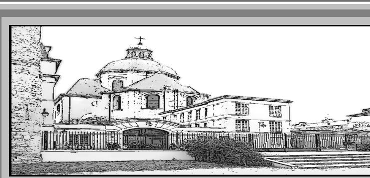
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 17 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025
DS05

◇ 0 ◇ Four cages are arranged in a $2x2$ formation. Each cage contains some chickens and some rabbits (some cages may contain only chickens or only rabbits).
The total number of heads in the the first row is 60.
The total number of legs in the two cages in the second row is 240.
The number of heads in the two cages in the first column is 70.
The total number of legs in the two cages in the second column is 230.
The minimum number of animals in all four cages is : (a) 120 (b) 128 (c) 145 (d) 180 (e) none of these. 3 pt.

Matrices bistochastiques.

I∼0) Montrez $(A.B)^T = B^T.A^T$ pour A et B carrées de taille n sur n. 2 pt.
I∼1) Déduisez $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ pour A carrée inversible de taille n. 2 pt.
I∼2) *On pose* $\rho = e^{2.i.\pi/5}$; montrez $(\rho^{-1}+\rho)+1+(\rho^2+\rho^3) = 0$, déduisez $2.\cos(2.\pi/5)+1+2.(2.\cos^2(2.\pi/5)-1) = 0$ et calculez $\cos(2.\pi/5)$. 3 pt.

II∼0) *n est un entier naturel fixé, une matrice bistochastique est une matrice carrée de taille n à coefficients positifs a_i^k telle que les sommes en colonnes et les sommes en ligne valent toutes* 1

$$\forall p \in \{1, \ldots n\},\ \sum_{k=1}^{n} a_p^k = 1,\ \forall q \in \{1, \ldots n\},\ \sum_{i=1}^{n} a_i^q = 1$$

Montrez que les coefficients d'une matrice bistochastique sont tous entre 0 et 1. 1 pt.
II∼1) *On note U le vecteur colonne de taille n dont tous les coefficients valent* 1. Montrez que M est bistochastique si et seulement si elle est à coefficients positifs et vérifie $M.U = M^T.U = U$. 2 pt.

L'ensemble des matrices bistochastiques pourra être noté $\mathbb{B}$.

II∼2) Montrez que l'ensemble des matrices bistochastiques de taille n est stable par multiplication, mais pas par addition. 3 pt.

II∼3) *Une matrice de permutation est une matrice à coefficients* 0 *et* 1 *avec un seul* 1 *par colonne et par ligne.* Montrez que ce sont les matrices bistochastiques à coefficients entiers. 2 pt.
II∼4) Montrez que la composée de deux matrices de permutations est une matrice de permutation. 2 pt.

II∼5) Montrez que les matrices de permutations sont des matrices bistochastiques inversibles dont l'inverse est aussi bistochastique. 2 pt.

II∼6) Écrivez un script Python qui prend en entrée une matrice de taille n (liste de liste) et indique par True ou False si elle est bistochastique. 3 pt.

II∼7) Montrez que le déterminant d'une matrice bistochastique de taille 2 est toujours entre -1 et 1. Montrez qu'il existe une unique matrice bistochastique de taille 2 de déterminant $1/3$. 2 pt.

III∼0) Montrez (en raisonnant et pas en calculant, 210 bon sang !) qu'une matrice bistochastique admet toujours 1 comme valeur propre. 2 pt.

III∼1) Soit λ une valeur propre (éventuellement complexe) d'une matrice bistochastique M (vecteur propre X, donc relation $M.X = \lambda.X$ avec X non nul). En montrant déjà $\sum_{i=1}^{n} |\lambda.x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_i^k.|x_k| \Big)$, montrez que λ est en module plus petit que 1. 3 pt.

III∼2) Montrez que $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est bistochastique, non inversible et diagonalisable (avec spectre $[0,\ 0,\ 1]$). $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼3) Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bistochastique, inversible, d'inverse bistochastique et diagonalisable (avec spectre $[1,\ 1,\ -1]$). $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼4) Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ est bistochastique, non inversible, et diagonalisable (spectre à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ça vous aide ?). $\boxed{\text{3 pt.}}$

IV∼0) Soit A une matrice bistochastique de taille n, inversible. Montrez que A^{-1} est bistochastique si et seulement si tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls. $\boxed{\text{2 pt.}}$
On suppose donc que A et A^{-1} sont bistochastique. Soit a_i^k un coefficient non nul de A ; en partant de $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ montrez que la i^{eme} colonne de A^{-1} a $n-1$ coefficients nuls de même que la k^{ieme} ligne de A^{-1}. Déduisez : les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation. $\boxed{\text{4 pt.}}$

V∼0) *Cinq personnes sont assises en rond autour d'une table pentagonale (pas très logique ?). Au début, chacune a un avoir en euros (par exemple $(10,\ 20,\ 35,\ 0,\ 15)$ où le quatrième n'a pas de sous). A chaque minute, chacune donne deux cinquièmes de sa fortune à son voisin de droite, deux cinquièmes à son voisin de gauche (et garde un cinquième pour elle, et reçoit d'ailleurs de l'argent de chacun de ses voisins).*
Vérifiez que sur notre exemple les nouveaux avoirs seront alors $(16,\ 22,\ 15,\ 20,\ 7)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

V∼1) Les avoirs à la n^{ieme} minute sont donc un vecteur colonne X_n de composantes $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ (écrites en ligne par gain de place).Donnez la matrice B vérifiant $B.X_n = X_{n+1}$, vérifiez qu'elle est bistochastique et justifiez $\forall n,\ X_n = B^n.X_0$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

V∼2) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouvez pour chaque k de 0 à 4 un vecteur non nul X_k vérifiant $J.X_k = \rho^k.X_k$ (ne me posez pas la question, ρest défini). $\boxed{\text{2 pt.}}$

V∼3) Déduisez que J se diagonalise et donnez une matrice diagonale D semblable à J. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V∼4) Calculez J^2 et J^3,puis exprimez B à l'aide des J^p pour p de 0 à 4. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V∼5) Déduisez que B est diagonalisable, et donnez la liste de ses valeurs propres (elles sont réelles). $\boxed{\text{4 pt.}}$

V∼6) Montrez que la limite de X_n quand n tend vers $+\infty$ est un multiple du vecteur U. Déduisez la limite de X_n quand n tend vers l'infini. $\boxed{\text{4 pt.}}$

VI∼0) *Un exemple d'inégalité de Muirhead.*
Pour tout triplet d'entiers naturels (p, q, r) (avec$p \geqslant q \geqslant r$, même si ce n'est pas utile), on appelle moyenne(p,q,r) (on pourra a noter $\mu_{(p,q,r)}$) l'application

$$(a_1, a_2, a_3) \longmapsto \left(\frac{1}{3!}.\sum_{\sigma \in S_3} (a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r\right)^{1/(p+q+r)}$$

de $(\mathbb{R}^+)^3$ *dans* $\mathbb{R}^+$. Montrez que cette moyenne est toujours entre $Min(a_1, a_2, a_3)$ et $Max(a_1, a_2, a_3)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

VI∼1) Comparez pour λ positif et (a_1, a_2, a_3) dans $(\mathbb{R}^+)^*$ la moyenne de $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ et celle de $(\lambda.a_1,\ \lambda.a_2,\ \lambda.a_3)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

VI∼2) Qui est la moyenne $(1, 1, 1)$? Qui est la moyenne $(3, 3, 3)$? Qui est la moyenne $(1, 0, 0)$? Qui est la moyenne $(2, 0, 0)$? $\boxed{\text{2 pt.}}$

VI∼3) *On définit une relation « de domination » sur les triplets ordonnés (p, q, r) par $(p, q, r) \blacktriangleright (p', q', r')$ si et seulement si* $\begin{array}{l} p \geqslant p' \\ p + q \geqslant p' + q' \\ p + q + r = p' + q' + r' \end{array}$. Montrez que c'est une relation d'ordre et que cet ordre est partiel. $\boxed{\text{2 pt.}}$

Le résultat de Muirhead est que si (p, q, r) domine (p', q', r') alors la moyenne (p,q,r) est plus petite que la moyenne (p', q', r'), comme par exemple arithmétique$\geqslant$géométrique. La démonstration utilise les décomposition matrices bistochastiques en matrices de permutations, on va le voir sur un exemple.

VI∼4) *On note dans ce qui suit* μ *la moyenne(5,2,1)* $\mu(a_1, a_2, a_3) = \sqrt[8]{\frac{1}{6}.\sum\limits_{\sigma\in S_3}(a_{\sigma(1)})^5.(a_{\sigma(2)})^2.(a_{\sigma(3)})^1}$ *et* ν *moyenne* $(3,3,2)$ *la* $\nu(a_1, a_2, a_3) = \sqrt[8]{\frac{1}{6}.\sum\limits_{\sigma\in S_3}(a_{\sigma(1)})^3.(a_{\sigma(2)})^3.(a_{\sigma(3)})^2}$*. On va donc montrer* $\forall(a_1, a_2, a_3),\ \mu(a_1, a_2, a_3) \geqslant \nu(a_1, a_2, a_3)$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$. Calculez $M.\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrez que M est bistochastique. 2 pt.

VI∼5) Écrivez M comme combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls des six matrices de permutations de taille 3 sur 3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qu'on écrira $M = \sum\limits_{k=1}^{6} a_k.P_k$ sans se préoccuper pour la suite de l'ordre dans lequel vous avez pris les P_k une fois que vous gardez le même dans la suite. 2 pt.

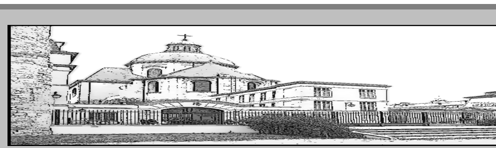
VI∼6) On se donne $(a_1,\ a_2,\ a_3)$. Pour tout vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, on pose $[X] = \frac{1}{6}.\sum\limits_{\sigma\in S_3}(x_{\sigma(1)})^p.(x_{\sigma(2)})^q(x_{\sigma(3)})^r$.

Montrez $[P.X] = [X]$ pour toute matrice de permutation P. 1 pt.

VI∼7) Justifiez alors ce qui suit et concluez 5 pt.

$$[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}] = \Big(\sum_{k=1}^{6} a_k\Big).[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}] = \Big(\sum_{k=1}^{6} a_k.[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{6} a_k.[P_k.\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]\Big) \geqslant \Big[\sum_{k=1}^{6} a_k.P_k.\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\Big] = [\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]$$

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 17 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025
DS05
CORRECTION

DS05 Des lapins et des poulets.

On considère que les animaux sont « normaux », qu'il n'y a pas un lapin à cinq pattes compensé par un poulet unijambiste, ni un lapin bicéphale qui compenserait une poulet qui courrait encore après qu'on lui ait tranché le cou (image classique de la ferme de campagne).

On note alors les informations

a lapins	α poulets	b lapins	β poulets
c lapins	γ poulets	d lapins	δ poulets

. On espère que ce sont bien des nombres entiers (pas de pâté de lapin), naturels (pas d'anti-poulets ($\overline{ACAB}$?)).

On transcrit les informations

a lapins	α poulets	b lapins	β poulets
c lapins	γ poulets	d lapins	δ poulets

$a+\alpha+b+\beta = 60$

$4.c+2.\gamma+4.d+2.\delta = 240$ donc $2.c+\gamma+2.d+\delta = 120$

$a+\alpha+c+\gamma = 70$

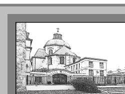
$4.b+2.\beta+4.d+2.\delta = 230$ donc $2.b+\beta+2.d+\delta = 115$

On voit qu'il n'y a pas assez d'équations pour déterminer les huit inconnues.
Mais on demande juste une minoration de $a+\alpha+b+\beta+c+\gamma+d+\delta$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & +\alpha & +b & +\beta & & & & & =60 & (1)\\
a & +\alpha & & & +c & +\gamma & & & =70 & (2)\\
 & & 2.b & +\beta & & & +2.d & +\delta & =115 & (3)\\
 & & & & 2.c & +\gamma & +2.d & +\delta & =120 & (4)
\end{array}$$

Il reste à combiener les lignes pour arriver enfin à 128. Non détaillé ici pour l'instant.

DS05 Préliminaires.



On se donne deux matrices A et B carrées de taille n de termes généraux a_i^k et b_p^q. On note α et β les termes de leurs transposées.

Le terme général de la matrice $A.B$ est $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$.

Quand on transpose, on a une matrice de terme général

$$\gamma_i^k = c_k^i = \sum_{j=1}^{n} a_k^j.b_j^i$$

On profite de la commutativité de la multiplication et on exploite les transposées

$$\gamma_i^k = c_k^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i.a_k^j = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j.\alpha_j^k$$

et on reconnaît le terme général du produit $B^T.A^T$.

On peut aussi formuler ainsi

$$[(A.B)^T]_i^k = [A.B]_k^i = \sum_{j=1}^{n} [A]_k^j.[B]_j^i = \sum_{j=1}^{n} [B]_j^i.[A]_k^j = \sum_{j=1}^{n} [B^T]_i^j.[A^T]_j^k = [B^T.A^T]_i^j$$

tout aussi propre et clair je l'espère.

On peut aussi le raconter avec des dessins partout ou des phrases qui transforment les lignes en colonnes et vice versa. Mais c'est moins rigoureux.
On peut aussi évidemment dire façon « cours de Terminale » : par définition, on a évidemment $(A.B)^T = B^T.A^T$.
La récurrence est certes une piste à explorer si on estime que l'initialisation en taille M2 ou 3 suffit et qu'on n'a pas besoin de hérédité (biologie).

On ne calcule pas explicitement A^{-1} ni $(A^T)^{-1}$. On est en maths. On réfléchit.

On part de la relation $(A.A^{-1}) = (A^{-1}.A) = I_n$ (hypothèse A inversible). On transpose

$$(A.A^{-1})^T = (A^{-1}.A)^T = (I_n)^T = I_n$$

On profite du calcul précédent

$$(A^{-1})^T.A^T = A^T.(A^{-1})^T = I_n$$

On vient de trouver une matrice B vérifiant $B.A^T = A^T.B = I_N$. C'est donc l'inverse de A^T.
On a donc $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. C'est ça les maths. Zéro calcul, du raisonnement.

La somme $(\rho^{-1}+\rho)+1+(\rho^2+\rho^3)$ est celle d'une série géométrique de premier terme ρ^{-1} et de raison ρ. Elle vaut $\dfrac{\rho^{-1}-\rho^4}{1-\rho}$(avec ρ différent de 1). Mais on a $\rho^5 = 1$ (racine de l'unité) donc le numérateur est nul.

Maintenant, avec les formules de Moivre, cette somme nulle n'est autre que $2.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)+1+2.\cos\left(2.\dfrac{2.\pi}{5}\right)$.

Ceci nous donne que $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $2.x+1+2.(2.x^2-1) = 0$ d'inconnue réelle x.

On trouve $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)$ vaut $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. On élimine la racine négative, et on encadre $\boxed{\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Ceci peut être vu comme un petit exercice, surtout si on a pour seul objectif de gagner des points, quelques points.
Mais c'est aussi parce qu'on en aura besoin plus loin.
Ces questions sont des préliminaires pour le devoir. On les utilise ensuite quand on en a besoin.

DS05 Propriétés élémentaires.

Prenons une matrice bistochastique A et deux indices i et k. On dit montrer que a_i^kest entre 0 et 1.

déjà, par définition même, il est positif.

Regardons ensuite la somme sur la ligne i : $\sum\limits_{p=1}^{n} a_i^p = 1$ et en isolant un terme face face à d'autres termes positifs :

$$a_i^k \leqslant a_i^k + \sum_{p\neq k} a_i^k = 1$$

C'est la version « sens direct » de *si un coefficient* a_i^k *dépassait* 1, *la somme* $\sum\limits_{p=1}^{n} a_i^k$ *dépasserait aussi* 1.

Remarque : si un coefficient vaut 1, *tous les autres coefficients de la ligne sont nuls. De même pour la colonne.*

On se donne une matrice A de taille n et le vecteur 1 avec ses Huns envahissants.
On calcule le produit $A.U$ « en faisant tomber la colonne sur les lignes ».

En ligne i de $A.U$ on a justement $\sum\limits_{q=1}^{n} a_i^k$.

La condition $A.U = U$ affirme donc « $\forall i \leqslant n$, $\sum\limits_{q=1}^{n} a_i^k = 1$. Condition en ligne.

Si ensuite on transpose, la matrice A^T a pour terme général $\alpha_i^k = a_k^i$ et cette condition $A^T.U = U$ dit $\forall i \leqslant n$, $\sum\limits_{p=1}^{n} a_p^i = 1$. C'est la condition « en lignes ».

Et juste pour illustrer : $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+a'' \\ b+b'+b'' \\ c+c'+c'' \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a'+b'+c' \\ a''+b''+c'' \end{pmatrix}$.

Et on ne doit pas oublier, comme on va le voir, la condition « coefficients positifs ».

On prend à présent deux matrices bistochastiques A et B.

La matrice $A.B$ a pour terme général $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$ qui est positif (car $\mathbb{R}^+$ est stable par addition et multiplication).

Attention, $(\mathbb{R}^+, +, .)$ n'est pas un anneau, on a les stabilités pas pas de passage à l'opposé. C'est juste « interne » qui sert ici.

On se donne ensuite le vecteur U et on calcule par associativité du produit matriciel

$$(A.B).U = A.(B.U) = A.U = U$$

en utilisant l'appartenance de A à B à l'ensemble des matrices bistochastiques.
De même, on effectue avec un résultat du cours

$$(A.B)^T.U = (B^T.A^T).U = B^T.(A^T.U) = B^T.U = U$$

On reconnaît les trois critères pour l'appartenance de $A.B$ à l'espace $\mathbb{B}$.

Si vous avez oublié « coefficients positifs », ne comptez pas avoir plus de la moitié des points.
Une fois encore, c'est que vous vous serez concentré sur les calculs et non sur le raisonnement.
Vous avez divisé par 10 le rôle des mathématiques !

Pour « non stable par addition », il suffit d'un contre-exemple (plus que de longues phrases).
La matrice I_n est dans $\mathbb{B}$ mais la somme $I_n + I_n$n'y est plus (sommes en ligne valant 2).

DS05 Matrices de permutations.

On les croise plus loin dans le devoir en taille 3. Leur rôle est bien de permuter les colonnes par rapport à la matrice unité.

La question est gentille pour commencer.
On prend une matrice de permutation. Ses coefficients sont donc positifs ou nuls.
Si on somme sur une ligne, la somme est faite de $n-1$ fois le nombre 0 et une fois le nombre 1. Elle vaut 1.
Il en est de même des colonnes.

Bilan : les matrices de permutations sont bien des matrices bistochastiques. Et leurs coefficients sont entiers.

Mais l'énoncé a bien dit « les matrices bistochastiques à coefficients entiers ».
Et pas « des matrices bistochastiques à coefficients entiers »
L'article défini nous force donc à démontrer une double inclusion.

Prenons une matrice bistochastique à coefficients entiers.
Ce sont des entiers positif, car elle est bistochastique.
Et ils sont plus petits que 1 car elle est bistochastique.
Entre 0 et 1, comme entiers, il n'y a que 0 et 1.

A ce stade, la matrice a pour coefficients des 0 et des 1.
Et comme la somme en ligne vaut 1, il y a un et un seul 1 par ligne (s'il n'y en avait pas, la somme serait nulle, s'il y en avait plus, elle ne vaudrait plus 1).
Il en va de même pour les colonnes.

L'équivalence est prouvée.

Prenons deux matrices de permutations.
Leur produit est encore une matrice à coefficients entiers par la formule $\sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$et la stabilité de $\mathbb{Z}$ par addition et multiplication.
Comme les matrices de permutations sont dans $\mathbb{B}$, leur produit y est aussi.

Ce produit est une matrice de $\mathbb{B}$ à coefficients entiers, c'est une matrice de permutation.

A raconter avec les mains, c'est plus lourd si on ne se contente pas d'un exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'article indéfini « des » nous demande juste de prouver « si M est une matrice de permutation, alors elle est bistochastique (acquis), inversible et son inverse est bistochastique ».

Le mieux est de deviner son inverse. Et de proposer vérifier.

L'élève scientifique non matheux s'est plaint « mais on ne connaît pas bien les formules (atroces) pour inverser une matrice de taille n, comment il compte qu'on puisse faire ça ? ».
Bon, mais tout est dit dès le début « scientifique mais non matheux ».

On regarde sur un exemple pour comprendre : par quelle matrice multiplier v pour tomber sur I_3 ? On place des 0 et des 1 par colonne. Pour qu'ils tombent au bon endroit sur chaque ligne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut mettre un 1 sur la colonne pour qu'il tombe sur le 1 de la ligne.
Bref, il faut remplir les colonnes comme des copies conformes des lignes.
On appelle ça transposer la matrice.

On prend donc une initiative pour A donnée : calculer $A.A^T$.
En notant a_i^kle terme général de A (des héros et des Huns) et α_i^k celui de A^T , on calcule le terme général de la matrice produit

$$c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\alpha_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.a_k^j$$

en distinguant les cas : diagonale ou pas

$$c_i^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\alpha_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.a_i^j = \sum_{j=1}^{n} (a_i^j)^2 = (n-1).0^2 + 1.1^2 = 1$$

(un 1 et des 0) et donc

$$c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\alpha_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.a_i^j = n.0 = 0$$

(il n'y a que deux 1 dans le calcul, et ils ne se rencontrent même pas). On reconnaît la matrice unité.

A retenir : pour inverser une matrice de permutation, il suffit de la transposer. Et c'est quand même mieux que appliquer des cofacteurs partout, non ?
Certains diront que si A est associée à une permutation σ sur les colonnes de la matrice unité, il suffit d'appliquer σ^{-1} comme nouvelle permutation.
Ils ont raison.

DS05 Script Python.

On va devoir parcourir la matrice et calculer des sommes en ligne, puis en colonne.
On va avoir des boucles for pour calculer chaque somme.

```
def biscotte_astique(A) : #matrix -> boolean
....boo = True
....for i in range(n) : #ligne par ligne
........s = 0
........for k in range(n) : #somme en ligne
............s += A[i][k]
........if s != 1 :
............boo = False #une ligne ratée
....for k in range(n) : #on passe aux colonnes
........s = 0
........for i in range(n) :
............s += A[i][k]
........if s != 1 :
............boo = False
....return boo
```

Dans cette version, on parcourt tout, avec optimisme (le booléen est initialisé à `True`). mais si une ligne ou une colonne nous met en échec, on le met définitivement à `False`, et seulement à la fin, on répond.

Attention, si vous mettez

```
........if s != 1 :
............boo = False #une ligne ratée
........else :
............boo = True
```

vous n'aurez lu que la dernière colonne de la matrice, en remettant à True dès qu'une ligne ou colonne est correcte.

Il y a plus rapide, en sortant dès qu'on a croisé une ligne ou une colonne ratée (et `boo` ne sert à rien)

```
def biscotte_astique(A) : #matrix -> boolean
....for i in range(n) : #ligne par ligne
........s = 0
........for k in range(n) : #somme en ligne
............s += A[i][k]
........if s != 1 :
............return False
....for k in range(n) : #on passe aux colonnes
........s = 0
........for i in range(n) :
............s += A[i][k]
........if s != 1 :
............return False
....return True #aucun False croisé
```

Mais là encore, il manque quelquechose : les coefficients sont ils positifs.
Il faut donc sortir au moindre coefficient strictement négatif :

```
def biscotte_astique(A) : #matrix -> boolean
....for i in range(n) :
........for k in range(n) :
............if A[i][k] < 0 :
................return False
....for i in range(n) : #ligne par ligne
........s = 0
........for k in range(n) : #somme en ligne
............s += A[i][k]
........if s != 1 :
............return False
....#pareil sur les colonnes
....return True #aucun False croisé
```

On pourra d'ailleurs mettre ce test `A[i][k] < 0` dans les calculs de sommes plutôt que dans sa double boucle d'entrée..

Ensuite, comme les matrices vont être remplies de flottants, il faudra remplacer les tests de pure égalité par des tests de presque égalité :
pas de `if s != 1` : parce que ça c'est toujours le cas (rappel `1/2+1/3+1/6 == 1` répond `False`).

On fera donc un test comme `if abs(s-1) > 0.001`.

DS05 Matrices bistochastiques de taille 2.

A quoi peut ressembler une matrice bistochastique de taille 2 ? Il suffit d'un coefficient pour la déterminer totalement. Pour les sommes en lignes et en colonnes : $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ et encore, a doit être entre 0 et 1.
Exemples : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.
Le déterminant d'une telle matrice vaut $a^2 - (1-a)^2$ ce qui fait $2.a - 1$. Et comme a est entre 0 et 1, ce déterminant va de -1 à 1.

On complète nos exemples

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = -1/3, \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/3$$

La valeur $1/3$ n'est atteinte qu'une fois, puisque la fonction $a \longmapsto 2.a - 1$ est injective.

DS05 Valeur propre 1 et autres valeurs propres.

Pour A donnée, on doit trouver un vecteur non nul X vérifiant $A.X = \lambda.X$.

Le vecteur U dont toutes les composantes valent 1 vérifie justement $A.U = U$. Et il est non nul.

> *Le scientifique non matheux aura tenté de montré que* 1 *est racine du polynôme* $\det(A - X.I_n)$.
> *Le matheux (et de surcroit scientifique) aura varié les points de vue. Comme toujours.*

Prenons à présent une autre valeur propre λ et un vecteur propre associé x. On a donc $A.X = \lambda.X$.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.x_1 \\ \lambda.x_2 \\ \vdots \\ \lambda.x_n \end{pmatrix}$$

L'énoncé nous suggère de regarder $\sum_{i=1}^{n} |\lambda.x_i|$.
C'est précisément la somme des valeurs absolues des coefficients du membre de droite.
C'est donc aussi la somme des valeurs absolues des coefficients du membre de gauche

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda.x_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_i^k.x_k \Big|$$

On poursuit en majorant par inégalité triangulaire dans chaque valeur absolue de somme

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda|.|x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_i^k.x_k|$$

Mais on sait que les a_i^k sont positifs (et on sort $|\lambda|$ de la première somme

$$|\lambda|.\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i^k.|x_k|$$

On permute les sommes car on aime le faire (et car les variables ne sont même pas liées)

$$|\lambda|.\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^k.|x_k|\Big)$$

On sort chaque $|x_k|$ de la somme sur i

$$|\lambda|.\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|.\sum_{i=1}^{n}a_i^k\Big)$$

Mais les sommes en colonnes valent 1 :

$$|\lambda|.\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|.1\Big)$$

Il ne reste qu'à diviser par le réel strictement positif $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (égal à $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ car les variables sont muettes) pour arriver à $|\lambda| \leqslant 1$.

A retenir : quand il y a une indication comme $\sum_{i=1}^{n}|\lambda.x_i|$, on ne s'empresse pas de la simplifier (en $|\lambda|.\sum_{i=1}^{n}|x_i|$). On cherche à comprendre quel chemin elle indique.

DS05 Diagonalisation.

On nous donne les valeurs propres, on cherche donc P vérifiant

$$\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a déjà choisi la première colonne de P puisque on nous a poussé à trouver $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Les deux autres colonnes vérifient $a+b+c=0$ et $a'+b'+c'=0$.
Mais attention, on ne prend pas deux fois le même vecteur, sinon P ne sera pas inversible.
En fait, il nous faut deux vecteurs non colinéaires dans ce plan d'équation $a+b+c=0$.

$$\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice P proposée ici a pour déterminant 3. Elle est inversible.

On ne nous demande pas P^{-1} ni M^n.
Mais de toutes façons, $M^2 = M$ et $M^n = M$ pour tout n différent de 0.

DS05 Matrice de permutation.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de permutation. Comme on nous offre D, on a juste à trouver P colonne par colonne (ou en résolvant $M.X = \lambda.X$ pour chaque λ [1])

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. c'est pareil que $(M-\lambda.I_3).X = 0_3$, mais pour ma part, je vois mieux avec $M.X = \lambda.X$ la notion de vecteur propre

D'autres matrices P sont possibles. La colonne associée à -1 ne pourra être qu'un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En revanche, les deux premières colonnes seront combinaisons linéaires (non colinéaires) de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

DS05 Matrice de taille 4.

Les coefficients de $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ sont positifs ou nuls. Les sommes en lignes et en colonnes valent 1.
Il y a deux colonnes proportionnelles, donc la matrice n'est pas inversible.
D'ailleurs si elle était inversible, seul le vecteur nul aurait une image nulle (résolution de $M.X = 0_4$). Or, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a aussi une image nulle.
Si on nous dit que les valeurs propres sont entières, on sait qu'elles sont entre -1 et 1. On n'a guère le choix.
On sait que 1 est valeur propre. Et on sait que la somme des valeurs propres est nulle (c'est la trace).

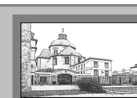
Et on sait aussi que parmi les valeurs propres il y a 0 (la matrice D doit avoir un déterminant nul).

On n'a pas tant de solutions que ça : $[1,\ -1,\ 0,\ 0]$ puisqu'il en faut quatre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour les deux premières colonnes, on n'a guère le choix (à constante multiplicative près).
Pour les deux dernières, la condition est $a + c = 0$ et $b + d = 0$. Tiens, un plan, donc deux colonnes.

DS05 Inversion des matrices bistochastiques.



On se donne A dans $\mathbb{B}$ et on la suppose inversible (on a vu qu'il y avait de tout, des inversibles et des non inversibles).
Son inverse A^{-1} existe.

Premier sens : si A^{-1} est bistochastique, alors ses coefficients sont positifs.

Et ses sommes en lignes et colonnes valent 1, mais on parle juste de condition nécessaire.

Deuxième sens : si A^{-1} est à coefficients positifs, alors c'est bien parti. Mais il nous manque « sommes en lignes et colonnes ».
On se lance dans un gros calcul ?

Surtout pas, on est en maths.
Passons par le critère en $A.U = U$ avec le vecteur U dont tous les coefficients valent 1.
Tiens, on veut quoi ? $A^{-1}.U = U$.
On part de $A.U = U$ et on multiplie à gauche par A^{-1} : $A^{-1}.A.U = A^{-1}.U$ et on a bien $U = A^{-1}.U$.

Et là on s'en veut vraiment de ne pas y avoir pensé.

Pour le critère en colonnes, on part de $A^T.U = U$ et on multiplie par $(A^{-1})^T$ qui n'est autre que $(A^T)^{-1}$ et on a encore $U = (A^{-1})^T.U$.

Faut il prouver $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$? Ou bien est-ce dans le cours ?
Ou en préliminaire ?

La matrice A^{-1} est donc dans $\mathbb{B}$.

On continue donc avec A et A^{-1} bistochastiques.

> *On sait certes que $A.A^{-1}$ l'est aussi, mais ce n'est pas ça la question.*

On se donne i et k vérifiant $a_i^k \neq 0$ (il y en a, car la matrice A ne peut pas être la matrice nulle).
On note β_p^q les coefficients de A^{-1} (positifs).
On calcule le terme de position $(i,\ q)$ (avec q différent de k) dans la matrice produit $A.A^{-1}$, en faisant tomber la colonne q sur la ligne i.
On trouve $\sum_{j=1}^{n} a_i^j.\beta_j^p$, somme de termes positifs ou nuls (les a et les β sont positifs).
Mais cette somme doit être nulle (terme de position $(i,\ q)$ dans la matrice I_n.
C'est donc que chaque terme de la somme est nul.
En particulier $a_i^k.\beta_k^p$. Or, comme a_i^kest non nul, c'est à β_k^p d'être nul.

Comme on a ceci pour tout p différent de i, ceci nous donne $n-1$ termes nuls de la forme β_k^p c'est à dire $n-1$ termes nuls sur la ligne d'indice k de la matrice A^{-1}.

> *Pour comprendre, en taille* 3 *:*
> *on note* $+$ *les coefficients positifs dans* A *et* X *le coefficient non nul, par exemple en ligne* 2 *colonne* 1.
> *On a alors* $\begin{pmatrix} + & + & + \\ X & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> *La relation* $X.a + ..b + ..c = 0$ *donne nécessairement par positivité :* $a = 0$.
> *La relation* $X.a' + ..b' + ..c' = 1$ *ne nous donne pas d'information.*
> *La relation* $X.a'' + ..b'' + ..c'' = 0$ *donne cette fois :* $a'' = 0$.
> *On a donc* $\begin{pmatrix} + & + & + \\ X & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a' & 0 \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> *On recommence avec* $\begin{pmatrix} 0 & a' & 0 \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} + & + & + \\ X & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> *Cette fois* $a'.X = 1$ *nous force à avoir à la fois* $a' = 1$ *et* $X = 1$ *car ces réels sont entre* 0 *et* 1, *mais on va y venir plus loin.*
> *La relation* $\ldots b + X.b' + \ldots b'' = 0$ *donne maintenant* $b' = 0$.
> *La relation* $\ldots c + X.c' + \ldots c'' = 0$ *donne enfin* $c' = 0$.
> *On a donc maintenant* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b'' \\ c & 0 & c'' \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} + & + & + \\ 1 & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$.

On l'a fait pour un a_i^k non nul.
Mais on peut le faire pour chaque a_i^k non nul.
Or, il y en a au moins un par colonne et par ligne (sinon somme nulle).

On en déduit pour A^{-1} que pour chaque colonne k il y a $n-1$ coefficients nuls.

Et pareil pour chaque ligne.

Bref, dans A^{-1} il y a un seul terme non nul par ligne et par colonne.

Et comme les sommes en ligne et colonne valent 1, ce terme non nul vaut 1.

On reconnaît là une matrice de permutation.

Mais si A^{-1} est une matrice de permutation, son inverse $(A^{-1})^{-1}$ l'est aussi.

On a donc cette fois le sens (A et A^{-1} bistochastiques) implique (A et A^{-1} matrices de permutation).

Une matrice bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation est forcément non inversible.
Elle nous fait perdre au moins une dimension.

DS05 Cinq personnes qui échangent leur argent.

Commençons par l'exemple :

		10				20				35				0				15	
garde		2				4				7				0				3	
donne	4		4		8		8		14		14		0		0		6		6
possède maintenant		6+2+8				4+4+14				8+7+0				14+0+6				0+3+4	

On peut faire un dessin avec des flèches si on veut.

On notera qu'aucun argent n'est perdu, la somme les avoirs reste constante.

Prenons trois des individus côte à côte autour de la table.
On les appelle $i-1$, i et $i+1$.
Leurs avoirs sont a_{i-1}, a_i et a_{i+1}.

• Mais $i-1$ coupe en cinq parts égales son avoir a_{i-1} et en donne deux à i : $\dfrac{2.a_{i-1}}{5}$.
• En même temps i coupe en cinq parts égales son avoir a_i et en garde une : $\dfrac{a_i}{5}$.
• Enfin, $i+1$ fait cinq parts égales et en donne une à i : $\dfrac{2.a_{i+1}}{5}$.

Ce sont les trois seules rentées d'argent de i sur ce tour. Son nouvel avoir est donc $b_i = \dfrac{2.a_{i-1}+ai_i+a_{i+1}}{5}$.

Ceci est vrai pour chaque indice i, avec les conventions de tour de table : $b_5 = \dfrac{2.a_4+a_5+2.a_0}{5}$ et $b_1 = \dfrac{2.a_5+a_1+2.a_2}{5}$.

Quelle matrice fait passer de $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ à $\dfrac{1}{5}.\begin{pmatrix} 2.a_5+a_1+2.a_2 \\ 2.a_1+a_2+2.a_3 \\ 2.a_2+a_3+2.a_4 \\ 2.a_2+a_4+2.a_5 \\ 2.a_4+a_5+2.a_1 \end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

On vérifie que les coefficients sont positifs, et le critère $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice bistochastique.

On connait une valeur propre et un vecteur propre associé : 1 et le vecteur formé que de 1.
On sait aussi que la matrice n'est pas inversible, sinon ce serait une matrice de permutation. 0 est donc valeur propre.

La relation $X_{n+1} = B.X_n$, mise en boucle, donne $X_n = B^n.X_0$.

Bref, une suite géométrique de raison à gauche B.

On se donne un des complexes ρ^k et on résout $J.X = \rho^k.X$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^k.x_1 \\ \rho^k.x_2 \\ \rho^k.x_3 \\ \rho^k.x_4 \\ \rho^k.x_5 \end{pmatrix}$$

Chaque équation donne $x_2 = \rho^k.x_1$, $x_3 = \rho^{2.k}.x_1$, $x_4 = \rho^{3.k}.x_1$, $x_5 = \rho^{4.k}.x_1$.
Mais il reste la dernière équation (équivalences, et pas juste implications, sinon vous n'avez toujours pas compris)

: $x_1 = \rho^k.x_5 = \rho^{5.k}.x_1$.
est ce qu'elle devient incompatible et force à prendre $x_1 = 0$, ce qui serait dommage pour un vecteur qu'on souhaite non nul.
Seulement voilà, la condition devient $x_1 = (\rho)^{5.k}.x_1$. Et justement, tous les $\rho^{5.k}$valent 1. C'est compatible. On peut choisir x_1 non nul. Et pourquoi pas $x_1 = 1$.
On a nos vecteurs propres.

Je vous l'écris en partie et malproprement

$$k=0\ :\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$k=1\ :\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\\rho\\\rho^2\\\rho^3\\\rho^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\\\rho^2\\\rho^3\\\rho^4\\\rho^5=1\end{pmatrix}$$

$$k=2\ :\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\\rho^2\\\rho^4\\\rho^6\\\rho^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho^2\\\rho^4\\\rho^6\\\rho^8\\\rho^{10}=1\end{pmatrix}$$

On a trouvé les colonnes de la matrice P : ce sont nos X_k
et les coefficients de D : ce sont nos les ρ^k

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&\rho&\rho^2&\rho^3&\rho^4\\ 1&\rho^2&\rho^4&\rho^6&\rho^8\\ 1&\rho^3&\rho^6&\rho^9&\rho^{12}\\ 1&\rho^4&\rho^8&\rho^{12}&\rho^{16} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&\rho&\rho^2&\rho^3&\rho^4\\ 1&\rho^2&\rho^4&\rho^6&\rho^8\\ 1&\rho^3&\rho^6&\rho^9&\rho^{12}\\ 1&\rho^4&\rho^8&\rho^{12}&\rho^{16}\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&\rho&\rho^2&\rho^3&\rho^4\\ 1&\rho^2&\rho^4&\rho^6&\rho^8\\ 1&\rho^3&\rho^6&\rho^9&\rho^{12}\\ 1&\rho^4&\rho^8&\rho^{12}&\rho^{16} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&\rho&0&0&0\\ 0&0&\rho^2&0&0\\ 0&0&0&\rho^3&0\\ 0&0&0&0&\rho^4 \end{pmatrix}$$

de la forme $J.P = P.D$.
La matrice P est formée de ces vecteurs propres en colonnes.
On ne calculera pas P^{-1} ça doit être trop moche.

On calcule J^2 et les suivantes

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Les Huns se déplacent à travers le royaume.
On constate $J^5 = J^0 = I_5$.

On combien assez simplement $B = \frac{2}{5}.J + \frac{1}{5}.I_5 + \frac{2}{5}.J^4 = \frac{1}{5}.J^0 + \frac{2}{5}.J^1 + \frac{2}{5}.J^4$

Si vous y tenez$\frac{2}{5}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

On a diagonalisé J sous la forme $P.D.P^{-1}$, on peut continuer avec $J^2 = P.D^2.P^{-1}$(avec la même matrice P , c'est fondamental) et ainsi de suite

$$B = \frac{2.I_n + J + 2.J^2}{5} = \frac{1}{5}.(P.I_n.P^{-1} + P.D.P^{-1} + P.D^4.P^{-1}) = P.\frac{2.I_n + D + 2.D^4}{5}.P^{-1}$$

La matrice $2.I_n + J + 2.J^4$ est diagonale. On a diagonalisé B (avec la même matrice de passage P).
On explicite d'ailleurs la matrice diagonale obtenue

$$5.D' = 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{16} \end{pmatrix}$$

On a la liste des cinq valeurs propres (en tenant compte de $\rho^5 = 1$ ou finalement de $J^4 = J^{-1}$) :

$\frac{2+1+2}{5}$	$\frac{2.\rho+1+2.\rho^4}{5}$	$\frac{2.\rho^2+1+2.\rho^3}{5}$	$\frac{2.\rho^3+1+2.\rho^2}{5}$	$\frac{2.\rho^4+1+2.\rho}{5}$
1	$\frac{1+4.\cos(2.\pi/5)}{5}$	$\frac{1+4.\cos(4.\pi/5)}{5}$	$\frac{1+4.\cos(4.\pi/5)}{5}$	$\frac{1+4.\cos(2.\pi/5)}{5}$
1	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$

On a utilisé $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right) = 2.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1$.

A ce stade, en mettant en boucle la propriété de diagonalisation

$$X_n = B^n.X_0 = P.D^n.P^{-1}.X_0$$

Les seuls n sont dans D^n avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/\sqrt{5})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/\sqrt{5})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1/\sqrt{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\sqrt{5})^n \end{pmatrix}.$

Il est temps de faire tendre n vers l'infini, avec des notations allégées pour parler des limites qui existent

$$X_\infty = B^\infty.X_0 = P.D^\infty.P^{-1}.X_0 \; avec D^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est ça le triste sort des valeurs propres plus petits que 1 en valeur absolue.

On écrit donc $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \rho^6 & \rho^8 \\ 1 & \rho^3 & \rho^6 & \rho^9 & \rho^{12} \\ 1 & \rho^4 & \rho^8 & \rho^{12} & \rho^{16} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \rho^6 & \rho^8 \\ 1 & \rho^3 & \rho^6 & \rho^9 & \rho^{12} \\ 1 & \rho^4 & \rho^8 & \rho^{12} & \rho^{16} \end{pmatrix}^{-1}.X_0.$

L'élève masochiste calcule P^{-1} et termine sur les rotules en maudissant son prof de maths.

L'élève plus fin commence par les calculs faciles $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \rho^6 & \rho^8 \\ 1 & \rho^3 & \rho^6 & \rho^9 & \rho^{12} \\ 1 & \rho^4 & \rho^8 & \rho^{12} & \rho^{16} \end{pmatrix}^{-1} .X_0$

et pose $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \rho^6 & \rho^8 \\ 1 & \rho^3 & \rho^6 & \rho^9 & \rho^{12} \\ 1 & \rho^4 & \rho^8 & \rho^{12} & \rho^{16} \end{pmatrix}^{-1} .X_0 = Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ puis constate qu'il n'a pas besoin de calculer β et les autres quand il effectuera le produit.

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

C'est quand même moins calculatoire. Et il aurai été déprimant de calculer plein de termes de P^{-1} pour les multiplier tous par 0.

Le physicien qui est en nous interprète : à la limite, tout le monde a la même somme.
La fortune s'est équitablement répartie.

Mais on ne connaît pas la valeur de α. Sauf que aucun argent ne se perd à chaque étape.
A l'infini, la somme $5.\alpha$ est donc égale à la somme des avoirs initiaux.

Et on trouve donc par exemple pour notre simulation $(10,\ 20,\ 35,\ 0,\ 15)$ *(avoir total* 80*) :* $X_\infty = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Et encore une fois : zéro calcul bourrin, zéro application de formules apprises par cœur. De la réflexion.

Remarque : la valeur propre de module 1 *engendre une situation stable.*
Les valeurs propres de module plus petit que 1 *s'effacent à l'infini.*
Si il y avait une valeur propre -1 *il y aurait un phénomène périodique de période* 2*.*
Et si j était valeur propre, que se passerait il ?

Petite simulation pour le plaisir

	étape 0	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5	étape 6	étape 7	
personnage 1	10	16	14.8	16	15.76	16	15.952	16	
personnage 2	20	22	16.8	17.2	16.16	16.24.	16.032	16.048	
personnage 3	35	15	19.8	15.8	16.76	15.96	16.152	15.992	
personnage 4	150	20	12.8	16.8	15.36	16.16	15.872	16.032	
personnage 5	15	7	15.8	14.2	15.96	15.64	15.992	15.928	etc

DS05 Moyennes.

Déjà, pour a_1, a_2 et a_3 donnés, la somme de 6 termes $\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r$ existe et est positive. On peut en prendre la racine d'ordre p+q+r . La moyenne(p,q,r) existe.

Supposons maintenant que le minimum des trois nombres est α (c'est l'un des trois) et le maximum A.
Pour tout indice i, on a donc $\alpha \leqslant a_i \leqslant A$. Et même pour tout i et toute permutation σ, $\alpha \leqslant a_{\sigma(i)} \leqslant A$.
Comme tout est positif, on peut élever à la puissance p, q ou r $\alpha^p \leqslant (a_{\sigma(i)})^p \leqslant A^p$.
On multiplie entre elles les inégalités positives : chaque $(a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r$ est entre α^{p+q+r} et A^{p+q+r}.

On somme sur toutes les permutations

$$3!.\alpha^{p+q+r} \leqslant \sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r \leqslant 3!.A^{p+q+r}$$

On divise par 3! (nombre de termes), on passe à la racine $p+q+r$ (application croissante) :

$$\alpha \leqslant \Big(\frac{1}{6}.\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r\Big)^{1/(p+q+r)} \leqslant A$$

Si on se donne λ positif, on a

$$\sum_{\sigma\in S_3} (\lambda.a_{\sigma(1)})^p.(\lambda.a_{\sigma(2)})^q.(\lambda.a_{\sigma(3)})^r = \lambda^{p+q+r}\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^p.(a_{\sigma(2)})^q.(a_{\sigma(3)})^r$$

et après division par 6 et passage à la racine, la moyenne est multipliée par λ.

Logique pour ce qu'on va appeler une moyenne.

Prenons $(p,\ q,\ r) = (1,\ 1,\ 1)$ (oui, c'est eux qui valent 1, pas les a_k).
On se donne un triplet, et on calcule

$$\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^1.(a_{\sigma(2)})^1.(a_{\sigma(3)})^1 = \sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)}.a_{\sigma(2)}.a_{\sigma(3)}) = \sum_{\sigma\in S_3} (a_1.a_2.a_3) = 6.a_1.a_2.a_3$$

le réel $(a_{\sigma(1)})^1.(a_{\sigma(2)})^1.(a_{\sigma(3)})^1$ ne dépend en effet pas de la permutation choisie. On a alors en passant à la racine

$$\mu_{(1,1,1)}(a_1, a_2, a_3) = \sqrt[3]{a_1.a_2.a_3}$$

C'est la moyenne géométrique.

Avec $(p,\ q,\ r) = (2,\ 2,\ 2)$, peu de choses changent

$$\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^2.(a_{\sigma(2)})^2.(a_{\sigma(3)})^2 = \sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)}.a_{\sigma(2)}.a_{\sigma(3)})^2 = 6.(a_1.a_2.a_3)^2$$

On divise par 6, on passe à la racine

$$\mu_{(1,1,1)}(a_1, a_2, a_3) = \sqrt[6]{(a_1.a_2.a_3)^2} = |a_1.a_2.a_3| = a_1.a_2.a_3$$

C'est encore la moyenne géométrique.

Prenons à présent $(p,\ q,\ r) = (1,\ 0,\ 0)$. On se donne un triplet, et on calcule

$$\sum_{\sigma\in S_3} (a_{\sigma(1)})^1.(a_{\sigma(2)})^0.(a_{\sigma(3)})^0 = \sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)} = 2.a_1 + 2.a_2 + 2.a_3$$

car il y a six permutations, dont deux vérifient $\sigma(1)$=1 , deux qui vérifient $\sigma(1) = 2$ et autant qui vérifient $\sigma(1) = 3$.
On divise par 6 et on passe à aucune racine

$$\mu_{(1,0,0)}(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

C'est la moyenne arithmétique.

Et avec $(p,\ q,\ r) = (8,\ 0,\ 0)$, on arrive à

$$\mu_{(2,0,0)}(a_1, a_2, a_3) = \frac{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}}{3}$$

c'est la moyenne « quadratique ».

En autorisant les exposants négatifs, on peut reconstituer la moyenne harmonique.

On va comparer ensuite les moyennes de ce type, en fonction de leurs exposants.
En particulier, on pourrait retrouver harmonique $\leqslant$ géométrique $\leqslant$ arithmétique.

DS05 Relation d'ordre.

On doit prouver « réflexive », « antisymétrique » et « transitive ».
Pour être tranquille, on se donne trois triplets (p, q, r), (p', q', r') et (p'', q'', r'') quelconques, histoire de les quantifier.

• On vérifie $\begin{array}{l} p \geqslant p \\ p+q \geqslant p+q \\ p+q+r = p+q+r \end{array}$. C'est vrai.

• On suppose à la fois $\begin{array}{l} p \geqslant p' \\ p+q \geqslant p'+q' \\ p+q+r = p'+q'+r' \end{array}$ et $\begin{array}{l} p \leqslant p' \\ p+q \leqslant p'+q' \\ p+q+r = p'+q'+r' \end{array}$. On obtient alors successivement $p = p'$, $q = q'$ et $r = r'$.
Les deux triplets sont forcément égaux.

• On suppose à la fois $\begin{array}{l} p \geqslant p' \\ p+q \geqslant p'+q' \\ p+q+r = p'+q'+r' \end{array}$ et $\begin{array}{l} p' \geqslant p'' \\ p'+q' \geqslant p''+q'' \\ p'+q'+r' = p''+q''+r'' \end{array}$.
On obtient alors successivement par transitivité usuelle $p \geqslant p'$, $p+q \geqslant p''+q''$ et $p+q+r = p'+q'+r'$.

On a bien une relation d'ordre.

On note que comme tout matheux respectable (pléonasme), je n'ai mis aucun $\Rightarrow$ dans tout ça.
J'ai écrit des hypothèses, utilisé des arguments, obtenu des conclusions.
Quand j'aurai besoin de $\Rightarrow$ je vous ferai signe.

Pour « ordre partiel », on montre qu'il existe des triplets non comparables. On va construire (p, q, r) et (p', q', r') vérifiant par exemple $p < q$ (pour que le premier ne domine pas le second) mais $p + q > p' + q'$ (pour que le second ne domine pas le premier).
On peut proposer $(5,\ 4,\ 0)$ et $(6,\ 2,\ 0)$.

On n'a pas $(5,\ 4,\ 0) \blacktriangleright (6,\ 2,\ 0)$ *puisque* $5 < 6$.
On n'a pas $(6,\ 2,\ 0) \blacktriangleright (5,\ 4,\ 0)$ *puisque* $6 + 2 < 5 + 4$.
L'exercice pourrait être alors : trouver des triplets de réels (a, b, c) *et* (a', b', c') *pour avoir* $\mu_{(5,4,0)}(a, b, c) > \mu_{(6,2,0)}(a, b, c)$ *et* $\mu_{(5,4,0)}(a', b', c') < \mu_{(6,2,0)}(a', b', c')$.

En fait, il y a même plus simple, il suffit d'avoir $p + q + r \neq p' + q' + r'$.

On notera quand même qu'on a $(1, 1, 1) \blacktriangleright (1, 0, 0)$ *donc la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique.*
Sauf qu'on n'a pas démontré le résultat de Muirhead.

DS05 Matrice bistochastique associe aux moyennes.

La matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ est à coefficients positifs. De plus

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et il doit y avoir un rapport avec nos moyennes.

On la décompose à l'aide des six matrices de permutations[2] avec un système de neuf équations pour six inconnues.
C'est voué à l'échec (trop d'équations). Mais on a quand même les relations de « bistochasticité » qui vont réduire

2. « six comme le chiffre ? », « non comme le nombre de permutations »

le nombre d'équations.

Pourquoi je dis ça ? parce que si pour la treizième fois vous ne raisonnez que par conditions nécessaires, vous avez encore perdu.
Avec $\Rightarrow$ vous dites « si il y a une solution, il faut la prendre dans ce qui suit », mais ça ne dit pas que ça marche.

Ici, on résout

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve un système de neuf équations pour nos six inconnues $\begin{array}{cccccccl} a & & & +d & & & = & 1/2 \\ & b & & & & +f & = & 0 \\ & & c & & +e & & = & 1/2 \\ & & c & & & +f & = & 1/3 \\ a & & +c & & & & = & 2/3 \\ & b & & +d & & & = & 0 \\ & b & & & +e & & = & 1/6 \\ & & c & +d & & & = & 1/3 \\ a & & & & & +f & = & 1/2 \end{array}$

Indigeste ? Pas tant que ça, car on nous demande « à coefficients positifs ». une ligne comme $b+f=0$ donne donc $b=f=0$. De même pour $b+d=0$.

Il nous reste $\begin{array}{cccccccl} a & & & +0 & & & = & 1/2 \\ & 0 & & & & +0 & = & 0 \\ & & c & & +e & & = & 1/2 \\ & & c & & & +0 & = & 1/3 \\ a & & +c & & & & = & 2/3 \\ & 0 & & +0 & & & = & 0 \\ & 0 & & & +e & & = & 1/6 \\ & & c & +0 & & & = & 1/3 \\ a & & & & & +0 & = & 1/2 \end{array}$ et c'est vite fini. On peut même posfier et vériser.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un théorème affirme : « toute matrice bistochastique est combinaison à coefficients positifs de matrices de permutations ».
On n'allait pas le démontrer ici, juste le vérifier sur un exemple.
Ce qui ne prouve rien évidemment.

A suivre.