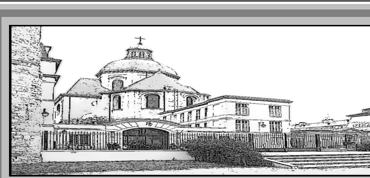
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 13 janvier
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD14

◁0▷ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 6 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles a et b.

Tant pis, du calcul : et il reste $10 - 3.b = 0$.
a n'a aucun rôle, car il a le même coefficient des deux côtés.
$\boxed{S_{a,b} = \mathbb{R} \times \{10/3\}}$
Il ne faut pas oublier que les solutions sont des couples, avec a et b. Et si il n'y a pas de condition sur a, c'est que a décrit $\mathbb{R}$.

◁1▷ ♡ Je ne veux pas qu'elle soit inversible : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. C'est jouable ?

On note a le coefficient qui manque et on calcule le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$.
Quel que soit le choix de a.
Et c'est normal, on a deux lignes proportionnelles.
Le système associé serait dégénéré.

◁2▷ ♡ Pouvez vous choisir a pour que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 3 \end{pmatrix}$ soit inversible pour tout b.

Il serait bon que son déterminant ne dépende pas de b.
Sinon, on pourrait annuler $b.\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ par un choix convenable de b (équation du premier degré).
On a donc $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Condition nécessaire : $a = 2$.
Et elle est suffisante : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.
Finalement, on ne peut pas choisir a pour que ça parche à tous les coups.

◁3▷ On sait que $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix}$ *(notée M)* a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour valeur propre -3.
Calculez son déterminant. Diagonalisez la.

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 1$ et quelques équations rapides.
On trouve déjà $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ a & -81 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $a + 2.b - 81 = 2$.
Ensuite

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ a & -81 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \beta . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $\beta = 4$ et d'autres équations pour b tout seul.

La matrice est finalement $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ 21 & -81 & 31 \end{pmatrix}$.

On a deux des ses valeurs propres : 1 et 4.
On trouve la troisième par la trace : -3 (pour que la somme vaille 2).

Le déterminant est alors le produit -12.

Remarque : *Sans effort, S.V.P.*
On ne se rue pas sur « j'ai appris tout petit à calculer des déterminants 3 sur 3 par la règle de Sarrus.
On réfléchit !

De même, pour diagonaliser, on réfléchit. Qui sont les crétins qui vont aller chercher le polynôme caractéristique, puis le résoudre ?

On a les trois valeurs propres : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On a deux vecteurs propres : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 3 & ? \end{pmatrix}$.

On doit juste résoudre $M.U = -3.U$ ensuite, en imposant même une condition puisqu'on sait par avance qu'il y a une infinité de solutions.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Un exercice excellent pour voir i vous avez compris ce que c'est que diagonaliser.
Ou si vous savez juste diagonaliser pour avoir des points en suivant toujours la même méthode.
Devinez quel est le profil recherché par les concours.
Devinez quel est le profil recherché par les sociétés (sauf par celles qui vont vous payer mille deux cent euros par mois, parce que vous valez juste un peu plus qu'un ordinateur).

◁4▷ Déterminez la somme des chiffres de $45 \times 999...99$ *(il y a 45 chiffres 9)*.

On regarde les premiers

45×999	45×9999	45×99999	45×999999	$45 \times 99\dots9$
44955	449955	4499955	44999955	$449\dots955$

On le prouve : $45 \times 99\dots9 = 45.(10^{n+1} - 1) = 45.10^{n+1} - 45$.
Le nombre $449\dots955$ est parfait : $449\dots955 + 55 = 45000\dots0$.

On a donc juste à calculer $4 + 4 + 9 \times (n - 2) + 5 + 5$ pour avoir la somme des chiffres.

$18 + 9.43 = 405$

Et avec Python pour vérifier :
`a = '9'*45 #le symbole '9' dupliqué 45 fois`
(vérification : '999999999999999999999999999999999999999999999')

`b = 45*int(a) #conversion en int et multiplication`
(vérification : 44999999999999999999999999999999999999999999955)

`bb = str(b) #reconversion en string pour lire les chiffres un à un`
(vérification '44999999999999999999999999999999999999999999955')
```
s = 0
for chiffre in b :
....s += int(chiffre)
```

◁5▷ On donne $Card(A) = 10$, $Card(B) = 15$, $Card(C) = 20$, $Card(A \cap B) = 7$, $Card(A \cap C) = 9$ et $Card(B \cap C) = 8$.
Pouvez vous déduire la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$? Pouvez vous encadrer la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$?

Sur les cardinaux, a formule du crible existe (en passant par les fonctions indicatrices) :

$$Card(A \cup B \cup C) = \begin{array}{lll} Card(A) & -Card(B \cap C) & \\ +Card(B) & -Card(A \cap C) & +Card(A \cap B \cap C) \\ +Card(C) & -Card(A \cap B) & \end{array}$$

On remplace ce qu'on peut remplacer (après avoir vérifié les cohérences du type $E \subset F \Rightarrow Card(E) \leqslant Card(F)$)

$Card(A \cup B \cup C) =$	10 $+15$ $+20$	-8 -9 -7	$+Card(A \cup B \cup C)$

On trouve $21 - Card(A \cap B \cap C)$.
Le cardinal ne peut pas dépasser 21, c'est spur.

D'autre part, par inclusion de $A \cap B \cap C$ dans $A \cap B$ et les autres, son cardinal ne peut pas dépasser 7.
On encadre $\boxed{14 \leqslant Card(A \cup B \cup C) \leqslant 21}$

Il faudrait ensuite donner des exemples pour lesquels ces valeurs extrèmes sont atteintes.
Ou raffiner encore en montrant des impossibilités.

◃6▹ Montrez $(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$ pour tout x réel et tout n au moins égal à 2 *(indication : $(1+x^2).Arctan'(x) = ?$).*

On part de $Arctan' = x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$qu'on écrit $\forall x,\ Arctan'(x).(1+x^2) = 1$.

On dérive n fois, car tout est dérivable autant de fois qu'on veut.
Le second membre donne 0 (on dérive quand même au moins une fois).
Pour le premier membre, on applique la formule de Leibniz, en posant $u = x \longmapsto 1 + x^2$ et $v = Arctan'$.
On a donc pour tout x : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(k)}.v^{(n-k)} = 0$ (fonction nulle).
Mais dès que k dépasse 2, $u^{(k)}$ est nulle : $\binom{n}{0}.u.v^{(n)} + \binom{n}{1}.u'.v^{(n-1)} + \binom{n}{2}.u''.v^{(n-2)} = 0$.
On remplace les binomiaux par leur valeur, et on travaille en x : $(1+x^2).v^{(n)}(x) + n.2.x.v^{(n-1)}(x) + \dfrac{n.(n-1)}{2}.2.v^{(n-2)}(x) = 0$.
On tient compte de ce que v a une longueur d'avance sur $Arctan$ dans les ordres de dérivation :

$$(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + n.2.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).2.Arctan^{(n-1)}(x) = 0$$

◃7▹ ♡ Quel est le coefficient de $a^{2000}.b^0.c^{10}.d^9$ dans $(a+b+c+d)^{2019}$?

$$\frac{2019!}{2000!.0!.10!.9!} = \frac{2001 \times 2002 \times \ldots 2019}{(2.3.4.5.6.7.8.9)^2.10}$$

et on s'en contentera.

On peut aussi partir de $\sum_{k=0}^{n} \binom{2019}{k}.a^k.(b+c+d)^{2019-k}$ et extraire déjà $k = 2000$:

$$\binom{2019}{2000}.a^{2000}.(b+c+d)^{19}$$

On continue avec $\binom{2019}{2000}.a^{2000}.\sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i}.b^i.(c+d)^{19-i}$ et on nne garde que $i = 0$

$$\binom{2019}{2000}.a^{2000}.\binom{19}{0}.b^0.(c+d)^{19}$$

On termine avec $\binom{2019}{2000}.a^{2000}.\binom{19}{0}.\sum_{j=0}^{19} \binom{19}{j}.c^j.d^{19-j}$ et cette fois, on garde $j = 10$.
Le terme cherché est $\binom{2019}{2000}.a^{2000}.\binom{19}{0}.b^0.\binom{19}{10}.c^{10}.d^9$ et on calcule le coefficient

$$\binom{2019}{2000}.\binom{19}{0}.\binom{19}{10} = \frac{2019!}{1000!.19!}.\frac{19!}{0!.19!}.\frac{19!}{10!.9!} = \frac{2019!}{2000!.0!.10!.9!}$$

◁ 8 ▷ Qui est le plus grand : 2^{22}, $\binom{34}{7}$, $\binom{25}{13}$?
(si possible sans calculatrice évidemment).

On va décomposer $\binom{34}{7}$ et $\binom{25}{13}$ en produit de facteurs premiers :

$$\binom{25}{13} = \binom{25}{12} = \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$$

douze termes en haut, douze termes en bas

$$\binom{25}{13} = \frac{25.\star.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.2.\star.4.5.6.7.\star.9.10.11.12} = \frac{25.\star.23.*.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.*.\star.4.5.6.7.\star.9.10.*.12}$$

$$\binom{25}{13} = \frac{25.*.23.*.21.\dagger.19.18.17.16.15.14}{1.*.\star.\dagger.\dagger.6.7.\star.9.10.*.12} = \frac{25.*.23.*.21.\dagger.19.18.17.16.15.\sharp}{1.*.\star.\dagger.\dagger.6.\sharp.\star.9.5.*.12}$$

on élimine encore les facteurs 5, 3 : $\binom{25}{13} = 2^2.5^2.7.17.19.23$

De même ou presque (on suite une autre méthode ?)

$$\binom{34}{7} = \frac{34\times33\times32\times31\times30\times29\times28}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7} = \frac{2.17\times33\times2^5\times31\times2.3.5\times29\times2^2.7}{1\times2\times3\times2^2\times5\times2.3\times7} = 2^5.11.17.29.31$$

Pour comparer nos deux binomiaux, on effectue le quotient pour simplifier au maximum :

$$\frac{\binom{25}{13}}{\binom{34}{7}} = \frac{2^2.5^2.7.17.19.23}{2^5.11.17.29.31} = \frac{5^2.7.19.23}{2^3.11.29.31}$$

Là, on n'a plus guère le choix : on calcule (à la main) : $\dfrac{\binom{25}{13}}{\binom{34}{7}} = \dfrac{76\,475}{79\,112}$.

C'est $\binom{34}{7}$ qui l'emporte.

Et pour insérer 2^{22} qui vaut un peu plus que $4.10^3.10^3$, il faut être prudent.

$2^{22} = 4\,194\,304$	$\binom{25}{13} = 5\,200\,300$	$\binom{34}{7} = 5\,379\,616$

◁ 9 ▷ Combien de $\binom{2022}{k}$ sont impairs ? (Python ?)

Au moins deux puisque $\binom{2022}{0}$ et $\binom{2022}{2022}$ valent 1.

Pas tous puisque $\binom{2022}{1}$ et $\binom{2022}{2021}$ valent 2022.

```
binomial = 1
n = 2022
compteur = 1
for k in range(n) :
....binomial = binomial*(n-k)//(k+1)
....if binomial%2 == 1 :
........compteur += 1
```

En une ligne, le test et l'incrémentation du compteur peuvent être remplacés par compteur += (binomial %2), vous ne trouvez pas ?

La réponse est alors 256.

Et voici la ligne des binomiaux $\binom{2022}{k}$ modulo 2 .

10101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000001010
101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101010
00000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
0000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000
0000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000
0000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000
0000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000
10101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000001010
101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101010
00000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
0000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000
0000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000
0000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000
0000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000
10101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000001010
101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101010
00000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
00000000000000001010101

Exerxice : tracer le triangle de Pascal modulo 2.
Ou même modulo p fixé à l'avance, avec une palette de couleurs.

Sinon, il y a quand même une formule explicite pour trouver qui sont les binomiaux impairs.
C'est la formule de Lucas.
`https ://blogdemaths.wordpress.com/2013/07/16/sierpinski-et-pascal-sont-dans-un-triangle/`

◁10▷

♣ : C'est facile, les produits matriciels : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$, il suffit de coller les chiffres côte à côte. Vous m'en trouvez d'autres ?
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 36 \\ 36 & 22 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 55 \\ 33 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 77 \\ 22 & 38 \end{pmatrix}$

On veut $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a\alpha} & \overline{b\beta} \\ \overline{c\gamma} & \overline{d\delta} \end{pmatrix}$ où $\overline{a\alpha}$ désigne le nombre à deux chiffres a suivi de α (c'est à dire $10.a + \alpha$).
J'ai pour ma part écrit un programme...
[[[0, 0], [0, 0]], [[0, 0], [0, 0]]] [[[2, 2], [3, 2]], [[8, 4], [6, 8]]] [[[4, 2], [4, 2]], [[8, 4], [8, 4]]] [[[3, 2], [6, 2]], [[9, 2], [6, 8]]] [[[5, 2], [7, 2]], [[9, 2], [7, 6]]] [[[7, 2], [8, 2]], [[9, 2], [8, 4]]] [[[9, 2], [9, 2]], [[9, 2], [9, 2]]] [[[2, 3], [2, 2]], [[8, 6], [4, 8]]] [[[5, 3], [3, 2]], [[8, 6], [6, 2]]] [[[3, 3], [4, 2]], [[9, 3], [4, 8]]] [[[6, 3], [5, 2]], [[9, 3], [5, 5]]] [[[9, 3], [6, 2]], [[9, 3], [6, 2]]] [[[4, 4], [2, 2]], [[8, 8], [4, 4]]] [[[3, 4], [3, 2]], [[9, 4], [3, 8]]] [[[7, 4], [4, 2]], [[9, 4], [4, 4]]] [[[6, 5], [3, 2]], [[9, 5], [3, 5]]] [[[3, 6], [2, 2]], [[9, 6], [2, 8]]] [[[9, 6], [3, 2]], [[9, 6], [3, 2]]] [[[5, 7], [2, 2]], [[9, 7], [2, 6]]] [[[7, 8], [2, 2]], [[9, 8], [2, 4]]] [[[9, 9], [2, 2]], [[9, 9], [2, 2]]] [[[2, 2], [6, 3]], [[8, 2], [6, 9]]] [[[3, 2], [7, 3]], [[8, 2], [7, 8]]] [[[4, 2], [8, 3]], [[8, 2], [8, 7]]] [[[5, 2], [9, 3]], [[8, 2], [9, 6]]] [[[3, 3], [3, 3]], [[6, 6], [6, 6]]] [[[2, 3], [4, 3]], [[8, 3], [4, 9]]] [[[5, 3], [6, 3]], [[8, 3], [6, 6]]] [[[8, 3], [8, 3]], [[8, 3], [8, 3]]] [[[2, 4], [3, 3]], [[8, 4], [3, 9]]] [[[4, 4], [4, 3]], [[8, 4], [4, 7]]] [[[6, 4], [5, 3]], [[8, 4], [5, 5]]] [[[3, 4], [6, 3]], [[9, 2], [3, 9]]] [[[8, 4], [6, 3]], [[8, 4], [6, 3]]] [[[7, 4], [8, 3]], [[9, 2], [4, 7]]] [[[6, 5], [4, 3]], [[8, 5], [4, 5]]] [[[2, 6], [2, 3]], [[8, 6], [2, 9]]] [[[5, 6], [3, 3]], [[8, 6], [3, 6]]] [[[3, 6], [4, 3]], [[9, 3], [2, 9]]] [[[8, 6], [4, 3]], [[8, 6], [4, 3]]] [[[9, 6], [6, 3]], [[9, 3], [3, 6]]] [[[3, 7], [2, 3]], [[8, 7], [2, 8]]] [[[4, 8], [2, 3]], [[8, 8], [2, 7]]] [[[8, 8], [3, 3]], [[8, 8], [3, 3]]] [[[7, 8], [4, 3]], [[9, 4], [2, 7]]] [[[5, 9], [2, 3]], [[8, 9], [2, 6]]]

◁11▷

Sur une ligne du triangle de Pascal, j'ai trouvé côte à côte les deux entiers suivants. Sur quelle ligne suis-je ? Et quel est l'indice de colonne ?
$3.5^2.7.13.17.19.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$
$3^3.5^2.11.13.17.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$

Comment passe-t-on de $\binom{n}{k}$ à $\binom{n}{k+1}$?

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}}{\frac{n!}{(k)!.(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

On effectue ici le quotient des deux entiers : $\dfrac{7.19}{3^2.11}$.

N'allons pas en déduire $n-k=7.19$ et $k+1=9.11$! On n'identifie pas !

On a juste $133.k+133=99.(n-k)$ et donc $99.n=232.k+133$.

Au vu des facteurs premiers présents dans nos binomiaux, n vaut au moins 229 et on n'a pas atteint 233 (le nombre premier suivant qui serait présent au numérateur et pas éliminé au dénominateur).

On teste les valeurs de n donnant k entier

n	229	230	231	232
$99.n-133$	22539	22637	22736	22835
multiple de 232	non	non	oui : 98	non

On a une unique solution : $\boxed{\dbinom{231}{98} \text{ et } \dbinom{231}{99}}$ vérifiable avec un logiciel adapté.

Et il y a une autre solution à l'autre bout de la ligne...

Un exercice qu'on pourrait poser en Terminale.
Pas de connaissance à part la dfinition.
Mais de la jugeotte. Et pas de chemin tracé à l'avance par le professeur ou le livre.

Charade introuvable :

Mon premier est un oiseau de l'alphabet.

Mon second est un milli-iule.

Mon troisième est en double sur le vélo en quintuple sur la voiture.

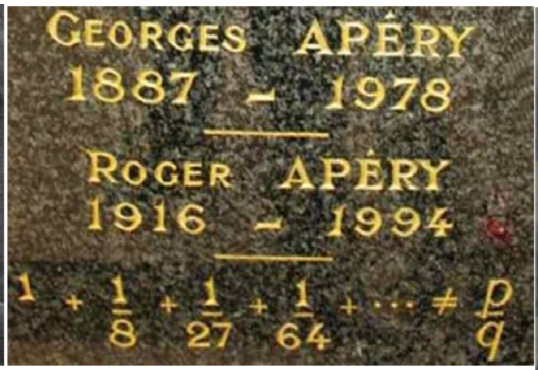
Mon quatrième est suivi de son double dans l'alphabet.
Vous ne trouvez pas mon tout.

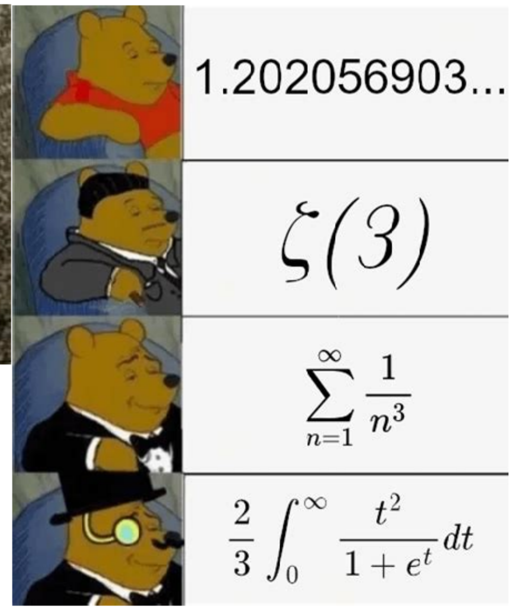
GEAI (le geai se prononce G).
PATTE (le iule est le mille pattes, donc le milli-iule est $\dfrac{mille}{1000}.pattes$.
ROUE (la voiture a cinq roues dont celle de secours).
V est suivi de W.
J'AI PAS TROUVÉ.

◃12▹

Sujet du vingtième siècle. Première partie (sur quatre) d'un sujet (E.N.S. filière PC) consistant, destiné à démontrer un théorème établi par Roger Apery[a] en 1978 : $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^3}$ est irrationnel.

a. mathématicien français, fils d'immigré grec, 1916-1994, lycée Faidherbe à Lille, lycée Louis le Grand (il habitait alors à Paris le quartier de la Goutte d'Or), E.N.S., premier à l'agrégation de maths, un des membres fondateurs en 1941 du Front National (non, celui de 1941, dans les cours d'histoire : on vous en a parlé « Front National (de la Résistance) », confondez pas !), sur sa pierre tombale au colombarium du Père Lachaise, il est gravé $1+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\ldots\neq\dfrac{p}{q}$,





I∼0) La suite (a_n) est définie par $a_1 = 2$ et pour tout n : $\boxed{a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1}$ Calculez a_n pour n de 1 à 5. Montrez que c'est une suite d'entiers naturels strictement croissante, divergente.

On calcule les premiers termes :

$a_1 = 2$	$a_2 = 2^2 - 2 + 1$	$a_3 = 3^2 - 3 + 1$	$a_4 = 7^2 - 7 + 1$	$a_5 = 43.42 + 1$	
	$a_2 = 3$	$a_3 = 7$	$a_4 = 43$	$a_5 = 1807$	$a_6 = 3263443$

Non, a_6 n'était pas demandé.

Par récurrence immédiate, chaque terme est un entier.
Et même un entier naturel ? On montre que a est croissante : $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geqslant 0$ pour tout n.
Comme elle croît et que son premier terme vaut 2, ils sont tous plus grands que 2 donc naturels.

Mais comme ils sont plus grands que 2 : $a_{n+1} - a_n = (2-1)^2 \geqslant 1$ pour tout n.
La suite est strictement croissante.

Mais alors : $a_n \geqslant n + 1$ puisque à chaque étape, $a_n$augmente au moins de 1.

Par minoration, a_n tend vers $+\infty$ avec n.

I∼1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne a_n.

```
def a(n) :
....x = 2
....for k in range(n-1) :
........x = x*(x-1)+1
....return x
```

La seule difficulté : combien de boucles : `range(n-1)`, `range(n)` ou `range(n-2)` ?
Testez sur un exemple.

Et si vous tapez `x = x**2-x+1`, vous êtes bon en I.P.T., mais vous n'êtes pas un vrai informaticien. Vous n'avez aucune pitié pour la machine, et vous demandez à l'ordinateur de calculer des choses idiotes.

```
def A(n) :
....L=[2]
....for k in range(n-1) :
........last = L[-1]
........L.append(last*(last-1)+1)
....return L
```

Ça c'est si vous voulez tous les termes de la suite.

I~2) Montrez pour n supérieur ou égal à 2 : $2^{2^{n-2}}+1 \leqslant a_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

La relation $2^{2^{n-2}}+1 \leqslant a_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$ va faire l'objet d'une récurrence, n'en déplaise à maître chocos pourfendeur des inductions.
Elle est vraie au rang 2 : $2^1+1 = a_2 \leqslant 2^2$.
Prenons un rang n quelconque, et supposons $2^{2^{n-2}}+1 \leqslant a_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.
On applique $x \longmapsto x.(x-1)+1$, croissante sur $[1, +\infty[$ (et on y est justement).

$$(2^{2^{n-2}}+1).2^{2^{n-2}}+1 \leqslant a_n.(a_n-1)+1 \leqslant 2^{2^{n-1}}.(2^{2^{n-1}}-1)+1$$

On développe $2^{2.2^{n-2}}+2^{2^{n-2}}+1 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2^{2.2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}+1$ (car $(2^a)^2 = 2^{2.a}$).
On remplace : $2^{2^{n-1}}+1+2^{2^{n-2}} \leqslant a_{n+1} \leqslant 2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1$
On majore et minore encore : $2^{2^{n-1}}+1 \leqslant 2^{2^{n-1}}+1+2^{2^{n-2}} \leqslant a_{n+1} \leqslant 2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1 \leqslant 2^{2^n}$ car $2^{2^{n-1}}$vaut au moins 2^0 c'est à dire 1.
L'hérédité est établie.

II~0) Déduisez pour n plus grand que 7 : $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{19+n}}$.

L'inégalité précédente passe au logarithme (application croissante) : $\ln(a_n) \leqslant \ln(2^{2^{k-1}}) = 2^{k-1}.\ln(2)$.

On divise par un réel positif : $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \dfrac{2^{k-1}.\ln(2)}{a_n}$.

On exploite la minoration (pour majorer, on minore le dénominateur) : $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \dfrac{2^{n-1}.\ln(2)}{2^{2^{n-2}}+1}$.

Ça ne ressemble pas trop à $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{19+n}}$. A moins d'avoir $\dfrac{2^{n-1}.\ln(2)}{2^{2^{n-2}}+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{19+n}}$.

Ceci revient à demander $2^{18+2.n}.\ln(2) \leqslant 2^{2^{n-2}}+1$.

II~1) Déduisez que la série de terme général $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}$ converge, et écrivez un script qui calcule sa somme à 10^{-5} près (on trouvera 1.08239).

Pour tout n, le terme général $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}$ existe et est positif.
On a une série à termes positifs, il suffit de la majorer par une série de référence.
Ici, justement : $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{19}}.\dfrac{1}{2^n}$.
La série géométrique de terme général $\frac{1}{2^{19}}.\frac{1}{2^n}$ converge (et sa somme se calcule même, mais qu'importe).
Par majoration de séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}$ pour n plus grand que 7 converge.

En ajoutant la somme finie $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{\ln(a_n)}{a_n}$, on a l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n}$.

Mais pas sa valeur. Mais on va y venir.

En tant que série à termes positifs, la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(a_n)}{a_n}\right)$ est croissante.

Elle converge en croissant vers sa limite. Et donc, pour N assez grand (plus grand que certain $N_\varepsilon$avec ici ε égal à 10^{-5}), on aura $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(a_n)}{a_n}$ entre $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n}\right)-\varepsilon$ et $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(a_n)}{a_n}\right)$.

Ceci a lieu en fait dès que le reste $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n}$ est plus petit que ε.

Et si on se laissait guider par la proposition : pourquoi ne pas prendre $N = 6$?
On a alors un reste $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n}$ qui se majore par $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{2^{19+n}}$.

Explicitement $\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{2^{19+n}} = \frac{\frac{1}{2^{19+7}}-\frac{1}{2^{20+N}}}{1-\frac{1}{2}}$ et donc en passant à la limite sur N : $\sum_{n=7}^{N}\frac{1}{2^{19+n}} = 2.\frac{1}{2^{19+7}} = \frac{1}{2^{25}}$.

On majore avec l'héritage de l'informatique : $2^{10} \geqslant 10^3$: $S - \sum_{n=1}^{6}\frac{\ln(a_n)}{a_n} \leqslant \frac{1}{32.10^6}$. C'est parfait pour cinq chiffres exactes et même pis.
Pour la lisibilité, j'ai décidé de noter S la somme de la série.

Ensuite, le programme :

```
from math import *
a = 2
S = log(a)/a
for n in range(5) :
....a = a*(a-1)+1
....S += log(a)/a
```

II∼2) Déduisez que la suite $\left(\prod_{n=1}^{N}\sqrt[a_n]{a_n}\right)$ est majorée, et donnez un majorant $\boxed{w}$ le plus petit possible avec trois chiffres exacts.

Mais qui est ensuite $\left(\prod_{n=1}^{N}\sqrt[a_n]{a_n}\right)$?

C'est $\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(a_n)}{a_n}\right)\right.$ puisque $\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Par croissance de la suite et de l'exponentielle, cette suite converge en croissant vers e^S (vous l'ai-je dit ? S est la somme de la série).

Comme la suite converge en croissant, il suffit de prendre $w = e^S$ comme majorant.
Et $e^{1.08239}$ doit faire l'affaire. Et vous croyez que je vais vous calculer ça sans machine ?

III∼0) Montrez pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}-1}$.

La formule $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}-1}$ va se démontrer par récurrence sur n.
On initialise.
On suppose pour un n donné : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}-1}$.

$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{N+1}}$ en ajoutant un terme

$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}-1} + \frac{1}{a_{N+1}}$ en remplaçant

$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{(a_{N+1}-1).(a_{N+1})}$ en réduisant

$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{(a_{N+1}-1).(a_{N+1})}$ en remplaçant.

Ou alors on cherche la somme télescopique. Trop classe !
On pose $\alpha_n = \frac{1}{a_n - 1}$ (dont l'existence est assurée).
On calcule comme par hasard

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n.(a_n-1)} - \frac{1}{a_n-1} = \frac{1-a_n}{a_n.(a_n-1)} = -\frac{1}{a_n}$$ [1]

1. plus j'avance et plus je me dis que vraiment, écrire $(a_n)^2 - a_n + 1$ n'était pas la bonne idée, tandis que $a_n.(a_n-1)+1$ était la bonne idée

La somme $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}$ est la somme télescopique $\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n-\alpha_{n+1})$. Elle donne bien $1-\frac{1}{a_{N+1}-1}$.

III∼1) Pour tout n on pose $C(n)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$ où k est l'unique entier vérifiant $a_k\leqslant n<a_{k+1}$.

Calculez $C(10)$. La formule $C(n)=n!.\prod_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)^{-1}$ serait elle cohérente ?

On a posé $C(10)=\frac{10!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{10}{a_i}\right]!\right)}$. Mais qui est k ? L'entier vérifiant $a_k\leqslant 10<a_{k+1}$. Sachant $a=[2,\ 3,\ 7,\ 43,\ 1807,\ 3263443...]$, on a $a_3\leqslant 10<a_4$.

On a donc $C(10)=\frac{10!}{\left(\left[\frac{10}{2}\right]!\right).\left(\left[\frac{10}{3}\right]!\right).\left(\left[\frac{10}{7}\right]!\right)}=\frac{10!}{5!.3!.1!}=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(1.2.3.4.5).(1.2.3)}=5040$

Peut on remplacer $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$ par $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$?

De l'une à l'autre, il manque $\prod_{i=k+1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)$ (si déjà ce produit infini a un sens).

Mais comme a_{k+1} est plus grand que n, ainsi que les suivants chaque quotient $\frac{n}{a_i}$ est entre 0 et 1.

Chaque $\left[\frac{n}{a_i}\right]$ vaut 0.

Chaque $\left[\frac{n}{a_i}\right]!$ vaut 1.

Le produit (d'une infinité de termes) vaut 1.

On a bien $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$ Et pour gagner de la place, mon énoncé l'a écrit avec des exposants « -1 ».

III∼2) Écrivez un script `Python` qui pour n donné calcule $C(n)$.

Pour créer C, on va multiplier et diviser des factorielles. tant pis si ce qui suit n'est pas ce qu'il se fait de mieux.

```
def Facto(N) :
....P = 1
....for k in range(N) :
.........P *= k+1
....return P
```

Ensuite, il faut créer le numérateur et le dénominateur.

Mais pour le dénominateur, il faut combien de factorielles ? C'est une boucle conditionnelle : tant que a_i est plus petit que n.

```
def C(n) :
....Numer = Facto(n)
....Denom = 1
....a = 2
....while a*(a-1)+1 < n :
........Quo = n//a
........Denom *= Facto(Quo)
........a = a*(a-1)+1
....return Numer//Denom
```

III∼3) Montrez, en pensant aux coefficients du multinôme que chaque $C(n)$ est entier.

Les coefficients multinomiaux sont des choses comme $\frac{10!}{5!.3!.2!}$ ou $\frac{17!}{8!.6!.2!.1!}$.

Ils sont de la forme $\frac{N!}{(a_1)!.(a_2)!\ldots(a_p)!}$ avec $a_1+a_2+\ldots+a_p=m$.

; on dit merci les réflexes d'informaticien

Ils sont entiers, car en fait par exemple $\dfrac{10!}{5!.3!.2!}=\dfrac{10!}{5!.5!}.\dfrac{5!}{3!.2!}$

$$\frac{17!}{8!.6!.2!.1!}=\frac{17!}{8!.9!}.\frac{9!}{6!.3!};\frac{3!}{2!.1!}$$

$$\frac{N!}{(a_1)!.(a_2)!\dots(a_p)!}=\frac{N!}{(a_1)!.(N-a_1)!}.\frac{(N-a_1)!}{(a_2)!.(N-a_1-a_2)!}.\frac{(N-a_1-a_2)!}{(a_3)!.(N-a_1-a_2-a_3)!}\dots\frac{(N-a_1-a_2-\dots-a_{p-2})!}{(a_{p-1})!(a_p)!}$$

Et tous les termes sont des binomiaux. Leur produit est donc un entier.

$C(n)$ est le quotient $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$. Serait il un multinomial ?

Ce serait le cas si on avait $\sum_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]=n$.

Mais en fait, on a $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{n}{a_i}=n.\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}=n-\dfrac{n}{a_{k+1}-1}$ avec $n<a_{k+1}$
d'où $a_{k1+}-1\geqslant n$
et $\dfrac{n}{a_{k+1}-1}\leqslant 1$

La somme est entre n et $n-1$.

Quand chaque terme est transformé en un entier, il diminue : $\sum_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]\leqslant n$

Un exemple : $n=20$ donne $\dfrac{20}{2}+\dfrac{20}{3}+\dfrac{20}{7}=20-\dfrac{20}{42}$ et donc $\left[\dfrac{20}{2}\right]+\left[\dfrac{20}{3}\right]+\left[\dfrac{20}{7}\right]=10+6+2=18<20$

$n=21$ donne $\dfrac{21}{2}+\dfrac{21}{3}+\dfrac{21}{7}=21-\dfrac{21}{42}$ et donc $\left[\dfrac{21}{2}\right]+\left[\dfrac{21}{3}\right]+\left[\dfrac{21}{7}\right]=10+7+3=20<21$

$n=22$ donne $\dfrac{22}{2}+\dfrac{22}{3}+\dfrac{22}{7}=22-\dfrac{20}{42}$ et donc $\left[\dfrac{22}{2}\right]+\left[\dfrac{22}{3}\right]+\left[\dfrac{22}{7}\right]=11+7+3=21<22$

Et donc par rapport à un multinomial, il manque des termes. Au dénominateur.
Si on les met, il faut les remettre au numérateur, et le multinomial est multiplié par u entier.

n	$(C(n))$	multinomial choisi	
20	$\frac{20!}{10!.6!.2!}$	$\frac{20!}{10!.6!.4!}$	$C(20)=\frac{20!}{10!.6!.4!}.3.4$
21	$\frac{21!}{10!.7!.2!}$	$\frac{21!}{10!.7!.4!}$	$C(21)=\frac{21!}{10!.7!.4!}.3.4$
22	$\frac{22!}{11!.7!.3!}$	$\frac{22!}{11!.7!.4!}$	$C(22)=\frac{22!}{11!.7!.4!}.4$
		ou $\frac{22!}{12!.7!.3!}$	$C(22)=\frac{22!}{12!.7!.3!}.12$

La formule propre sera $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}=\dfrac{n!}{(n-S)!.\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}.(n-S)!$ en posant $S=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]$.

Par construction $n-S$ est un entier naturel. Le quotient $\dfrac{n!}{(n-S)!.\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}$ est un coefficient multinomial puisque la somme des entiers du dénominateur vaut n.
Et le multiplicateur $(n-S)!$ est entier.
Le nombre $C(n)$ est un entier.

III∼4) Montrez : $C(n)\leqslant n^n.\prod_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]^{-[n/a_i]}$ et respirez un grand coup.

On doit prouver $C(n)\leqslant n^n.\prod_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]^{-[n/a_i]}$ c'est à dire $n!.\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\dfrac{n}{a_i}\right]!\right)^{-1}\leqslant n^n.\prod_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]^{-[n/a_i]}$.

Il est tentant de faire appel à $n!\leqslant n^n$ (dans les deux produits il y a n termes, mais ceux du premier vont de 1 à n tandis que ceux du second valent tous n).
Mais ce qui serait bien pour le numérateur (majoration) ne l'est plus pour le dénominateur.

Sauf si vous passez de $n!\leqslant n^n$ *et* $\prod_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]!\leqslant\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\dfrac{n}{a_i}\right]\right)^{[n/a_i]}$ *au quotient indiqué.*

On rappelle que $a\leqslant b$ *et* $c\leqslant d$ *ne donne pas du tout* $\dfrac{a}{c}\leqslant\dfrac{b}{d}$. *On a bien* $2\leqslant 5$ *et* $4\leqslant 5$ *mais pas* $\dfrac{4}{2}\leqslant\dfrac{5}{5}$.

Pour se simplifier la vie, on va noter $b_i = \left[\dfrac{n}{a_i}\right]$ pour chaque i et donc $b_1 + \ldots + b_k$ est inférieur ou égal à n.

Partons alors du premier membre : $C(n) = \dfrac{n!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}$.

On l'écrit $C(n) = \dfrac{n!}{m!}.\dfrac{m!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}$ pour avoir comme à la question précédente un coefficient multinomial.

Pour faire intervenir le membre de droite, on multiplie et divise par $(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}$:

$$C(n) = \frac{n!}{m!(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}}.\frac{m!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}.(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}$$

Vous ne voyez rien d'intelligent à écrire ? Moi non plus...
sauf si je repense à la formule du multinôme.

L'entier $\dfrac{m!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}.(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}$ est un des multiples termes du développement de $(b_1 + \ldots + b_k)^m$ (celui où chaque b_i a pour exposant b_i lui même).

C'est comme si on cherchait le terme en $12^{12}.7^7.3^3$ dans $(12+7+3)^{22}$.
Il a pour coefficient $\dfrac{22!}{12!.7!.3!}$ et on est donc en face de $\dfrac{22!}{12!.7!.3!}.12^{12}.7^7.3^3$.

Comme c'est l'un des termes de la somme (de termes positifs), il est plus petit que la somme :

$$\frac{m!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}.(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k} \leqslant m^m$$

A ce stade :

$$C(n) = \frac{n!}{m!(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}}.\frac{m!}{(b_1)!.(b_2)!\ldots(b_n)!}.(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k} \leqslant \frac{n!}{m!(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}}.m^m$$

On peut dire qu'on progresse, on n'est plus si loin de n^n.
Enfin si, mais bon...

On arrange : $C(n) \leqslant \dfrac{n^n}{(b_1)^{b_1}.(b_2)^{b_2}\ldots(b_k)^{b_k}}.\dfrac{n!.m^m}{n^n.m!}$. Ah, oui, ça ressemble à ce qu'on veut.

On a juste à prouver que $\dfrac{n!.m^m}{n^n.m!}$ est plus petit que 1.

Exemple : saurez vous prouver : $\dfrac{23!.20^{20}}{23^{23}.20!} \leqslant 1$?
Moi je trouve que rien que ça, c'est une question en soi.

Je l'écris $\dfrac{\prod_{k=1}^{n} k.\prod_{i=1}^{m} m}{\prod_{i=1}^{n} n.\prod_{k=1}^{m} k}$ et même $\dfrac{\prod_{k=1}^{n} k.\prod_{i=1}^{m} m}{\prod_{k=1}^{m} k.\prod_{i=1}^{n} n}$

puis $\dfrac{\prod_{k=m+1}^{n} k.\prod_{i=1}^{m} m}{\prod_{i=1}^{n} n}$. Il y a au total n termes au numérateur $(n - m + m)$
n termes au numérateur (tous égaux à n)

Chaque terme du dénominateur est plus grand que chaque terme du numérateur.
Le quotient est plus petit que 1. C'est ce qu'on voulait !

Sur notre exemple : $\dfrac{23!.20^{20}}{23^{23}.20!} = \dfrac{23!}{20!}.\dfrac{20^{20}}{23^{23}} = \dfrac{20^{20}.21.22.23}{23^{23}} = \dfrac{20.20\ldots20.21.22.23}{23.23\ldots23.23.23.23}$.
Il y a 23 termes au numérateur et 23 termes au dénominateur.
Ce quotient est plus petit que 1.

III∼5)	Montrez que si a et n sont des entiers vérifiant $0 < a \leqslant n$, alors on a $\dfrac{\left(\dfrac{n}{a}\right)^{n/a}}{\left[\dfrac{n}{a}\right]^{[n/a]}} \leqslant \left(\dfrac{e.n}{a}\right)^{(a-1)/a}$ [a]. a. indication : montrez déjà $\dfrac{n-a+1}{a} \leqslant \left[\dfrac{n}{a}\right]$

On veut montrer $\dfrac{\left(\dfrac{n}{a}\right)^{n/a}}{\left[\dfrac{n}{a}\right]^{[n/a]}} \leqslant \left(\dfrac{e.n}{a}\right)^{(a-1)/a}$.

Comme proposé, on montre déjà $\dfrac{n-a+1}{a} \leqslant \left[\dfrac{n}{a}\right]$.

On rappelle : $x - 1 < [x] \leqslant x$ (pour avoir la partie entière de x, on descend, mais on ne descend pas de plus que 1).

On a donc $\dfrac{n}{a} - 1 < \left[\dfrac{n}{a}\right] \leqslant \dfrac{n}{a}$

$$\frac{n-a}{a} < \left[\frac{n}{a}\right] \leqslant \frac{n}{a}$$

A poursuivre...

III∼6)	Déduisez : $C(n) \leqslant n^{k+1}.e^k.w^n$ (oui, il y a des n et des k, c'est logique, et w a bien été défini plus haut).

IV∼0)	p est un nombre premier inférieur ou égal à n. On pose $q = \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$. Montrez : $p^q \leqslant n < p^{q+1}$.
IV∼1)	Montrez pour tout m entre 1 et n que l'exposant de p dans $m!$ est $\sum_{j=1}^{q} \left[\dfrac{m}{p^j}\right]$.
IV∼2)	Déduisez l'exposant de p dans $C(n)$.
IV∼3)	Montrez pour tout réel x de $[1, +\infty[$ et tout k de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{i=1}^{k} \left[\dfrac{x}{a_i}\right] \leqslant [x]$ (indication : montrez déjà $\left[\dfrac{x}{a}\right] = \left[\dfrac{[x]}{a}\right]$).

V∼0)	Pour tout n, on note d_n le p.p.c.m. des entiers de 2 à n (par exemple $d_6 = 60$), calculez d_{11}.

On vérifie : le p.p.c.m. de 2, 3, 4, 5 et 6 est un multiple de ces entiers.
L'entier 60 convient.
Mais est ce le plus petit ?
Notre entier doit être multiple de 2, 4 et 6 : c'est un multiple de 12.
multiple de 5 : c'est un multiple de 60.
C'est donc 60.

Et pour les entiers plus petits, ou plus grands :

2											2	
2	3										6	$\times 3$
2	3	4									12	$\times 2$
2	3	4	5								60	$\times 5$
2	3	4	5	6							60	
2	3	4	5	6	7						420	$\times 7$
2	3	4	5	6	7	8					840	$\times 2$
2	3	4	5	6	7	8	9				2520	$\times 3$
2	3	4	5	6	7	8	9	10			2520	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		27720	$\times 11$

La colonne de droite indique le multiplicateur.

Pour passer d'un d_n au suivant, on exploite l'associativité du p.p.c.m.

$$p.p.c.m.(2,\ 3,\ 4,\ \dots n,\ n+1) = p.p.c.m.\Big(p.p.c.m.(2,\ 3,\ 4,\ \dots n),\ n+1\Big) = p.p.c.m.(d_n,\ n+1)$$

Et si $n+1$ est premier, il faut multiplier par $n+1$ qui n'était pas encore présent dans le produit.
Si en revanche $n+1$ est déjà dans le produit, ce n'est pas la peine d'en demander plus.

Mais comment calculer effectivement ce nouveau p.p.c.m. ?
On utilise la relation $p.p.c.m.(a,b) \times p.g.c.d.(a,\ b) = a \times b$, qu'on écrit aussi $p.p.c.m.(a,\ b) = \dfrac{a \times b}{p.g.c.d.(a,\ b)}$ ou même $p.p.c.m.(a,\ b) = a \times \dfrac{b}{p.g.c.d.(a,\ b)}$.

On va donc avancer suivant une boucle.
On commence à 1 et à chaque fois, on multiplie par $\dfrac{n}{p.g.c.d.(p_{n-1},\ n)}$.

V∼1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et calcule d_n.

```
def d(n) :
....p = 1
;...for k in range(1, n+1) :
........pgcd = gcd(p, k)
........p *= k//pgcd
....return p
```

On sait qu'à chaque fois $\dfrac{k}{p.g.c.d.(p,k)}$ sera bien un entier, par définition du « diviseur commun ».

Et pour trouver le p.g.c.d. de deux entiers ? Euclide :

```
def gcd(a ,) :
....while b > 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

Pour information : $d(20) = 232\,792\,560 = 2^4.3^2.5.7.11.13.17$
$d(30) = 2\,329\,089\,562\,800 = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23.29$
$d(100) = 69720375229712477164533808935312303556800$

V∼2) Déduisez des parties précédentes que $C(n)$ est un multiple de d_n.

V∼3) Montrez qu'à partir d'un rang n_0 on a $d_n \leqslant 3^n$.

◃13▹ ♡ Sachant $a+b=3$ et $6^a+6^b=42$, calculez a^6+b^6.

◃14▹ Montrez qu'il y a $\dbinom{n+p-1}{p}$ façons de ranger p objets indistinguables dans n boites numérotés (les boites pouvant contenir un nombre quelconque d'éléments et pouvant même être vides).
Indication : comment coder ces histoires d'ensembles avec un mot de n+p-1 lettres 0 ou 1 ?

Tout est effectivement dans l'indication. On va mettre en bijection nos configurations avec les mots de $n+p-1$ lettres faits de symboles 0 ou 1.
On mettra p symboles 1 pour marquer les objets, et $n-1$ symboles 0 pour les séparer et indiquer qu'il faut passer à la boite suivante *($n-1$ car on marque des séparateurs entre n boites)*.

Par exemple, le mot $[1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1]$ indique la configuration à six objets dans 5 boites

1, 1	1, 1	1		1

.

La configuration

1, 1		1	1	1,1,1	1,1	

se code $[1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0]$.

Quand des 1 se suivent sans 0 entre eux, ils sont dans la même boite.
Quand un 0 vient s'insérer, on passe à la boite suivante.
Quand plusieurs 0 se suivent, c'est qu'entre deux à il n'y a pas de 1, c'est à dire que la boite est vide.

Il ne reste plus qu'à compter le nombre de mots. Il suffit de choisir les p symboles 0 dans une liste de longueur $n+p-1$. C'est un nombre de combinaisons $\dbinom{n+p-1}{p}$.

On peut aussi choisir les $n-1$ symboles de séparation 0 et on a alors le même coefficient binomial.
Les élèves intéressés pourront écrire sous Python un transcripteur.

◃15▹ Montrez que pour tout n, il existe $n+1$ coefficients $a_{n,k}$ *(k de 0 à n)* vérifiant pour tout θ : $\cos^n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.\cos(k.\theta)$ et calculez $a_{n,n}$.

C'est la formule renversée des polynômes de Tchebychev. Au lieu d'exprimer les $\cos(n.\theta)$ à l'aide des $\cos^k(\theta)$, on exprime les $\cos^n(\theta)$ à l'aide des $\cos(k.\theta)$.

On se donne n et θ et on calcule ;

$$\cos^n(\theta) = \Big(\frac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}\Big)'$$

On développe : $\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(e^{i.\theta})^{n-k}.(e^{-i.\theta})^k$

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}\Big)$$

Dans cette formule, on regroupe les termes deux à deux pour en refaire des cosinus.
Prenons $n=4$: $2^4.\cos^4(\theta) = 1.e^{i.4.\theta}+4.e^{i.2.\theta}+6+4.e^{-2.\theta}+1.e^{-4.\theta}$
$n=5$: $2^5.\cos^5(\theta) = 1.e^{i.5.\theta}+5.e^{i.3.\theta}+10.e^{i.\theta}+10.e^{-i.\theta}+5.e^{-3.\theta}+1.e^{-5.\theta}$
On regroupe : $n=4$: $2^4.\cos^4(\theta) = 2.\cos(4.\theta)+8.\cos(2.\theta)+6.\cos(0.\theta)$
$n=5$: $2^5.\cos^5(\theta) = 2.\cos(5.\theta)+10.\cos(3.\theta)+20.\cos(\theta)$
Et dans le cas général, tout va dépendre de la parité de n pour le terme du milieu.

On a deux possibilités.

Dans la première, on sépare n pair/ n impair.
Pour n pair, de la forme $2.p$ (on va considérer que ce bout de phrase a présenté/quantifié p), il y a $2.p+1$ termes, ce qui en fait un nombre impair.

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{2.p}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}\Big) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}+\binom{n}{p}.e^{i.(n-2.p).\theta}+\sum_{k=p+1}^{2.p}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}\Big)$$

Le terme du milieu est $\binom{n}{p}$, et on l'écrit $\binom{n}{p}.\cos(0.\theta)$.

Dans la deuxième somme, on pose $q=2.p-k=n-k$. Le binomial $\binom{n}{k}$ devient $\binom{n}{2.p-q}$ c'est à dire $\binom{2.p}{2.p-q}$ donc encore $\binom{n}{q}$.

Le terme trigonométrique $e^{i.(n-2.k).\theta}$ donne $e^{i.(n-2.n+2.q).\theta}$ c'est à dire $e^{i.(2.q-n).\theta}$.
On a donc

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}+\binom{n}{p}+\sum_{q=0}^{p-1}\binom{n}{q}.e^{i.(n-2.q).\theta}\Big)$$

Les variables étant muettes, on regroupe les deux sommes :

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}.(e^{i.(n-2.k).\theta}+e^{i.(2.k-n).\theta})+\binom{n}{p}\Big)$$

On revient aux lignes trigonométriques

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\binom{n}{p}.\cos(0.\theta)+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}.2.\cos((n-2.k).\theta)\Big)$$

sachant $n=2.p$.

Pour n impair, il n'y a même pas de terme au milieu. Le même raisonnement sans ce terme donner (en posant $n = 2.p + 1$) :

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}.2.\cos((n-2.k).\theta)\Big)$$

La seconde n'a pas vraiment à séparer par parité, mais elle renverse quand même aussi la somme (sinon, comment regrouper les termes deux à deux ,).

On part de $\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}\Big)$ et on pose $p = n - k$ (ou $k = n - p$ c'est pareil).

La somme devient

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{n-p}.e^{i.(n-2.(n-p)).\theta}\Big)$$

puisque p va aller de n à 0 (donc de 0 à n).

On exploite ce qu'on sait des binomiaux : $\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.e^{i.(2.p-n).\theta}\Big)$.

Mais qu'importe son nom, appelons la k au lieu de :

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(2.k-n).\theta}\Big)$$

Reprenons $\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(n-2.k).\theta}\Big)$ et aussi $\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.e^{i.(2.k-n).\theta}\Big)$ et sommons :

$$2.\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(e^{i.(2.k-n).\theta} + e^{i.(n-2.k).\theta})\Big)$$

Exploitons les formules de Moivre :

$$2.\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2.\cos((n-2.k).\theta))\Big)$$

On simplifie :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\cos((n-2.k).\theta))\Big)$$

Une remarque.

On a deux familles de formules à présent,on va les relier.

Tchebychev	exercice actuel
$\cos(0.\theta) = 1$	$\cos^0(\theta) = 1$
$\cos(1.\theta) = \cos(\theta)$	$\cos^1(\theta) = \cos(\theta)$
$\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$	$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$
$\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$	$\cos^3(\theta) = \frac{\cos(\theta)+3.\cos(\theta)}{4}$
$\cos(4.\theta) = 8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$	$\cos^4(\theta) = \frac{3+4.\cos(2.\theta)+\cos(4.\theta)}{8}$
$\cos(5.\theta) = 16.\cos^5(\theta) - 20.\cos^3(\theta) + 5.\cos(\theta)$	$\cos^5(\theta) = \frac{10+5.\cos(3.\theta)+\cos(5.\theta)}{16}$

Exprimons même ces résultats matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\cos(0.\theta)\\ \cos(1.\theta)\\ \cos(2.\theta)\\ \cos(3.\theta)\\ \cos(4.\theta)\\ \cos(5.\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ -1&0&2&0&0&0\\ 0&-3&0&4&0&0\\ 1&0&-8&0&8&0\\ 0&5&0&-20&0&16\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos^0(\theta)\\ \cos^1(\theta)\\ \cos^2(\theta)\\ \cos^3(\theta)\\ \cos^4(\theta)\\ \cos^5(\theta)\end{pmatrix} \text{ pour l'un}$$

$$\text{et pour l'autre } \begin{pmatrix}\cos^0(\theta)\\ \cos^1(\theta)\\ \cos^2(\theta)\\ \cos^3(\theta)\\ \cos^4(\theta)\\ \cos^5(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 1/2&0&1/2&0&0&0\\ 0&3/4&0&1/4&0&0\\ 3/8&0&4/8&0&1/8&0\\ 0&10/16&0&5/16&0&1/16\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos(0.\theta)\\ \cos(1.\theta)\\ \cos(2.\theta)\\ \cos(3.\theta)\\ \cos(4.\theta)\\ \cos(5.\theta)\end{pmatrix}$$

Je vous laisse maintenant effectuer deux produits pour vérifier :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 4/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 & 1/16 \end{pmatrix} =?$$

et
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 4/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 & 1/16 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 \end{pmatrix} =?$$

◃16▹ ♡♠ On définit $\varphi = t \longmapsto e^{1/t}$. Montrez pour tout n l'existence d'un polynôme P vérifiant $\varphi^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2.n}}.\varphi(t)$ pour tout t.
Donnez le relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de P_n et P'_n. Calculez P_3.
De quel degré est P_n ?

Montrez pour tout x de $]0,\ +\infty[$: $x^2.\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$.
Déduisez sans récurrence : $x^2.\varphi^{(n+1)}(x) + 2.n.x.\varphi^{(n)}(x) + n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout x.
Trouvez la relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de $P_n$et P_{n-1} *(sans faire intervenir de dérivées)*.

On initialise avec $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t) = \dfrac{1}{t^0}.\varphi(t) = \dfrac{P_0(t)}{t^{2.0}}.\varphi(t)$ pour tout t.

On continue avec $\varphi^{(1)}(t) = -\dfrac{e^{1/t}}{t^2} = \dfrac{-1}{t^{2.1}}.\varphi(t)$.

On se donne n et on suppose $\varphi^{(n)} = t \longmapsto P_n(t).t^{-2.n}.\varphi(t)$ et on dérive

$$(\varphi^{(n)})' = t \longmapsto P'_n(t).t^{-2.n}.\varphi(t) + P_n(t).(-2.n.t^{-2.n-1}).\varphi(t) + P_n(t).t^{-2.n}.\frac{-\varphi(t)}{t^2}$$

On réduit au dénominateur comme

$$\varphi^{(n+1)} = t \longmapsto \frac{t^2.P'_n(t) - 2.n.t.P_n(t) + P_n(t)}{t^{2.n+2}}.\varphi(t)$$

On pose donc $P_{n+1}(t) = t^2.P'_n(t) - 2.n.t.P_n(t) + P_n(t)$. C'est un polynôme (stabilités) et il vérifie la relation demandée.

L'existence de la suite des P_n est établie par récurrence.

On les calcule de proche en proche

P_0	$= 1$
P_1	$= -1$
P_2	$= 2.X + 1$
P_3	$= -6.X^2 - 6.X - 1$
P_4	$= 24.X^3 + 36.X^2 + 12.X + 1$
P_5	$= -120.X^4 - 240.X^3 - 120.X^2 - 20 - 1$

P_n est de degré n et de terme dominant $(-1)^n.n!.X^{n-1}$ (à partir de $n = 1$).
La propriété est initialisée. Supposons la vraie à un rang n donné.
Alors $X^2.P'_n(X)$ a pour terme dominant $(-1)^n.n!.(n-1).X^n$
$-2.n.X.P_X(t)$ a pour terme dominant $(-1)^n.n!.(-2.n).X^n$.
Les deux termes étant de même degré, leur somme a pour terme dominant $(-1)^n.n!.(n-1-2.n).X^n$ ce qui fait $(-1)^{n+1}.(n+1)!.X^n$.
Quant à $P_n(X)$ il est d'un degré moins élevé et ne modifie pas le terme dominant calculé au dessus.
Ceci permet de finir la récurrence.

La relation$x^2.\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$ vient d'un calcul direct.

On la dérive n fois car elle est vraie tout au long de l'intervalle $]0,\ +\infty[$.
La formule de Leibniz permet dedériver $x \longmapsto x^2.\varphi'(x)$ en trois termes

$$x \longmapsto x^2.(\varphi')^{(n)}(x) + n.(2.x).(\varphi')^{(n-1)}(x) + \frac{n.(n-1)}{2}.(2).(\varphi')^{(n-2)}(x) + 0$$

On ajoute $\varphi^{(n)}$ et on trouve

$$x^2.\varphi^{(n+1)}(x) + n.(2.x).\varphi^{(n)}(x) + n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n)}(x) = 0$$

Comme cette formule concerne des dérivées de φ on peut les remplacer par la formule avec des fractions et des P_n (et autres indices)

$$x^2.\frac{P_{n+2}(x)}{x^{2.n+4}}.\varphi(x) + n.(2.x).\frac{P_n(x)}{x^{2.n}}.\varphi(x) + n.(n-1).\frac{P_{n-1}(x)}{x^{2.n-2}}.\varphi(x) + \frac{P_n(x)}{x^{2.n}}.\varphi(x) = 0$$

On élimine les $\varphi(x)$ (quantité jamais nulle) et on élimine les dénominateurs (dénominateur comme $x^{2.n+2}$, il semblerait que ce soit déjà une difficulté pour certains qui vont m'inventer d'indigestes $x^{2.n+4+2.n+2.n-2}$

$$\frac{P_{n+2}(x)}{x^{2.n+2}} + n.(2.x^3).\frac{P_n(x)}{x^{2.n+2}} + n.(n-1).x^4.\frac{P_{n-1}(x)}{x^{2.n-2}} + x^2.\frac{P_n(x)}{x^{2.n}} = 0$$

On peut les calculer de proche en proche sans dérivéer. Mais il faut quand même tenir les deux précédents.

◁17▷ On définit : $f = x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$. Calculez $f^{(n)}(0)$ pour n de 0 à 3.
Simplifiez $f(x).f'(x)$ pour tout x réel.
Calculez alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.f^{(k+1)}$ pour tout entier naturel n.
Calculez alors $f^{(n)}(0)$ pour n de 4 à 9.
Montrez que $f^{(2.n+1)}(0)$ est nul pour tout entier naturel n.

	0	1	2	3
$f^{(n)}(x)$	$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$	$x.(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2.(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$	$-3.x.(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$
$f^{(n)}(0)$	1	0	1	0

Une chose est sûre : par composition, f est de classe C^∞.
Pour tout x, on a $f(x).f'(x) = x$.

On applique la formule de Leibniz car f et f' sont de classe suffisante.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}(x).(f')^{(k)}(x) = \left\{\begin{array}{lll} x & si & n=0 \\ 1 & si & n=1 \\ 0 & si & n>1 \end{array}\right|.$
Le membre de droite dépend de n, mais il s'en va très vite.

Ceci va permettre de calculer de proche en proche : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{-1}{f(x)}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}(x).f^{(k+1)}(x)$.

En particulier : $f^{(n+1)}(0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}(0).f^{(k+1)}(0)$.

En particulier aussi : $f^{(4)}(0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{3}{k}.f^{(3-k)}(0).f^{(k+1)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = -f^{(3)}(0).f'(0) - 3.f''(0).f''(0) - 3.f'(0).f^{(3)}(0)$$
$$f^{(4)}(0) = -3$$

De même, $f^{(5)}(0) = 0$, $f^{(6)}(0) = 45$ et ainsi de suite

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f^{(n)}(0)$	1	0	1	0	-3	0	45	0	-1575	0	99225

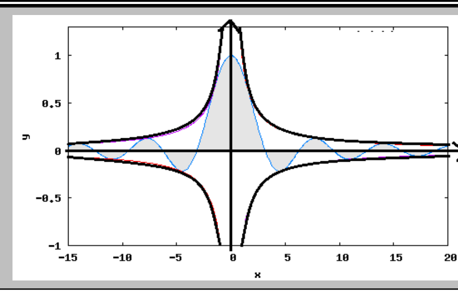
Bien malin qui proposera alors une formule toute prête pour tout n pair.

Pour n impair, en fait, il n'y a aucun effort à faire.
On peut certes monter une belle récurrence, elle passe.
Mais f est paire. Ses dérivées successives sont donc paires et impaires.
Il suffit de partir de $\forall x,\ f(-x) = f(x)$ et de dériver n fois « par rapport à x » pour utiliser une locution physicienne.

On obtient $(-1)^n.f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.
En particulier en 0 : $(-1)^n.f^{(n)}.(0) = f^{(n)}(0)$
$(-1)^{2.n+1}.f^{(2.n+1)}.(0) = f^{(2.n+1)}(0)$
$f^{(2.n+1)}(0) = 0$

Autre approche	Si φ est paire et dérivable, alors φ' est impaire : $\forall x,\ \varphi(-x) = \varphi(x)$

On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrez qu'on prolonge f par continuité en 0. Montrez que f est dérivable en 0 *(limite de taux d'accroissements)*. Calculez aussi $f''(0)$ après en avoir prouvé l'existence par limité de taux d'accroissements.
On admet que f est de classe C^∞. En utilisant la formule de Leibniz
◁ 18 ▷ pour $f.Id$, calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout n.



La limite de f en 1 vient de l'équivalent classique $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$.
Ou de la limite de taux d'accroissement $\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$.

Mais maintenant les taux de f :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x^2} = -\frac{x}{6}+o(x)$$

f est dérivable en 0 et $f'(0)$ est nul.

On a $f.Id = \sin$ (à l'étage des fonctions).

On dérive n fois le premier membre par la formule de Leibniz :

$$(f.Id)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.Id^{(k)} = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.Id^{(k)} = 1.f^{(n)}.Id + n.f^{(n-1)}$$

On calcule en 0 et il ne reste que $n.f^{(n-1)}(0) = \sin^{(n)}(0)$.
Mais les dérivées successives du sinus sont connues. On décalle d'un cran pour la lisibilité :

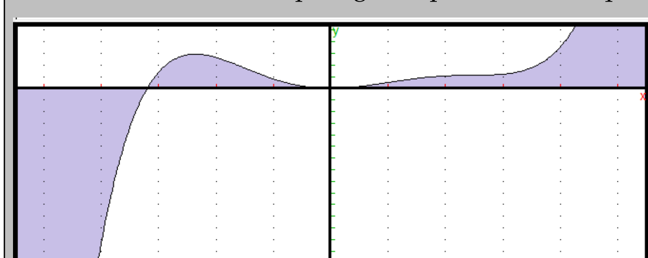
$$f^{(p)}(0) = \frac{\sin^{(p+1)}(0)}{p+1} = \begin{array}{ccc} \frac{1}{p+1} & si & p = 0\ [4] \\ 0 & si & p = 1\ [4] \\ \frac{-1}{p+1} & si & p = 2\ [4] \\ 0 & si & p = 3\ [4] \end{array}$$

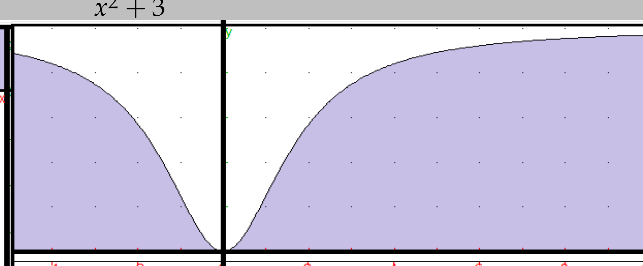
◁ 19 ▷ Donnez (si vous la trouvez) la limite de $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

Bon, c'est clair, ça n'a pas de sens.

• Si les points de suspension disent qu'il y a k termes avec k donné, la somme tend vers 0.
• Si les points de suspension disent qu'il y a n termes (la variable), la somme tend vers 1.
• Et si les points de suspensions disent qu'il y en a $2.n$, la somme converge vers 2.
Et je vous laisse compter les termes pour qu'elle tend vers $+\infty$.

◁ 20 ▷ ♡ Donnez un intervalle le plus grand possible sur lequel $x \longmapsto 3.x^5 - 20.x^4 - 110.x^3 + 900.x^2$ est convexe.
Donnez un intervalle le plus grand possible sur lequel $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+3}$ est convexe.





On prendra pour l'instant comme définition de la convexité « dérive seconde positive » ou « dérivée première croissante ».

On dérive donc deux fois : on factorise 60 :

$$x \longmapsto 60.(x^3 - 4.x^2 - 11.x + 30)$$

On trouve des racines évidentes : $x \longmapsto 60.(x-5).(x-2).(x+3)$ (calcul).

On dresse un tableau de signes :

x	$]-\infty,\ -3]$	$[-3,\ 2]$	$[2,\ 5]$	$[5,\ +\infty[$
$x-5$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x-2$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$x+3$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$P''(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

On retient $[5,\ +\infty[$ (et on savait que f'' allait être positive sur un intervalle $[r,\ +\infty[$). Et il reste aussi $[-3,\ 2]$ mais trop petit.
On peut confirmer sur le dessin, entre les points d'inflexion.

Du calcul encore : $\Big(x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+3}\Big)'' = \Big(x \longmapsto x^2.(x^2+3)^{-1}\Big)''$

$$\Big(x \longmapsto \frac{x^2}{x^2+3}\Big)'' = \Big(x \longmapsto 2.(x^2+3)^{-1} + 2.2.x.(-2.x.(x^2+3)^{-2}) + x^2.(-2.(x^2+3)^{-2} + 8.x^2.(x^2+3)^{-3})\Big)$$

(danke Leibniz)
Le dénominateur est positif, il reste un numérateur en

$$2.(x^2+3)^2 - 8.x^2.(x^2+3) + x^2.(-2.(x^2+3) + 8.x^2)$$

Trop fort : $18 - 18.x^2$!
La réponse est donc $[-1,\ 1]$.

◃21▹ Il y a trois élèves dans cette classe dont les prénoms sont ambigus (on dit « épicènes ») : Claude, Dominique et Camille. Je sais que si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille. Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille. Si Dominique est une fille, alors Camille aussi. Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur.
Donnez moi le sexe de chacun (euh, non, indiquez le moi, c'est tout).

On va écrire des implications, en supposant que se faire appeler Monsieur, c'est être de sexe masculin, sinon j'en perds mon latin.
On va noter avec une grande lettre le fait d'être une fille, et la négation avec une barre, c'est « garçon ».

1	si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille	$\overline{D} \Rightarrow Cl$ que je traduis par D *ou* Cl
2	Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille	$\overline{Ca} \Rightarrow D$ que je traduis par Ca *ou* D
3	Si Dominique est une fille, alors Camille aussi	$D \Rightarrow Ca$ qui donne $\overline{D}$ *ou* Ca
4	Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur.	$Ca \Rightarrow \overline{Cl}$ et là c'est enfin $\overline{Ca}$ *ou* $\overline{Cl}$

On peut mettre tout ça avec des *et*, développer par exemple $(Ca$ *ou* $D)$ *et* $(\overline{D}$ *ou* $Ca)$ pour voir ce qu'il reste.

Mais on peut aussi y aller rapidement.
Supposons que Dominique est un garçon. Par 1, Claude est une fille.
Par contraposée de 4, Camille est un garçon.
Par 2, Dominique est une fille.
Contradiction interne.
On élimine « Dominique est un garçon ».
Il reste Dominique est une fille. Alors par 3, Camille aussi.
Par 4, Claude est un garçon.
Ceci ne contredit pas 1 (faux implique faux)
Et 2 est du type « faux implique... ».

On retient donc au final

Dominique	Claude	Camille
Fille	Garçon	Fille

Une année, j'ai eu droit à des interprétations alternatives : « Claude s'appelle Monsieur » ne signifiant pas que Claude est de sexe masculin, mais s'appelle monsieur Claude Monsieur ou madame Claude Monsieur. Et là, on ne peut plus conclure, c'est vrai.

◁ 22 ▷ ♡ Montrez que la dérivée de $t \longmapsto \int_0^t f(u).sh(t-u).du$ *(où f est une application continue)* est .$t \longmapsto \int_0^t f(u).ch(t-u).du$.
(vous serez conduit à écrire $sh(t).\int_0^t f(u).ch(u).du - ch(t).\int_0^t f(u).sh(u).du$).

Résultat pas évident si on ne l'attaque pas par le bon bout. Il faut voir où t intervient. On développe

$$sh(t-u) = sh(t).ch(u) - sh(u).ch(t)$$

On sort de l'intégrale ce qui ne dépend pas de la variable d'intégration u :

$$\int_0^t f(u).sh(t-u).du = sh(t).\int_0^t ch(u).f(u).du - ch(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$$

On des produits, qu'on dérive alors avec chacun deux termes, en rappelant que $t \longmapsto \int_0^t h(t).dt$ se drive en $t \longmapsto h(t)$:

$f(t) =$	$sh(t).\int_0^t ch(u).f(u).du$	$-ch(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$
$f'(t) =$	$ch(t).\int_0^t ch(u).f(u).du$	$-sh(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$
	$+sh(t).ch(t).f(t)$	$-ch(t).sh(t).f(t)$

Les termes de la deuxième ligne s'en vont.
On refusionne ceux de la première ligne :

$$f'(t) = \int_0^t \Big(ch(t).ch(u).f(u) - sh(t).sh(u).f(u)\Big).du$$

On regroupe $ch(t).ch(u) - sh(t).sh(u)$ en $ch(t-u)$ et c'est fini !

Attention : *On rappelle que $t \longmapsto \int_0^t f(x).dx$ se dérive en $x \longmapsto f(x)$.*
Et c'est tout.
Il suffit d'écrire $\int_0^t f(x).dx = F(t) - F(0)$ et de dériver.
Ah oui, il reste des élèves qui écrivent que la dérivée c'est $F'(t) - F'(0)$.
ceux là, je ne peux plus rien pour eux (hormis leur dire de jouer le 12, le 4 et le 7 au tiercé comme ça si ils gagnent, ça ne leur aura pas servi à rien de venir au lycée.
Sinon, à ces crétins, je peux dire que $x \longmapsto \sin(x)$ c'est aussi $x \longmapsto \sin(x) - \sin(0)$ et donc, avec leurs idées à la noix, ça se dérive en $x \longmapsto \cos(x) - \cos(0)$. Etonnant, non ?

◁ 23 ▷

35	+		−		=	37
−	■	+	■	+	■	■
	+	9	+		=	14
−	■	+	■	×	■	■
	×		+		=	61
=	■	=	■	=	■	■
26	■	23	■	19	■	■

29	−		+		=	31
−	■	×	■	+	■	■
	+		+	2	=	17
−	■	−	■	×	■	■
	×		−		=	30
=	■	=	■	=	■	■
12	■	17	■	17	■	■

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

A faire ?

◁ 24 ▷ Dérivez et simplifiez $\varphi = t \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{(1-t)^k}{k!}.h^k.f^{(k)}(a+t.h)$. Calculez $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ en prenant garde au terme $k = 0$.

La formule de Taylor sans intégration par parties, et sans récurrence ! Trop fort.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varphi(t) =$	$f(a+t.h)$	$+(1-t).h.f'(a+t.h)$	$+\frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)$	$+\frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
$\varphi(1) =$	$f(a+h)$	$+0$	$+0$	$+0$
$\varphi(0) =$	$f(a)$	$+h.f'(a)$	$+\frac{h^2}{2}.f''(a)$	$+\frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$

Ensuite, on dérive les produits par rapport à t ne l'oublions pas

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varphi(t) =$	$f(a+t.h)$	$+(1-t).h.f'(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
$\varphi'(t) =$	$h.f'(a+t.h)$	$-1..h.f'(a+t.h)$ $+(1-t).h^2.f''(a+t.h)$	$+\dfrac{-2.(1-t)}{2}.h^2.f''(a+t.h)$ $+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$	$+\dfrac{-3.(1-t)^2}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$ $+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$

Les termes se simplifient : $\varphi'(t) = \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$ (vous le voyez mieux ici le décalage $\dfrac{(1-t)^n}{n!}$ en face de $h^{n+1}.f^{(n+1)}(a+t.h)$?

Quoi qu'il en soit, $\int_0^1 \varphi'(t).dt = \varphi(1) - \varphi(0)$ donne la formule de Taylor avec reste intégrale.

◁ 25 ▷ La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculez la somme des termes de M^{2018}.

La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Elle doit donc avoir la même trace et le même déterminant. En notant a et b les deux termes absents sur la matrice, on a $a+b=-1$ et $a.b+980=-12$.
Les deux réels sont solutions de $x^2+x-992$. On résout : -32 et 31.

La matrice est l'une des deux : $\boxed{\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix}}$ Choisissez à votre guise.

Pour chacune, je vous donne une matrice P possible :

$$\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On élève à la puissance n :

$$\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3^n - 4^{n+1} & 3^n - (-4)^n \\ -20.3^n - 5.(-4)^{n+1} & 5.(-4)^n - 4.3^n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.(-4)^n - 4.3^n & 3^n - (-4)^n \\ -20.(-4)^n - 20.3^n & 5.3^n - (-4)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, quand on somme tous les éléments, on trouve $\boxed{-18.3^n + 20.(-4)^n}$

Remarque : | *On peut vérifier pour les petites valeurs de n et même pour n égal à -1 si on y tient.*

◁ 26 ▷ ♡ Montrez $2.\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$ *(par parties et remontez chercher* $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$*)*.
Pardon ? Déjà posé ?

Tout ce qu'on a sous le signe existe, est continu et même dérivable à dérivée continue.

On intègre par parties :

1	$\hookleftarrow$	t
$\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

(oui, on a dérivé t $\longmapsto t^2 \longmapsto (1+t^2)^{1/2}$ *et deux facteurs se sont compensés)*.

On a un crochet égal à $\Big[t.\sqrt{1+t^2}\Big]_0^1$ ce qui fait $\sqrt{2}$.

Le terme de compensation vaut $\int_0^1 \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.dt$. On le sépare en $\int_0^1 \dfrac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}.dt - \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.dt$.

On a donc $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt + \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

On fait passer de l'autre côté : $2.\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Il reste à calculer $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Et là, on regarde un autre exercice qui nous dit par chance : $\Big(t \longmapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big)' = \Big(t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$.

On peut achever 2. $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \left[\ln(t+\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

◁27▷

> A et B sont deux ensembles. Montrez : $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$.[a]
> Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A)\cup P(B)) = 11$.
> Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A)\cup P(B)) = 10$.
>
> a. $P(A)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de A (ou sous-ensembles de A)

On va raisonner par équivalences.
En étudiant les éléments de $P(A\cap B)$. Ce sont des ensembles (ou parties).

$$X\in P(A\cap B) \iff X\subset A\cap B \iff \begin{array}{ccc} X & \subset & A \\ & et & \\ X & \subset & B\end{array} \iff \begin{array}{ccc} X & \in & P(A) \\ & et & \\ X & \in & P(B)\end{array} \iff X\in (P(A)\cap P(B))$$

Et je ne peux plus rien pour les élèves qui se perdent entre $X\subset A$ et $X\in P(A)$.
Ou alors, si, je peux faire appel à Blaise Pascal. Celui du triangle, et celui du « pari »
et prier.
Si un Dieu existe, il vous viendra en aide, et c'est tout ce qu'il reste comme solution pour faire de vous des gens intelligents
Si aucun Dieu n'existe, j'aurai perdu mon temps, mais vous vous en foutez de votre côté.

Si A possède n élément, $P(A)$ possède 2^n éléments (parties de A). Si B possède p élément, $P(B)$ en possède 2^p.

$P(A)\cup P(B)$ est formé des 2^a parties de A et 2^p parties de B.
On s'attend à avoir 2^n+2^p éléments. Ce qui ne saurait faire 11.
Mais dans $P(A)$ il y a $\emptyset$ (l'ensemble vide) et dans $P(B)$ aussi. On peut donc ne compter qu'une fois cet élément, et arriver à 11 avec $8+4-1$. On prend pour A un ensemble à trois éléments et pour B un ensemble à deux éléments.

$A=\{0,\ 1,\ 2\}$	$P(A)=\Big\{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\}\Big\}$
$B=\{3,\ 4\}$	$P(B)=\Big\{\emptyset,\ \{3\},\ \{4\},\ \{3,4\}\Big\}$

On a bien $P(A)\cup P(B) = \Big\{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{3,4\}\Big\}$ de cardinal 11.

Et cet ensemble n'a rien à voir avec $P(A\cup B)$ de cardinal 32 qui contient aussi $\{1,\ 4\}$ et $\{0,\ 1,\ 3,\ 4\}$ par exemple.

Pour aboutir à un cardinal 10, il faut effacer encore une partie commune. Il suffit de demander à A et B d'avoir un élément commun ce qui fera un singleton en commun à $P(A)$ et $P(B)$.

$A=\{0,\ 1,\ 2\}$	$P(A)=\Big\{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\}\Big\}$
$B=\{2,\ 3\}$	$P(B)=\Big\{\emptyset,\ \{2\},\ \{3\},\ \{2,3\}\Big\}$

On a bien

$$P(A)\cup P(B) = \Big\{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,1,2\},\ \{3\},\ \{2,3\}\Big\}$$

de cardinal 10.

Question ouverte : quelles sont les valeurs que peut prendre $P(A)\cup P(B)$ quand A et b sont deux ensembles ?

Mais on la ferme vite cette question : $2^a+2^b-2^c$ avec $c\leqslant Min(a,b)$.

◁28▷

> En développant de deux façons $(1+X)^p.(1+X)^q$, simplifiez $\sum_{i+j=k}\frac{p!.q!}{i!.j!.(p-i)!.(q-j)!}$.
> Effectuez les produits matriciels suivants et calculez leurs déterminants
>
> $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{pmatrix}$

Partons de $(1+X)^p.(1+X)^q$ sous la forme $\Big(\sum_{i\leqslant p}\binom{p}{i}.X^i\Big).\Big(\sum_{j\leqslant q}\binom{q}{j}.X^j\Big)$.

On le développe formellement en une somme de $(p+1).(q+1)$ termes $\sum_{\substack{i\leqslant p\\ j\leqslant q}} \binom{p}{i}.\binom{q}{j}.X^{i+j}$.

Dans cette somme, on cherche le terme en X^n.

La condition nécessaire et suffisante est $i+j=n$. On écrit donc de cette somme $\sum_n \Big(\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}.\binom{q}{j}.X^n \Big)$.

Mais d'autre par $(1+X)^p.(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$.

Le coefficient de X^nest donc $\binom{p+q}{n}$.

En identifiant (base canonique sur l'espace des polynômes) : $\boxed{\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}.\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}}$

Remarque : *On note que pour $q=1$, il n'y a que deux valeurs de j possibles, et donc i vaut n ou $n-1$:*
$\binom{p}{n}.\binom{1}{0} + \binom{p}{n-1}.\binom{1}{1} = \binom{p+1}{n}$
Reconnaissez vous la simple relation de Pascal ?

◁29▷ ♠♡ La suite de Fifi Bonacci est défifinie par ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 donnés et $\phi_{n+2} = -\phi_{n+1} + \phi_n + \phi_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *(les lapins de la génération $n+1$ ou plutôt $n-1$ meurent).*
Écrivez un script Pypithon qui calcule ϕ_n pour n donné.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$ *(donc U_0 est donné)*. Trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n.
On pose alors $B = A + I_3$. Calculez B^2, B^3 et B^4. Montrez : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout k supérieur ou égal à 2. Calculez $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Calculez alors A^n pour tout n à l'aide de la formule du binôme dont vous justifierez l'utilisation.
Exprimez alors U_n à l'aide de U_0, puis ϕ_n à l'aide de n, $(-1)^n$, ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2.
Retrouvez le résultat précédent par simple récurrence sur n.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \\ \phi_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \\ -\phi_{n+2} + \phi_{n+1} + \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$$

Ah oui, déjà, la difficulté : quel est le format de la matrice trouver ?

On trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On effectue :

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Cette disposition permet de calculer facilement B, B^2, B^3 et ainsi de suite, sans perdre trop de place :

	B	B	B
B	B^2	B^3	B^4

La formule $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se démontre par récurrence sur k déjà initialisée ($k=2$) .

On suppose pour un k donné : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule : $B^{k+1} = B^k.B = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2^{k-1}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

La formule $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ est une formule du binôme incomplète :

$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$	$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$	$-(-1)^n$	$-n.2.(-1)^{n-1}$
$[2,\ n]$	$[0,\ n]$	$k=0$	$k=1$

Finalement $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k} = (2-1)^n - (-1)^n - 2.n.(-1)^{n-1}$ (merci Newton et les autres)

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k} = 1+(-1)^n.(2.n-1)}$$ en regroupant les $(-1)^n$

Comment utiliser tout ça pour calculer A^n ?

On écrit $A = B - I_3$ jusque là tout va bien.

On élève : $A^n = (B-I_3)^n$ logique

On développe : $A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.B^k.(-I_3)^{n-k}$ c'est le binôme, car I_3 et B sont permutables *($I_3.B = B.I_3$, la chose à vérifier en anneau non commutatif).*

On sépare :

$A^n =$	$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.B^k.(-I_3)^{n-k}$	$+(I_3)^n$	$+n.B.(-I_3)^{n-1}$
	$[2,\ n]$	$k=0$	$k=1$

On remplace : $A^n = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.(-1)^{n-k}.I_3 + (-1)^n.(I_3 - n.B)$

On factorise : $A^n = \dfrac{1}{4}.\Big(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}\Big).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n.(I_3 - n.B)$

On exploite ce qu'on a fait plus haut :

$$\boxed{A^n = \frac{1+(-1)^n.(2.n-1)}{4}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n.\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - n.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$$

On se contentera de ça, sans aller jusqu'à citer les 9 coefficients.

En quoi est ce génial de connaître A^n ?
On part de $U_{n+1} = A.U_n$ et par récurrence évidente : $U_n = A^n.U_0$.

Non, même pas par récurrence, mais avec le mot clef « suite géométrique de raison à gauche A » (c'est la généralisation de $u_{n+1} = a.u_n$ à une forme matricielle).

On a donc une formule explicite pour U_n, et en regardant juste le premier terme de ce vecteur, pour ϕ_n.

◁ 30 ▷ Au lycée Louis le Gland, il y a deux classe : MP et PC. Les résultats des élèves sont les suivants :

élève	Alain	Bernard	Claire	Didier	Élise	Francis	Guillaume	Hélène	Ibrahim
classe	MP	MP	PC	MP	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	non	non

élève	Jenny	Kevin	Laurent	Mohamed	Noémie	Omar	Pascale	Quentin	Richard
classe	PC	PC	PC	MP	MP	MP	MP	MP	MP
a intégré	oui	non	non	oui	non	oui	non	oui	oui

élève	Sonia	Thérèse	Ursula	Valérie	Wendy	Xavier	Yolande	Zoé	Alice
classe	PC	PC	MP	PC	MP	MP	PC	PC	PC
a intégré	non	non	non	oui	non	oui	non	non	non

élève	Brahim	Candy	Daniel	Eva	Fatima	Guy	Hervé	Inès	Juan
classe	MP	PC	PC	PC	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	non	oui	non	non	non	non	non	non

élève	Kate	Lily	Manfred	Nicole	Odile	Pierre	Quentin	Rudy	Stanislas
classe	PC	PC	PC	PC	PC	MP	PC	MP	PC
a intégré	non	non	oui	non	non	non	oui	oui	oui

élève	Thierry	Ulysse	Véro	William	Xavière	Yvette	Zakia	Ali	Béa
classe	MP	MP	MP	MP	MP	PC	PC	MP	PC
a intégré	non	non	non	non	non	non	non	oui	non

élève	Charles	David	Eloi	Fanny	Geneviève	Hadrien	Isis	Joanna	Klaus
classe	MP	PC	MP	MP	PC	MP	PC	PC	MP
a intégré	oui	oui	oui	non	non	non	oui	non	non

élève	Léa	Marie	Nicole	Olivia	Paulot	Quentin	Rachid	Sophie	Tatiana
classe	PC	MP	PC	PC	MP	MP	PC	PC	PC
a intégré	non	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non

élève	Ulrich	Violette	Wilfried	Xenophon	Yann	Zorah	Alan	Berthe	
classe	MP	MP	MP	MP	MP	PC	MP	MP	
a intégré	oui	oui	oui	non	non	oui	oui	non	

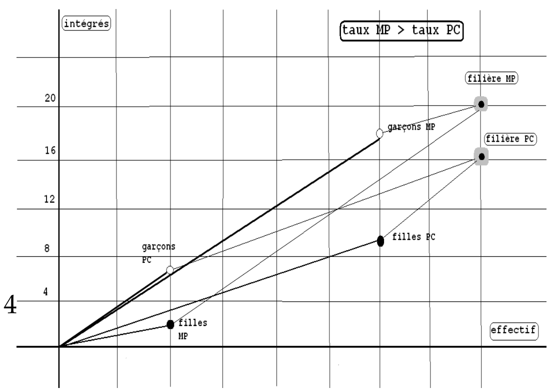
Complétez :

	l'élève intègre	l'élève n'intègre pas	pourcentage d'intégration
MP			
PC			

Pour intégrer, valait il mieux être en MP ou PC ?
Si vous étiez un garçon, valait il mieux être en MP ou PC ?
Si vous étiez une fille, valait il mieux être en MP ou PC ?
C'est logique que l'étude par genre soit dans les deux cas contraire à l'étude générale ?

On a juste besoin d'être méthodique et de compter. On compte les élèves de MP qui ont intégré, ceux qui n'ont pas intégré, on fait de même avec ceux de PC :

	l'élève intègre	l'élève n'intègre pas	effectif de la classe	pourcentage d'intégration
MP	20	20	40	$\frac{20}{40} = 50\%$
PC	16	24	40	$\frac{16}{40} = 40\%$



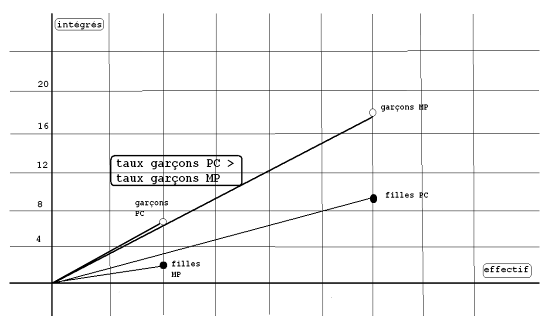
Le pourcentage d'intégration en PC est ici $\frac{16}{16+24} = \frac{16}{40} = 0,4$ qu'on tranforme en 40%.

La conclusion est "les pourcentages sont meilleurs en MP". Il valait mieux faire MP.

Mais l'énoncé nous demande de faire aussi des statistiques suivant le genre *(ce qui est autorisé par la loi)*.
On constate qu'on a d'ailleurs un bel équilibre : 40 garçons, 40filles, mais aussi 40 MP et 40 PC. Mais même si les classes sont mixtes, il y a un certain déséquilibre.

Là aussi, on est méthodique, avec des feutres de couleur s'il le faut :

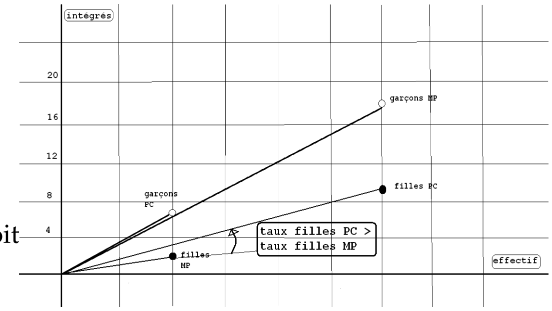
	le garçon intègre	le garçon n'intègre pas	effectif des garçons	pourcentage d'intégration
MP	18	12	30	$\frac{18}{30} = 60\%$
PC	7	3	10	$\frac{7}{10} = 70\%$



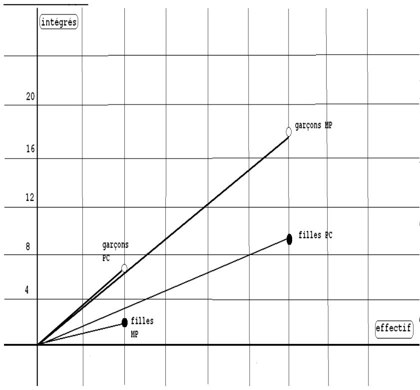
Les statistiques sont cette fois favorables aux garçons de PC.

	la fille intègre	la fille n'intègre pas	effectif des filles	pourcentage d'intégration
MP	2	8	10	$\dfrac{2}{10}=20\%$
PC	9	21	30	$\dfrac{9}{30}=30\%$

Même si les statistiques sont cette fois moins bonnes, on voit qu'elles sont en faveur de la PC.



Bilan : Un élève au sexe indéterminé a intérêt à choisir la filière MP.



Mais si il connaît son sexe *(garçon ou fille)*, il a intérêt à choisir PC.
Etonnant non ? C'est ce qu'on appelle le paradoxe de Simpson.
Il a été mis en lumière par exemple à l'Université de Berkeley en 1973 : les taux d'admission des filles étaient supérieurs aux taux d'admission des garçons dans presque tous les départements de l'université. Mais quand on fusionnait les résultats pour les voir sur l'université entière, le taux d'admission des filles était inférieur au taux d'amission des garçons. C'est étonnant, mais ça ne cache aucune arnaque ou erreur de calcul.
On pourra en reparler en seconde période dans le cadre d'un exposé de T.I.P.E.

Sinon, si vous avez le temps et aussi une compréhension géométrique des choses, ce diagramme peut vous éclairer et vous aider à construire vos propres "Simpson".

◁31▷ ♣0♣

E est un ensemble de cardinal N et les A_k *(k de 0 à $n-1$)* sont des parties de E. On définit alors la matrice S de terme général $Card(A_i \cap A_k)$ *(ligne d'indice pythonien i et colonne d'indice pythonien k)*. Montrez dans le cas $n=2$ que $\det(S)$ est toujours positif ou nul.

Prenons le cas de deux ensembles A et B au lieu de A_0 et A_1.
La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} Card(A) & Card(A\cap B) \\ Card(A\cap B) & Card(B) \end{pmatrix}$.
Son déterminant vaut $Card(A).Card(B) - (Card(A\cap B))^2$.
C'est en entier, de la forme $a.b-c^2$ avec c plus petit que a et que b, puisque c'est le cardinal de l'intersection.
On a donc $0 \leqslant c \leqslant a$ et $0 \leqslant c \leqslant b$ et enfin $0 \leqslant c^2 \leqslant a.b$.
Le déterminant est un réel positif ou nul.

Pour qu'il soit nul, une seule solution : $A = B$ et le déterminant est de la forme $\begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix}$.

Tiens, tant que j'y pense, j'ai une preuve jolie : $(Card(A\cap B))^2 = \Big(\sum_{x\in E} 1_{A\cap B}(x)\Big)^2 = \Big(\sum_{x\in E} 1_A(x).1_B(x)\Big)^2$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(Card(A\cap B))^2 \leqslant \Big(\sum_{x\in E}(1_A(x))^2\Big).\Big(\sum_{x\in E}(1_B(x))^2\Big) = \Big(\sum_{x\in E}1_A(x)\Big).\Big(\sum_{x\in E}1_B(x)\Big)$$

car le carré d'une indicatrice est cette indicatrice elle même.
On reconnaît $(Car(A\cap B))^2 \leqslant Card(A).Card(B)$ *avec égalité si et seulement si les deux suites sont les mêmes :* $A = B$.

♯0♯

Écrivez un script `Python` qui prend en entrée la liste `L` des parties *(chaque partie est elle même une liste sans doublon)* et retourne la matrice `S` sous forme de liste de listes *(les fonctions `len`, `in` , `reversed` et les méthodes `append`, `count`, `append`, `sort` sont autorisées, même si certaines ne servent ici à rien)*.
Par exemple, pour l'entrée `[[0, 1, 4, 7], [0, 2, 7], [0, 1, 6, 9]]` sa réponse sera `[[4, 2, 2],[2, 3, 1],[2, 1, 4]]`).
.

Pour le programme, on va créer déjà une procédure qui détermine le cardinal d'une intersection de deux ensembles.

Il suffit de compter avec un accumulateur `S` les éléments du premier qui sont aussi dans l'autre :

```
def CardInter(A, B) :
....S = 0
....for a in A :
........if a in B :
............S += 1
....return S
```

et sans le test in pour mieux cerner la complexité :

```
def CardInter(A, B) :
....S = 0
....for a in A :
........for b in B :
............S += int(a==b)
....return S
```

La complexité est en $Card(A) \times Card(B)$, même si on peut l'améliorer en travaillant sur une copie de `B` dont on enlève au fur et à mesure les éléments de `A` qu'on a trouvés dans `B`.

Ensuite, on crée une matrice avec des `0` de taille convenable, et on en remplit la moitié supérieure (la matrice est symétrique). Quant à la diagonale, c'est du gaspillage de chercher `CardInter(A, A)`, c'est `len(A)`.

```
def Matrice(L) :
....n = len(L)
....M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n) :
........A = L[k]
........M[k][k] = len(A)
........for i in range(k+1, n) :
............c = CardInter(A, L[i])
............M[i][k], M[k][i] = c, c
....return M
```

Remarque : : si vous avez écrit

```
M[i][k] = CardInter(A, L[i])
M[k][i] = CardInter(A, L[i])
```

vous avez perdu d'un facteur 2. Vous sollicitez deux fois le même calcul. `Python` ne va pas se souvenir l'avoir déjà fait !

♯ 1 ♯ Indiquez en fonction de n et N un majorant de la complexité de votre algorithme *(au pire, les A_k sont effectivement de cardinal de l'ordre de N)*.

La création initiale de `M` est de complexité $n \times n$.

On effectue deux boucles imbriquées, l'une étant dépendante de l'autre : on passe $\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=k+1}^{n-1} 1\Big)$ fois dans l'instruction `c = CardInter(A, L[i])` et l'affectation `M[i][k], M[k][i] = c, c`.

On sollicite environ $\frac{n^2}{2}$ fois une procédure de complexité au pire N^2.

Mon programme est de complexité $\boxed{O(n^2 \times N^2)}$

♣ 1 ♣ Montrez que si A_0 est égal à A_1 alors le déterminant de S est nul *($n \geqslant 2$)*.

Supposons qu'il y ait deux ensembles égaux : A_0 et A_1.
Les deux premières colonnes de la matrice S sont alors égales.
Le déterminant est alors nul.

♣ 2 ♣ Que pouvez vous dire si $Tr(S)$ est nulle ? *($n \geqslant 2$)*

Ah au fait, que faire si la trace est nulle ?
Mais les termes de la diagonale sont des cardinaux.
Leur somme ne peut être nulle qu'avec des cardinaux tous nuls.
On en déduit que les A_i sont tous vides.

Mais alors tous les termes hors de la diagonale sont nuls aussi. Et la matrice est nulle.
Son déterminant est nul.

♣ 3 ♣ Montrez que si l'on prend pour A_0 les filles de MPSI2, pour A_1 les élèves de MPSI2 dont le prénom commence par E (ou È), le déterminant de $S(A_0, A_1, A_2)$ sera toujours un entier naturel *(oui, donc positif, merci de l'avoir compris)*, quel que soit le choix de A_2.

Passons au cas où l'on a trois ensembles : les filles de MPSI2 *(17 éléments l'année où je l'ai posé en D.S.)*, les élèves au prénom en E *(Émile fois deux, Élise, Élisa et Esther-Anne* [2]*)*.

On peut commencer à remplir la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 3 & . \\ 3 & 5 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ et même l'écrire son déterminant : $\begin{vmatrix} 17 & 3 & \alpha \\ 3 & 5 & \beta \\ \alpha & \beta & c \end{vmatrix}$, où α, β et a désignent trois cardinaux.

On calcule le déterminant en développant par rapport à la dernière colonne par exemple :

$\boxed{110.a + 6.\alpha.\beta - 7.\alpha^2 - 17.\beta^2}$

Il y a des signes moins, il n'est pas si évident que cette chose soit positive.

On sait quand même que a est entre 0 et 48, que α est entre 0 et 17 et aussi entre 0 et a puisque c'est $Card(A \cap Filles)$.

De même, β est plus petit que 7 et que a puisque c'est $Card(A \cap E)$ avec une notation facile à comprendre j'espère.

Comment prouver que $110.a + 6.\alpha.\beta - 7.\alpha^2 - 17.\beta^2$ est positif ?

Voyons le comme une fonction du second degré en α : $\alpha \longmapsto -7.\alpha^2 + 6.\alpha.\beta + 110.a - 17.\beta^2$.

C'est un trinôme du second degré dont le maximum est atteint en $\dfrac{3.\beta}{7}$.

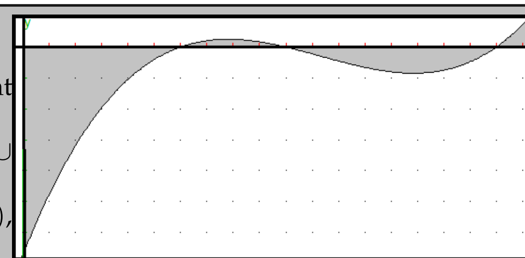
Son minimum sur $[0,\ 17]$ est atteint en 0 ou en 17 *(ou en a si a est plus petit que 17)*.

Si ce minimum est positif, la fonction est positive.

On fait les calculs, on a cette fois un trinôme en β dont on cherche le minimum quand β est un entier entre 0 et 7 (et aussi entre 0 et a).

C'est calculatoire, et je regrette d'avoir posé cette question...

Donnez une situation où l'on a $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre $Card(A \cap B \cap C)$ et $Card(A \cup B \cup C)$ pour cette matrice S ?



Donnez alors une matrice diagonale D vérifiant $Tr(S) = Tr(D)$, $\det(S) = \det(D)$ et $Tr(S^2) = Tr(D^2)$.

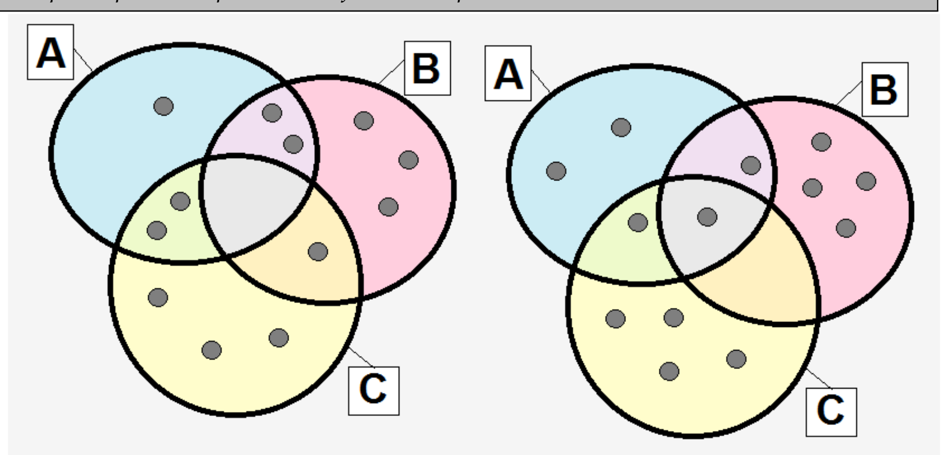
(là, je ne me contenterai pas de « on propose/on vérifie », je voudrai le polynôme $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ dont les racines sont les trois termes diagonaux de D avec explication, ce qui me permet en passant de définir s, d et p).

On cherche trois ensembles A, B et C de cardinaux respectifs 5, 6 et 6.

Et leurs intersections deux à deux ont pour cardinaux 2, 2 et 1.

Il y a cinq éléments dans A dont deux dans B et deux dans C *(peut être les mêmes ?)*.

Il y a six éléments dans B dont déjà deux dans A et aussi un dans c *(il fait peut être partie des deux dans A)*.



Sachant que $A \cap B \cap C$ est inclus dans $A \cap B$, dans $A \cap C$ et $B \cap C$, son cardinal ne peut dépasser 1.

Il peut valoir 0 ou 1. Si on trouve une configuration pour chacun des deux, on aura gagné.

Le cardinal de $A \cup B \cup C$ se calcule alors par une formule du type crible :

$$Card(A \cup B \cup C) = \Big(Card(A) + Card(B) + Card(C)\Big) - \Big(Card(A \cap B) + Card(A \cap C) + Card(B \cap C)\Big) - \Big(Card(A \cap B \cap C)\Big)$$

L'un des cas donne $\boxed{\text{12 et l'autre 13}}$.

---

2. *une année sans élève en E est assez triste*

$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$S^2 = \begin{pmatrix} 33 & & \\ & 41 & \\ & & 41 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$	$D^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$

$\det(S)$	$Tr(S)$	$Tr(S^2)$
135	17	115
$\alpha.\beta.\gamma$	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

On ajoute donc vite la relation $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2} = 87.$

Les formules de Viète donnent $\boxed{(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma) = X^3 - 17.X^2 + 87.X - 135}$

On résout ce polynôme. On peut s'inspirer de ce que donne le graphe approximatif.
On peut aussi lire dans la suite le rôle récurrent de 9, 5 et 3.

On est donc amené à proposer et vérifier : $\begin{array}{cccccc} 5 & +9 & +3 & = & 17 \\ 3.9 & +5.3 & +5.9 & = & 87 \\ 5 & \times 9 & \times 3 & = & 135 \end{array}$.

C'est encore une fois plus rapide à vérifier que $3^3 - 17.3^2 + 87.3 - 135 = 5^3 - 17.5^2 + 87.5 - 135 = 9^3 - 17.9^2 + 87.9 - 135 = 0$, *comme quoi les relations coefficients racines sont un outil plus performant que les racines elles mêmes. Vous en convaincrai-je un jour, ou resterez vous le nez collé à votre cours de Terminale ?*

Tiens, d'ailleurs, si on se dit « le prof n'est quand même pas vache au point de donner une matrice dont les valeurs propres ne soient pas entières... », on regarde alors le produit des valeurs propres : $135 = 3^3.5$. On teste donc « naturellement » 1, 3, 5, 3^2,3^3,3.5, $3^2.5$ et leurs opposés.

$\boxed{(X-3).(X-5).(X-9) = X^3 - 17.X^2 + 87.X - 135}$

♣4♣ Trouvez P de déterminant non nul vérifiant $S.P = P.D$. *On pourrait certes alors calculer $S^n = P.D^n.P^{-1}$ mais il nous manque P^{-1}.*

On donc donc trouver à présent P inversible vérifiant

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Il en est pour lesquels la chose passe bien :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

La colonne du 5 résiste à tout calcul avec le classique 1 en première ligne.

On tente alors $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & z & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

et on trouve une solution, avec *(malchance !)* : $x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & -y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1.5 & 5.y & 9 \\ -1.5 & -5.y & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & -y & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On fait un choix de y non nul, et même on multiplie la première colonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -3 & 5 & 9 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice P trouvée *(et elle n'est pas unique)* a pour déterminant -6. Elle est inversible. Mais on ne calculera pas son inverse ici.
(l'ordre des colonnes de votre matrice P va aussi dépendre de l'ordre des valeurs propres de D sur sa diagonale).

♣5♣ Montrez : $S^3 = s.S^2 - d.S + p.I_3$.

S^3	$=$	$17.S^2$	$-87.S$	$+135I_3$
$\begin{pmatrix} 261 & 234 & 234 \\ 234 & 310 & 185 \\ 234 & 185 & 310 \end{pmatrix}$	$=$	$17.\begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 41 & 16 \\ 24 & 16 & 41 \end{pmatrix}$	$-87.\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$+135\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le genre de question passionnante ! ☹ Mais il faut faire les calculs pour avoir les points. On ne peut pas se contenter de dire « après calculs au brouillon ».
C'est quand même le type de question qui permet de ramasser des points même sans connaître son cours sur le bout des doigts, ou même en n'ayant pas compris qui dépend de qui dans une quantification en $\forall\varepsilon, \exists N_\varepsilon$. Une question pour gagner des points à un petit concours filière P.S.I., là où les maths sont juste une des trois matières, et juste au outil au service des deux autres.

Il y en a que ça rassure de savoir que ça existe des concours comme ça.
Et moi ça me rassure de savoir que ça les rassure.

♣6♣ On pose alors $U = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3)$, $V = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$ et $W = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3)$. Calculez $\det(S - 9.I_3)$, $\det(U)$, $\det(V)$.

Ensuite, ça redevient plus intelligent !

Pour $\det(S - 9.I_3)$, on calcule simplement : $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ par la règle qu'on veut et on trouve 0.

On affirme alors $\det(U) = \det(S - 5.I_3).\det(S - 9.I_3)$ et on trouve 0.

♣7♣ Justifiez $U.V = V.U = 0_{3,3}$, $U^2 = 12.U$, complétez $W - 24.I_3 = (S - 9.I_3)\ldots$ et calculez $W^2 - 24.W$, $U.W$, $W.V$ *(normalement, vous n'avez pas à faire tomber des colonnes sur des lignes, juste à être intelligent).*

On a donc $S^3 - 17.S^2 + 87.S - 135.I_3 = 0_{3,3}$ et donc, en factorisant : $(S - 3.I_3).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3) = 0_{3,3}$
Ou encore $(S - 3.I_3).(S - 9.I_3).(S - 5.I_3) = 0_{3,3}$ ou même $(S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S - 3.I_3) = 0_{3,3}$
C'est ce qui nous permet d'affirmer : $U.V = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$. Dans le lot, il y a la matrice nulle, le produit est nul.

Le plus déprimant là dessus est de voir des élèves calculer $\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ *et leur produit, puis commenter* « bon c'était pas très intelligent comme devoir, c'est pas des maths ».

De la même façon :

$$V.U = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3) = 0_{3,3}.(S - 9.I_3)$$

On calcule les neuf termes :

	$U = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	$W = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
$U = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$U^2 = \begin{pmatrix} 72 & -48 & -48 \\ -48 & 24 & 24 \\ -48 & 24 & 24 \end{pmatrix} = 12.U$	$U.V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U.W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	$V.U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -32 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix} = 8.V$	$V.W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$W = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	$W.U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$W.V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$W^2 = \begin{pmatrix} 192 & 192 & 192 \\ 192 & 192 & 192 \\ 192 & 192 & 192 \end{pmatrix}$

Hors de la diagonale, c'est cadeau. On a à chaque fois un produit avec $(S - 3.I_3)$, $(S - 5.I_3)$ et $(S - 9.I_3)$ et un autre terme. Le produit est directement nul !

Mais, monsieur, la multiplication matricielle n'est pas commutative ! C'est vous même qui nous avez dit de bien faire attention.
Oui, mais ici, ce ne sont que des S et des I_3 qui se multiplient entre eux et permutent !

.
Pour la diagonale, c'est plus subtil.
Mais l'énoncé nous met sur des pistes intelligentes :

$$W - 24.I_3 = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3) - 24.I_3 = S^2 - 8.S - 9.I_3 = (S - 9.I_3).(S + I_3)$$

On poursuit :

$$W^2 - 24.W = W.(W - 24.I_3) = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S + I_3) = 0_{3,3}.(S + I_3) = 0_{3,3}$$

Et c'est pareil pour $V^2-8.V=V.(V-8.I_3)=\Big((S-3.I_3).(9.I_3-S)\Big).\Big((S-5.I_3).(7.I_3-S)\Big)$
car $V=-S^2+12.S-27.I_3$
$V-8.I_3=-S^2+12.S-35.I_3$
$V-8.I_3=-(S-5.I_3).(S-7.I_3)$

♣ 8 ♣ Trouvez u, v et w vérifiant $S=u.U+v.V+w.W$.

On combine ensuite : $S=\frac{1}{4}.(S^2-14.S+45.I_3).+\frac{5}{8}.(-S^2+12.S-27.I_3)+\frac{3}{8}.(S^2-8.S+15.I_3)$
On le trouve en résolvant un petit système

$$\left\{\begin{array}{ccccc|}u & -v & +w & = 0 & pour\ S^2\\ -14.u & +12.v & -8.w & = 1 & pour\ S\\ 45.u & -27.v & +15.w & = 0 & pour\ I_3\end{array}\right.$$

même si il y a d'autres méthodes possibles.

On trouve donc $\boxed{S=\dfrac{2.U+5.V+3.W}{8}=\dfrac{1}{4}.U+\dfrac{5}{8}.V+\dfrac{3}{8}.W}$

♣ 9 ♣ Exprimez alors S^2 comme combinaison de U, V et W.

On a passé une phase calculatoire au niveau des coefficients, il doit être temps de revenir à une phase algébrique, au niveau des matrices. [3]
On ne se tape des systèmes de taille 9 sur 9 que quand on n' apas le choix...

On élève au carré :

$$S^2=\frac{2.U+5.V+3.W}{8}.\frac{2.U+5.V+3.W}{8}$$

Quand on développe, on a des U^2, V^2 et W^2 qu'on remplace par $12.U$, $8.V$ et $24.W$.
Et on a des $U.V$, $U.W$ et autres qui sont tous nuls...
Il reste donc $S^2=\dfrac{4.U^2+25.V^2+9.W^2+0_{3,3}}{64}$.
On simplifie : $\boxed{S^2=\dfrac{3}{4}.U+\dfrac{25}{8}.V+\dfrac{27}{8}.W}$

♣ 10 ♣ Prouvez pour tout k : $S=u.3^k.U+v.5^k.V+w.9^k.W$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

On vient de commencer une jolie récurrence.

$$S^3=\Big(\frac{3}{4}.U+\frac{25}{8}.V+\frac{27}{8}.W\Big).\Big(\frac{1}{4}.U+\frac{5}{8}.V+\frac{3}{8}.W\Big)=\frac{3}{16}.U^2+\frac{125}{64}.V^2+\frac{81}{64}.W^2$$
$$S^3=\frac{9}{4}.U+\frac{125}{8}.V+\frac{243}{8}.W$$

on commence à deviner les coefficients :
$\boxed{S^n=\dfrac{3^{n-1}}{4}.U+\dfrac{5^n}{8}.V+\dfrac{9^n}{3.8}.W}$ que l'on prouve par récurrence sur n dont je ne traiterai pas ici l'hérédité.

On peut d'ailleurs dire que si l'on développe $S^n=\Big(\dfrac{1}{4}.U+\dfrac{5}{8}.V+\dfrac{3}{8}.W\Big)^n$ par la formule du multinôme (car tout « commute »),, on trouve plein de termes, mais ils sont presque tous nuls. En effet, ils sont faits de croisements entre des U, des V et des W qui donnent $U.V=0_{3,3}$ et ainsi de suite.
Il ne reste que les trois termes « purs » : $S^n=\Big(\dfrac{1}{4}.U\Big)^n+\Big(\dfrac{5}{8}.V\Big)^n+\Big(\dfrac{3}{8}.W\Big)^n$.
Ensuite, en mettant en boucle la formule $U^2=12.U$, on a $U^n=12^{n-1}.U$ et la même chose (du moins pour l'idée, pas pour le coefficient) pour V^n et W^n.
Et c'est ainsi que cet exercice se rattache aussi à la formule du binôme.

♣ 11 ♣ On revient au cas général. Montrez pour tout vecteur colonne de composants x_0 à x_n : ${}^tX.S.X\geqslant 0$ *(on tentera de croiser $\sum\limits_{i<n} x_i.1_{A_i}$).*

On va calculer des choses comme

$$\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}Card(A_0) & Card(A_0\cap A_1) & Card(A_0\cap A_2)\\ Card(A_0\cap A_1) & Card(A_1) & Card(A_1\cap A_2)\\ Card(A_0\cap A_2) & Card(A_1\cap A_2) & Card(A_2)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

3. *surtout si on lit la suite de l'énoncé*

pour lesquelles déjà, les formats sont compatibles.
On se donne le vecteur colonne et la matrice.
Le produit $S.X$ donne un vecteur colonne dont l'élément de ligne i est $y_i = \sum_{k=0}^{n-1} S_i^k.x_k$ par les formules du produit matriciel *(colonne unique sur ligne d'indice i)*.
Les éléments de ce vecteur colonne tombent sur les x_i de la matrice ligne ${}^tX$.
On fait se rencontrer x_i et y_i : $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
On a donc au final un réel *(ce qui explique qu'on va le comparer à 0)* :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i.y_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i.\Big(\sum_{k=0}^{n-1} S_i^k.x_k\Big)$$

Par indépendance des variables de sommation on écrit une grande somme ${}^tX.S.X = \sum_{\substack{0\leqslant i<n \\ 0\leqslant k<n}} Card(A_i \cap A_k).x_i.x_k\Big)$.

Mais qui est ce cardinal ? $Card(A_i \cap A_k) = \sum_{e\in E} 1_{A_i\cap A_k}(e)$ *(on fait défiler les éléments de E et chacun répond présent ou non)*.
Mais qui est l'indicatrice de l'intersection ? $1_{A\cap B} = 1_A.1_B$: $Card(A_i \cap A_k) = \sum_{e\in E} 1_{A_i}(e).1_{A_k}(e)$.
La grande somme devient ${}^tX.S.X = \sum_{\substack{0\leqslant i,k<n \\ e\in E}} 1_{A_i}(e).1_{A_k}(e).x_i.x_k$ *(somme triple !)*

On intervertit l'ordre de sommation :

$$X.S.X = \sum_{e\in E}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant i<n \\ 0\leqslant k<n}} 1_{A_i}(e).x_i.1_{A_k}(e).x_i\Big)$$

Dans la parenthèse, les variables sont indépendantes : ${}^tX.S.X = \sum_{e\in E}\Bigg(\Big(\sum_{0\leqslant i<n} 1_{A_i}(e)\Big).\Big(\sum_{0\leqslant k<n} 1_{A_k}(e)\Big)\Bigg)$.
Mais qu'est ce qui distingue les deux sommes $\sum_{0\leqslant i<n} 1_{A_i}(e)$ et $\sum_{0\leqslant k<n} 1_{A_k}(e)$?
Rien, à part le nom de la variable de sommation. C'est deux fois la même. C'est donc un carré !

$\boxed{{}^tX.S.X = \sum_{e\in E}\Big(\sum_{0\leqslant i<n} 1_{A_i}(e)\Big)^2}$ Chaque carré de réel est positif ou nul, la somme l'est aussi !

C'est cette question qu'on retrouve dans un oral de Polytechnique, tiens...

♣ 12 ♣ Montrez que si X est un vecteur non nul et λ un réel vérifiant $S.X = \lambda.X$, alors λ est positif ou nul.

Si ensuite le hasard nous met en présence d'un X vérifiant $S.X = \lambda.X$ (un vecteur propre, une colonne d'une matrice P vérifiant $S.P = P.D$), on calcule de deux façons ${}^tX.S.X$. On a par le calcul précédent un réel positif.
Mais on a aussi par associativité du produit matriciel : ${}^tX.S.X ={}^t X.(S.X) ={}^t X.(\lambda.X) = \lambda.{}^tX.X$.
C'est bien encore un réel, puisque ${}^tX.X$ est le réel $(x_0)^2 + \ldots (x_{n-1})^2$: $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\lambda.\sum_{k=0}^{n-1}(x_k)^2 \geqslant 0$.

Comme $\sum_{k=0}^{n-1}(x_k)^2$ est un réel positif non nul, il reste $\lambda \geqslant 0$.

Les valeurs propres de cette matrice S sont toujours positives ou nulles.
Si vous sortez ensuite un théorème qui dit que le déterminant est le produit des valeurs propres, le voilà bien positif.

◁32▷ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, et B est une matrice vérifiant $A.B = B.A$. Diagonalisez A (matrice diagonale D et matrice de passage P).
On va montrer que B est diagonalisable, avec trois méthodes.
Méthode 1 : montrez que B est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5.b & a+b/2 \end{pmatrix}$ et diagonalisez alors B.
Méthode 2 : on pose $C = P^{-1}.B.P$; montrez : $D.C = C.D$; en remontant au niveau des coefficients, montrez que C est diagonale ; diagonalisez B.
Méthode 3 : montrez qu'il existe α et β vérifiant $B = \alpha.I_2 + \beta.A$; calculez alors $P^{-1}.B.P$; diagonalisez B.
Question : laquelle des trois méthodes préférez vous, et en fonction de votre réponse, demandez vous quelle Spé je vais vous recommander.

A a pour valeurs propres -2 et 7, on choisit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ par exemple.

On résume : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

Méthode 1 : en écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on a la condition nécessaire et suffisante $c = 5.b$ et $d = a + \frac{b}{2}$
(il y a quatre équations, mais plusieurs ne servent à rien et sont « en double »)
On calcule alors le polynôme caractéristique : $X^2 - (3.a + b/2).X + a^2 - 5.b + a.b/2)$.
puis son discriminant : $\frac{81.b^2}{4}$
et ses valeurs propres : $a - 2.b$ et $a + \frac{5.b}{2}$
une matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a-2.b & 0 \\ 0 & a+5.b/2 \end{pmatrix}$
et une matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
on a D et P, et P est inversible. C'est gagné.

Méthode 2 : on pose donc $C = P^{-1}.B.P$
On calcule $C.D = (P^{-1}.B.P).(P^{-1}.A.P) = P^{-1}.B.A.P$
$D.C = (P^{-1}.A.P).(P^{-1}.B.P) = P^{-1}.A.B.P$
L'hypothèse $A.B = B.A$ donne alors $C.D = D.C$.
On la regarde au niveau des coefficients : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
On obtient $-2.\beta = 7.\beta$ par exemple. β et γ sont nuls.
Et alors ?
C est diagonale !
Et on a $B = P.C.P^{-1}$.
Donc B est diagonalisable en C avec matrice de passage P

Méthode 3 : la relation $A.B = B.A$ donne la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5.b & a+b/2 \end{pmatrix}$
qu'on écrit $\frac{b}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (a-b).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
et même $\beta.A + \alpha.I_2$
(et réciproquement, toute matrice de cette forme « commute » avec A).
Or, A est diagonalisable
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ qu'on écrit $A = P.D.P^{-1}$
on somme$B = \alpha.P.D.P^{-1} + \beta.I_2$
$B = P.\alpha.D.P^{-1} + P.\beta.I_2.P^{-1}$
$B = P.(\alpha.D + \beta.I_2).P^{-1}$
et $\alpha.D + \beta.I_2$ est diagonale.

◁ 33 ▷

Petit jeu. Votre adversaire pense à un nombre a entre 1 et N (inclus).
Vous avez droit à n questions du type « l'entier a est il plus grand que x » auxquelles il répondra « oui » ou « non ». A la fin ou même avant, vous devez avoir trouvé l'entier auquel il a pensé.
Si vous avez droit à six questions.
Il est évident que vous allez pouvoir gagner si N est égal 128 (quel algorithme appliquez vous ?).

Mais voilà, il y a une règle du jeu en plus. La personne en face ne doit pas répondre plus de trois fois « non ». C'est à dire que si par exemple les réponses ont été « non, oui, non, oui, non » vous n'avez pas droit à la sixième question, vous devez avoir trouvé a.

Montrez qu'alors, vous avez un algorithme pour trouver a si N vaut 42.
Votre première question sera « est il supérieur ou égal à 17 ».
Et si on vous répond « non », ce sera « $a \geqslant 5$ ».

Justifiez le tableau suivant en donnant l'algorithme :

	1	2	3	4	5	6	q
0	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	
2		4	7	11	16	22	
3			8	15	26	42	
4				16	?	?	
n							

q est le nombre de questions autorisées. n est le nombre maximum de réponses « non » autorisées.
Et on indique en case (q, n) la valeur de N du « range » sur lequel on peut travailler.

```python
def trouve2(N,q) :
    x=N//2 #valeur à demander
    L=[i for i in range (1,N+1)] #plage de solutions
    k=(len(L)//2) #rang dans la liste
    if N>(2**((q+1))) : #dispose-t-on d'assez de questions ?
        return ('impossible')
    for r in range (q) :
        question=int(input('a<={} ? : '.format(x)))
        #on recoupe notre plage de solutions
        if question==1 :
            L=L[:k]
        else :
            L=L[k:]
        x=(L[0]+L[-1])//2
        if len(L)%2==0 :
            k=len(L)//2
        else :
            k=(len(L)//2)+1
        if len(L)==1 :
            return (L)
    return (L)
```

Je ne sais plus à quel ancien élève (période du confinement) je dois ce programme... mais je le remercie.

◁ 34 ▷

Montrez que tan est définie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, injective. Montrez qu'elle n'est pas surjective.
Montrez que $x \longmapsto \tan([x])$ est défiie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non injective.
Montrez que $x \longmapsto tan(x)$ n'est pas injective de $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, de même que $x \longmapsto [x]$.
Montrez que $x \longmapsto (\tan(x),\ [x])$ est injective.$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+2}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Si x est rationnel, $\tan(x)$ existe car x n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$(nombre irrationnel).

Prenons ensuite deux rationnels a et b et supposons $\tan(a) = \tan(b)$ (objectif : $a = b$).
Le seul cas d'égalité des tangentes vient de la périodicité :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + k.\pi$$

Attention, l'argument n'est pas « par périodicité ».
En effet, la périodicité done $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + k.\Pi) \Rightarrow (\tan(a) = \tan(b))$
Mais ici c'est la réciproque qui nous intéresse.

Si k était non nul, on aurait $\pi = \dfrac{a-b}{k}$ et πserait rationnel (stabilités de $\mathbb{Q}$ par ses lois usuelles).
Comme ce n'est pas le cas, la seule possibilité est $k = 0$ et elle conduit à $a = b$.

Ensuite, le réel 1 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Q}$ (ses seuls antécédents sont les $\dfrac{\pi}{4} + k.\pi$, tous irrationnels).

Si on se donne un réel x, le réel $[x]$ est un entier. Il ne peut donc pas être un irrationnel de la forme $\dfrac{(2.k+1).\pi}{2}$ avec k entier. Il a donc une image par la tangente.
On a bien une application.

Alors que $x \longmapsto \tan(x)$ *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *mais n'est une application que de* $D_{\tan}$*dans* $\mathbb{R}$.

Hélàs, 0 et $1/2$ ont la même image par $x \longmapsto \tan([x])$ (et leur image commune est 0).

On n'hésite pas à donner un contre-exemple, avec de vraies valeurs, et pas juste une phrase.

L'ensemble $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ n'est pas une erreur de frappe. Mais c'est le même que le célèbre $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.n+1}{2}.\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ par simple translation de la variable muette dans $\mathbb{Z}$.
Ensuite, la tangente n'est pas injective sur cet ensemble puisque 0 et π ont la même image.

D'accord, l'argument « non injective car périodique » est assez fort.
Mais tout matheux pointilleux ira vous dire que la fonction vide de $\emptyset$ dans lui même est périodique et néanmoins injective.

L'application parte entière est définie sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Et elle a des défauts d'injectivité tels que $[2] = [e]$.

En revanche, l'application combinée est injective. Prenons effectivement deux éléments a et b dans $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ayant le même couple image.
On déduit $\tan(a) = \tan(b)$ et aussi $[a] = [b]$.
La première nous donne $\exists n \in \mathbb{Z},\ a = b + n.\pi$ et la seconde nous dit qu'il existe N dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $(a,\ b] \in [N,\ N+1[^2$ (pour avoir la même partie entière).

Si n est non nul, la distance $|b-a|$ vaut au moins π. Alors que la condition sur es parties entières donne $|b-a| < 1$.
Il y a contradiction.
La seule possibilité est n=0 puis $a = b$. Comme demandé.

En revanche, cette application ne sera pas surjective, on peut le montrer aisément avec $(20,\ 0)$ *qui n'a pas d'antécédent. Voyez vous pourquoi ?*

◃35▹ La somme de ses chiffres est la différence entre le nombre et 94. Qui est ce nombre ?

Ecrivons ce nombre $n = \overline{ab}$. C'est $n = 10.a + b$ avec a et b deux chiffres.
Un chiffre c'est entre 0 et 9.
La somme de ses chiffres, c'est $a + b$.
La différence entre le nombre et 94, c'est $94 - n$ ou $n - 94$.
On nous dit donc $a + b = 94 - (10.a + b)$ ou $(10.a + b) - 94 = a + b$.

Résolvons déjà $a + b = 94 - (10.a + b)$. On trouve $9.a + 2.b = 94$.
Moi j'extrais $11.a = 94 - 2.b$ qui prouve que $11.a$ est pair.
C'est donc que a est pair.

Mais j'ai aussi : $a = \dfrac{94-2.b}{11}$.
Comme b est entre 0 et 9, a est entre $\dfrac{94}{11}$ et $\dfrac{76}{11}$ (environ $6,9$ et $8,5$).
On n'a plus le choix : l'entier pair a vaut 8.
On reporte pour trouver : $b = \dfrac{94-11.a}{2} = 3$. On confirme : $n = 83$. Et $\boxed{94-83 = 8+3}$

Résolvons donc cette fois $10.a - 94 = a + b$.
On trouve $9.a - b = 94$.
Ceci impose à a de dépasser 10. Impossible.

Il n'y a qu'une solution.

◃36▹ Résolvez $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2022 d'inconnue entière n.

Le nombre $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est un entier. La question a un sens.
Mais si on l'écrit rapidement $\dfrac{1.2.3.4.5.6\ldots.(2.n-1).(2.n)}{(2.2\ldots2).(1.2.3\ldots n)}$ puis $\dfrac{1.2.3.4.5.6\ldots.(2.n-1).(2.n)}{2.4.6\ldots(2.n)}$,
on simplifie et il reste le produit des n premiers impairs de 1 à $2.n-1$.
Et un produit d'impairs est impair.
Il ne peut pas être multiple de 2022.

L'exercice sera plus drôle l'an prochain.

Résolvez $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2023 d'inconnue entière n.

A faire.

◃37▹ Calculez $\int_0^{10}[t].dt$. La notation $[t]$ désigne la partie entière de t.

On dit « merci Chasles », et on découpe en chaque entier.

$$\int_0^{10}[t].dt = \int_0^1[t].dt + \int_1^2[t].dt + \ldots + \int_9^{10}[t].dt = \sum_{k=0}^{9}\int_k^{k+1}[t].dt$$

On calcule :

$$\int_0^{10}[t].dt = \int_0^1 0.dt + \int_1^2 1dt + \ldots + \int_9^{10} 9.dt = \sum_{k=0}^{9}\int_k^{k+1}k.dt$$

On calcule chaque intégrale « aire d'un rectangle de largeur 1 » :

$$\int_0^{10}[t].dt = 0+1+\ldots+9 = \sum_{k=0}^{9}k$$

Par une formule toute prête : $\int_0^{10}[t].dt = 45$.

Résolvez $\int_0^x[t].dt = 15$ d'inconnue réelle positive x.

Le raisonnement précédent nous dit ce qu'il advient si on arrête l'intégrale en une abscisse entière.

$$\int_0^n[t].dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}[t].dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}k.dt = \sum_{k=0}^{n-1}k = \frac{n.(n-1)}{2}$$

(oh le joli escalier !).

On a d'ores et déjà $\int_0^6[t].dt = 15$.
On a une solution.
Mais est ce la seule ?

Aucun autre entier ne convient.
Mais un réel ?
Toutefois, si on prend x plus grand que 6, on a

$$\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 + \int_6^x [t].dt > 15$$

Et si on prend x plus petit que 6, on a cette fois

$$\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 - \int_x^6 [t].dt < 15$$

La subtilité est quand même : il y a une solution avec x négatif, en sachant que la fonction intégrée est négative, mais l'intervalle dans le mauvais sens !

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [2.t] = 2.[t]$?

Il y a certes des x pour lesquels c'est vrai.
Mais ce n'est pas vrai pour tous (la négation de $\forall$ est $\exists$).
Il suffit d'un contre-exemple tel que $x = \dfrac{1}{2}$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [-t] = -[t]$?

Cette fois, c'est juste « en existe-t-il un » ? La réponse est « oui ». Par exemple 0.
Ou même tous les entiers, mais un $\exists$xemple suffit !

En revanche, on n'a pas du tout $\forall t \in \mathbb{R},\ [-t] = -[t]$.
Un non entier suffit pour avoir le contre-exemple.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t + \pi] = [t + 3]$?

Non. Encore un contre-exemple qui par adjonction de $3,14$ et des poussières nous fait passer à l'entier bien supérieur.
Par exemple : $[0,9 + \pi] = [4,14..] = 4$ et $[0,9 + 3] = [3,9] = 3$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [t + \pi] = [t] + [\pi]$?

Remercions encore 0 pour son rôle exemplaire. Ou même un entier.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t + [t]] = 2.[t]$?

On essaye avec x entier. C'est bon.
Et avec x demi-entier, comme $2,5$. C'est encore bon.
On essaye avec des trucs plus vicieux comme e. Encore bon.
Ça n'est pas une preuve, mais on se dit que ça doit marcher.
Et pour ce type de problème, le mieux est d'introduire des notations.
t donné quelconque, on pose $t = n + d$ avec n dans $\mathbb{Z}$ et d dans $[0,\ 1[$ (en fait, n est la partie entière de t et d sa partie fractionnaire).
On calcule $t + [t] = (n + d) + n = 2.n + d$. C'est un réel de partie entière $2.n$ (et de partie fractionnaire d).
On a donc $[t + [t]] = 2.n = 2.[t]$.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},\ [t + [-t]] = -1$?

Un teste avec un non entier : $t = 3,2$:

$$[3,2 + [-3,2]] = [3,2 + (-4)] = [-8,8] = -1$$

Traitons le cas général avec les notations $t = n + d$ avec $n = [t]$ (entier) et $d = t - [t]$ (réel de $]0,\ 1[$).
On a alors $-t = -n - d = -n - 1 + (1 - d)$.
On reconnaît un entier et un réel de $]0,\ 1[$. On a donc $[-t] = -n - 1$.
On passe cette fois à $t + [-t] = (n + d) + (-n - 1) = -1 + d$.
C'est un réel de partie entière -1.
On répond donc « vrai ».
Et on regrette le temps où un « exemple bien choisi » tenait lieu de preuve.

◁ 38 ▷ Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?
• L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?
• Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens [A ; B] et [E ; D] (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C. On donne : ABC = 40, CED = 60. Que vaut BCE ?
• L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?
• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

Pour les chemises, vous avez donc dépensé 24 euros. La dernière vaut donc 9 euros.

Notant N l'effectif de l'an dernier, on a $(1+0.05)\times N = 1260$.
L'effectif était de 1 200 élèves.

Les diviseurs de $2^a.5$ sont

1	2	4	...	2^a
5	2.5	4.5	...	$2^a.5$

. a vaut 3.

◁ 39 ▷ ♡ Décomposez $\prod_{k=1}^{20}(k!)$ puis $\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big)$ en produit de facteurs premiers.

♠ Quel est l'exposant de 11 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 10! et de $(\prod_{k=1}^{10}(k!))$?

facteur	2	3	5	7	11	13	17	19
1 !								
2 !	2							
3 !	2	3						
4 !	2.2^2	3						
5 !	2.2^2	3	5					
6 !	$2.2^2.2$	3.3	5					
7 !	$2.2^2.2$	3.3	5	7				
18 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	5.5.5	7.7	11	13	17	
19 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	5.5.5	7.7	11	13	17	19
20 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2.2^2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	5.5.5.5	7.7	11	13	17	19
produit	2^{168}	3^{78}	5^{34}	7^{21}	11^{10}	13^8	17^4	19^2

C'est monstrueux et ça ne se fait quasiment que « à la main ».

On multiplie chaque facteur par 2. Sur le tableau du dessus, il y a une colonne de 20 facteurs 2.

produit	2^{188}	3^{78}	5^{34}	7^{21}	11^{10}	13^8	17^4	19^2

L'intérêt de la question est

$$\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) = \Big(\prod_{k=1}^{20}2\Big).\Big(\prod_{k=1}^{20}(k!)\Big) = 2^{20}.\prod_{k=1}^{20}(k!)$$

Ne vous laissez pas influencer par les sommes.

$$\sum_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) = 2.\sum_{k=1}^{20}(k!)$$

mais

$$\sum\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) \neq 2.\prod_{k=1}^{20}(k!)$$

Dans 10!, pas de 11. L'exposant est nul.

Mais dans $(\prod_{k=1}^{10}k)!$ qui n'est autre que $(10!)!$, il va y en avoir.
Ce produit est $1\times 2\times 3\times \ldots \times 3628800$.

Il contient plein de facteurs 11. Il y en a un pour chaque multiple de 11. Et il y a 329890 multiples de 11.
Mais il en contient un de plus pour les multiples de 121. Et eux, ils sont 29990 (quotient entier de 10! par 121).
Et que dire des multiples de 11^3 ? Qu'ils apportent chacun trois facteurs 11 au moins. Donc chacun un de plus : 2726.
Et aussi les 247 multiples de 11^4.
Et les 22 multiples de 11^5.
Et les deux multiples de 11^6 : 1771561 et 3543122 qui sont bien plus petits que $10! = 3628800$.

Et après, c'est fini.
La formule est

$$\left[\frac{10!}{11}\right]+\left[\frac{10!}{11^2}\right]+\left[\frac{10!}{11^3}\right]+\left[\frac{10!}{11^4}\right]+\left[\frac{10!}{11^5}\right]+\left[\frac{10!}{11^6}\right]$$

Le résultat à encadrer est 11^{362877}.

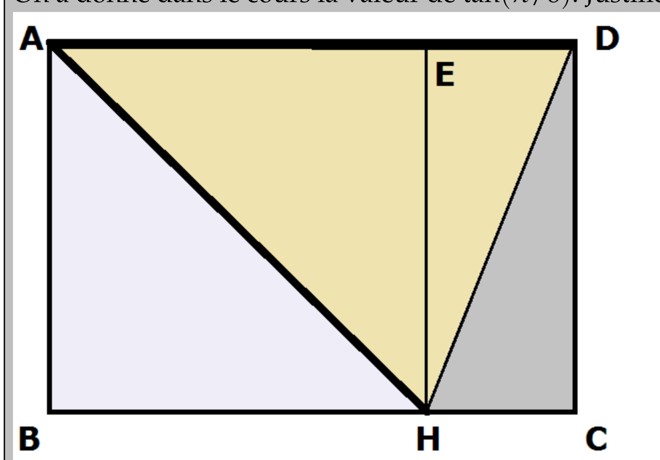
◁ 40 ▷ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on demande de calculer le produit des trois matrices ? Mais quel produit $A.B.C$? Ou $A.C.B$? Ou $B.A.C$? D'ailleurs, il y en a combien ? Et quelle est la somme de tous ces produits ?

On a trois lettres et il faut créer tous les mots utilisant chacune des trois une fois et une seule. C'est du dénombrement classique : 3!.

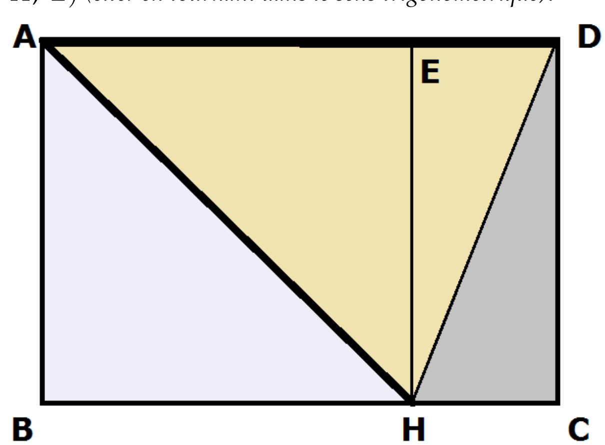
$A.B.C$	$A.C.B$	$B.A.C$	$B.C.A$	$C.A.B$	$C.B.A$
$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Finalement, il n'y en a pas tant que ça. Nos matrices commutent deux à deux, mais ça ne se voyait pas...
Et la somme vaut $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

◁ 41 ▷ On a donné dans le cours la valeur de $\tan(\pi/8)$. Justifiez la grâce au schéma ci-contre.



On a un rectangle $(A,\ B,\ C,\ D)$ mais aussi un carré $(A,\ B,\ H,\ E)$ *(citer en tournant dans le sens trigonométrique)*.



On va décider que la longueur du carré vaut 1. Sa diagonale mesure $\sqrt{2}$. Ceci nous conduit à penser que AD vaut aussi $\sqrt{2}$.
Il reste par soustraction : $ED = \sqrt{2} - 1$. Par les formules dans le triangle rectangle $(D,\ E,\ H)$: $\tan(\widehat{DHE}) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1}$.
Il reste à se convaincre que l'angle $\widehat{DHE}$ a pour mesure $\pi/8$.
En A, la bissectrice $(A\ H)$ crée deux angles de mesure $\pi/4$. De même, on a $\widehat{EHA} = \pi/4$.
Le triangle isocèle $(D,\ A,\ H)$ a donc un angle $\pi/4$ et deux angles $3.\pi/8$ *(pour que la somme vaille π)*.
Par soustraction, l'angle $\widehat{DHE}$ vaut $\widehat{DHA} - \widehat{EHA}$. C'est $\dfrac{3.\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4}$. Gagné.

Sinon, on écrit $\dfrac{2.\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)} = \tan(\pi/4) = 1$ *et on ne garde que la racine pertinente.*

Ou alors $\tan(\pi/8) = \dfrac{1-\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)}$.

◁42▷ La suite u vérifie : $u_0 = 8$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 49$, et $u_{n+3} = 7.u_{n+1} - 6.u_n$ pour tout n. *Hélas, on a tout oublié du cours, alors on innove.*

Calculez u_n pour n de 0 à 7.

On définit l'application $x \longmapsto \dfrac{-7.x^2 - 5.x + 8}{6.x^3 - 7.x^2 + 1}$, notée f. Calculez $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

On définit : $u = x \longmapsto 6.x^3 - 7.x^2 + 1$. Calculez $(f \times u)^{(n)}(0)$ de deux façons.

Déduisez que la suite (u_n) est exactement la suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)$.

Factorisez u.

Vérifiez que f admet pour décomposition en éléments simples $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{3}{1-2.x} + \dfrac{4}{1+3.x}$.

Déterminez $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}$ pour tout n et $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}(0)$.

Trouvez alors la formule générale pour (u_n).

◁43▷ ♡ f est une application de classe C^n. On se donne a et h. On définit :

$$F = t \longmapsto f(a+t.h) + (1-t).h.f'(a+t.h) + \frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) + \frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$$

Calculez $F(0)$ et $F(1)$. Simplifiez $F'(t)$ pour tout t.

Que vous rappelle alors la formule $F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$.

F est une fonction de la variable t qui intervient dans des compositions et des produits. Dans les compositions telles que $t \longmapsto a + t.h \longmapsto f(a+t.h)$, un h sort. Et dans produits, il y a un signe moins car ce sont des puissances de $1-t$.

On dérive :

$$\begin{array}{llllll}
F & = t \longmapsto & f(a+t.h) & +(1-t).h.f'(a+t.h)+ & \frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\
 & & & & & \\
F' & = t \longmapsto & h.f'(a+t.h) & -h.f'(a+t.h) & -(1-t).h^2.f''(a+t.h) & -\frac{(1-t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\
 & & & +(1-t).h.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)
\end{array}$$

Il reste $F' = t \longmapsto \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$.

D'autre part $F(0) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$ et $F(1) = f(a+t.h)$ (tous les autres termes sont nuls en 1).

On écrit $F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$ et ceci donne

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_{t=0}^1 (1-t)^3.f^{(4)}(a+t.h).dt}$$

C'est le formule de Taylor avec reste intégrale, ici à l'ordre 3.

Remarque | *Dans votre cours de physique, ce sera juste la formule de Taylor* $f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$ *en tentant de donner à* $\simeq$ *un sens qu'il ne pourra jamais avoir tant que la rigueur sera dans vos pas.*

◁44▷ Retrouvez les coefficients du développement asymptotique : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} = a.n + b + \dfrac{c}{n} + \dfrac{d}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$.

$\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}$ est équivalent à n quand n tend vers l'infini.

On soustrait : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n = \dfrac{-n^2+2.n+1}{n^2+n+1}$. Ceci tend vers -1.

On soustrait -1 : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n + 1 = \dfrac{3.n+3}{n^2+n+1}$. Ceci est équivalent à $\dfrac{3}{n}$.

On soustrait $\frac{3}{n}$: $\frac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}-n+1-\frac{3}{n}=\frac{-3}{n.(n^2+n+1)}$. Ceci est équivalent à $\frac{-3}{n^3}$.

Oh, on est allé trop loin. On a $\frac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}-n+1-\frac{3}{n}=\frac{-3}{n.(n^2+n+1)}=o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On refait passer de l'autre côté $\boxed{\frac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}=n-1+\frac{3}{n}+\frac{0}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}}$

Autre méthode : on se dit que le développement doit exister :
$\frac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}=a.n+b+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On effectue le produit en croix : $n^3+3.n+2=\Big(n^2+n+1\Big).\Big(a.n+b+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}\Big)$

On développe : $\begin{array}{rcllllll} n^3+3.n+2 & = & a.n^3 & +b.n^2 & +c.n & +d & +o(1) & \\ & & & +a.n^2 & +b.n & +c & +d/n & +o(1/n) \\ & & & & +a.n & +b & +c/n & +d/n^2 \quad +o(1/n^2) \end{array}$.

On regroupe et on laisse tomber ce qui est trop petit :
$n^3+3.n+2 = a.n^3 +(a+b).n^2 +(a+b+c).n +(b+c+d) +o(1)_{n\to+\infty}$.

On identifie : $\begin{array}{llllcl} a & & & & = & 1 \\ a & +b & & & = & 0 \\ a & +b & +c & & = & 3 \\ & b & +c & +d & = & 2 \end{array}$. On résout : $a=1$, $b=-1$, $c=3$, $d=0$.

◁45▷ 36 est égal à quatre fois la somme de ses chiffres $(36=4.(3+6))$. Trouvez tous les autres nombres entiers vérifiant cette propriété.
Et si je vous demande les entiers qui sont égaux à 2017 fois la somme de leurs chiffres, comme 42 357, comment en appelez vous au **Python** suprême ?

Il y a certes 0. Aucun autre entier à un chiffre ne convient.
On résout ensuite $10.a+b=4.(a+b)$.
Je trouve 12, 24, 36 et 48.

Combien de chiffres peut avoir n ?

On crée une procédure pour récupérer la somme des chiffes d'un entier :

```
def SommeChiffres(n) :
....S = 0
....while n>0 :
........S += n%10
........n = n//10
....return(S)
```

```
def SommeChiffres(n) :
....Mot = list(str(n))
....S = 0
....for lettre in mot :
........S += int(lettre)
....return(S)
```

```
L = [ ]
for n in range(100000) :
....if 2017*n == SommeChiffres(n) :
........L.append(n)
print(L)
```

◁46▷ (a_n) est une suite réelle convergente de limite α. k est un entier naturel donné. On pose $D_n = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour tout n. Calculez $D_{n+1}-D_n$.

Calculez alors la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i\Big)$.

Dans un premier temps, écrivons D_n et D_{n+1} pour k égal à 5 pour comprendre.

Rappel

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$D_n = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j}.(-1)^j.a_{5+n+j} =$	$1.a_{5+n}$	$-6.a_{5+n+1}$	$+15.a_{5+n+2}$	$-20.a_{5+n+3}$	$+15.a_{5+n+4}$	$-6.a_{5+n+5}$	$+1.a_{5+n+6}$	
$D_{n+1} = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j}.(-1)^j.a_{6+n+j} =$		$1.a_{5+n+1}$	$-6.a_{5+n+2}$	$+15.a_{5+n+3}$	$-20.a_{5+n+4}$	$+15.a_{5+n+5}$	$-6.a_{5+n+6}$	$+1.a_{5+n+7}$
$D_{n+1} - D_n$	$-1.a_{5+n}$	$+7.a_{5+n+1}$	$-21.a_{5+n+2}$	$+35.a_{5+n+3}$	$-35.a_{5+n+4}$	$+21.a_{5+n+5}$	$-7.a_{5+n+6}$	$+1.a_{5+n+7}$

Quand on soustrait, les termes se regroupent deux à deux en diagonale.

On retrouve le même type de formule, mais pour la valeur de k suivante.

On va le prouver avec des manipulations rigoureuses sur les sommes, avec une translation, une fusion.

$$D_{n+1} - D_n = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+1+j} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$$

$$D_{n+1} - D_n = \sum_{j'=1}^{k+2} \binom{k+1}{j'-1}.(-1)^{j'-1}.a_{k+n+j'} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \binom{k+1}{p-1}.(-1)^p.a_{k+n+j'} + (-1)^{k+1}.\binom{k+1}{k+1}.a_{k+n+k+1} - \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k+1}{p}.(-1)^p.a_{k+n+p} - \binom{k+1}{0}.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \left(\binom{k+1}{p-1}. + \binom{k-1}{p}\right).(-1)^p.a_{k+n+j'} + (-1)^{k+1}.1.a_{k+n+k+1} - 1.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \binom{k-2}{p}.(-1)^p.a_{k+n+j'} - (-1)^{k+2}.1.a_{k+n+k+1} - 1.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=0}^{k+2} \binom{k-2}{p}.(-1)^p.a_{k+n+j'}$$

On retrouve le même modèle de formule mais au rang $k+1$.

Quitte à écrire plus proprement $D_{n,k} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour marquer la dépendance en k

$$D_{n+1,k} - D_{n,k} = -D_{n,k+1}$$

Peut être aurais-je dû l'écrire avec k au lieu de $k+1$ dans mes formules.

Quoi qu'il en soit, on va sommer sur n de 0 à N.
La première somme télescope

$$D_{N+1,k} - D_{0,k} = \sum_{n=0}^{N} \left(D_{n+1,k} - D_{n,k}\right) = -\sum_{n=0}^{N} D_{n,k+1}$$

Ecrite pour $k-1$ à la place de k elle donne

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i\right) = -\left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i}.a_{N+1+k-1+i}.(-1)^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i}.a_{0+k-1+i}.(-1)^i\right)$$

Si à présent on fait tendre N vers l'infini (et donc les $N+1+k-j$ le font aussi)

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i\Big) \longrightarrow_{N\Rightarrow+\infty} -\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}.\alpha.(-1)^i\Big)+\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}.a_{0+k-1+i}.(-1)^i\Big)$$

Mais en plus, la somme $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}.(-1)^i$ vaut 0 (c'est $(1-1)^{k-1}$), il reste

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i\Big) \longrightarrow_{N\Rightarrow+\infty} \Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}.a_{0+k-1+i}.(-1)^i\Big)$$

C'est la généralisation (sans récurrence) de formules comme $\sum_{k=0}^{N}(a_{n+1}-a_n) \longrightarrow_{N\to+\infty} \alpha-a_0$

$$\sum_{k=0}^{N}(a_{n+2}-2.a_{n+1}+a_n) \longrightarrow_{N\to+\infty} -a_1+a_0$$

$$\sum_{k=0}^{N}(a_{n+3}-3.a_{n+2}+3.a_{n+1}-a_n) \longrightarrow_{N\to+\infty} a_2+2.a_1-a_0$$

◃47▹ ♡ n décrit l'ensemble des entiers naturels et k décrit l'ensemble des entiers relatifs. Lesquelles des propositions suivantes sont vraies *(et écrivez les avec des connecteurs logiques et, ou, ⇒ et ⇔)* :

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3-n^2.k$ soit nul.	

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n. $(k>n \text{ ou } k<0) \Rightarrow \binom{n}{k}=0$ Vrai	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n. $(k<0 \text{ ou } k>n) \Rightarrow \binom{n}{k}=0$ Vrai	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n. $(k<0 \text{ et } k>n) \Rightarrow \binom{n}{k}=0$ Vrai (du type « faux implique... »)	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n. comme au dessus	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n. $(\binom{n}{k}=1) \Rightarrow k=1$ Faux (il y a aussi $k=n$)	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3-n^2.k$ soit nul. $(\binom{n}{k}=1) \Rightarrow (k=0 \text{ ou } k=n \text{ ou } k=-n)$ Vrai	