & D_n \end{vmatrix}$.

On a n transpositions, d'où un signe $(-1)^n$.
La nouvelle matrice est diagonale. Son déterminant est $(-d_1).(-d_2)\ldots(-d_n).d_1.d_2\ldots d_n$.

Mais comme on a un $(-1)^n$devant, les signes moins sont compensés, et il reste $\left(\prod_{k=1}^{n} d_k\right)^2$ c'est à dire $\det(D)^2$.

Commentaire du rapport du jury : plein de méthodes ont été utilisées pour cette question, mais bien peu ont pu donner un résultat avec un signe correct.

V∼3) Soit A une matrice antisymétrique, on suppose que A^2 est nulle. Montrez que A est nulle *(indication qui n'était pas dans le sujet : calculez ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ pour tout i)*.

On suppose donc $A^2 = 0_{n,n}$ *(matrice nulle de taille n)*.
On pense à calculer ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ comme indiqué dans mon énoncé.
Si on utilise la formule $(P.Q) =^t Q.^tP$, on trouve ${}^tE_i.{}^tA.A.E_i$ *(matrice ligne, matrice carrée, matrice carrée, matrice colonne, c'est un réel :*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

).
On remplace : ${}^t(A.E_i).(A.E_i) = {}^tE_i.{}^tA.A.E_i = -{}^tE_i.A.A.E_i = {}^tE_i.O_{n,n}.E_i$
du type $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On trouve 0.
Pour chaque E_i, le produit ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ est nul.

Mais qui est $(A.E_i)$? C'est la i^{eme} colonne de A : $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix}$.

Et ${}^t(A.E_i)$ est la même n ligne.
Leur produit est une somme de carrés :
$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1^2)^2 + (a_2^2)^2 + (a_3^2)^2 \end{pmatrix}$.
Mais on a montré que cette matrice de taille 1 sur 1 est nulle.
Pour tout i on a donc $\sum_{k=1}^{n} (a_k^i)^2 = 0$.
On est dans $\mathbb{R}$; une somme de carrés ne peut être nulle que si chaque terme est nul.
Pour tout i et tout k, a_i^kest nul.
La matrice est nulle.

Commentaire du jury : facile, mais mérite une rédaction claire si les candidats veulent se distinguer de ceux qui auront écrit par exemple ${}^t(A.X).A.X = 0$ donc ${}^t(A.X) = 0$ ou $A.X = 0$, donc $A = 0$.
Notons au passage la remarque du jury là aussi :
il est des formules qui sont peut être des indices que pour certains candidats les formules se suffisent à elles-mêmes et les notations induisent les formules sans se poser la question sur le sens à accorder aux relations ainsi produites.

VI∼0) Dans cette partie, A est une matrice réelle antisymétrique vérifiant $A^2 + I_n = 0$. Montrez que n est pair (on posera alors $n = 2.m$) et que A est inversible. Soit U un vecteur. A quelle condition $(U,\ A.U)$ est elle libre ?

On suppose donc le temps de cette partie $A^2 = -I_n$ et évidemment ${}^tA = -A$.
Dans la formule $A^2 = -I_n$, on passe au déterminant : $\det(A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$. Comme $\det(A)$ est un réel, son carré est positif. Puisque $(-1)^n$ est positif, c'est que n est pair.
On note au passage qu'on a alors même $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.
On en déduit que $\det(A)$ est non nul. A est inversible.

Mais il y a encore mieux : $A.(-A) = I_n$. On a donc explicitement l'inverse de A : c'est $-A$.

On prend U, de taille n. $A.U$ est aussi de taille n.
On prend α et β et on suppose $\alpha.U + \beta.A.U = 0_n$ (vecteur nul de taille n).
On applique A :

$$\alpha.A.U + \beta.A^2.U = A.0_n = 0_n$$

On a donc à la fois $\alpha.U + \beta.A.U = 0_n$ et $\alpha.A.U - \beta.U = 0_n$.
On combine : $(\alpha^2 + \beta^2).U = 0$ et $(\alpha^2 + \beta^2).A.U = 0$.
Si U est un vecteur non nul, on a forcément $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. La famille est libre.
Si U est un vecteur nul, la famille $(U,\ A.U)$ est évidemment liée...
Bilan :

$U = 0_n$	$U \neq 0_n$
$(U,\ A.U)$ liée	$(U,\ A.U)$ libre

Citation : De par son caractère "ouvert", la question a déstabilisé les candidats. Il est vrai qu'on peut se demander ce qu'on doit vraiment prouver.

VI∼1) On pose : $F = \{V \in \mathbb{R}^n \mid {}^tU.V = 0 \text{ et } {}^t(A.U).V = 0\}$. Montrez que F est un espace vectoriel, quelle est sa dimension. Montrez : $\forall V \in F,\ A.V \in F$.

L'ensemble des vecteurs V vérifiant ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$ est formée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On va prouver que

c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n, +, .)$.
On prend V et V' vérifiant ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$ et ${}^tU.V' = 0$ et ${}^t(A.U).V' = 0$.
On se donne α et β. Par simple distributivité, on a ${}^tU.(\alpha.V + \beta.V') = 0$ et ${}^t(A.U).(\alpha.V + \beta.V') = 0$.
On a la stabilité d'un sous-espace vectoriel. C'est tout.

Les vecteurs V sont a priori dans $\mathbb{R}^n$: dimension n.
La condition ${}^tU.V = 0$ est de la forme $a_1.v_1 + \ldots + a_n.v_n = 0$. Elle nous fait perdre une dimension.

L'autre équation ${}^t(A.U).V = 0$ est de la forme $b_1.v_1 + \ldots + b_n.v_n = 0$. Elle nous fait perdre une autre dimension (une autre, car ce n'est pas la même équation que $a_1.v_1 + \ldots + a_n.v_n = 0$ ni même un de ses multiples, puisque U et $A.U$ sont indépendants).

Finalement, F est de dimension $n - 2$.

On prend V dans F. Il vérifie deux relations : ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$.
On pose $W = A.V$ et on calcule :
• ${}^tU.W = {}^t U.A.V$ mais l'hypothèse ${}^t(A.U).V = 0$ donnait ${}^tU.(-A).V = 0$ et justement ${}^tU.A.V = 0$
• ${}^t(A.U).W = {}^t(A.U).A.V = {}^t U.{}^tA.A.V = {}^t U.(-I_n).V = -{}^tU.V$; ce produit aussi est nul.
Les deux produits ${}^tU.W$ et ${}^t(A.U).W$ sont nuls, W est dans F.

VI∼2) Déduisez l'existence d'une famille de vecteurs $(U_1, \ldots U_m)$ telle que $(U_1, \ldots U_m, A.U_1, \ldots A.U_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs deux à deux orthogonaux, et normés.
L'orthogonalité de deux vecteurs V et W c'est ${}^tV.W = 0$. Un vecteur normé vérifie ${}^tV.V = 1$.

Ce qui a été fait dans $R^{2.n}$ peut être recommencé dans F, stable par A.
On y trouve un vecteur U_2 non nul. La famille $(U_2,\ A.U_2)$ est libre dans F.
On pose alors $G = \{V \in F \mid {}^tU_2.V = 0 \ et\ {}^t(A.U_2).V = 0\}$.
C'est encore un espace vectoriel, stable par A et cette fois de dimension $n - 4$.

VII∼0) Soit A une matrice antisymétrique. Montrez que $(U, V) \longmapsto {}^t U.A.V$ (notée ϕ^1_A) est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.

Dans forme bilinéaire antisymétrique, il y a trois choses :
• forme : le résultat est un réel, par compatibilité des formats par exemple

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a.y' + b.z' \\ -a.x' + c.z' \\ -b.x' - c.y' \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a.x.y' + b.x.z' - a.x'.y + \ldots \end{pmatrix}$$

• bilinéaire : on démontre deux linéarités :

(U_1, V)	a pour image	${}^tU_1.A.V$		(U, V_1)	a pour image	${}^tU.A.V_1$
(U_2, V)	a pour image	${}^tU_2.A.V$		(U, V_2)	a pour image	${}^tU.A.V_2$
$(U_1 + U_2, V)$	a pour image	${}^t(U_1 + U_2).A.V$	et	$(U, V_1 + V_2)$	a pour image	${}^tU.A.(V_1 + V_2)$
$(\alpha.U_1, V)$	a pour image	${}^t(\alpha.U_1).A.V$		$(U, \beta.V)$	a pour image	${}^t(\alpha.U_1).A.V$

Il n'y a plus qu'à écrire des choses comme ${}^t(\alpha.U_1).A.V = \alpha.({}^tU_1.A.V)$ et ${}^tU.A.(V_1 + V_2) = {}^t U.A.V_1 + {}^t U.A.V_2$ pour conclure.
• antisymétrique : on se donne U et V et on doit comparer $\phi^1_A(U, V)$ et $\phi^1_A(U, V)$. L'un vaut ${}^tU.A.V$ et l'autre ${}^tV.A.U$.
On peut calculer ces deux nombres explicitement :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1^1.v_1 & +a_1^2.v_2 & \ldots & +a_1^n.v_n \\ a_2^1.v_1 & +a_2^2.v_2 & \ldots & +a_2^n.v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1.v_1 & +a_n^2.v_2 & \ldots & +a_n^n.v_n \end{pmatrix}$$

On trouve une somme de termes en $u_k.a_i^k.v_i$. Il y en a n^2 : $\phi(U, V) = \sum_{\substack{i \leqslant n \\ k \leqslant n}} u_k.a_i^k.v_i$.

Si on échange U et V, on trouve $\phi(V, U) = \sum_{\substack{i \leqslant n \\ k \leqslant n}} v_k.a_i^k.u_i$.

Comme les variables sont muettes, c'est aussi $\phi(V, U) = \sum_{\substack{j \leqslant n \\ q \leqslant n}} v_j.a_j^q.u_q$ ou même $\phi(V, U) = \sum_{\substack{j \leqslant n \\ q \leqslant n}} u_q.a_j^q.v_j$.

Mais par antisymétrie de la matrice A c'est aussi $-\sum_{\substack{j\leqslant n\\ q\leqslant n}} u_q.a_q^j.v_j$.

On retrouve bien l'opposé de $\phi(U,V)=\sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}} u_k.a_i^k.v_i$. On a donc $\pi(V,U)=-\phi(U,V)$.

Mais il y a une façon bien plus simple de l'obtenir.
Le produit $\phi(U,V)={}^t\ U.A.V$ est une matrice de taille 1 sur 1 (un réel). Elle est égale à sa transposée : $\phi(U,V)={}^t\ U.A.V={}^t\ ({}^t.U.A.V)$.
Mais la propriété ${}^t(P.Q)={}^t\ Q.{}^tP$ donne alors $\phi(U,V)={}^t\ U.A.V={}^t\ V.{}^tA.{}^t({}^tU)=={}^t\ V.{}^tA.U$ (à quoi bon transposer deux fois un vecteur).
Comme A est antisymétrique, il reste

Commentaire du rapport du jury : Facile.
En effet, le résultat similaire pour les matrices symétriques est dans le cours de Sup et le cours de Spé.

$$\phi(U,V)={}^t\ U.A.V={}^t\ V.{}^tA.{}^t({}^tU)={}^t\ V.{}^tA.U=-{}^tV.A.U=-\phi(V,U)$$

Et le tour est joué.

VII∼1) Une forme multilinéaire est dite alternée si elle donne 0 dès que deux vecteurs d'indices voisins sont égaux : $\forall i,\ U_i=U_{i+1}\Rightarrow \phi(U_1,\dots,U_i,U_{i+1},\dots U_n)=0$ *(ce n'est pas (encore) la même définition que dans le cours).*
Montrez alors que $\phi(U_1,\dots U_n)$ change de signe dès qu'on échange deux vecteurs d'indices voisins.

On prend une forme multilinéaire, qui s'annule dès qu'il y a deux vecteurs consécutifs égaux : $U_i=U_{i+1}$.
Il faut montrer que le signe change si on permute $U_n$et U_{i+1}. C'est quasiment dans le cours.
On développe $\phi(U_1,\dots U_i+U_{i+1},U_i+U_{i+1},\dots U_n)$, dont on sait qu'il est nul (deux vecteurs consécutifs égaux).

Par multilinéarité appliquée deux fois :
$0=\phi(U_1,\dots U_i+U_{i+1},U_i+U_{i+1},\dots U_n)=\phi(U_1,\dots U_i,U_i,\dots U_n)+\phi(U_1,\dots U_i,U_{i+1},\dots U_n)+\phi(U_1,\dots U_{i+1},U_i,\dots U_n)+\phi(U_1,\dots U_{i+1},U_{i+1},\dots U_n)$

Mais deux de ces termes sont nuls toujours à cause de deux vecteurs consécutifs égaux :
$0=\phi(U_1,\dots U_i+U_{i+1},U_i+U_{i+1},\dots U_n)=\phi(U_1,\dots U_i,U_{i+1},\dots U_n)+\phi(U_1,\dots U_{i+1},U_i,\dots U_n)$

On fait passer de l'autre côté : $\phi(U_1,\dots U_i,U_{i+1},\dots U_n)=-\phi(U_1,\dots U_{i+1},U_i,\dots U_n)$.
On est passé de "alterné sur deux termes consécutifs" à "antisymétrique sur deux termes consécutifs".
On va passer ensuite à des vecteurs plus éloignés.

Rapport du jury : "un grand classique du cours sur les formes alternées".

Montrez alors que $\phi(U_1,\dots U_n)$ est nul dès que deux vecteurs d'indices distincts sont égaux.

On prend une forme alternée, et une liste où deux vecteurs d'indices distincts sont égaux : $U_i=U_k$.
En utilisant un nombre suffisant le résultat précédent (changement de signe par $\overrightarrow{(j\ j+1)}$), on place côte à côte les deux vecteurs égaux.

On a $k-i-1$ changements de signes.

Une fois effectués les changements, on arrive à $(-1)^{k-i-1}.\phi(U_1,\dots U_i,U_{k,},U_{i+1},\dots U_{k-1},U_{k+1},\dots U_n)$.

Cette fois, deux vecteurs consécutifs sont égaux. Le réel est nul, et le $(-1)^{k-i-1}$ n'y change rien.

Le rapport dit deux ou trois choses :
- *Facile ; les candidats sont donc notés sur leur capacité à expliquer de manière concise comment ils procèdent.*
- *Mais il dit aussi : de très nombreux candidats ont fait preuve de fébrilité et perdu des points en n'indiquant pas le cheminement de leur pensée, même dans des questions simples (mais qui ne sont simples que parce qu'elles ont été amenées par les questions précédentes) ;*
- *Les correcteurs ont estimé qu'une réponse du style $\phi(U_1,\dots U_i,\dots U_j,\dots U_n)=(-1)^{j-i-1}.\phi(U_1,\dots U_j,\dots U_i,\dots U_n)$ sans aucun commentaire hormis* "d'après la question précédente" *ne convenait pas.*

VII∼2) On définit maintenant $\phi_A^2=(U_1,U_2,U_3,U_4)\longmapsto\phi_A^1(U_1,U_2).\phi_A^1(U_3,U_4)-\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_A^1(U_2,U_4)+\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$. Montrez que c'est une forme quadrilinéaire alternée.

On définit donc $\phi_A^2=(U_1,U_2,U_3,U_4)\longmapsto\phi_A^1(U_1,U_2).\phi_A^1(U_3,U_4)-\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_A^1(U_2,U_4)+\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$.
Comme chaque terme $\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$ est le produit de deux réels, le résultat final est un réel. On a une forme.

Regardons par exemple $\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$.
- Pour U_2, U_3 et U_4 fixés, $U_1\longmapsto\phi_A^1(U_1,U_4)$ et $U_1\longmapsto\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$ sont linéaires.
- Pour U_1, U_3 et U_4 fixés, $U_2\longmapsto\phi_A^1(U_2,U_3)$ et $U_2\longmapsto\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^1(U_2,U_3)$ sont linéaires.

• Pour U_1, U_2 et U_4 fixés, $U_3 \longmapsto \phi_A^1(U_2, U_3)$ et $U_3 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
• Pour U_1, U_2 et U_3 fixés, $U_4 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4)$ et $U_4 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
On a la multilinéarité de chaque terme de la somme ; on a la multilinéarité de toute la somme.

Qui a oublié de démontrer "forme" et "multilinéaire" ?

Pour le caractère alterné, on prend la définition avec deux vecteurs contigus égaux. Il faut montrer que $\phi_A^2(U_1, U_1, U_3, U_4)$, $\phi_A^2(U_1, U_2, U_2, U_4)$ et $\phi_A^2(U_1, U_2, U_3, U_3)$ sont nuls.
On calcule donc

$$\phi_A^1(U_1, U_1).\phi_A^1(U_3, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_1, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_1, U_3)$$
$$\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_2, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_2, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_2)$$
$$\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_3, U_3) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_3) + \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_3)$$

A chaque fois, il y a deux termes opposés par construction et un terme nul par antisymétrie de ϕ_A^1.

VII$\sim$3) On prend ici $n = 4$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant $\forall (U_1, \dots U_4) \in (\mathbb{R}^4)^4,\ \phi_A^2(U_1, \dots U_4) = Pf(A). \det(U_1, \dots U_4)$.

La question suivante est un cadeau.
Le cours dit que toute forme quadrilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^4$ est proportionnelle au déterminant.
Et ϕ_A^2 est une forme quadrilinéaire alternée.
Et on l'a définie ici sur $\mathbb{R}^4$.
Il existe donc un réel λ, qui a priori dépend de A vérifiant $\phi_A^2 = \lambda. \det_C$ (le déterminant vu comme forme sur les familles de quatre vecteurs). On le note $Pf(A)$, et ce sera lui le Pfaffien.

VII$\sim$4) Explicitez $Pf(A)$ à l'aide des coefficients de A.

On se souvient que pour le calculer, il suffit de prendre un cas particulier. Et le meilleur cas particulier est celui de la base canonique.
On a alors $\phi_A^2(E_1, E_2, E_3, E_4) = Pf(A). \det(E_1, E_2, E_3, E_4) = Pf(A).1$.

On va donc juste calculer $\phi_A^1(E_1, E_2).\phi_A^1(E_3, E_4) - \phi_A^1(E_1, E_3).\phi_A^1(E_2, E_4) + \phi_A^1(E_1, E_4).\phi_A^1(E_2, E_3)$.
On doit juste calculer des termes en $\phi_A^1(E_i, E_k)$, c'est à dire ${}^t(E_i).A.E_k$.
On écrit explicitement : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ -a_1^2 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & 0 & a_3^4 \\ -a_1^4 & -a_2^4 & -a_3^4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ses variantes en déplaçant les deux 1.
Ici, on récupère $\phi_A^1(E_1, E_2) = a_1^2$.
La formule générale est donc $\phi_A^1(E_i, E_k) = a_i^k$.
On reprend la somme

$$\phi_A^1(E_1, E_2).\phi_A^1(E_3, E_4) - \phi_A^1(E_1, E_3).\phi_A^1(E_2, E_4) + \phi_A^1(E_1, E_4).\phi_A^1(E_2, E_3)$$

et on la transcrit :
$a_1^2.a_3^4 - a_1^3.a_2^4 + a_1^4.a_2^3$ et on reconnaît a. de la formule avec $a.f - b.e + c.d$ pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

VIII$\sim$0) On définit ensuite $\phi_A^3(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^6 (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$ *(la notation étant ambigüe, le premier terme de la somme est $\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^2(U_3, U_4, U_5, U_6)$et le dernier est $\phi_A^1(U_1, U_6).\phi_A^2(U_2, U_3, U_4, U_5)$).* Montrez que c'est une forme hexalinéaire alternée.

On va se contenter à notre niveau de ϕ_A^3, sachant que le sujet s'intéressait à ϕ_A^n en taille $2.n$ sur $2.n$.

La formule est

$$\phi_A^3(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$$

Le résultat est de la forme $\sum_k (-1)^k \times reel \times reel$, c'est un réel.

On fixe U_2 à U_n. On a une formule du type $U_1 \longmapsto \sum_k (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\lambda_k$. C'est une somme de formes en U_1 ;

c'est une forme linéaire en U_1.
On se donne un indice i, on fixe tout le monde sauf U_i. On a alors

$$(-1)^i.\phi_A^1(U_1,U_i).\phi_A^2(U_2,\dots U_{i-1},U_{i+1}\dots,U_6)+\sum_{k\neq i}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$$

Dans cette formule, le premier terme est du type $(-1)^i.\phi_A^1(U_1,U_i).\alpha$. Il est linéaire en U_1. Les autres termes sont de la forme $\mu_k.\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$, et ϕ_A^2 est linéaire par rapport à chacun de ses quatre vecteurs, en particulier U_i qui fait partie de la liste. Cette combinaison de formes linéaires en U_i est une forme linéaire en U_i.

On passe au caractère alterné, avec sa définition de l'énoncé : "dès que deux vecteurs d'indices contigus sont égaux, la forme donne 0".
Mais attention, il y a deux cas.

• les deux vecteurs égaux sont U_i et U_{i+1} avec i au moins égal à 2.

Dans $\sum_{k=2}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$, on met de côté deux termes :
∘ les termes d'indices i et $i+1$:
$(-1)^i.\phi_A^1(U_1,U_i).\phi_A^2(U_2,\dots U_{i-1},U_i,U_{i+2}\dots,U_6)$ et

$$(-1)^{i+1}.\phi_A^1(U_1,U_i).\phi_A^2(U_2,\dots U_{i-1},U_i,U_{i+2}\dots,U_6)$$

Ils se compensent parfaitement.

∘ les termes d'indices k différent de i et $i+1$: $(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$; cette fois, dans $\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$, il y a deux termes égaux : U_i et U_{i+1} (tous deux présents, puisque le terme effacé a un autre indice).
La somme est nulle. Merci.

• les deux vecteurs égaux sont U_1 et U_2.
On distingue dans $\sum_{k=2}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$ un terme à part
∘ le terme d'indice $k=2$ vaut $(-1)^2.\phi_A^1(U_1,U_1).\phi_A^2(U_3,\dots,U_6)$; c'est par caractère alterné de ϕ_A^1 qu'il est nul
∘ les termes d'indice plus grand que 2 : $\sum_{k=3}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_1,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$. Il y a là quatre termes :

$-\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_A^2(U_1,U_4,U_5,U_6)$	$+\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^2(U_1,U_3,U_5,U_6)$
$-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_A^2(U_1,U_3,U_4,U_6)$	$+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_A^2(U_1,U_3,U_4,U_5)$

On les explicite un à un :

$$-\phi_A^1(U_1,U_3).\Big(\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_5,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_4,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_4,U_5)\Big)$$
$$+\phi_A^1(U_1,U_4).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_5,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_3,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_3,U_5)\Big)$$
$$-\phi_A^1(U_1,U_5).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_4,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_3,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_3,U_4)\Big)$$
$$+\phi_A^1(U_1,U_6).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_4,U_5)-\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_3,U_5)+\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_3,U_4)\Big)$$

Deux à deux, les termes se simplifient.

Que nous dit la rapport du jury pour cette question ? Que bien des élèves ont oublié de traiter le cas d'égalité de U_1 et U_2.
Sachant que la preuve devait être donnée pour le passage à 2.n vecteurs et pas juste 6, et que la preuve sa faisait en exprimant ϕ_A^n à l'aide de ϕ_A^{n-1} puis ϕ_A^{n-2}, on peut se dire que c'est normal que peu d'élèves aient abordé la question.
On peut même se dire qu'entre l'élève qui aura perdu douze minutes à tenter de traiter le cas $U_1=U_2$ et celui qui n'aura même pas vu qu'il y avait ce cas à traiter, tous deux auront perdu des points, mais l'un aura perdu aussi du temps. N'aura sû gagner des points que celui qui aura mentionné "il faudrait aussi montrer le cas $U_1=U_2$". Celui là aura une démarche d'ingénieur.

VIII∼1) On prend ici $n=6$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall(U_1,\dots U_6)\in(\mathbb{R}^6)^6,\ \phi_A^3(U_1,\dots U_6)=Pf(A).\det(U_1,\dots U_6)$.

On a prouvé que ϕ_A^3 est 6-linéaire alternée, donc antisymétrique. On suppose qu'en plus ici, $\mathbb{R}^n$ est exactement $\mathbb{R}^6$.

On a une forme n linéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$. Le cours garantit qu'elle est proportionnelle au déterminant, dans un rapport qu'on peut noter λ ou même $Pf(A)$ puisqu'il dépend de A.
$\exists\lambda,\ \forall(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6), \in (\mathbb{R}^6)^6$,

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} a_1^1\\ a_2^1\\ a_3^1\\ a_4^1\\ a_5^1\\ a_6^1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2\\ a_2^2\\ a_3^2\\ a_4^2\\ a_5^2\\ a_6^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^3\\ a_2^3\\ a_3^3\\ a_4^3\\ a_5^3\\ a_6^3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^4\\ a_2^4\\ a_3^4\\ a_4^4\\ a_5^4\\ a_6^4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^5\\ a_2^5\\ a_3^5\\ a_4^5\\ a_5^5\\ a_6^5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^6\\ a_2^6\\ a_3^6\\ a_4^6\\ a_5^6\\ a_6^6\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6\\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 & a_4^6\\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 & a_5^6\\ a_6^1 & a_6^2 & a_6^3 & a_6^4 & a_6^5 & a_6^6\end{vmatrix}$$

On aurait pu ensuite demander de calculer le Pfaffien dans un cas particulier d'une matrice antisymétrique avec pas mal de 0.

VIII∼2) Soit A une matrice antisymétrique de taille 6 et M une matrice de taille 6. Montrez que ${}^tM.A.M$ est antisymétrique. Montrez $Pf({}^tM.A.M) = \det(M).Pf(A)$.

On a A antisymétrique et M carrée simple. Les formats sont compatibles. On peut calculer ${}^tM.AM$.
On calcule sa transposée : ${}^t({}^tM.AM.) ={}^t M.{}^tA.{}^t({}^tM)$ (toujours la formule ${}^t(P.Q) ={}^t Q.{}^tP$).
On a simplement ${}^t({}^tM) = M$, et aussi ${}^tA = -A$.
On a alors ${}^t({}^tM.AM.) ={}^t M.(-A).M = -{}^tM.AM$. On retrouve la définition de la matrice antisymétrique.
On pose $B ={}^t M.A.M$. C'est une matrice antisymétrique. On peut alors étudier l'application ϕ_B^1 pour commencer (petite initiative personnelle, avant d'attaquer ϕ_B^3).
On a $\phi_B^1(U, V) ={}^t U.({}^tM.A.M).V = ({}^tU.{}^tM).A.(M.V)$ par associativité.
Toujours selon la même formule $\phi_B^1(U, V) ={}^t U.({}^tM.A.M).V ={}^t (M.U).A.(M.V)$.
On reconnaît $\boxed{\phi_B^1(U,\ V) = \phi_A^1(M.U,\ M.V)}$

On reporte dans la définition : $\phi_B^2(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4) = \phi_A^2(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4)$ pour tout quadruplet de vecteurs (sommes et produits de termes en $\phi_A^1(U, V)$).

On poursuit $\phi_B^3(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6) = \phi_A^3(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6)$.
On applique la définition du Pfaffien :
$Pf(B).\det(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6) = Pf(A).\det(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6)$.
Mais le cours nous dit aussi directement $\det(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6) = \det(M).\det(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6)$ (dans cette formule, un temps, le déterminant est celui d'une famille de vecteurs, un temps il est celui d'une matrice carrée)
On a donc $Pf(B).\det(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6) = Pf(A).\det(M).\det(U_1, U_2, U, U_4, U_5, U_6)$ pour toute famille de vecteurs $(U_1, \dots U_6)$.
On l'applique à une famille libre pour pouvoir simplifier par le déterminant : $PfB) = Pf(A).\det(M)$.

Il reste ensuite à l'appliquer à une matrice M bien choisie, et à enchainer les question.
Si vous la voulez, je peux vous passer le sujet, et vous pouvez le trouver sur internet (en particulier sur Gargantua, le serveur des archives du concours de Polytechnique).
Sachez quand même que les dernières questions n'ont été abordées par aucun candidat, faute de temps sans doutes.
Ceci n'a évidemment pas empêché certaines copies d'atteindre la note maximale de 20.
Le jury indique qu'il y avait quand même sur la fin des questions où l'on pouvait aller chercher des points, comme $Pf({}^tM.A.M) = Pf(A).\det(M)$.
Le jury indique aussi que la différence s'est surtout faite sur des questions simples, mais discriminantes comme $\det(A) = 0$ *pour A impaire et antisymétrique...*

Enfin, une question quand même : vous avez vu ce sujet de la filière P.C. ; vous m'autorisez encore à dire que les P.C. sont des gens qui ne savent pas faire de maths ?
Je crois que non.

◃27▹ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2\end{vmatrix}/4$ est le carré de l'aire du triangle *(indication :* $\det(M.{}^tM)$ *et Triangle* $= \dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A\\ y_B - y_A & y_C - y_A\end{vmatrix}$*).*

L'aire du parallélogramme est un déterminant. Avec des vecteurs colonne $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

L'aire du triangle en est la moitié : *Triangle* $= \dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A\\ y_B - y_A & y_C - y_A\end{vmatrix}$.

Mais on peut aussi le transposer sans changer sa valeur $Triangle = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

On multiplie les deux : $Triangle^2 = \frac{1}{4}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

Et le déterminant du produit est le produit des déterminants :

$4.Triangle^2$ est le déterminant de $\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}$.

Et les quatre coefficients de cette matrice sont $\begin{pmatrix} |AB|^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & |AC|^2 \end{pmatrix}$, avec les règles de calcul des normes $\sqrt{x^2+y^2}$ et des produits scalaires $x.x' + y.y'$.

◃28▹ A et B sont deux matrices carrées de taille n vérifiant $A.B = B.A$. On définit la matrice par blocs de taille $2.n$: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

Montrez : $M^k = \begin{pmatrix} A^k & k.B.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel k (avez vous un argument plus esthétique que la récurrence sur ?).

Si $P(X)$ est un polynôme ($P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$), on pose pour toute matrice carrée C : $P(C) = \sum_{k=0}^{d} a_k.C^k$). Montrez $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & B.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

C'est un exercice sur les produits par blocs.
Dans un premier temps, on passe par la récurrence.
Pour tout k, on note P_k la propriété $M^k = \begin{pmatrix} A^k & k.B.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$ (l'entier n a déjà un rôle, on ne parlera pas de P_n).
Pour k égal à 0, on a bien

$$I_{2.n} = M^0 = \begin{pmatrix} A^0 & 0.B.A^{-1} \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

Pour k égal à 1, on a bien

$$M = M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1.B.A^{1-1} \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$$

On se donne k et on suppose P_k vraie, puis on calcule M^{k+1}

$$M^{k+1} = M^k.M = \begin{pmatrix} A^k & k.B.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & ? \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

Les deux matrices A^{k+1} viennent d'un calcul simple.
La matrice nulle de taille n est aussi légitime, issue de $0_n.A + A^k.0_n$.
Reste la matrice du coin qui vaut $A^k.B + k.B.A^{k-1}.A$. C'est $A^k.B + k.B.A^k$.
On utilise alors la propriété $A.B = B.A$ itérée autant de fois qu'il faut pour avoir $A^k.B = B.A^k$. On a alors bien $(k+1).B.A^k$.
La propriété est héréditaire.

Exercice bonus : montrez par un contre-exemple, que si on n'a pas $A.B = B.A$, on n'a plus M^k de la forme indiquée.

La preuve sans récurrence.
On écrit $M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
On vérifie $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ (c'est $\begin{pmatrix} 0_n & A.B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ mais on s'en moque).
On ajoute tout de suite $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & 0_n \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$, (bon, d'accord, là il y a une récurrence cachée).

On termine avec $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ dès l'exposant 2.

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule du binôme

$$M^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}^{k-i} . \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}^i$$

et on ne garde que deux termes : $i = 0$ (les A^k sur la diagonale) et $i = 1$ (le $k.A^{k-1}.B$ dans le coin).

Pas plus court, mais plus classe que la récurrence.

On écrit ensuite $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$.

On calcule des fois que ça serve : $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k.A^k$ et $P'(A) = \sum_{k=1}^{d} k.a_k.X^{k-1}$ (le terme $k = 0$ est nul).

On multiplie par B (à droite ou à gauche, quelle importance), et on somme des propriétés comme

$$a_k.M^k = \begin{pmatrix} a_k.A^k & k.a_k.A^{k-1}.B \\ O_n & a_k.A^k \end{pmatrix}$$

pour trouver la formule

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & B.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

qui pourra revenir dans un exercice de seconde année.

◃ 29 ▹

Un élève prétend que si A et B sont deux matrices carrées de taille n alors on a $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2)$. Montrez par un contre-exemple simple pour n égal à 2 qu'il a tort. Montrez qu'en revanche, son résultat est vrai si $A.B$ est égal à $B.A$ *(on pourra utiliser les matrices* $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ *de part et d'autre)*. Montrez que si A et B sont réelles, qu'elles « commutent » ou non, on a quand même $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+$.

On calcule $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -i.I_n & I_n \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ i.A + B & -i.B + A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -i.I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + i.B & -B \\ 0_n & -i.B + A \end{pmatrix}$$

On passe au déterminant, sachant que les matrices triangulaires de droite et de gauche ont pour déterminant 1 :

$1. \det(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}).1 = \det(A + i.B). \det(A - i.B)$ *(déterminant par bloc, cas triangulaire)*

On fusionne en un seul déterminant :

$\det(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}) = \det\left((A + i.B).(A - i.B)\right) = \det(A^2 - -.A.B + i.B.A + B^2)$.

L'hypothèse $A.B = B.A$ permet de simplifier et il reste bien $\det(A^2 + B^2)$.

Pour n'avoir pas égalité, on va donc prendre un exemple où $A.B$ n'est pas égal à $B.A$. C'est facile à avoir, le hasard vous fait quasiment toujours tomber sur de tels couples de matrices *(sauf si vous allez chercher I_n ou $A = B$)*. Prenons toutefois des matrices simples pour que $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ait un déterminant simple. et une matrice simple, ce n'est pas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$! C'est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(tiens, ces deux là ne commutent pas, prenons les !)*.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\det(A^2 + B^2) = 0$

et $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Quand même, si A et B sont carrées et réelles, sans rien ajouter de plus, on a quand même $\det\left(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det(A+i.B).\det(A-i.B)$.
Or, $\det(A+i.B)$ est un complexe, de la forme $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).z_1^{\sigma(1)}\dots z_n^{\sigma(n)}$ avec $z_j^k = a_j^k + i.b_j^k$.
Et $\det(A-i.B)$ est don conjugué $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{z_1^{\sigma(1)}}\dots\overline{z_n^{\sigma(n)}}$ puisque $\overline{z_j^k} = a_j^k - i.b_j^k$.
Le produit d'un complexe et de son conjugué, c'est un réel positif.

Là encore, du raisonnement avant de calculer. On parle de la formule, mais on n'essaye pas à tout prix d'en faire un « vrai nombre ».

◁30▷ Montrez que si A est une matrice diagonalisable, alors la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & A \end{pmatrix}$ l'est sont aussi.
La matrice $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & A \\ A & 0_{n,n} \end{pmatrix}$ l'est elle aussi ?

On écrit $A = P.D.P^{-1}$. On effectue des produits par blocs :
$\begin{pmatrix} A & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P.D.P^{-1} & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & P.D.P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & P \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0_{n,n} & D \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} P^{-1} & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & P^{-1} \end{pmatrix}$.
La matrice du milieu est diagonale (de taille $2.n$ avec une diagonale qui se répète, certes).
Quant à $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & P^{-1} \end{pmatrix}$, c'est l'inverse de $\begin{pmatrix} P & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & P \end{pmatrix}$ (il suffit de calculer leur produit et de rappeler $\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & I_n \end{pmatrix} = I_{2.n}$).
La matrice s'écrit $\mathbb{P}.\mathbb{D}.\mathbb{P}^{-1}$. C'est ce qu'on appelle « matrice diagonalisable »).

Pour ce qui est de $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & A \\ A & 0_{n,n} \end{pmatrix}$, je commence simplement en prenant $n = 1$ pour saisir.
La matrice « presque par blocs » $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (exercice classique).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

On généralise l'idée par blocs

$$\begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix}$$

et ceci prouve qu'on va pouvoir continuer et diagonaliser par blocs.

Il manque un détail : la matrice « de passage » $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est elle inversible.

- *Réflexe de l'élève physicien : je vais trouver son déterminant et montre qu'il est non nul.*
- *Réflexe de l'élève mathématicien : je vais trouver son inverse en devinant et en m'inspirant de la dimension* 2.
- *Réflexe de l'élève ni physicien ni mathématicien : je croyais que la définition d'inversible c'était « déterminant non nul, en quoi lui trouver un inverse prouve qu'elle est inversible ».*
- *Réflexe de linguiste : « t'est con ou tu le fais exprès inversible, par définition même, c'est quoi ? ».*

Suivons l'idée du matheux

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n/2 & I_n/2 \\ I_n/2 & -I_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2.n}$$

Et terminons avec

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^{-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & -D \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^{-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n/2 & I_n/2 \\ I_n/2 & -I_n/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & -D \end{pmatrix}$$

◁31▷ ♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y_t^{(3)} + a_t.y''_t + b_t.y_t + c_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$.
Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u^{(3)} & v^{(3)} & w^{(3)} \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ $(\forall t)$.

On constate : $\begin{array}{lll} \omega = & u.v'.w'' & -u.v''.w' \\ & +u'.v''.w & -u'.v.w'' \\ & +u''.v.w' & -u''.v'.w \end{array}$

On dérive $\begin{array}{lllllll} \omega' = & u'.v'.w'' & u.v''.w'' & u.v'.w^{(3)} & -u'.v''.w' & -u.v^{(3)}.w' & -u.v''.w'' \\ & +u''.v''.w & +u'.v^{(3)}.w & +u'.v''.w' & -u''.v.w'' & -u'.v''.w'' & -u'.v.w^{(3)} \\ & +u^{(3)}.v.w' & +u''.v'.w' & +u''.v.w'' & -u^{(3)}.v'.w & -u''.v''.w & -u''.v'.w' \end{array}$

Beaucoup de termes se simplifient :

$\omega' = u.v'.w^{(3)} - u.v^{(3)}.w' + u'.v^{(3)}.w - u'.v.w^{(3)} + u^{(3)}.v.w' - u^{(3)}.v'.w$

Et on reconnaît $\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u^{(3)} & v^{(3)} & w^{(3)} \end{vmatrix}$.

On remplace $\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ -a.u'' - b.u' - c.u & -a.u'' - b.u' - c.u & -a.w'' - b.w' - c.w \end{vmatrix}$.

On ajoute un multiple de la première ligne sur la dernière ; le déterminant ne change pas (caractère tri-linéaire et alterné) :

$\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ -a.u'' - b.u' & -a.u'' - b.u' & -a.w'' - b.w' \end{vmatrix}$.

Cette fois, on ajoute la seconde ligne sur la dernière : $\omega' = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ -a.u'' & -a.u'' & -a.w'' \end{vmatrix}$.

On sort a par tri-linéarité : $\omega' = -a.\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ a.u'' & a.u'' & a.w'' \end{vmatrix}$.

C'est ce qu'on voulait.

◁32▷ ♡ On donne $A(1,1)$, $B(2,4)$ et $C(5,3)$. Placez D sur la droite (BC) pour que (ABD) ait pour aire 2.

Comme D est sur (BC), on a $\det(\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BD}) = 0$. On résout $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

On trouve $x + 3.y = 14$.

Et si on est en MPSI2, on propose $x + 3.y = 14$. C'est une équation de droite.
Elle passe par B et par C ($2 + 3.4 = 14$ et $5 + 3.3 = 14$). C'est donc elle.

On veut ensuite $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = 4$. On veut donc cette fois $\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & y-1 \end{vmatrix} = 4$.

On a l'intersection de deux droites. On résout et on trouve $\left(\frac{7}{5},\ \frac{21}{5}\right)$.

Mais il y a aussi $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = -4$ car les aires sont algébriques. La solution est cette fois $\left(\frac{13}{5},\ \frac{19}{5}\right)$.

◁33▷ ♡ Une suite u est définie par $\exists(\alpha,\ \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha.(u_n)^\beta$.
Exprimez u_n à l'aide de u_0, α, β et n (c'est ♡ mais ça peut être long quand même).

On peut calculer les premiers.
Mais en fait, la suite $\ln(u_n)$ est celle qui nous intéresse. On la note a_n et elle vérifie $a_{n+1} = \beta.a_n + \ln(\alpha)$.
Elle est presque géométrique de raison β.

On cherche le point fixe : $x = \beta.x + \ln(\alpha)$: $x = \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On pose alors $b_n = a_n - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On reporte : $b_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$

$$b_{n+1} = \beta.a_n + \ln(\alpha) - \frac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$$
$$b_{n+1} == \beta.a_n + \beta.\frac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$$
$$b_{n+1} = \beta.b_n$$

Elle est géométrique de raison β : $b_n = \beta^n.b_0 = \beta^n.\Big(a_0 - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}\Big)$.

On reporte : $a_n = \beta^n.\Big(a_0 - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}\Big) + \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On revient à u_n : $\boxed{u_n = (u_0)^{(\beta^n)}.\alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}}$

L'exposant β^n sur u_0 était facile à deviner. Celui sur α était plus long à mettre en place. Cala dit, on voyait venir la somme de termes en β^k.

◁34▷

Bintou vient de faire une partie de puissance 4 ou morpion contre Aïssata qui s'est conclue par un nul. Il n'y a aucun alignement de quatre croix ni de quatre cercles, que ce soit en ligne, colonne ou diagonale. Version Bintou : Retrouvez le contenu des cases qui manquent. Combien de solutions ?
Version I.P.T. : une matrice de taille 5 sur 5 contient des 0 et des &, il faut vérifier qu'il n'y a aucun alignement de quatre pions.

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ			
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Au moins une des case se déduit tout de suite pour qu'il n'y ait pas d'alignement de trois $\mathcal{O}$

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	là		
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Mais alors, pour éviter un alignement de trois croix, une nouvelle case est forcée.

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	χ		
χ	$\mathcal{O}$		là	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Et le jeu se poursuit avec le même argument à chaque fois, jusqu'à

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ	$\mathcal{O}_3$	$\mathcal{O}$	χ_7
$\mathcal{O}_5$	χ	χ_0	χ_4	$\mathcal{O}_6$
χ	$\mathcal{O}$	χ_2	$\mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_8$			$\mathcal{O}$

Les indices indiquent l'ordre de remplissage.
Il reste deux cases, qu'on remplit comme on veut du moment qu'il n'y a pas deux $\mathcal{O}$. Sauf qu'il n'y a pas non plus de χ dans la dernière à cause d'une diagonale. Finalement, il ne reste qu'un choix $\boxed{\chi \mid \mathcal{O}}$.
On peut compter les χ et les $\mathcal{O}$ afin de savoir qui a commencé et terminé.

La version ITC ne sera pas traitée ici.

◁35▷

Une matrice carrée `M` *(tableau donné sous forme de liste de listes)* est dite magique si chaque somme en ligne est égale à chaque somme en colonne, elle même égale à chaque somme des diagonales. Écrivez un script Python qui vérifie si une matrice passée en argument est un carré magique.
Par exemple `test([[16, 3, 9, 6], [2, 13, 7, 12], [5, 10, 4, 15], [11, 8, 14, 1]])` devra répondre `True`.

Complétez en carré magique $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ & 8 & & 5 \\ & & 6 & \\ & 14 & & \end{pmatrix}$.

Pour tester si une matrice `A` est magique, il faut déjà calculer la somme en question. On la calcule sur la première ligne. Ensuite, on fait défiler les lignes une à une. Si l'une n'a pas le bon total, on sort brutalement par `return False`. Et la suite du programme n'est pas exécutée.
Si on a passé le test des lignes, on passe à celui des colonnes. Si l'un d'entre eux tombe en défaut, on sort brutalement par `return False`.
Si on a passé aussi ce test, on calcule la somme d'une diagonale *(somme des `A[i][i]`)*, et on regarde. Si on est en échec

on sort, sinon, on passe à l'autre diagonale *(celles des* `A[i][n-i-1]` *)*.
Si tous les tests ont été passés sans erreur, on valide la matrice par un `return True`. Il peut être sans test, puisque pour accéder à la dernière ligne du programme, il faut avoir tout traversé sans faute.

```
def Test(A) : # définition de la procédure
....n = len(A) # pour ne pas aller le cherche à chaque fois
....Somme = sum(A[0][k] for k in range(n)) # somme des éléments de la ligne d'indice 0
....for i in range(n) : # ligne par ligne
........Somme_i = sum(A[i][k] for k in range(n)) # somme des éléments de la ligne
........if Somme_i != Somme : # test pour la ligne
............return False # échec
....for k in range(n) : # on passe aux colonnes
........Somme_k = sum(A[i][k] for i in range(n)) # on somme les A(i)(k) avec i qui bouge
........if Somme_k != Somme : # on teste
............return False # on invalide
....Somme_diag = sum(A[i][i] for i in range(n)) # la somme en diagonale
....if Somme_diag != Somme : # son test
........return False # raté
....Somme_antidiag = sum(A[i][ni-1] for i in range(n)) # l'autre somme attention à n-i-1
....if Somme_antidiag != Somme :
........return False # dernier test : raté, dommage !
....return True # tout s'est bien passé, on la félicite
```

On a intérêt à poser pour ne pas solliciter à chaque fois des `for in in range(len(A))` qui alourdissent la frappe et font qu'à chaque boucle, le compilateur doit aller rechercher la longueur de la liste qu'on lui avait pourtant déjà demandée au tour précédent.

La matrice de l'énoncé faisant l'objet du test est $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 13 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 4 & 15 \\ 11 & 8 & 14 & 1 \end{pmatrix}$ et on a dix sommes valant toutes 34.

Pour $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ & 8 & & 5 \\ & & 6 & \\ & 14 & & \end{pmatrix}$ la somme vaut aussi 34, c'est la première ligne qui le dit.

On complète la diagonale : $16 + 8 + 6 + ? = 34$.
On complète ensuite la colonne associée : $13 + 5 + ?? + 4 = 34$.
On complète aussi la seconde colonne : $3 + 8 + ? + 14 = 34$.
C'est maintenant la troisième ligne qu'ont peut compléter.

On en est à $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ & 8 & & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 12 \\ & 14 & & 4 \end{pmatrix}$

On nomme a, b, c et d les quatre qui manquent :
$a + 8 + b + 5 = 34$, $c + 14 + d + 4 = 34$,
$16 + a + 7 + c = 34$, $2 + b + 6 + d = 34$ et aussi $c + 9 + b + 13 = 34$.
Il n'y a qu'une solution :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 10 & 8 & 11 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 12 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix}}.$$

◁36▷

♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

			11		17		
1		31		3			
	25		21		33		9
5		29		27		19	36
			13		35		15
		23		7			

		15	20		
		.	.		
1	..	.	.	..	6
12	..	.	.	..	17
		.	.		
		4	9		

		2	11	32	17		
1		31	26	3	10		18
30	25	4	21	12	33	16	9
5	22	29	34	27	8	19	36
24		6	13	20	35		15
		23	28	7	14		

		15	20		
		2	7		
1	14	11	16	19	6
12	3	8	5	10	17
		13	18		
		4	9		

◁37▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $A.B$ et diagonalisez la (valeurs propres α et β).
Trouvez U, V et W non nuls vérifiant $(B.A).U = \alpha.U$, $(B.A).V = \beta.V$ et $(B.A).W = 0_3$.
Diagonalisez $B.A$.
Calculez $Tr((A.B)^n)$ et $Tr((B.A)^n)$ pour tout entier naturel n.

On trouve $A.B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, puis $Tr(A.B) = 7$ et $\det(A.B) = 12$.
Le polynôme caractéristique est $X^2 - 7.X + 12$.
Les deux valeurs propres sont 3 et 4.
On choisit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (on précise qu'on fait un choix, car il y a aussi $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$).
Pour les colonnes de P, on résout $M.U = 3.U$ puis $M.V = 4.V$.
On résout avec deux équations à chaque fois (qui certes se résument à une seule) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.x \\ 3.y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrcl} 2.x & +2.y & = & 3.x \\ -x & +5.y & = & 3.y \end{array} \Leftrightarrow x = 2.y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.x \\ 4.y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrcl} 2.x & +2.y & = & 4.x \\ -x & +5.y & = & 4.y \end{array} \Leftrightarrow y = x$$

Bref : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (on peut choisir x comme on veut, non nul et trouver y)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le produit dans l'autre sens donne $B.A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Comment trouver les trois valeurs propres sans aller chercher du gros matériel comme un élève qui n'a pas confiance dans le sujet de l'exercice ?
Beh oui, il suffit de suivre le sujet ; on résout $(B.A).U = 3.U$ avec U forcément de taille 3.
Ceci nous donne un système de trois équation à trois inconnues dégénéré

$$\begin{array}{rrrcl} 3.x & +y & +z & = & 3.x \\ -3.x & & +3.z & = & 3.y \\ & y & +4.z & = & 3.z \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2.y \\ z & = & -y \end{array}$$

(la troisième équation ne sert à rien, mais surtout, on raisonne par équivalence, on ne l'oublie pas ; et si vous n'écrivez que des $\Rightarrow$ vous avez perdu sur toute la ligne, surtout sur celle de la logique, de la rigueur et des sciences).

On fait des même avec les autres équations demandées

$(B.A).U = 3.U$	$(B.A).V = 4.V$	$(B.A).W = 0.W$
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Et finalement, on a trois vecteurs propres et trois valeurs propres

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on a diagonalisé $B.A$, avec une valeur propre de plus.

Ayant diagonalisé $A.B$, on écrit avec des notations naturelles $A.B = P.D.P^{-1}$ puis avec tous nos résultats usuel(concaténation, récurrence sur les matrices diagonale) : $(A.B)^n = P.D^n.P^{-1}$ et

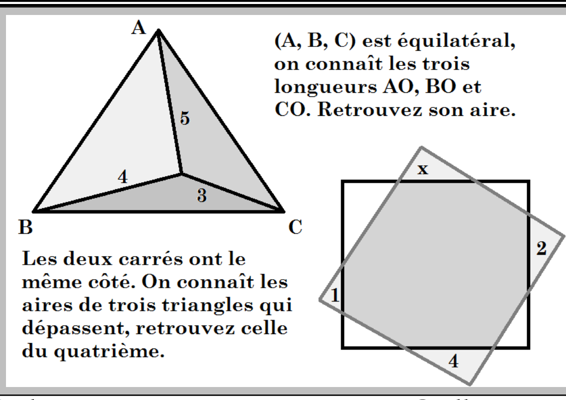
$$Tr((A.B)^n) = Tr(D^n) = Tr(\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}) = 3^n + 4^n$$

Ensuite, avec des matrices de taille 3 sur 3

$$Tr((B.A)^n) = Tr(D^n) = Tr(\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix}) = 3^n + 4^n + 0^n$$

Pourquoi 0^n et pas 0 ? Pour avoir $Tr((B.A)^0) = Tr(I_3) = 3$. Pas mal, non ?
Et bien sûr, $(A.B)^n$ et $(B.A)^n$ ont la même trace.

Sauf pour $n = 0$.
Mais au fait, on sait montrer $Tr(A.B) = Tr(B.A)$, mais passe-t-on facilement de $Tr(A.B.A.B \ldots A.B)$ à $Tr(B.A.B.A \ldots B.A)$?



◁38▷ Guillaume Deslandes se déplace le long de l'axe des entiers relatifs. Il part de la position initiale m (dans $\mathbb{Z}$) et avance à chaque instant d'une même pas p (dans $\mathbb{Z}$). De votre côté, à chaque instant n (dans $\mathbb{N}$), vous pouvez poser une question $G(k)$: « Guillaume est il en k » (k dans $\mathbb{Z}$), et Clément vous répond juste par oui ou par non. Saurez vous trouver le position de Guillaume en un nombre fini de questions ?

A chaque question que vous posez, Guillaume se déplace. Certes toujours de la même distance p, mais il bouge.

Si p est nul (après tout, il peut en avoir marre de bouger depuis le temps qu'il pose cet exercice), vous pouvez finir par le toucher.
Vous visez en 0, puis en 1, puis en -1, puis en 2, puis en -2 et ainsi de suite.
De la sorte, vous couvrez $\mathbb{Z}$.

Certes, il vous faut un temps infini pour couvrir $\mathbb{Z}$, mais chaque entier est atteint en un temps fini.
Précisément, m est atteint en $2.m$ essais si m est positif et en $2.|m| + 1$ essais si m est négatif.

Si p vaut 1 (Guillaume avance de une case à chaque fois), vous pouvez poser toujours la même question : est il en 0.
Si il est parti d'une case m négative, votre question tombera juste à un moment.
Mais s'il est parti d'une case m positive, il va s'éloigner de plus en plus. Il faut revoir votre stratégie.

On propose alors de viser les cases selon le schéma suivant

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$G(k) =$	0	2	1	5	2	8	3	11	4	14	5	17	6	20
ne lisez pas cette ligne	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7

Formule explicite : si k est pair de la forme $k = 2.m$, posez $G(k) = m = k//2$.
Si k est impair de la forme $2.m - 1$, posez $G(k) = 3.m - 1$.

Imaginons que Guillaume est parti de la case 0. Vous le détectez dès le premier test.
S'il est parti de la case 1, vous le détectez à $k = 1$ (il a avance en case 2 et c'est là que vous le visez).
S'il est parti de la case 2, vous le détectez à $t = 3$, puisqu'il est bien alors en case 5.
S'il est parti de la case 4, vous le détectez à $t = 7$, puisqu'il est bien alors en case 11.
S'il est parti de la case 5, vous le détectez à $t = 9$, puisqu'il est bien alors en case 14.
S'il est parti de la case m (positif), vous le détectez à $t = 2.m - 1$ (en proposant $3.m - 1$, puisqu'il est bien alors en case $3.m - 1$.

S'il est parti de la case -1, vous le détectez à $t = 2$, puisqu'il est bien alors en case 1.
S'il est parti de la case -2, vous le détectez à $t = 4$, puisqu'il est bien alors en case 2.
S'il est parti d'une case négative m, il finit par passer par la case $|m|$. A un instant pair, puisqu'il est passé de m à $-m$. Et justement, c'est à l'instant pair $2.m$ que vous visez cette case.

Mais si on ne connaît ni m ni p ?

Une information : à l'instant k, Guillaume est en position $m + k.p$.

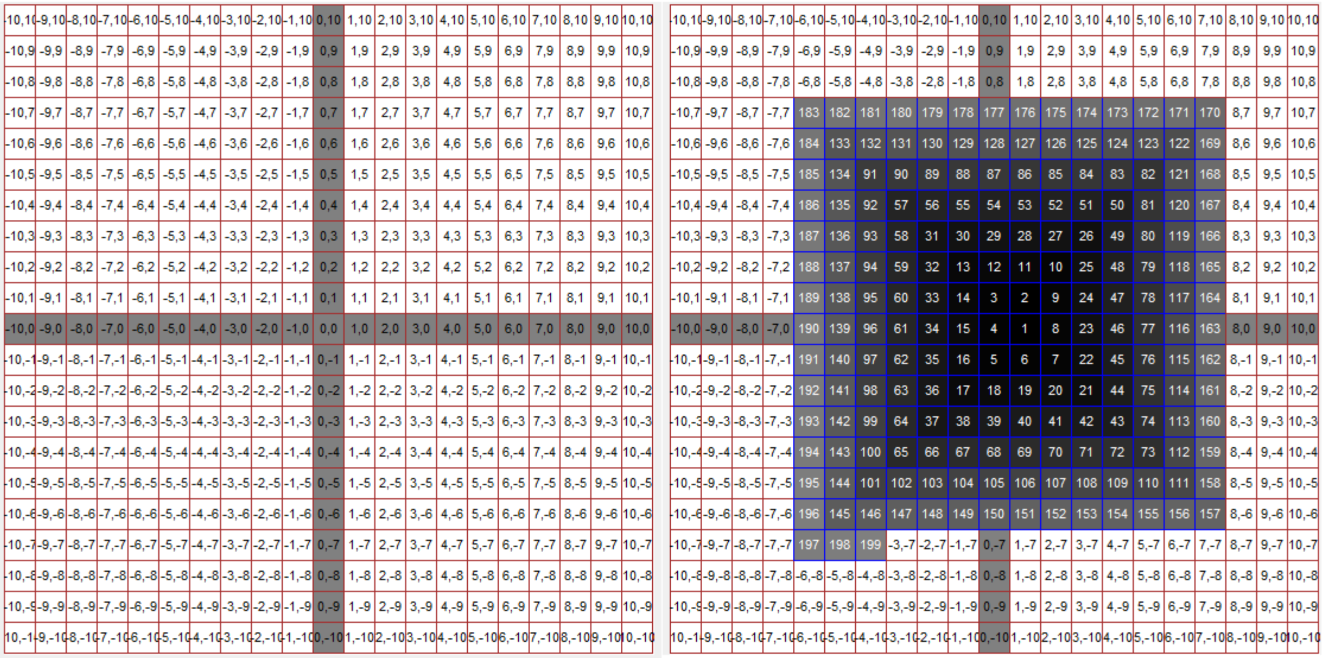
Ce dont on a besoin : une fonction G vérifiant $G(k) = m + k.p$.
Ou plutôt : $\exists k,\ G(k) = m + k.p$.

Et même proprement

$$\forall (m,\ p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{N},\ G(k) = m + k.p$$

Or, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sur le schéma suivant, on voit les grandes lignes d'une telle bijection « en escargot ».



On n'a pas besoin de formule explicite, disons qu'on a une bijection $n \longmapsto (x_n,\ y_n)$ qui à chaque entier naturel associe un couple d'entiers relatifs,
et sa réciproque, qui à tout couple de relatifs $(m,\ p)$ associe un entier naturel n vérifiant $x_n = m$ et $y_n = p$.

Sur le dessin, par exemple, on lit que $(m,\ p) = (7,\ 6)$ a pour antécédent $n = 169$.

La proposition devient alors de tester les cases suivantes :

intant $n =$	0	1	2	3	4	5	6	...	n	...
case testée	$x_0 + 0.y_0$	$x_1 + 1.y_1$	$x_2 + 2.y_2$	$x_n + 3.y_3$	$x_4 + 4.y_4$	$x_5 + 5.y_5$	$x_6 + 6.y_6$		$x_n + n.y_n$	

La formule est donc : à l'instant n, poser la question « Guillaume est en $x_n + n.y_n$ ».

En effet, si Guillaume est pari de la case m avec un pas de p, il existe un antécédent n vérifiant $x_n = m$ et $y_n = p$.
A l'instant k, Guillaume est en $m + k.p$, c'est à dire $x_n + k.y_n$.
Et en particulier, à l'instant n, il est en $x_n + k.y_n$.
Et vous posez la question « Guillaume est en $x_n + n.y_n$ ».
Et il est obligé de vous répondre « oui ».

◃39▹

u_0 est entre 0 et 1. On définit $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrez que la suite converge, vers 0 (en décroissant).[a]
Étudiez la convergence de la série de terme général $(u_n)^2$ et du produit infini de terme général $(1 - u_n)$ (il y a du télescopage dans l'air).

a. dans l'ordre : existence, encadrement par 0 et 1, positivité, décroissance, convergence, limite

On commence l'étude en calculant $u_{n+1} - u_n$.
NON ! On commence en étudiant l'existence de la suite : par récurrence, chaque terme existe.

On calcule ensuite $u_{n+1} - u_n$.

Non, on fait le dessin. Et on encadre.

Enfin on calcule $u_{n+1} - u_n$. Oh, c'est un carré de réel au signe près. C'est $-(u_n)^2$.
La suite est décroissante.

Comme elle est minorée (par 0) elle converge vers son plus grand minorant. Qui a de fortes chances d'être 0. Mais ça, on ne le sait pas.

Toutefois, la limite λ (dont l'existence vient d'être prouvée) vérifie $\lambda = \lambda - \lambda^2$.
C'est bon, la limite est nulle.

On pose $U_N = \sum_{n=0}^{N} (u_n)^2$.
Le terme général $(u_n)^2$ converge vers 0.
Les différences $U_{N+1} - U_N$ tendent vers 0.
Mais pour la millième fois, ça ne prouve rien (vous connaissez le logarithme ? : $\ln(n+1) - \ln(n)$ tend vers 0 mais $\ln(n)$ tend vers l'infini).

En fait, on télescope : $U_N = \sum_{n=0}^{N} (u_n)^2 = \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$.
On a non seulement la convergence, mais en une fois aussi la limite : u_0.

On calcule aussi

$$P_N = \prod_{n=0}^{N} (1 - u_n) = \prod_{n=0}^{N} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{N+1}}{u_0}$$

ce produit converge vers 0.
Et on écrira $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - u_n) = 0$, même si aucun terme n'est nul.