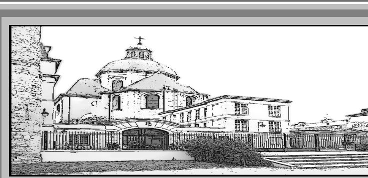
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 20 janvier
$\mathcal{M}.\mathcal{P}.\mathcal{S}.\mathcal{I}.2$



2024 2025

TD15

◃0▹ Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\ln(n+1)-\ln(n) \geqslant \dfrac{2}{2.n+1}$ (on pourra définir $x \longmapsto \ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{2}{2.x+1}$).

On définit la suite a par $\forall n,\ a_n = \ln\left(\dfrac{(n/e)^n.\sqrt{n}}{n!}\right)$. Montrez qu'elle est croissante.

On définit la suite b par $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\},\ b_n = a_n + \dfrac{1}{12.(n-1)}$. Montrez : $\forall n,\ b_n \geqslant a_n$ et montrez : $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.
Montrez que (b_n) est décroissante.

Déduisez qu'elles convergent, vers une même limite qu'on notera λ.
Calculez a_{10} et b_{10}.

Montrez que $2.a_n - a_{2.n}$ converger aussi vers λ.

Montrez pour tout n : $a_{2.n} - 2.a_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}.\dfrac{2}{\pi}.W_{2.n}\right)$ où W est la suite de Wallis.

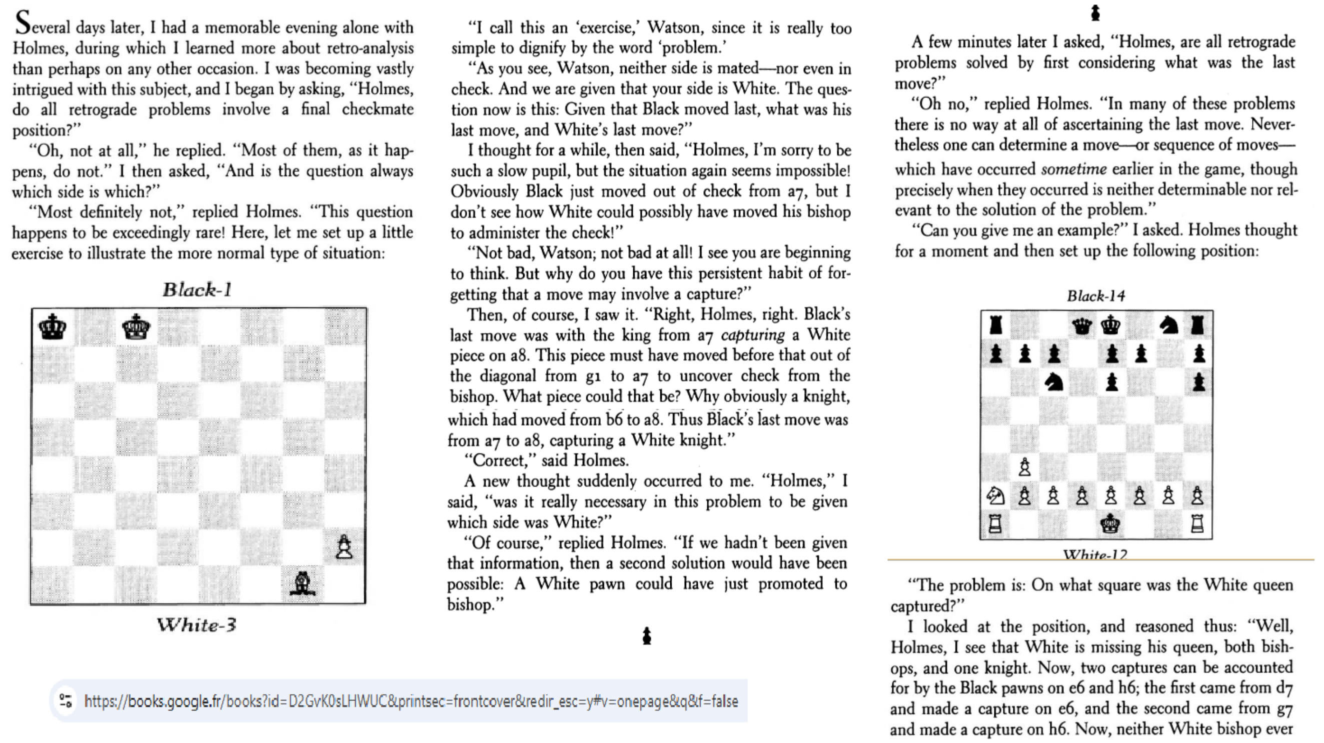
On admet avoir démontré $W_p.\sqrt{\dfrac{2.p}{\pi}} \longrightarrow_{p\to+\infty} 1$ (voir exercices de base). Déduisez $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.

James Stirling (ou Jacob) est né en mai 1692 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg. L'équivalent asymptotique de n!, pour lequel James/Jacob Stirling est le plus connu, apparaît à l'Exemple 2 de la Proposition 28 de Methodus Differentialis. Un des principaux objectifs de cet ouvrage était d'étudier des méthodes pour accélérer la convergence des séries. Stirling note d'ailleurs dans sa préface que Newton avait étudié ce problème. Beaucoup d'exemples de ses méthodes sont donnés, dont le problème de Leibniz de $\dfrac{\pi}{4} = 1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\ldots$*. Il applique également ses procédés d'accélération à la somme de la série* $\dfrac{\pi}{4} = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}-\ldots$ *dont la valeur exacte était encore inconnue à l'époque. Il obtient la relation* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n^2.\binom{2.n}{n}}$ *qui lui permet d'obtenir la valeur approchée* 1,644 934 066 848*, mais ne reconnaît pas* $\dfrac{\pi^2}{6}$*, ce qui sera fait par Euler peu d'années après.*

◃1▹ ♡ Un mot est une suite (indexée par $\mathbb{N}^*$) de -1 et 1, comme par exemple $(1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ldots)$.
La marche de l'ivrogne associée au mot x est la suite (d_n) définie par $\forall n,\ d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ (convention naturelles : $d_0 = 0$).
Justifiez : $\forall n,\ d_n = n\ [mod\ 2]$. Déduisez : $\forall n \in \mathbb{N},\ (d_n = 0 \Rightarrow n \in\in 2.\mathbb{N})$.
Justifiez qu'il y a $2^{2.n}$ mots de longueur $2.n$ et que parmi eux, il y en a $\dbinom{2.n}{n}$ qui vérifient $d_{2.n} = 0$.

◃2▹ ♡ Un mot complexe est une suite à valeurs dans $\{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$, comme par exemple $(1,\ 1,\ i,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ -1,\ -1,\ldots)$.
La marche de l'ivrogne associée au mot complexe z est la suite complexe (d_n) définie par $\forall n,\ d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$ (convention naturelles : $d_0 = 0$).
Montrez $\forall n,\ (d_n = 0 \Rightarrow n \in\in 2.\mathbb{N})$.
Justifiez qu'il y a $4^{2.n}$ mots complexes de longueur $2.n$. Montrez qu'un mot complexe z_n de longueur $2.n$ vérifie $z_{2.n} = 0$ si et seulement si existe p entre 0 et n tel que $Card(k \leqslant n \mid z_k = 1) = Card(k \leqslant n \mid z_k = -1) = p$ et $Card(k \leqslant n \mid z_k = i) = Card(k \leqslant n \mid z_k = -i) = n-p$.
Déduisez qu'il y a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2.n}{p}.\binom{2.n-p}{p}.\binom{2.n-2.p}{n-p}.\binom{n-p}{n-p}$ mots de longueur $2.n$ vérifiant $d_{2.n} = 0$.

Montrez que ce nombre vaut aussi $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(2.n)!}{p!.p!.(n-p)!.(n-p)!}$ et même $\displaystyle\binom{2.n}{n}.\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.\binom{n}{n-p}$.
En étudiant le coefficient de X^n dans $(1+X)^n.(1+X)^n$, montrez que la proportion de mots de longueur $2.n$ vérifiant $d_{2.n}=0$ est $\dfrac{\binom{2.n}{n}^2}{4^{2.n}}$.



Several days later, I had a memorable evening alone with Holmes, during which I learned more about retro-analysis than perhaps on any other occasion. I was becoming vastly intrigued with this subject, and I began by asking, "Holmes, do all retrograde problems involve a final checkmate position?"

"Oh, not at all," he replied. "Most of them, as it happens, do not." I then asked, "And is the question always which side is which?"

"Most definitely not," replied Holmes. "This question happens to be exceedingly rare! Here, let me set up a little exercise to illustrate the more normal type of situation:

Black-1

White-3

"I call this an 'exercise,' Watson, since it is really too simple to dignify by the word 'problem.'

"As you see, Watson, neither side is mated—nor even in check. And we are given that your side is White. The question now is this: Given that Black moved last, what was his last move, and White's last move?"

I thought for a while, then said, "Holmes, I'm sorry to be such a slow pupil, but the situation again seems impossible! Obviously Black just moved out of check from a7, but I don't see how White could possibly have moved his bishop to administer the check!"

"Not bad, Watson; not bad at all! I see you are beginning to think. But why do you have this persistent habit of forgetting that a move may involve a capture?"

Then, of course, I saw it. "Right, Holmes, right. Black's last move was with the king from a7 *capturing* a White piece on a8. This piece must have moved before that out of the diagonal from g1 to a7 to uncover check from the bishop. What piece could that be? Why obviously a knight, which had moved from b6 to a8. Thus Black's last move was from a7 to a8, capturing a White knight."

"Correct," said Holmes.

A new thought suddenly occurred to me. "Holmes," I said, "was it really necessary in this problem to be given which side was White?"

"Of course," replied Holmes. "If we hadn't been given that information, then a second solution would have been possible: A White pawn could have just promoted to bishop."

A few minutes later I asked, "Holmes, are all retrograde problems solved by first considering what was the last move?"

"Oh no," replied Holmes. "In many of these problems there is no way at all of ascertaining the last move. Nevertheless one can determine a move—or sequence of moves—which have occurred *sometime* earlier in the game, though precisely when they occurred is neither determinable nor relevant to the solution of the problem."

"Can you give me an example?" I asked. Holmes thought for a moment and then set up the following position:

Black-14

White-12

"The problem is: On what square was the White queen captured?"

I looked at the position, and reasoned thus: "Well, Holmes, I see that White is missing his queen, both bishops, and one knight. Now, two captures can be accounted for by the Black pawns on e6 and h6; the first came from d7 and made a capture on e6, and the second came from g7 and made a capture on h6. Now, neither White bishop ever

https://books.google.fr/books?id=D2GvK0sLHWUC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

◁3▷
https ://books.google.fr/books ?id=D2GvK0sLHWUC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

◁4▷ ♡♠ On se donne $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}$. Exprimez A^2 comme combinaison linéaire de A et I_2. Donnez les coefficients a_n et b_n vérifiant $A^n=a_n.A+b_n.I_2$ *(combinaisons de suites géométriques spectrales* (3^n) *et* $((-2)^n)$*)*.
On pose alors $E_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$. Exprimez E_n comme combinaison linéaire $E_n=\alpha_n.A+\beta_n.I_2$.
Écrivez la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle entre 0 et 3 puis entre 0 et -2 à l'ordre n. Montrez que le reste intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déduisez les limites de α_n et β_n quand n tend vers l'infini.
Exprimez $\exp(A)$ *(la limite des* E_n*)* comme combinaison linéaire de A et I_2.

◁5▷ Pour toute matrice carrée M de taille 2 sur 2, on définit $\exp(M)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{M^k}{k!}$.
Calculez les exponentielles des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$.

Montrez que si A est semblable à B, alors $\exp(A)$ est semblable à $\exp(B)$.
On suppose A diagonalisable, même si c'est inutile en fait montrez $\exp(-A)=\Big(\exp(A)\Big)^{-1}$
exprimez $\det(\exp(A))$ à l'aide de $\det(A)$ et $Tr(A)$.
Un élève dit on doit bien avoir $\exp(A+B)=\exp(A).\exp(B)$. Montrez qu'il a tort.

♠ Un résultat dit $\exp(A+B)=\exp(A).\exp(B)$ si A et B sont permutables (c'est à dire $A.B=B.A$). Démontrez le sans vous poser de questions sur les interversions de sommes infinies.

♣²♡ On pose : $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2.i.\pi\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2.i.\pi&0\\0&-2.i.\pi\end{pmatrix}$. Calculez $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ *(vous n'êtes*

pas obligé de diagonaliser A, vous pouvez calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$ *en faisant très attention au terme d'indice* 0 *qui est à part).*
Vérifiez $e^{A+B} = e^A.e^B$. A-t-on $A.B = B.A$?

◁ 6 ▷ Les suites a, b et c vérifient $\left\{\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & 4.a_n & -3.b_n & +c_n \\ b_{n+1} & = & 6.a_n & -5.b_n & +c_n \\ c_{n+1} & = & -4.a_n & +2.b_n & +4.c_n \end{array}\right\}$, avec a_0, b_0 et c_0 donnés. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
Trouvez M vérifiant $M.U_n = U_{n+1}$ pour tout n. Calculez $Tr(M)$, $Tr(M^2)$ et $Tr(M^3)$.
Trouvez D diagonale vérifiant $Tr(M) = Tr(D)$, $Tr(M^2) = Tr(D^2)$ et $Tr(M^3) = Tr(D^3)$.
Trouvez P vérifiant $M.P = P.D$, avec une première ligne de 1.
Vérifiez que P^{-1} est formée des lignes suivantes $(4, -2, -1)$, $(-1,\ 1,\ 0)$ et $(-2,\ 1,\ 1)$.
Calculez M^n, puis calculez u_n pour tout entier naturel n.

◁ 7 ▷ Une matrice M (carrée de format 2 sur 2) vérifie $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Diagonalisez la et calculez M^2 et M^{2019}.

◁ 8 ▷ Pour tout l'exercice, le corps de base est $(\mathbb{F}_5, +, .)$ (addition et multiplication modulo 5).
$(E, +, .)$ est l'espace des matrices de taille 2 sur 2. Quel est le cardinal de E ?
Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notée A) est diagonalisable.
Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?
Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (notée B) n'est pas diagonalisable dans E (est elle inversible ?).
Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?
Trouvez une matrice M telle que le cardinal de $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit le plus grand possible.

◁ 9 ▷ La notation de la factorielle a longtemps été $\left.\underline{\,n\,}\right|$, jusqu'à ce qu'en 1808, Christian Kramp invente la notation $n!$, plus pratique. Comme on est en MPSI2, il faut qu'on invente autre chose : n♪ est le produit des entiers plus petits que n, mais premiers avec n. Par exemple, 10! vaut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10, alors que 10♪ vaut 1.3.7.9. Calculez n♪ pour n de 1 à 13. La suite (n♪) est elle monotone ? Calculez p♪ pour p premier. Calculez pour tout n le $p.g.c.d.$ de n et n♪. Montrez : 2018♪ $= \dfrac{2018!}{2^{1009}.1009!.1009}$ *(en sachant que* 1 009 *est premier)*. Décomposez 30♪ en produit de facteurs premiers. Résolvez n♪ $= 3^3.7.11.13.17.19$. Trouvez le premier entier n tel que n♪ soit un multiple de 1 000.
$\sharp_0$ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne n♪.

◁ 10 ▷ Simplifiez $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1}$ en pensant à factoriser et télescoper.

◁ 11 ▷ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.p+1} (-1)^k.k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.p} (-1)^k.k^2$ pour tout p.
Calculez $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n} (-1)^n.k^3}$ suivant la parité de n (oui, $(-1)^n$en bas). Montrez : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n} (-1)^n.k^3} = 2.$

◁ 12 ▷ On travaille avec les entiers de $range(7)$ et les opérations modulo 7 :
$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 3 \\ & 5 & \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & & 2 \\ & 2 & \\ 1 & & 6 \end{pmatrix}$. Retrouvez les valeurs absentes (entiers entre 0 et 6).
Vérifiez que $M - 5.I_3$ n'est pas inversible (toujours modulo 7 voyons).
Trouvez un vecteur U dont la première composante vaut 1 et vérifiant $M.U = 5.U$. Calculez alors $M^6.U$.

◁ 13 ▷ Un élève me dit : si la loi $\otimes$ est anticommutative ($\forall(a,\ b),\ a \otimes b = -b \otimes a$), alors elle ne peut pas être associative, à moins d'être nulle. Il a raison ?

◁ 14 ▷ On pose $a_k = \dbinom{20}{k}.\dbinom{30}{k}$ pour k de 0 à 20. Calculez $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ puis $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - 1$ et dites moi lequel des a_k est le plus grand.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Lambert.

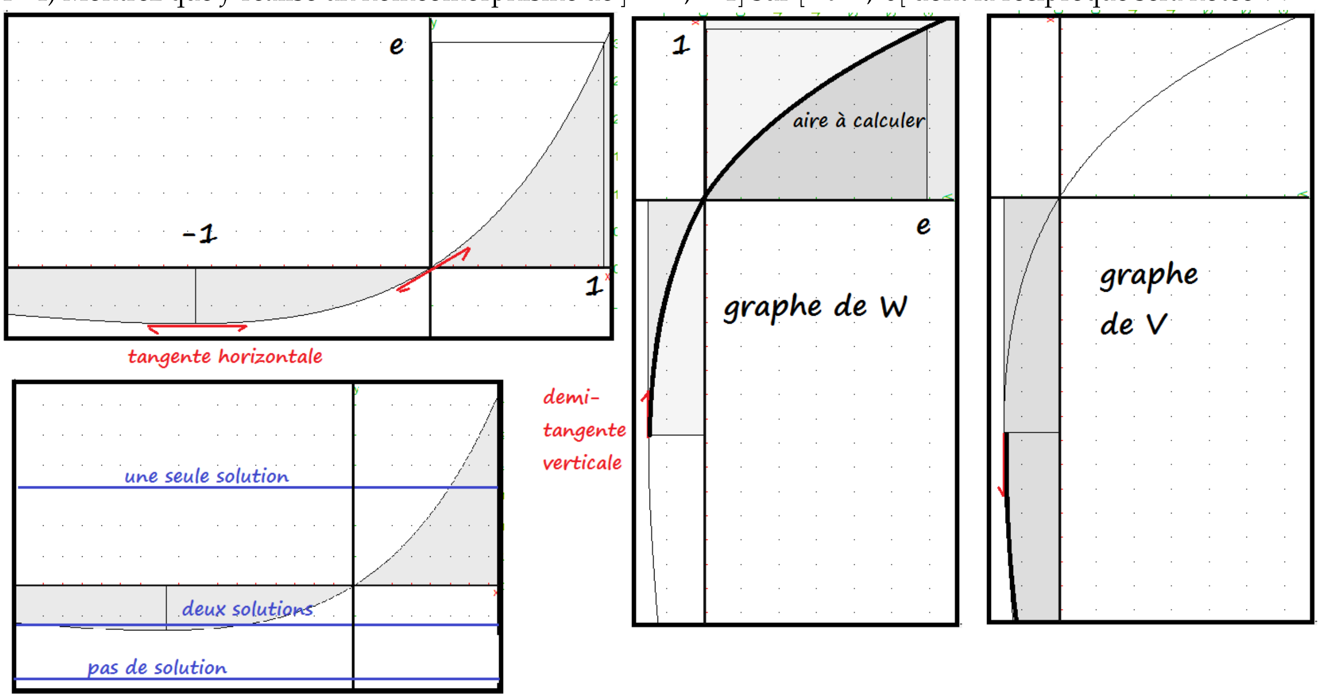
I∼0) *On note f l'application $x \longmapsto x.e^x$ définie sur* $\mathbb{R}$. Montrez que f réalise une bijection de $[-1\ +\infty[$ sur $[-e^{-1},\ +\infty[$ dont la réciproque (de $[-e^{-1},\ +\infty[$ sur $[-1,\ +\infty[$) sera notée W en hommage à Lambert [1]. Justifiez que W est continue et même C^∞de $]-1,\ +\infty[$ dans $]-1,\ +\infty[$.

I∼1) Calculez $W(0)$ et $W'(0)$. Justifiez $W(x) \sim_{x\to 0} x$. Montrez : $W''(0) = -2$.

I∼2) Montrez $W(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.

I∼3) Calculez $W(e)$ et justifiez $\displaystyle\int_0^e W(t).dt = e - 1$.

I∼4) Montrez que f réalise un homéomorphisme de $]-\infty,\ -1]$ sur $[-e^{-1},\ 0[$ dont la réciproque sera notée V.



I∼5) Donnez en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $x.e^x = m$ d'inconnue réelle x (nombre noté n_x). Calculez $\displaystyle\int_{-3}^{3} n_x.dx$.

I∼6) En utilisant V et W, donnez suivant m les solutions de $x.e^x \leqslant m$ d'inconnue réelle x, et illustrez graphiquement les différents cas.

I∼7) Pour a et b réels non nuls, donnez le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x : $e^{a.x} + b.x = 0$. Exprimez ces solutions à l'aide de W et V.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Une formule d'Abel.

II∼0) *n est un entier naturel donné et a un complexe donné. On pose $A_0 = 1$ et $A_k = \dfrac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$ pour tout k de 1 à n.* Montrez que $(A_0,\ A_1, \dots A_n)$ est une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

II∼1) Démontrez pour k entre 1 et n : $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

II∼2) Déduisez pour j et k entre 0 et n la valeur de $A_k^{(j)}(j.a)$ (séparer suivant la position de j par rapport à k).

1. Jean-Henri Lambert ; né à Mulhouse (à l'époque « cité état » indépendante) en 1728, il écrivit en allemand, en français et en latin des textes mathématiques et philosophies, il était expert en cartographie et en astronomie, ce fut lui qui en premier prouva l'irrationalité de π : il n'y a aucun W dans cette présentation, donc la lettre W s'impose

II~3) *Soit P un polynôme d'écriture* $\sum_{k=0}^{n} a_k.A_k$ *sur la base déjà citée.* Montrez $P^{(j)}(j.a) = a_j$ pour tout j de 0 à n.

II~4) Déduisez : $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$ pour tout triplet $(x,\ y,\ n)$ de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$.

II~5) Déduisez $n.y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Dévelolopement limité.

III~0) Justifiez : $W(t) = t.(1+W(t)).W'(t)$ pour tout t.

III~1) Déduisez pour tout n : $W^{(n)}(0) = (-n)^{n-1}$.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Approximation de W.

IV~0) *Pour tout réel positif x, on définit* $\phi_x = t \longmapsto x.e^{-x.e^{-t}}$ *(plus lisible :* $x.\exp(-x.\exp(-t))$*).* Montrez que $W(x)$ est point fixe de ϕ_x.

IV~1) Montrez : $0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \dfrac{x}{e}$ pour tout réel t (retrouvez $f(\ldots)$ dans ϕ_x').

IV~2) *On pose* $w_0(x) = 1$ *et* $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$ *pour tout n.* Montrez pour tout x de $[0,\ e]$ et tout n de $\mathbb{N}$: $|w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\dfrac{x}{e}\right)^n.|1-W(x)|$. Déduisez que la suite $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Application aux probabilités.

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité$1-p$ *(dans* $]0,\ 1[$*. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère α dans* $]0,\ 1[$ *et on veut réaliser la condition* $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$. Montrez : $P(X=k) = \binom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

Vérifiez $\sum_{k=0}^{r} P(X=k) = 1$ et $\sum_{k=0}^{r} k.P(X=k) = r.(1-p)$ *(espérance)*

puis $\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k) - \left(\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k)\right)^2 = r.p.(1-p)$ *(variance).*

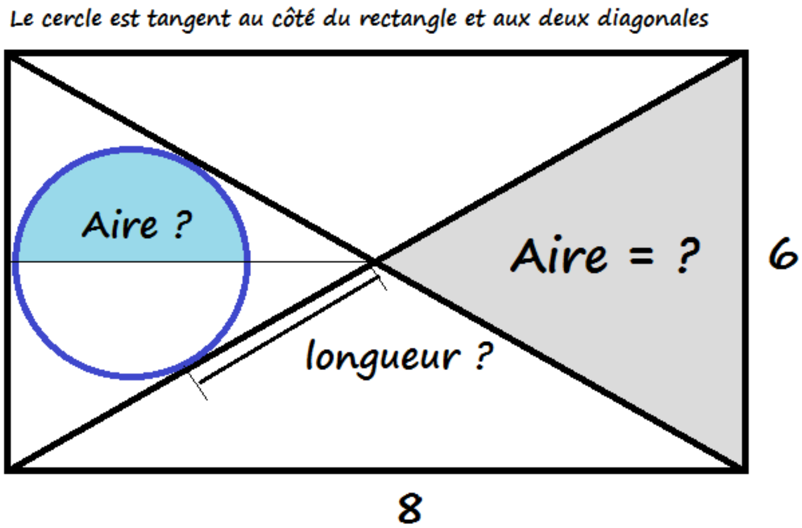
Justifiez : $\sum_{k=2}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=2}^{r} \dfrac{k}{2}.P(X=k) \leqslant \dfrac{r.(1-p)}{2}$.

Montrez que la condition $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$ est satisfaite pour $r \leqslant 2.\dfrac{1-\alpha}{1-p}$. Montrez que ceci équivaut à $x.e^x \leqslant -\alpha.a.e^{-a}$ si on a posé $a = \dfrac{p.\ln(p)}{1-p}$ et $x = r.\ln(p) - a$. *C'est là qu'intervient la fonction de Lambert !*

◃15▹ Parce qu'il faut bien un peu de `Python`.

`315` est à la fois un multiple de `35` et de `15` (mais pas de `31` c'est vrai).
`405` est un multiple de `05` et de `45` (mais pas de `40`).
`480` est un multiple de `48` et de `80` (et aussi de `40`).
`170` est un multiple de `17` et de `10` (mais pas de `70`).

Écrivez un script qui donne la liste de tous les nombres à trois chiffres `abc` tels que au moins deux des trois nombres `ab`, `ac` et `bc` divisent `abc`.

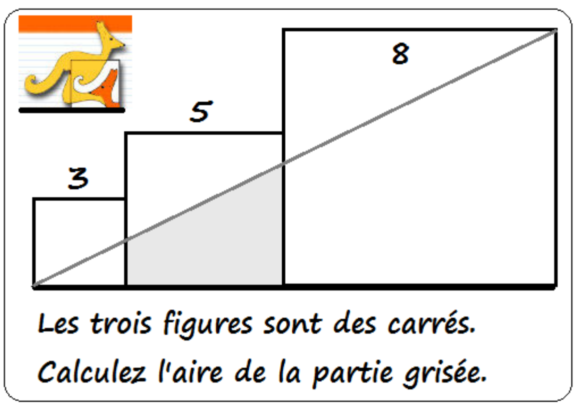


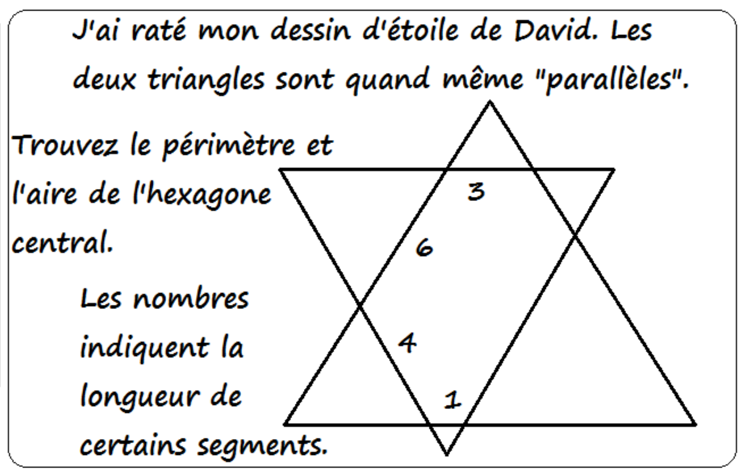
◁16▷

Retrouvez l'aire du demi disque (et les autres quantités demandées).

◁17▷ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On sait $A.B = B.A$, $Tr(B) = 5$ et $\det(B) = 6$. Pouvez vous retrouver B et la diagonaliser (deux solutions) ?

◁18▷





◁19▷ Dans un devoir de physique (pas cette année, vous êtes bons ☺), des élèves ont écrit $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
SCT m'en a parlé beaucoup en salle des profs.
J'ai tenté de les sauver en trouvant des exemples où ça marche quand même...
Trouvez une solution dans $\mathbb{C}$. Et des solutions dans range(13) pour les opérations modulo 13.

◁20▷ Explicitez

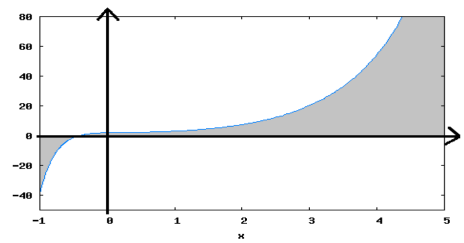
$A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$	$B = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[$	$C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]-2^{n},\ 2^{n}[$
$D = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ 2.n[$	$E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ 2.n[$	$F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{n}[$

◁21▷ ♡ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

◁22▷ ♡♣ On donne $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. On doit diagonaliser A. C'est moche, les valeurs propres sont des irrationnels.
Sauf que le corps sur lequel on travaille est $range(11)$ pour l'addition et la multiplication modulo 11. Et là, tout doit aller vite.
Résolvez alors l'équation $A^n = A$ d'inconnue entière n.

◁ 23 ▷ ♡ Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t$ et $t \longmapsto e^{3.t}$.
Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t)$ et $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$.

◁ 24 ▷ ♡ On veut résoudre l'équation différentielle $y_t^{(3)} = 3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t$ d'inconnue y fonction de t avec conditions initiales $y_0 = 2$, $y'_0 = 1$ et $y''_0 = -7$. Calculez $y_0^{(3)}$ et $y_0^{(4)}$.



On pose : $u_t = y''_t - 2.y'_t - 8.y_t$. Calculez u_0 et démontrez : $u'_t = u_t$. Déterminez alors u_t pour tout t.
On pose ensuite $v_t = y''_t - 5.y'_t + 4.y_t$. Dérivez v. Déterminez v_t pour tout t.
On pose $w_t = y''_t + a.y'_t + b.y_t$. Ajustez a et b pour avoir $w'_t = 4.w_t$. Déterminez alors w_t pour tout t.

◁ 25 ▷ ♡ Soit f solution de l'équation différentielle $y''_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t. Calculez $f(t) + f(t+\pi)$ pour tout t.
Soit f solution de l'inéquation $y''_t + y_t \geqslant 0$ d'inconnue y fonction de t. Comparez $f(0) + f(\pi)$ et $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$.
Déduisez pour tout x : $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$ *(pensez à translater)*.

◁ 26 ▷ Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution ch et sh ?
Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution $t \longmapsto ch(t)$ et $t \longmapsto ch(2.t)$?

◁ 27 ▷ On veut résoudre l'équation différentielle $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) =_{\forall t>0} 0$ d'inconnue f fonction de t sur $]0, +\infty[$ (notée (E)). On pose alors $g = x \longmapsto= f(e^x)$. Calculez g' et g''. Montrez que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que vous résoudrez. Explicitez la solution de (E) qui vaut 1 en 1 et aussi en 2.

◁ 28 ▷ Un élève un peu bas de plafond prétend : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ (formule ☻). Évidemment, il a tort. Mais il indique que c'est vrai pour

$f = t \longmapsto e^{4.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{2.t}$
$f = t \longmapsto \sqrt{\frac{t}{1-2.t}}$	et	$g = t \longmapsto \sqrt{t}$
$f = t \longmapsto e^{t^2+t}.\sqrt{1-2.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{t^2}$
$f = t \longmapsto e^{a.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{b.t}$

pour la dernière ligne, c'est à vous de choisir convenablement b en fonction de a, et pour toutes les autres, c'est à vous de faire.

Le professeur le met alors au défi : on prend $g = \cos$ *(sur* $]0, \pi/2[$*)*. Aidez le en trouvant f pour qu'il y ait égalité dans sa formule (☻). Vous serez amené à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. Vous montrerez que ce qu'on note classiquement a_t est une fonction de $\tan(t)$. Vous ferez un changement de variable $\tau = \tan(t)$, et vous devrez décomposer en éléments simples quelquechose de la forme $\frac{\alpha.t^2 + \beta.t + \gamma}{(\gamma.t + \delta).(t^2+1)} = \frac{\lambda}{\gamma.t + \beta} + \frac{\mu.t + \nu}{t^2+1}$. Ah oui, on ne triche pas, on ne prend pas f identiquement nulle !

◁ 29 ▷ La formule de Faa di Bruno dit :
$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m_1+2.m_2+3.m_3+\ldots+n.m_n=n} \frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}} f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^n \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j}.$$
Vérifiez sa cohérence pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et même $n = 4$.

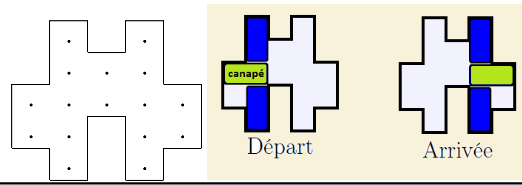
◁ 30 ▷ Calculez $\int_0^\pi \frac{d\theta}{2 + \cos^2(\theta)}$ (changez de variable en tangente, mais prenez garde aux bornes).

◁ 31 ▷ ♡ On cherche toutes les applications f dérivables vérifiant $\forall t,\ f'(t) = f(\pi - t) + e^t$.
Montrez que f est solution de l'équation différentielle $y''_t + y_t = e^t - e^{1-t}$ d'inconnue y fonction de t (notée (E)).
Résolvez (E). Trouvez toutes les applications f vérifiant $\forall t,\ f'(t) = f(1-t) + e^t$.

◁ 32 ▷ ♡ On sait : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = 3.2^n - 3^n$. Complétez la matrice :
$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacktriangle & \bigstar \\ \blacklozenge & \blacktriangledown \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

◁ 33 ▷ La chambre de Bintou est un truc pas permis, conçu par un élève ayant fait de la S.I.I. complètement bourré, vous en avez ci contre le plan vu de haut. Et en plus, elle a un canapé et deux armoires qui ont une forme rectangulaire qui occupent les rectangles repérés sur le schéma.

Et elle doit les déplacer aux emplacements du troisième dessin. Elle a le droit de les faire glisser, mais pas de les soulever ou de les faire tourner. Combien de déplacements ? Et comment coder ces déplacements pour transmettre l'information sans faire dix ou douze dessins ?



◁ 34 ▷ ♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$ (noté A). Montrez que l'équation $M^2 = A$ n'a aucune solution dans $M_2(\mathbb{R})$.
Combien pouvez vous en trouver dans $M_2(\mathbb{C})$?

◁ 35 ▷ ♡ εest un réel strictement positif. La suite (a_n) vérifie $a_{n+2} = 4.a_{n+1} - (4-\varepsilon^2).a_n$ pour tout n avec $a_0 = \alpha$ et $a_1 = 2.\alpha + 2.\beta$.
Calculez a_n pour tout n.
Donnez la limite de a_n lorsque εtend vers 0 (il faudra lever une forme indéterminée).

◁ 36 ▷ La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date de naissance de deux élèves vous prend une demi-seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date de naissance.
La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date d'anniversaire de deux élèves vous prend un tiers de seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date d'anniversaire.

◁ 37 ▷ ♡ L'élève Aissé-Sontencohr-Okupéh constate que les matrices suivantes ont pour déterminant 1 ou -1 et sont leur propre inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prouvez le, y compris en taille 6.
Généralisez en donnant la forme du coefficient de ligne i colonne k et si possible en prouvant $M^2 = I_n$ *(là, ça devient ♠ ou ♣, on peut penser à l'application qui passe de* $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + \ldots + a_n.X^n$ *à* $a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + \ldots + a_n.(1-X)^n$ *et l'appliquer deux fois).*

◁ 38 ▷ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Changez un coefficient pour qu'elle soit non inversible.
Ah oui, comme souvent, on travaille avec les entiers de range(7) pour les opérations modulo 7.

◁ 39 ▷ ♡ Complétez, sachant que cette matrice a un déterminant réel : $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

◁ 40 ▷

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés).

$$Com\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rappel :

• Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A : $\det(\lambda.I_n - A)$.

• Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les λ pour lesquels il existe au moins un vecteur X non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.

• Noyau d'une application linéaire f : ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

• Noyau d'une matrice rectangulaire A (format n sur k) : ensemble des vecteurs X de taille k vérifiant $M.X = 0_n$.

• Le déterminant du produit est le produit des déterminants.

• La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$