Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Mathématiques	Physique
En diagonalisant la matrice de Frobénius, on transforme le problème d'ordre n en n problèmes d'ordre 1	On propose / on vérifie mais pourquoi n'y a-t-il que ça

Les solutions de l'équation homogène $a.h''_t + b.h'_t + c.h_t = 0$

Equation caractéristique $a.\lambda^2 + b.\lambda + \mu = 0$ et plus généralement $\sum_{k=0}^{d} a_k.\lambda^k = 0$

<table>
<tr><td colspan="4">combinaison des $t \longrightarrow e^{\lambda_k.t}$</td><td>deux racines réelles</td><td>une racine double</td><td>deux racines complexes conjuguées</td></tr>
<tr><td>$t \longrightarrow \sum_{k=1}^{d} A_k.e^{\lambda_k.t}$</td><td>racine double $(A + B.t).e^{\lambda.t}$</td><td>$e^{i.\omega.t}$</td><td>$e^{-i.\omega.t}$</td><td rowspan="2">$A.e^{\alpha.t} + B.e^{\beta.t}$</td><td>$(A + B.t).e^{\alpha.t}$</td><td>$A.e^{r.t}.\cos(\omega.t) + B.e^{r.t}.\sin(\omega.t)$</td></tr>
<tr><td>racines multiples ⇒</td><td>racine triple $(A + B.t + C.t^2).e^{\lambda.t}$</td><td>$\cos(\omega.t)$</td><td>$\sin(\omega.t)$</td><td>« cas critique »</td><td>car $\lambda.e^{r.t+i.\omega.t} + \mu.e^{r.t-i.\omega.t}$</td></tr>
</table>

Une solution particulière $a.p''_t + b.p'_t + c.p_t = s_t$

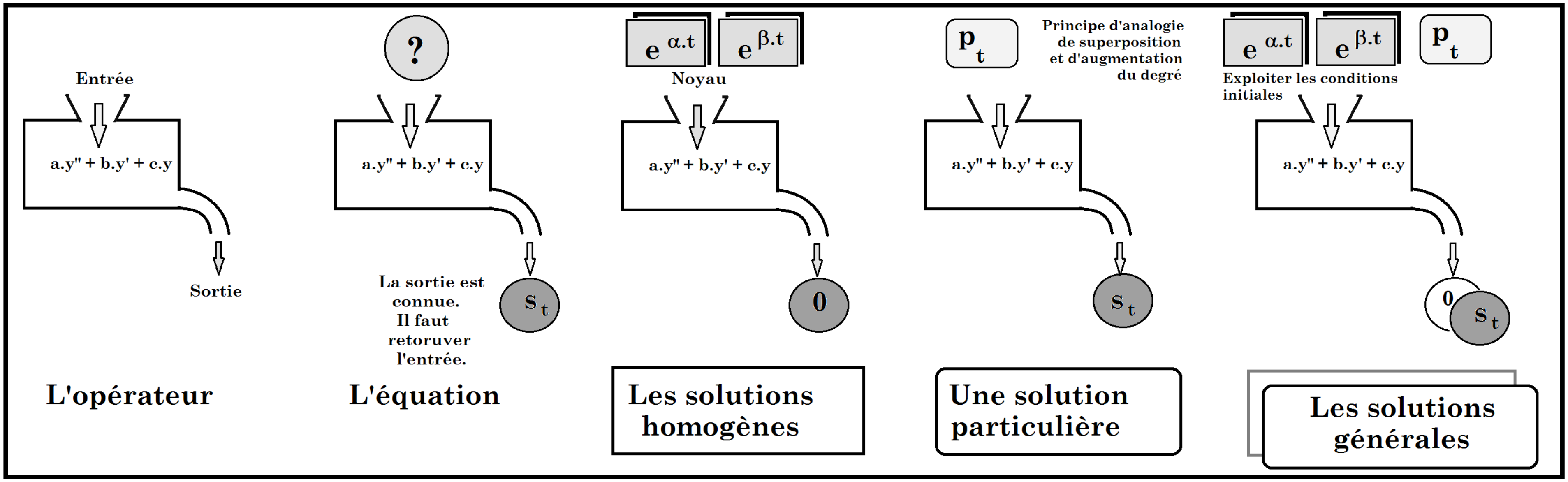
<table>
<tr><td>superposition</td><td>si le second membre est une somme de fonctions</td><td colspan="2">je cherche une solution terme par terme</td></tr>
<tr><td rowspan="3">analogie</td><td>si le second membre est un polynôme de degré d : $Q_d(t)$</td><td colspan="2">je cherche un polynôme de même degré</td></tr>
<tr><td>si le second membre est une exponentielle (réelle ou complexe) $e^{\lambda.t}$</td><td colspan="2">je cherche un multiple de cette exponentielle</td></tr>
<tr><td>si c'est le produit d'un polynôme par une exponentielle $Q_d(t).e^{\lambda.t}$
y compris pour λ imaginaire (rappel $\cos(\omega.t) = (e^{i.\omega.t} + e^{-i.\omega.t})/2$</td><td colspan="2">je cherche un produit $R_d(t).e^{\lambda.t}$
avec a priori le même degré</td></tr>
<tr><td>augmentation de degré</td><td>si $e^{\lambda.t}$ est déjà solution homogène</td><td>$\alpha.t.e^{\lambda.t}$</td><td>$R_{d+1}(t).e^{\lambda.t}$</td></tr>
<tr><td>formule générale</td><td>$p_t = x \longrightarrow \int_0^x s(t).h(t).dt$
avec h solution homogène vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$</td><td colspan="2">peu utilisée</td></tr>
</table>

Les solutions générales $a.y''_t + b.y'_t + c.y_t = s_t$

$$t \longrightarrow A.e^{\alpha.t} + B.e^{\beta.t} + p_t$$

La solution $a.y''_t + b.y'_t + c.y_t = s_t$ sachant $y_0 = \ldots$ et $\ldots$ (deux conditons si ordre 2)

C'est seulement maintenant qu'on détermine A et B.



	Homogènes	
$h''_t - 3.h'_t + 2.h_t = 0$ $A.e^t.B.e^{2.t}$ $h''_t - 4.h_t = 0$ $A.e^{2.t} + B.e^{-2.t}$ $a.ch(2.t) + b.sh(2.t)$	$h''_t - 3.h'_t + 9.h_t = 0$ $A.e^{3.t} + B.t.e^{3.t}$ $h''_t + 9.h_t = 0$ $a.\cos(3.t) + b.\sin(3.t)$ $A.\cos(3.t - \varphi)$	$h''_t - 2.h'_t + 4.h_t = 0$ dans $\mathbb{C}$: $A.e^{t+i.\sqrt{3}.t} + B.e^{t-i.\sqrt{3}.t}$ (A et B dans $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$: $A.e^{t+i.\sqrt{3}.t} + \overline{A}.e^{t-i.\sqrt{3}.t}$ (A dans $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$: $e^t.((a+i.b).e^{i.\sqrt{3}.t} + (a-i.b).e^{-i.\sqrt{3}.t})$ (a et b dans $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$: $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t))$ (a et b dans $\mathbb{R}$)
	Particulière + homogènes	
$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 2.t^2 - 2.t$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} + t^2 + 2.t + 2$	$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 10.cos(t)$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} + \cos(t) - 3.\sin(t)$	$h''_t - 2.h'_t + 4.h_t = 0$ dans $\mathbb{C}$: $A.e^{t+i.\sqrt{3}.t} + B.e^{t-i.\sqrt{3}.t}$ (A et B dans $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$: $A.e^{t+i.\sqrt{3}.t} + \overline{A}.e^{t-i.\sqrt{3}.t}$ (A dans $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$: $e^t.((a+i.b).e^{i.\sqrt{3}.t} + (a-i.b).e^{-i.\sqrt{3}.t})$ (a et b dans $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$: $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t))$ (a et b dans $\mathbb{R}$)
$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 2.e^{3.t}$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} + e^{3.t}$	$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = (2.t+5).e^{3.t}$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} + (t+1).e^{3.t}$	$y''_t - 2.y'_t + 4.y_t = 3.e^t$ $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t)) + e^t$
$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = e^t$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} + a.e^t$: échec	$y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = e^t$ $A.e^{.t} + B.e^{2.t} - t.e^t$: augmentation	
$y''_t - 2.y'_t + 4.y_t = e^{i.t}$ $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t)) + \dfrac{e^{i.t}}{3-2.i}$	$y''_t - 2.y'_t + 4.y_t = e^{-i.t}$ $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t)) + \dfrac{e^{i.t}}{3+2.i}$	$y''_t - 2.y'_t + 4.y_t = 13.\cos(t)$ $e^t.(a.\cos(\sqrt{3}.t) + b\sin(\sqrt{3}.t)) + 3.\cos(t) - 2.\sin(t)$