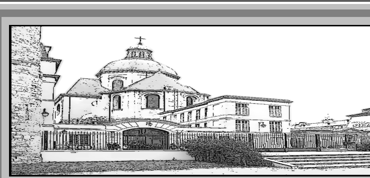
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 13 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025

TD14

◁0▷ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 6 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles a et b.

◁1▷ ♡ Je ne veux pas qu'elle soit inversible : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. C'est jouable ?

◁2▷ ♡ Pouvez vous choisir a pour que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 3 \end{pmatrix}$ soit inversible pour tout b.

◁3▷ On sait que $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix}$ *(notée M)* a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour valeur propre -3. Calculez son déterminant. Diagonalisez la.

◁4▷ Déterminez la somme des chiffres de $45 \times 999...99$ *(il y a 45 chiffres 9)*.

◁5▷ On donne $Card(A) = 10$, $Card(B) = 15$, $Card(C) = 20$, $Card(A \cap B) = 7$, $Card(A \cap C) = 9$ et $Card(B \cap C) = 8$. Pouvez vous déduire la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$? Pouvez vous encadrer la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$?

◁6▷ Montrez $(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$ pour tout x réel et tout n au moins égal à 2 *(indication : $(1+x^2).Arctan'(x) =?$)*.

◁7▷ ♡ Quel est le coefficient de $a^{2000}.b^0.c^{10}.d^9$ dans $(a+b+c+d)^{2019}$?

◁8▷ Qui est le plus grand : 2^{22}, $\binom{34}{7}$, $\binom{25}{13}$?
(si possible sans calculatrice évidemment).

◁9▷ Combien de $\binom{2022}{k}$ sont impairs ? (Python ?)

◁10▷ ♣ : C'est facile, les produits matriciels : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$, il suffit de coller les chiffres côte à côte. Vous m'en trouvez d'autres ?
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 36 \\ 36 & 22 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 55 \\ 33 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 77 \\ 22 & 38 \end{pmatrix}$

◁11▷ Sur une ligne du triangle de Pascal, j'ai trouvé côte à côte les deux entiers suivants. Sur quelle ligne suis-je ? Et quel est l'indice de colonne ?
$3.5^2.7.13.17.19.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$
$3^3.5^2.11.13.17.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$

Charade introuvable :
Mon premier est un oiseau de l'alphabet.

Mon second est un milli-iule.

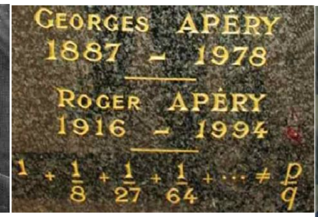
Mon troisième est en double sur le vélo en quintuple sur la voiture.

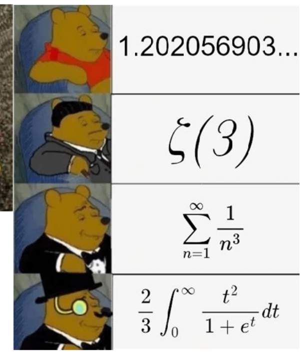
Mon quatrième est suivi de son double dans l'alphabet.
Vous ne trouvez pas mon tout.

◁12▷ *Sujet du vingtième siècle. Première partie (sur quatre) d'un sujet (E.N.S. filière PC) consistant, destiné à démontrer un théorème établi par*

Roger Apery en 1978 : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ *est irrationnel.*

mathématicien français, fils d'immigré grec, 1916-1994, lycée Faidherbe à Lille, lycée Louis le Grand (il habitait alors à Paris le quartier de la Goutte d'Or), E.N.S., premier à l'agrégation de maths, un des membres fondateurs en 1941 du Front National (non, celui de 1941, dans le cours d'histoire : on vous en a parlé « Front National (de la Résistance) », confondez pas !), sur sa pierre tombale au colombarium du Père Lachaise, il est gravé $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots \neq \frac{p}{q}$,





En 1938, Apéry signa la pétition d'Edouard Herriot contre les accords de Munich, et renvoya sa carte du Parti Radical à l'autre Edouard, Daladier.
A son retour de captivité en 1941, Apéry se replongea dans l'action politique sous l'influence de son ami Marrot, qui était communiste. Ceci malgré sa déception devant l'attitude du Parti Communiste envers le Traité de Non-agression entre l'Allemagne nazie et l'Union Soviétique en 1939 qui avait mis fin à tous ses espoirs en faveur du Front Populaire. Il s'engagea dans le réseau Louis-Fernand-Marty sous le pseudonyme de Arthur Morin. Il devint président du Front National, un mouvement de résistance au sein de l'Ecole Normale Supérieure, quand son prédécesseur, Marc Zamansky, fut arrêté et déporté à Mathausen. Apéry organisa une marche de protestation contre les arrestations de Georges Bruhat et de Jean Baillou ; il participa à la manifestation contre l'obligation de porter l'étoile jaune ; il distribua la presse clandestine, Le Courrier du Peuple entre autres (incarnation clandestine du journal Le Jacobin, organe des Jeunes Radicaux-Socialistes de la Seine), qui parut pour la première fois lors de son retour du stalag ; il fit passer des hommes dans la clandestinité, fabriqua des faux papiers d'identité et transporta des armes.
Le danger était omniprésent, et son courage atteignait parfois la témérité, comme lorsqu'il insulta un adjudant français en uniforme allemand à Drancy et le menaça de la cour martiale, sous l'œil d'un officier allemand, qui heureusement ne parlait pas français. En tout cas, Le Courrier du Peuple ne camouflait pas son message sous des formules ésopiennes : " Au travail, peuple de France ! Détruisez l'effort de guerre allemand grâce aux bombes et au sabotage ! Plutôt que de pleurer sur les victimes des bombardements, le peuple devrait se jeter dans la résistance et concurrencer la Royal Air Force en matière de destruction des usines et des équipements allemands ". Et ceci date de novembre 1943.
Lorsque la Gestapo arrêta un étudiant absent de la rue d'Ulm dans la nuit du 4 Août 1944, elle entreprit une fouille systématique des lieux. Apéry, qui fabriquait de faux papiers dans sa chambre, brûla tous les documents compromettants. La Gestapo emmena en otages Madame Bruhat et Madame Baillou, pour les échanger le lendemain contre leurs maris ; la lingère, sans en comprendre les implications, se plaignait bruyamment des cendres dans la chambre d'Apéry. Bruhat et Baillou furent déportés et Bruhat périt à Buchenwald.
C'est un miracle qu'Apéry ait survécu sans une égratignure. Sa personnalité du genre tout-ou-rien, associée à une manière d'être distraite et absente, formait une combinaison incompatible avec les précautions nécessaires en ces temps-là. Il sentit plusieurs fois le souffle du danger sur lui, mais il prenait un plaisir enfantin à des épisodes comme celui où il fut arrêté par la Gestapo sur le Boul'mich' avec un long paquet enveloppé de journaux sous le bras. " Est-ce un fusil ? " " Non, c'est une jambe ". C'était la prothèse de Marrot, qu'il emmenait en réparation.
Source : https ://math.univ-lille1.fr/~bhowmik/seminaire/AperyFR.htm

---

I~0) La suite (a_n) est définie par $a_1 = 2$ et pour tout n : $\boxed{a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1}$ Calculez a_n pour n de 1 à 5. Montrez que c'est une suite d'entiers naturels strictement croissante, divergente.

I~1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne a_n.

I~2) Montrez pour n supérieur ou égal à 2 : $2^{2^{n-2}} + 1 \leqslant a_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

II~0) Déduisez pour n plus grand que 7 : $\frac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \frac{1}{2^{19+n}}$.

II~1) Déduisez que la série de terme général $\frac{\ln(a_n)}{a_n}$ converge, et écrivez un script qui calcule sa somme à 10^{-5} près (on trouvera 1.08239).

II~2) Déduisez que la suite $\left(\prod_{n=1}^{N} \sqrt[a_n]{a_n}\right)$ est majorée, et donnez un majorant $\boxed{w}$ le plus petit possible avec trois chiffres exacts.

III~0) Montrez pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{N+1} - 1}$.

III~1) Pour tout n on pose $\boxed{C(n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} \left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}}$ où k est l'unique entier vérifiant $a_k \leqslant n < a_{k+1}$. Calculez $C(10)$.

La formule $C(n)=n!.\prod_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)^{-1}$ serait elle cohérente ?

III∼2) Écrivez un script `Python` qui pour n donné calcule $C(n)$.

III∼3) Montrez, en pensant aux coefficients du multinôme que chaque $C(n)$ est entier.

III∼4) Montrez : $C(n)\leqslant n^n.\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]^{-[n/a_i]}$ et respirez un grand coup.

III∼5) Montrez que si a et n sont des entiers vérifiant $0<a\leqslant n$, alors on a $\frac{\left(\frac{n}{a}\right)^{n/a}}{\left[\frac{n}{a}\right]^{[n/a]}}\leqslant\left(\frac{e.n}{a}\right)^{(a-1)/a}$ [1].

III∼6) Déduisez : $C(n)\leqslant n^{k+1}.e^k.w^n$ (oui, il y a des n et des k, c'est logique, et w a bien été défini plus haut).

IV∼0) p est un nombre premier inférieur ou égal à n. On pose $q=\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$. Montrez : $p^q\leqslant n<p^{q+1}$.

IV∼1) Montrez pour tout m entre 1 et n que l'exposant de p dans $m!$ est $\sum_{j=1}^{q}\left[\frac{m}{p^j}\right]$.

IV∼2) Déduisez l'exposant de p dans $C(n)$.

IV∼3) Montrez pour tout réel x de $[1,\ +\infty[$ et tout k de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{x}{a_i}\right]\leqslant[x]$ (indication : montrez déjà $\left[\frac{x}{a}\right]=\left[\frac{[x]}{a}\right]$).

V∼0) Pour tout n, on note $\boxed{d_n}$ le p.p.c.m. des entiers de 2 à n (par exemple $d_6=60$), calculez d_{11}.

V∼1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et calcule d_n.

V∼2) Déduisez des parties précédentes que $C(n)$ est un multiple de d_n.
V∼3) Montrez qu'à partir d'un rang n_0 on a $d_n\leqslant 3^n$.

◃13▹ ♡ Sachant $a+b=3$ et $6^a+6^b=42$, calculez a^6+b^6.

◃14▹ Montrez qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ façons de ranger p objets indistinguables dans n boites numérotés (les boites pouvant contenir un nombre quelconque d'éléments et pouvant même être vides).
Indication : comment coder ces histoires d'ensembles avec un mot de n+p-1 lettres 0 ou 1 ?

◃15▹ Montrez que pour tout n, il existe $n+1$ coefficients $a_{n,k}$ *(k de 0 à n)* vérifiant pour tout θ : $\cos^n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}.\cos(k.\theta)$ et calculez $a_{n,n}$.

◃16▹ ♡♠ On définit $\varphi=t\longmapsto e^{1/t}$. Montrez pour tout n l'existence d'un polynôme P vérifiant $\varphi^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{t^{2.n}}.\varphi(t)$ pour tout t.

Donnez le relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de P_n et P_n'. Calculez P_3.

De quel degré est P_n ?

Montrez pour tout x de $]0,\ +\infty[$: $x^2.\varphi'(x)+\varphi(x)=0$.

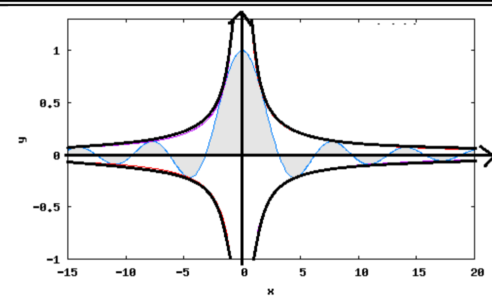
Déduisez sans récurrence : $x^2.\varphi^{(n+1)}(x)+2.n.x.\varphi^{(n)}(x)+n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(x)+\varphi^{(n)}(x)=0$ pour tout x.

Trouvez la relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de $P_n$et P_{n-1} *(sans faire intervenir de dérivées)*.

◃17▹ On définit : $f=x\longmapsto\sqrt{1+x^2}$. Calculez $f^{(n)}(0)$ pour n de 0 à 3.
Simplifiez $f(x).f'(x)$ pour tout x réel.

1. indication : montrez déjà $\frac{n-a+1}{a}\leqslant\left[\frac{n}{a}\right]$

Calculez alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.f^{(k+1)}$ pour tout entier naturel n.
Calculez alors $f^{(n)}(0)$ pour n de 4 à 9.
Montrez que $f^{(2.n+1)}(0)$ est nul pour tout entier naturel n.



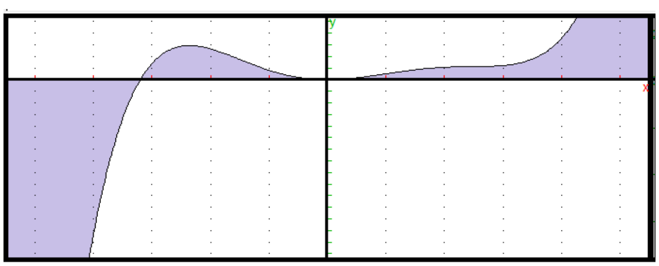
18 On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrez qu'on prolonge f par continuité en 0. Montrez que f est dérivable en 0 *(limite de taux d'accroissements)*. Calculez aussi $f''(0)$ après en avoir prouvé l'existence par limité de taux d'accroissements.
On admet que f est de classe C^∞. En utilisant la formule de Leibniz pour $f.Id$, calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout n.

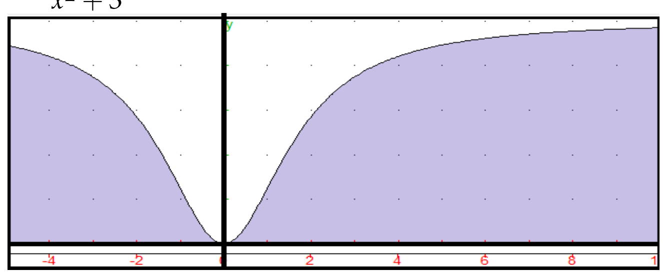
---

19 Donnez (si vous la trouvez) la limite de $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

---

20 ♡ Donnez un intervalle le plus grand possible sur lequel $x \longmapsto 3.x^5 - 20.x^4 - 110.x^3 + 900.x^2$ est convexe.
Donnez un intervalle le plus grand possible sur lequel $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+3}$ est convexe.





« Convexe », à ce stade de l'année, ce sera dérivée seconde positive » puisqu'il y a une dérivée seconde.

---

21 Il y a trois élèves dans cette classe dont les prénoms sont ambigus (on dit « épicènes ») : Claude, Dominique et Camille. Je sais que si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille. Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille. Si Dominique est une fille, alors Camille aussi. Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur.
Donnez moi le sexe de chacun (euh, non, indiquez le moi, c'est tout).

---

22 ♡ Montrez que la dérivée de $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t f(u).sh(t-u).du$ *(où f est une application continue)* est .$t \longmapsto \displaystyle\int_0^t f(u).ch(t-u).du$.

(vous serez conduit à écrire $sh(t).\displaystyle\int_0^t f(u).ch(u).du - ch(t).\int_0^t f(u).sh(u).du$).

23

35	$+$		$-$		$=$	37
$-$	■	$+$	■	$+$	■	■
	$+$	9	$+$		$=$	14
$-$	■	$+$	■	$\times$	■	■
	$\times$		$+$		$=$	61
$=$	■	$=$	■	$=$	■	■
26	■	23	■	19	■	■

29	$-$		$+$		$=$	31
$-$	■	$\times$	■	$+$	■	■
	$+$		$+$	2	$=$	17
$-$	■	$-$	■	$\times$	■	■
	$\times$		$-$		$=$	30
$=$	■	$=$	■	$=$	■	■
12	■	17	■	17	■	■

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

◁ 24 ▷ Dérivez et simplifiez $\varphi = t \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{(1-t)^k}{k!}.h^k.f^{(k)}(a+t.h)$. Calculez $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ en prenant garde au terme $k=0$.

◁ 25 ▷ La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculez la somme des termes de M^{2018}.

◁ 26 ▷ ♡ Montrez $2.\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$ *(par parties et remontez chercher* $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$*).*
Pardon ? Déjà posé ?

◁ 27 ▷ A et B sont deux ensembles. Montrez : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.[2]
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 11$.
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 10$.

◁ 28 ▷ En développant de deux façons $(1+X)^p.(1+X)^q$, simplifiez $\sum_{i+j=k} \frac{p!.q!}{i!.j!.(p-i)!.(q-j)!}$.
Effectuez les produits matriciels suivants et calculez leurs déterminants

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

◁ 29 ▷ ♠♡ La suite de Fifi Bonacci est défifinie par ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 donnés et $\phi_{n+2} = -\phi_{n+1} + \phi_n + \phi_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *(les lapins de la génération $n+1$ ou plutôt $n-1$ meurent).*
Écrivez un script Pypithon qui calcule ϕ_n pour n donné.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$ *(donc U_0 est donné).* Trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n.
On pose alors $B = A + I_3$. Calculez B^2, B^3 et B^4. Montrez : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout k supérieur ou égal à 2. Calculez $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Calculez alors A^n pour tout n à l'aide de la formule du binôme dont vous justifierez l'utilisation.
Exprimez alors U_n à l'aide de U_0, puis ϕ_n à l'aide de n, $(-1)^n$, ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2.
Retrouvez le résultat précédent par simple récurrence sur n.

◁ 30 ▷ Au lycée Louis le Gland, il y a deux classe : MP et PC. Les résultats des élèves sont les suivants :

élève	Alain	Bernard	Claire	Didier	Élise	Francis	Guillaume	Hélène	Ibrahim
classe	MP	MP	PC	MP	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	non	non

élève	Jenny	Kevin	Laurent	Mohamed	Noémie	Omar	Pascale	Quentin	Richard
classe	PC	PC	PC	MP	MP	MP	MP	MP	MP
a intégré	oui	non	non	oui	non	oui	non	oui	oui

élève	Sonia	Thérèse	Ursula	Valérie	Wendy	Xavier	Yolande	Zoé	Alice
classe	PC	PC	MP	PC	MP	MP	PC	PC	PC
a intégré	non	non	non	oui	non	oui	non	non	non

élève	Brahim	Candy	Daniel	Eva	Fatima	Guy	Hervé	Inès	Juan
classe	MP	PC	PC	PC	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	non	oui	non	non	non	non	non	non

élève	Kate	Lily	Manfred	Nicole	Odile	Pierre	Quentin	Rudy	Stanislas
classe	PC	PC	PC	PC	PC	MP	PC	MP	PC
a intégré	non	non	oui	non	non	non	oui	oui	oui

élève	Thierry	Ulysse	Véro	William	Xavière	Yvette	Zakia	Ali	Béa
classe	MP	MP	MP	MP	MP	PC	PC	MP	PC
a intégré	non	non	non	non	non	non	non	oui	non

2. $P(A)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de A (ou sous-ensembles de A)

élève	Charles	David	Eloi	Fanny	Geneviève	Hadrien	Isis	Joanna	Klaus
classe	MP	PC	MP	MP	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	oui	oui	non	non	non	oui	non	non

élève	Léa	Marie	Nicole	Olivia	Paulot	Quentin	Rachid	Sophie	Tatiana
classe	PC	MP	PC	PC	MP	MP	PC	PC	PC
a intégré	non	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non

élève	Ulrich	Violette	Wilfried	Xenophon	Yann	Zorah	Alan	Berthe	
classe	MP	MP	MP	MP	MP	PC	MP	MP	
a intégré	oui	oui	oui	non	non	oui	oui	non	

Complétez :

	l'élève intègre	l'élève n'intègre pas	pourcentage d'intégration
MP			
PC			

Pour intégrer, valait il mieux être en MP ou PC ?
Si vous étiez un garçon, valait il mieux être en MP ou PC ?
Si vous étiez une fille, valait il mieux être en MP ou PC ?
C'est logique que l'étude par genre soit dans les deux cas contraire à l'étude générale ?

◁31▷ ♣ 0 ♣ E est un ensemble de cardinal N et les A_k *(k de 0 à $n-1$)* sont des parties de E. On définit alors la matrice S de terme général $Card(A_i \cap A_k)$ *(ligne d'indice pythonien i et colonne d'indice pythonien k)*. Montrez dans le cas $n = 2$ que $\det(S)$ est toujours positif ou nul.

♯ 0 ♯ Écrivez un script **Python** qui prend en entrée la liste `L` des parties *(chaque partie est elle même une liste sans doublon)* et retourne la matrice `S` sous forme de liste de listes *(les fonctions `len`, `in` , `reversed` et les méthodes `append`, `count`, `append`, `sort` sont autorisées, même si certaines ne servent ici à rien)*.

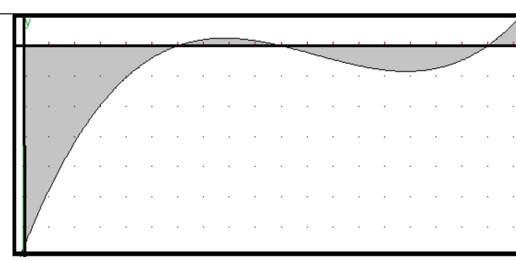
Par exemple, pour l'entrée `[[0, 1, 4, 7], [0, 2, 7], [0, 1, 6, 9]]` sa réponse sera `[[4, 2, 2],[2, 3, 1],[2, 1, 4]]`).

♯ 1 ♯ Indiquez en fonction de n et N un majorant de la complexité de votre algorithme *(au pire, les A_k sont effectivement de cardinal de l'ordre de N)*.

♣ 1 ♣ Montrez que si A_0 est égal à A_1 alors le déterminant de S est nul *($n \geqslant 2$)*.

♣ 2 ♣ Que pouvez vous dire si $Tr(S)$ est nulle ? *($n \geqslant 2$)*

♣ 3 ♣ Montrez que si l'on prend pour A_0 les filles de MPSI2, pour A_1 les élèves de MPSI2 dont le prénom commence par E (ou È), le déterminant de $S(A_0, A_1, A_2)$ sera toujours un entier naturel *(oui, donc positif, merci de l'avoir compris)*, quel que soit le choix de A_2.



Donnez une situation où l'on a $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre $Card(A \cap B \cap C)$ et $Card(A \cup B \cup C)$ pour cette matrice S ?
Donnez alors une matrice diagonale D vérifiant $Tr(S) = Tr(D)$, $\det(S) = \det(D)$ et $Tr(S^2) = Tr(D^2)$.

(là, je ne me contenterai pas de « on propose/on vérifie », je voudrai le polynôme $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ dont les racines sont les trois termes diagonaux de D avec explication, ce qui me permet en passant de définir s, d et p).

♣ 4 ♣ Trouvez P de déterminant non nul vérifiant $S.P = P.D$. *On pourrait certes alors calculer $S^n = P.D^n.P^{-1}$ mais il nous manque P^{-1}.*

♣ 5 ♣ Montrez : $S^3 = s.S^2 - d.S + p.I_3$.

♣ 6 ♣ On pose alors $U = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3)$, $V = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$ et $W = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3)$. Calculez $\det(S - 9.I_3)$, $\det(U)$, $\det(V)$.

♣ 7 ♣ Justifiez $U.V = V.U = 0_{3,3}$, $U^2 = 12.U$, complétez $W - 24.I_3 = (S - 9.I_3)\dots$ et calculez $W^2 - 24.W$, $U.W$, $W.V$ *(normalement, vous n'avez pas à faire tomber des colonnes sur des lignes, juste à être intelligent)*.

♣ 8 ♣ Trouvez u, v et w vérifiant $S = u.U + v.V + w.W$.

♣ 9 ♣ Exprimez alors S^2 comme combinaison de U, V et W.

♣ 10 ♣ Prouvez pour tout k : $S = u.3^k.U + v.5^k.V + w.9^k.W$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

♣ 11 ♣ On revient au cas général. Montrez pour tout vecteur colonne de composants x_0 à x_n : ${}^tX.S.X \geqslant 0$ *(on tentera de croiser* $\sum_{i<n} x_i.1_{A_i}$*)*.

♣ 12 ♣ Montrez que si X est un vecteur non nul et λ un réel vérifiant $S.X = \lambda.X$, alors λ est positif ou nul.

◃32▹ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, et B est une matrice vérifiant $A.B = B.A$. Diagonalisez A (matrice diagonale D et matrice de passage P).
On va montrer que B est diagonalisable, avec trois méthodes.

Méthode 1 : montrez que B est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5.b & a + b/2 \end{pmatrix}$ et diagonalisez alors B.

Méthode 2 : on pose $C = P^{-1}.B.P$; montrez : $D.C = C.D$; en remontant au niveau des coefficients, montrez que C est diagonale ; diagonalisez B.

Méthode 3 : montrez qu'il existe α et β vérifiant $B = \alpha.I_2 + \beta.A$; calculez alors $P^{-1}.B.P$; diagonalisez B.
Question : laquelle des trois méthodes préférez vous, et en fonction de votre réponse, demandez vous quelle Spé je vais vous recommander.

◃33▹ Petit jeu. Votre adversaire pense à un nombre a entre 1 et N (inclus).
Vous avez droit à n questions du type « l'entier a est il plus grand que x » auxquelles il répondra « oui » ou « non ».
A la fin ou même avant, vous devez avoir trouvé l'entier auquel il a pensé.
Si vous avez droit à six questions.
Il est évident que vous allez pouvoir gagner si N est égal 128 (quel algorithme appliquez vous ?).

Mais voilà, il y a une règle du jeu en plus. La personne en face ne doit pas répondre plus de trois fois « non ».
C'est à dire que si par exemple les réponses ont été « non, oui, non, oui, non » vous n'avez pas droit à la sixième question, vous devez avoir trouvé a.

Montrez qu'alors, vous avez un algorithme pour trouver a si N vaut 42.
Votre première question sera « est il supérieur ou égal à 17 ».
Et si on vous répond « non », ce sera « $a \geqslant 5$ ».

Justifiez le tableau suivant en donnant l'algorithme :

	1	2	3	4	5	6	q
0	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	
2		4	7	11	16	22	
3			8	15	26	42	
4				16	?	?	
n							

q est le nombre de questions autorisées. n est le nombre maximum de réponses « non » autorisées.
Et on indique en case (q, n) la valeur de N du « range » sur lequel on peut travailler.

◃34▹ Montrez que tan est définie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, injective. Montrez qu'elle n'est pas surjective.
Montrez que $x \longmapsto \tan([x])$ est défiie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non injective.
Montrez que $x \longmapsto tan(x)$ n'est pas injective de $\mathbb{R} - \left\{\frac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, de même que $x \longmapsto [x]$.
Montrez que $x \longmapsto (\tan(x),\ [x])$ est injective.$\mathbb{R} - \left\{\frac{2.k+2}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

◃35▹ La somme de ses chiffres est la différence entre le nombre et 94. Qui est ce nombre ?

◃36▹ Résolvez $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2022 d'inconnue entière n. Résolvez $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2023 d'inconnue entière n.

◁37▷ Calculez $\int_0^{10}[t].dt$. La notation $[t]$ désigne la partie entière de t. A-t-on : $\forall t\in\mathbb{R},\ [2.t]=2.[t]$?
Résolvez $\int_0^{x}[t].dt=15$ d'inconnue réelle positive x. A-t-on : $\exists t\in\mathbb{R},\ [-t]=-[t]$?
A-t-on : $\forall t\in\mathbb{R},\ [t+\pi]=[t+3]$? A-t-on : $\exists t\in\mathbb{R},\ [t+\pi]=[t]+[\pi]$?
A-t-on : $\forall t\in\mathbb{R},\ [t+[t]]=2.[t]$? A-t-on : $\forall t\in\mathbb{R}-\mathbb{Z},\ [t+[-t]]=-1$?

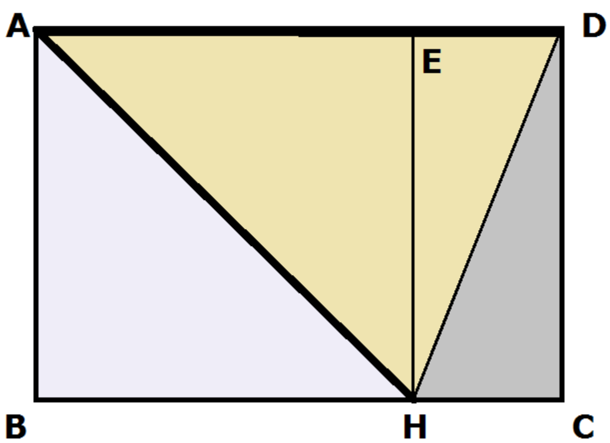
◁38▷ Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?
• L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?
• Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens [A ; B] et [E ; D] (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C. On donne : ABC = 40, CED = 60. Que vaut BCE ?
• L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?
• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

◁39▷ ♡ Décomposez $\prod_{k=1}^{20}(k!)$ puis $\prod_{k=1}^{20}(2.(k!))$ en produit de facteurs premiers.

♠ Quel est l'exposant de 11 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 10! et de $(\prod_{k=1}^{10}(k!))$?

◁40▷ ♡ On pose $A=\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}$, et on demande de calculer le produit des trois matrices ? Mais quel produit $A.B.C$? Ou $A.C.B$? Ou $B.A.C$? D'ailleurs, il y en a combien ? Et quelle est la somme de tous ces produits ?

◁41▷ On a donné dans le cours la valeur de $\tan(\pi/8)$. Justifiez la grâce au schéma ci-contre.



La suite u vérifie : $u_0=8$, $u_1=-5$ et $u_2=49$, et $u_{n+3}=7.u_{n+1}-6.u_n$ pour tout n. *Hélas, on a tout oublié du cours, alors on innove.*
Calculez u_n pour n de 0 à 7.
On définit l'application $x\longmapsto\dfrac{-7.x^2-5.x+8}{6.x^3-7.x^2+1}$, notée f.
Calculez $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.
On définit : $u=x\longmapsto 6.x^3-7.x^2+1$. Calculez $(f\times u)^{(n)}(0)$ de deux façons.
Déduisez que la suite (u_n) est exactement la suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)$.
Factorisez u.
Vérifiez que f admet pour décomposition en éléments simples $x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{3}{1-2.x}+\dfrac{4}{1+3.x}$.
Déterminez $\left(x\longmapsto\dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}$ pour tout n et $\left(x\longmapsto\dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}(0)$.
Trouvez alors la formule générale pour (u_n).

◁42▷ ♡ f est une application de classe C^n. On se donne a et h. On définit :
$$F=t\longmapsto f(a+t.h)+(1-t).h.f'(a+t.h)+\frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)+\frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$$
Calculez $F(0)$ et $F(1)$. Simplifiez $F'(t)$ pour tout t.
Que vous rappelle alors la formule $F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(t).dt$.

◁43▷ Retrouvez les coefficients du développement asymptotique : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}=a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$.

◁44▷ 36 est égal à quatre fois la somme de ses chiffres $(36=4.(3+6))$. Trouvez tous les autres nombres entiers vérifiant

cette propriété.
Et si je vous demande les entiers qui sont égaux à 2017 fois la somme de leurs chiffres, comme 42 357, comment en appelez vous au **Python** suprême ?

◁45▷ (a_n) est une suite réelle convergente de limite α. k est un entier naturel donné. On pose $D_n = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour tout n. Calculez $D_{n+1} - D_n$.

Calculez alors la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i \Big)$.

◁46▷ ♡ n décrit l'ensemble des entiers naturels et k décrit l'ensemble des entiers relatifs. Lesquelles des propositions suivantes sont vraies *(et écrivez les avec des connecteurs logiques et, ou, ⇒ et ⇔)* :

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3 - n^2.k$ soit nul.	