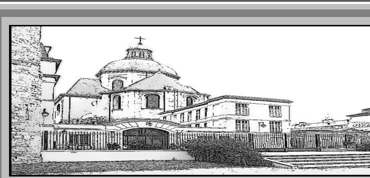
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 20 janvier
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD15

◁0▷ Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\ln(n+1)-\ln(n)\geqslant\dfrac{2}{2.n+1}$ (on pourra définir $x\longmapsto\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{2}{2.x+1}$).

On peut faire une comparaison entre une intégrale et l'aire d'un trapèze. Mais allons y avec la variation de fonction.
On définit $\varphi = x\longmapsto\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{2}{2.x+1}$ qui se dérive en $x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{(2.x+1)^2}$.
On simplifie $\varphi'(x)=\dfrac{-1}{(x+1).x.(2.x+1)^2}$ (de peu !). φ' est négative.
φest décroissante.
Pour qu'elle soit poisitive sur tout $\mathbb{R}^{+*}$ (et donc sur $\mathbb{N}^*$), on regarde sa limite en $+\infty$. En écrivant $\varphi(x)=\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)-\dfrac{2}{2.x+1}$ on trouve que φ tend vers 0 en $+\infty$.

Les n de $\mathbb{N}^*$ sont donc juste des cas particuliers.

On définit la suite a par $\forall n,\ a_n=\ln\Big(\dfrac{(n/e)^n.\sqrt{n}}{n!}\Big)$. Montrez qu'elle est croissante.

Pour la croissance de (a_n), on calcule, pour n donné, la différence

$$a_{n+1}-a_n=\ln\Big(\frac{((n+1)/e)^{n+1}.\sqrt{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{(n/e)^n.\sqrt{n}}\Big)=\ln\Big(\frac{((n+1)/e)^{n+1}.\sqrt{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{(n/e)^n.\sqrt{n}}\Big)$$

$$a_{n+1}-a_n=\ln\Big(\frac{(n+1)^n/e^{n+1}.\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1}.\frac{1}{(n/e)^n}\Big)=\ln\Big((1+\frac{1}{n})^{n+1/2}.\frac{1}{e}\Big)$$

$$a_{n+1}-a_n=\Big(n+\frac{1}{2}\Big).\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1$$

En écrivant $a_{n+1}-a_n=\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big).\varphi(n)$, on déduit que $a_{n+1}-a_n$est positif.
On libère n : $\forall n,\ a_{n+1}\geqslant a_n$. On reconnaît « la suite (a_n) est croissante ».

On définit la suite b par $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ b_n=a_n+\dfrac{1}{12.(n-1)}$. Montrez : $\forall n,\ b_n\geqslant a_n$ et montrez : $\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$.

Ces deux questions sont des évidences.
La seule chose avec laquelle il faut être rigoureux :
• la premère est une inégalité pour tout n (on rédige donc « n donné, oncalcule $b_n-a_n=\dots$ »
• la seconde est un comportement vers l'infini, et donc il n'y a plus de n.

Montrez que (b_n) est décroissante.

n donné (plus grand que 1), on calcule

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+\frac{1}{12.n}-\frac{1}{12.(n-1)}=\Big(n+\frac{1}{2}\Big).\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1+\frac{1}{12.n}-\frac{1}{12.(n-1)}$$

C'est long mais faisable.

Déduisez qu'elles convergent, vers une même limite qu'on notera λ.

Pour les crétins, j'ai mis une virgule.

Les cértiins se content de dire commeb_n-a_nconverge vers 0, les deux convergent vers la même limite.

Et les encore plus que crétins disent « ah bon, coment on passe de la limite de la différence à la différence des limites ».

Mais les plus intelligents comprendront qu'il faut déjà prouver que (a_n) et (b_n) convergent.
La question est donc vraiment une question de maths, avec un tiroir :
« converger » et ensuite « vers la même limite ».

Ceux qui ont des réflexes disent « couple de suites adjacentes » et passent donc à la suite.

Sinon, on écrit proprement ce qu'on a obtenu, histoire de ne pas utiliser une boite noire :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2$$

La suite (a_n) est croissante, majorée par le réel b_2. Elle converge.

La suite (b_n) est décroissante et minorée (par le réel a_1). Elle converge.

Et maintenant que les deux convergent vers des limites λ_a et λ_b, on exploite $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ pour obtenr $\lambda_a = \lambda_b$.

Et pour ceux qui n'auraient toujours pas compris la difficulté :
Si on pose $\alpha_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $\beta_n = n$, on constante $\alpha_n - \beta_n$ converge vers 0.
Mais les deux suites ne convergent pas vers la même limite... puisque déjà elles ne convergent pas.
Ou même $\alpha_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ et $\beta_n = (-1)^n$.

Calculez a_{10} et b_{10}.

C'est juste une question Python.
Ou de labo de physique. Bref : -0.927269096638 à 10^{--12} près.

Montrez que $2.a_n - a_{2.n}$ converger aussi vers λ.

Comme (a_n) converge vers λ, $(2.a_n)$ converge vers $2.\lambda$ et $(a_{2.n})$ converge vers λ aussi (un peu plus vite même si ceci n'a pas de sens pour l'instant).

Montrez pour tout n : $a_{2.n} - 2.a_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}.\dfrac{2}{\pi}.W_{2.n}\right)$ où W est la suite de Wallis.

Effaçons le logarithme le temps du calcul, pour n donné :

$$\frac{(e^{a_n})^2}{e^{a_{2n}}} = \left(\frac{(n/e)^n.\sqrt{n}}{n)}\right)^2.\frac{(2.n)!}{(2.n/e)^{2.n}.\sqrt{2.n}} = \frac{1}{2^{2.n}}.\frac{(2.n)!}{n!.n!}.\sqrt{\frac{n}{2}}$$

Or, la relation de récurrence $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$ (obtenue par intégration par parties), mise en boucle donne $W_{2.n} = \frac{\text{produit des impairs}}{\text{produit des pairs}}.W_0$ puis

$$W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{4^n.(n!)^2}.W_0 = \frac{(2.n)!}{4^n.(n!)^2}.\frac{\pi}{2}$$

On peut remplacer $dsp\frac{1}{2^{2.n}}.\frac{(2.n)!}{n!.n!}$ dans $\dfrac{(e^{a_n})^2}{e^{a_{2.n}}}$ pour obtenir comme demandé $e^{a_{2.n}-2.a_n} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}.\dfrac{2}{\pi}.W_{2.n}$.

On admet avoir démontré $W_p.\sqrt{\dfrac{2.p}{\pi}} \longrightarrow_{p\to+\infty} 1$ (voir exercivces de base). Déduisez $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.

Ce résultat nous donne la valeur de λ (c'est à ça que servent les intégrales de Wallis).
On trouve $\lambda = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\right)$.
On reporte dans la limite de a_n, on passe à l'exponentielle.

Et on tient enfin la preuve de la formule de Stirlong.

James Stiring (ou Jacob) est né en mai 1692 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg.
L'équivalent asymptotique de $n!$, pour lequel James/Jacob Stirling est le plus connu, apparaît à l'Exemple 2

de la Proposition 28 de Methodus Differentialis. Un des principaux objectifs de cet ouvrage était d'étudier des méthodes pour accélérer la convergence des séries. Stirling note d'ailleurs dans sa préface que Newton avait étudié ce problème. Beaucoup d'exemples de ses méthodes sont donnés, dont le problème de Leibniz de $\dfrac{\pi}{4} = 1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\ldots$. *Il applique également ses procédés d'accélération à la somme de la série* $\dfrac{\pi}{4} = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}-\ldots$ *dont la valeur exacte était encore inconnue à l'époque. Il obtient la relation* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n^2.\binom{2.n}{n}}$ *qui lui permet d'obtenir la valeur approchée* $1,644\,934\,066\,848$, *mais ne reconnaît pas* $\dfrac{\pi^2}{6}$, *ce qui sera fait par Euler peu d'années après.*

◁1▷ ♡ Un mot est une suite (indexée par $\mathbb{N}^*$) de -1 et 1, comme par exemple $(1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ldots)$.

La marche de l'ivrogne associée au mot x est la suite (d_n) définie par $\forall n,\ d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ (convention naturelles : $d_0 = 0$).

Justifiez : $\forall n,\ d_n = n\ [mod\ 2]$. Déduisez : $\forall n \in \mathbb{N},\ (d_n = 0 \Rightarrow n \in\in 2.\mathbb{N})$.

Justifiez qu'il y a $2^{2.n}$ mots de longueur $2.n$ et que parmi eux, il y en a $\binom{2.n}{n}$ qui vérifient $d_{2.n} = 0$.

◁2▷ ♡ Un mot complexe est une suite à valeurs dans $\{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$, comme par exemple $(1,\ 1,\ i,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ -1,\ -1,\ldots)$.

La marche de l'ivrogne associée au mot complexe z est la suite complexe (d_n) définie par $\forall n,\ d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$ (convention naturelles : $d_0 = 0$).

Montrez $\forall n,\ (d_n = 0 \Rightarrow n \in\in 2.\mathbb{N})$.

Justifiez qu'il y a $4^{2.n}$ mots complexes de longueur $2.n$. Montrez qu'un mot complexe z_n de longueur $2.n$ vérifie $z_{2.n} = 0$ si et seulement si existe p entre 0 et n tel que $Card(k \leqslant n \mid z_k = 1) = Card(k \leqslant n \mid z_k = -1) = p$ et $Card(k \leqslant n \mid z_k = i) = Card(k \leqslant n \mid z_k = -i) = n-p$.

Déduisez qu'il y a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2.n}{p}.\binom{2.n-p}{p}.\binom{2.n-2.p}{n-p}.\binom{n-p}{n-p}$ mots de longueur $2.n$ vérifiant $d_{2.n} = 0$.

Montrez que ce nombre vaut aussi $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(2.n)!}{p!.p!.(n-p)!.(n-p)!}$ et même $\displaystyle\binom{2.n}{n}.\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.\binom{n}{n-p}$.

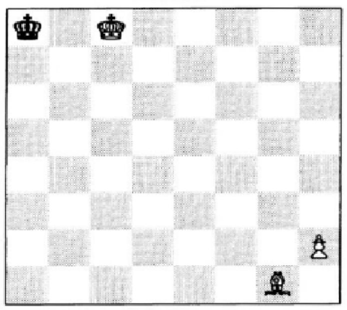
En étudiant le coefficient de X^ndans $(1+X)^n.(1+X)^n$, montrez que la proportion de mots de longueur $2.n$ vérifiant $d_{2.n} = 0$ est $\dfrac{\binom{2.n}{n}^2}{4^{2.n}}$.

Several days later, I had a memorable evening alone with Holmes, during which I learned more about retro-analysis than perhaps on any other occasion. I was becoming vastly intrigued with this subject, and I began by asking, "Holmes, do all retrograde problems involve a final checkmate position?"

"Oh, not at all," he replied. "Most of them, as it happens, do not." I then asked, "And is the question always which side is which?"

"Most definitely not," replied Holmes. "This question happens to be exceedingly rare! Here, let me set up a little exercise to illustrate the more normal type of situation:

Black-1



White-3

"I call this an 'exercise,' Watson, since it is really too simple to dignify by the word 'problem.'

"As you see, Watson, neither side is mated—nor even in check. And we are given that your side is White. The question now is this: Given that Black moved last, what was his last move, and White's last move?"

I thought for a while, then said, "Holmes, I'm sorry to be such a slow pupil, but the situation again seems impossible! Obviously Black just moved out of check from a7, but I don't see how White could possibly have moved his bishop to administer the check!"

"Not bad, Watson; not bad at all! I see you are beginning to think. But why do you have this persistent habit of forgetting that a move may involve a capture?"

Then, of course, I saw it. "Right, Holmes, right. Black's last move was with the king from a7 *capturing* a White piece on a8. This piece must have moved before that out of the diagonal from g1 to a7 to uncover check from the bishop. What piece could that be? Why obviously a knight, which had moved from b6 to a8. Thus Black's last move was from a7 to a8, capturing a White knight."

"Correct," said Holmes.

A new thought suddenly occurred to me. "Holmes," I said, "was it really necessary in this problem to be given which side was White?"

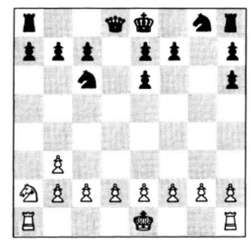
"Of course," replied Holmes. "If we hadn't been given that information, then a second solution would have been possible: A White pawn could have just promoted to bishop."

A few minutes later I asked, "Holmes, are all retrograde problems solved by first considering what was the last move?"

"Oh no," replied Holmes. "In many of these problems there is no way at all of ascertaining the last move. Nevertheless one can determine a move—or sequence of moves—which have occurred *sometime* earlier in the game, though precisely when they occurred is neither determinable nor relevant to the solution of the problem."

"Can you give me an example?" I asked. Holmes thought for a moment and then set up the following position:

Black-14



White-12

"The problem is: On what square was the White queen captured?"

I looked at the position, and reasoned thus: "Well, Holmes, I see that White is missing his queen, both bishops, and one knight. Now, two captures can be accounted for by the Black pawns on e6 and h6; the first came from d7 and made a capture on e6, and the second came from g7 and made a capture on h6. Now, neither White bishop ever

https://books.google.fr/books?id=D2GvK0sLHWUC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

◁3▷ https ://books.google.fr/books ?id=D2GvK0sLHWUC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

---

◁4▷ ♡♠ On se donne $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}$. Exprimez A^2 comme combinaison linéaire de A et I_2. Donnez les coefficients a_n et b_n vérifiant $A^n=a_n.A+b_n.I_2$ *(combinaisons de suites géométriques spectrales (3^n) et $((-2)^n)$).*

On pose alors $E_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$. Exprimez E_n comme combinaison linéaire $E_n=\alpha_n.A+\beta_n.I_2$.

Écrivez la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle entre 0 et 3 puis entre 0 et -2 à l'ordre n. Montrez que le reste intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déduisez les limites de α_n et β_n quand n tend vers l'infini.

Exprimez $\exp(A)$ *(la limite des E_n)* comme combinaison linéaire de A et I_2.

Si on a montré une fois pour toutes $A^2-Tr(A).A+\det(A).I_2=0_{2,2}$ pour toute matrice carrée de taille 2, c'est vite réglé.

Sinon, on calcule : $A^2=\begin{pmatrix}8&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}=A+6.I_2$.

On diagonalise A :

trace : 1	déterminant : -6
polynôme caractéristique	X^2-X-6
valeur propre 3	valeur propre -2
$\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-2.\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4\\1&-4\end{pmatrix}.\frac{1}{5}$$

Mais ceci ne répond pas à la formule demandée.

On peut aussi montrer l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant $A^n=a_n.A+b_n.I_2$.
On initialise (récurrence, oui), avec $A^0=0.A+1.I_2$, $A^1=1.A+0.I_2$ et $A^2=1.A-6.I_2$.
On suppose pour un n donné que an et $b_n$existence.
On calcule alors $A^{n+1}=A.A^n=A.(a_n.A+b_n.I_2)=a_n.A^2+b_n.A=a_n.(A-6.I_2)+b_nA.=(a_n+b_n).A-6.a_n.I_2$.
Ceci prouve l'existence de a_{n+1} et b_{n+1} en posant $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-6.a_n$.
Cela dit, ça ne va pas nous arranger. On va devoir étudier les suites (a_n) et (b_n).

On peut par exemple déduire $a_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}=a_{n+1}-6.a_n$.
Si on connaît par cœur son cours de Terminale (même sans le comprendre), on dit que (a_n) est une combinaison

de deux suites géométriques dont les raisons sont les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda - 6$. Comme par hasard, les racines sont 3 et -2. On a donc $a_n = \alpha.3^n + \beta.(-2)^n$.
Et par là même $b_n = -6.(\alpha.3^{n-1} + \beta.(-2)^{n-1})$.
Les conditions initiales donnent $a_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5}$ et $b_n = \dfrac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}$.
On a donc $\boxed{A^n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5}.A + \dfrac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}.I_2}$
On pouvait l'obtenir aussi en écrivant $A = B + C$ avec $B.C = C.B = 0$ et $B^2 = 3.B$ et $C^2 = (-2).C$.

On somme de 0 à n, après division par $n!$:
$E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k - (-2)^k}{5.!}.A + \frac{2.3^k + 3.(-2)^k}{5.k!}.I_2$ ou aussi $E_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} . \frac{1}{5}$
Bref, on est confronté à des suites de la forme $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

La formule de Taylor avec reste intégrale ($f = \exp$, $a = 0$, $h = x$) donne pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.x}.dt$$

On va montrer que pour -2 et 3 le reste intégrale tend vers 0.
Pour 2, on majore $e^{-2.t}$ par 1 (et on minore par 0) : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt \leqslant 1$.
Dans le même temps, $\dfrac{(-2)^n}{n!}$ tend vers 0 (croissances comparées).
Par produit, $\dfrac{x^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.x}.dt$ tend vers 0.
Par soustraction, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$ converge vers e^{-2}.
Pour 3, on encadre presque de la même façon $(1-t)^n$ par 0 et 1
$e^{3.t}$ par 1 et e^3
$\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt$ par 0 et e^3
$\dfrac{3^n}{n!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt$ par 0 et $\dfrac{3^n}{n!}.e^3$
Par croissances comparées et encadrement, le reste intégrale tend vers 0.
Par soustraction, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}$ converge vers e^3.

Si vous ne voyez plus pourquoi la forme indéterminée $\dfrac{3^n}{n!}$ converge vers 0, retenez que la factorielle l'emporte même sur les puissances.
Et regardez, pour n plus grand que 6 :

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}.\frac{3}{2}.\frac{3}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}.\frac{3}{6}.\frac{3}{7}.\frac{3}{8}\ldots\frac{3}{(n-1)}.\frac{3}{n}$$

La plupart des termes (en fait à partir de $\frac{3}{6}$) sont plus petits que $\frac{1}{2}$. On a donc

$$0 \leqslant \frac{3^n}{n!} \leqslant \frac{3}{1}.\frac{3}{2}.\frac{3}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{81}{40}.\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-5}$$

Par encadrement, $\dfrac{3^n}{n!}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

En exploitant ce qui précède :
$\boxed{\exp(A) = \dfrac{e^3 - e^{-2}}{5}.A + \dfrac{2.e^3 + 3.e^{-2}}{5}.I_2}$ et $\exp(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} . \frac{1}{5}$

◃5▹ Pour toute matrice carrée M de taille 2 sur 2, on définit $\exp(M)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{M^k}{k!}$.
Calculez les exponentielles des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$.

On va utiliser à plusieurs reprises que la série de terme général $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge et a pour somme e^a.
Il suffit en effet d'écrire la formule de Taylor avec reste intégrale (ou de Lagrange, tiens) pour l'exponentielle entre 0 et a :

$$e^{0+a}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}.a^k+\frac{a^{n+1}}{n!}.\int_0^1(1-t)^n.e^{t.a}.dt$$

On distingue, pour a positif : $0\leqslant\dfrac{a^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.e^{t.a}.dt\leqslant\dfrac{a^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.e^{.a}.dt=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}.e^a$ et on utilise les croissances comparées et le théorème d'encadrement

pour a positif : $0\leqslant\left|\dfrac{a^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.e^{t.a}.dt\right|\leqslant\dfrac{|a|^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.dt=\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$ et on utilise encore les croissances comparées et le théorème d'encadrement

---

On a alors $\exp\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&0\\0&e\end{pmatrix}$.

Puis $\exp\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&?\\0&e\end{pmatrix}$ avec ? $=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}=0+\sum_{n=0}^{\text{"}+\infty-1\text{"}}\frac{1}{n!}=e$ aussi.

et la formule $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$ vient d'une brave récurrence.

De plus $\exp\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&0\\0&1\end{pmatrix}$ le terme $k=0$ devant être traité à part.

De même $\exp\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}$ le terme $k=0$ devant être également traité à part, dans la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ il manque 1.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ ne pose pas de problème et donne $\begin{pmatrix}e&0\\0&e^3\end{pmatrix}$.

Montrez que si A est semblable à B, alors $\exp(A)$ est semblable à $\exp(B)$.
On suppose A diagonalisable, même si c'est inutile en fait montrez $\exp(-A)=\Big(\exp(A)\Big)^{-1}$
exprimez $\det(\exp(A))$ à l'aide de $\det(A)$ et $Tr(A)$.

On suppose que B s'écrit $P.A.P^{-1}$.
On sait alors sans se poser de question que B^ks'écrit $P.A^k.P^{-1}$ et on factorise :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{B^n}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{P.A^n.P^{-1}}{n!}=P.\Big(\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!}\Big).P^{-1}$$

On expédie N à l'infini : $\exp(B)=P.\exp(A).P^{-1}$ On reconnaît que les deux matrices sont semblables, via la même matrice P que pour A et B..

Type de question qu'un MPSI2 traite sans crainte en moins d'une minute (et encore, c'est parce qu'il se sert un café entre temps).

On écrit alors $A=P.D.P^{-1}$ mais aussi $-A=P.(-D).P^{-1}$.
On calcule rapidement $\exp(D)=\exp(\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e^\alpha&0\\0&e^\beta\end{pmatrix}$

et $\exp(D)=\begin{pmatrix}e^{-\alpha}&0\\0&e^{-\beta}\end{pmatrix}=(\exp(D))^{-1}$.

Il reste à écrire $A=P.\exp(D).P^{-1}$ par la question précédente,
puis $A^{-1}=(P^{-1})^{-1}.(\exp(D))^{-1}.P^{-1}=P.(\exp(D))^{-1}.P^{-1}=P.\exp(-D).P^{-1}=\exp(-A)$.

On calcule aussi $\det(\exp(A)) = \det(\exp(D))$ *(matrices semblables)*

$$\det(\exp(A)) = \det(\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}) = e^\alpha.e^\beta$$

$$\boxed{\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}}$$

Et il reste des élèves pour s'inquiéter « on a dit à l'aide de $\mathrm{Tr}(A)$ *et* $\det(A)$*. Il manque* $\det(A)$ *».*
Si ils y tiennent $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)} + 0.\det(A)$ *et c'est bon.*

Le résultat restera vrai même pour A non diagonalisable.

Un élève dit on doit bien avoir $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$. Montrez qu'il a tort.

J'ai encore un souvenir de quand j'avais quatre ans de plus que vous.
Je voyageais dans un train pour découvrir un peu la France, j'étais du côté de Lyon, et voilà que montent dans mon compartiment un groupe de sept jeunes de votre âge, dont je comprends très vite qu'ils étaient en Prépas au lycée du Parc à Lyon.
Ils se mettent à discuter entre eux d'un peu tout. Et d'un coup, l'un d'entre eux (surement un M' [1]) veut se faire mousser devant les autres [2] et indique qu'il a vu dans des exercices qu'on pouvait calculer des exponentielles de matrice (à l'époque, ce n'était pas au programme de Prépas). Et devant deux jeunes camarades plus ou moins émerveillées par son savoir il commence à expliquer la formule. Et un de ses amis renchérit « et je crois qu'on a $exp(A+B) = exp(A).exp(B)$ ».
Et là, je n'ai pas pu m'empêcher de lever le nez du bouquin de S.F ; que j'étais en train de lire et de les interrompre « si elles commutent ».
Et je me suis replongé dans ma lecture, sans même savoir si je lui avais cassé sa baraque auprès de ses camarades. En fait, si, du coin de l'œil j'ai cherché à savoir si j'avais attiré l'attention de la petite brune dans le coin... Et j'ai entendu « il me semblait bien qu'il nous écoutait en souriant depuis tout à l'heure, celui là.. »
Non mais quand même c'est vrai quoi ! On a besoin de $A.B = B.A$ pour démontrer $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$, il ne faut pas laisser les jeunes dire n'importe quoi.
Quoique, il y a juste une implication...

En tout cas, c'est tentant d'avoir $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.

Mais ça pose problème avec la multiplication matricielle non commutative.
On devrait quand même avoir aussi $\exp(A).\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B).\exp(A)$.
Et des matrices ne commutant pas forcément devraient avoir des exponentielles qui commutent...

Allons chercher dans ce qu'on a déjà fait :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\exp(A).\exp(B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		

Pour le calcul de $\exp(B)$ non conduit plus haut, c'est rapide : $B^0 = I_2$, $B^1 = B$, $B^2 = 0_{2,2}$, $B^3 = 0_{2,2}$ et ainsi de suite, $\exp(B) = I_2 + B$.

A peu près n'importe quel exemple convenait, mais on n'a guère envie de se re-taper des $\exp(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix})$.

♠ Un résultat dit $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ si A et B sont permutables (c'est à dire $A.B = B.A$). Démontrez le sans vous poser de questions sur les interversions de sommes infinies.

Ça, vous le referez en Spé. Mais autant avoir déjà vu ce qu'il se passe.
Partons de $\exp(A).\exp(B)$.
C'est $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{\substack{0\leqslant i \\ 0\leqslant j}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$.

Et regardons aussi $\exp(A+B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$.

Comme A et B sont permutables, on peut développer $(A+B)^n$par la formule du binôme : $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!.j!}.A^i.B^j$ (tout à coup, vous comprenez pourquoi il n'était pas judicieux d'utiliser la formule pourtant plus

1. ce qui est devenu la MP*
2. « autres » avec deux e et deux jolis yeux pour marquer le féminin

classique $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.A^i.B^{n-i}$).

On développe la somme de sommes, et on simplifie les factorielles : $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i+j=n} \frac{A^i.B^j}{i!.j!} \Big)$.

Mais qu'importe cette condition « $i+j$ doit valoir n » dans la mesure où on parcourt tous les n possibles.
On a finalement les mêmes termes dans les deux sommes.

Visuellement (eh oui, label Choquet, il va y avoir un truc visuel et un tableau...)

	I_2	$+A$	$+\frac{A^2}{2}$	$+\frac{A^3}{6}$	$+\frac{A^4}{24}$	$\dots$
I_2	I_2	A	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{A^4}{24}$	$\dots$
$+B$	B	$A.B$	$\frac{A^2.B}{2}$	$\frac{A^3.B}{6}$	$\frac{A^4.B}{24}$	$\dots$
$+\frac{B^2}{2}$	$\frac{B^2}{2}$	$\frac{A.B^2}{2}$	$\frac{A^2.B^2}{4}$	$\frac{A^3.B^2}{12}$	$\frac{A^4.B^2}{48}$	$\dots$
$+\frac{B^3}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	$\frac{A.B^3}{6}$	$\frac{A^2.B^3}{12}$	$\frac{A^3.B^3}{36}$	$\frac{A^4.B^3}{144}$	$\dots$
$+\frac{B^4}{24}$	$\frac{B^4}{24}$	$\frac{A.B^4}{24}$	$\frac{A^2.B^4}{48}$	$\frac{A^3.B^4}{144}$	$\frac{A^4.B^4}{576}$	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

saurez vous y retrouver (en diagonale) les termes de

I_2	I_2				
$A+B$	A	B			
$\frac{(A+B)^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{2.A.B}{2}$	$\frac{B^2}{2}$		
$\frac{(A+B)^6}{6}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{3.A^2.B}{6}$	$\frac{3.A.B^2}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	
$\frac{(A+B)^4}{24}$	$\frac{A^4}{6}$	$\frac{4.A^3.B}{24}$	$\frac{6.A^2.B^2}{24}$	$\frac{4.A.B^3}{24}$	$\frac{B^4}{24}$
et ainsi de suite					

♣²♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2.i.\pi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2.i.\pi & 0 \\ 0 & -2.i.\pi \end{pmatrix}$. Calculez $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ *(vous n'êtes pas obligé de diagonaliser A, vous pouvez calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$ en faisant très attention au terme d'indice 0 qui est à part).*
Vérifiez $e^{A+B} = e^A.e^B$. A-t-on $A.B = B.A$?

Et là, on en vient au truc qui n'est même pas dans les programmes de Spé. Le cas où A et B ne commutent pas.
D'ailleurs, dans ce train Lyon-Genève, j'avais bien interrompu leur conversation par un « si A et B commutent ».
Et pas par un « seulement si A et B commutent ».
D'ailleurs, j'ai ensuite perdu le fil du livre de S.F. (Philip K.Dick, le meilleur !) que je lisais. Je réfléchissais à deux choses : la petite brune dans le coin allait elle continuer aussi jusqu'à Genève et avait elle été éblouie par mon savoir de normalien. Et existe-t-il des cas où on a $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ sans pour autant avoir $A.B = B.A$.
La réponse je ne l'ai eue que plusieurs années plus tard [3], dans un livre de Pavel Halmös. Avec le contre-exemple donné ici, et des explications qui me permettent de faire un bon exercice de colles de seconde année (en ne donnant pas tout dès le début).

A notre niveau, on calcule (dans un tableau, mon vice serait-il communicatif ?)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$	$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$
$\alpha = 2.i.\pi$		récurrence	
$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$		$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$
$A+B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A+B)^0 = I_2$	$(A+B)^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & \frac{e^\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
		récurrence	

On ne semble pas avoir $e^A.e^B = e^{A+B}$.
Sauf qu'on a choisi ici $\alpha = 2.i.\pi$ (ce que je ne donnais pas en colle en seconde année).
Il reste donc $e^\alpha = 1$ (trigonométrie complexe).

Et je vous le rejoue :

$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	$\exp(A+B) = I_2$

3. *pas pour la jeune fille brune, elle est descendue à Bourg en Bresse, et maintenant, ce doit être une femme de cinquante cinq ans, un peu moins brune, sans doute toujours jolie*

Si ça ce n'est pas « trop fort », à en faire hurler de joie un Maxou en 2020 ou un Juan ou un Théophile en 2021, un Antoine ou un Balthazar en 2022, un Alexandre ou un Sami en 2023. Un James ou un Hugo en 2024. Un Raphaël ou une Myriam en 2025.

◁6▷ Les suites a, b et c vérifient $\left\{\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & 4.a_n & -3.b_n & +c_n \\ b_{n+1} & = & 6.a_n & -5.b_n & +c_n \\ c_{n+1} & = & -4.a_n & +2.b_n & +4.c_n \end{array}\right\}$, avec a_0, b_0 et c_0 donnés. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Trouvez M vérifiant $M.U_n = U_{n+1}$ pour tout n. Calculez $Tr(M)$, $Tr(M^2)$ et $Tr(M^3)$.
Trouvez D diagonale vérifiant $Tr(M) = Tr(D)$, $Tr(M^2) = Tr(D^2)$ et $Tr(M^3) = Tr(D^3)$.
Trouvez P vérifiant $M.P = P.D$, avec une première ligne de 1.
Vérifiez que P^{-1} est formée des lignes suivantes $(4, -2, -1)$, $(-1,\ 1,\ 0)$ et $(-2,\ 1,\ 1)$.
Calculez M^n, puis calculez u_n pour tout entier naturel n.

$M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$M^2 = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -10 & 9 & 5 \\ -20 & 10 & 14 \end{pmatrix}$	$M^3 = \begin{pmatrix} -14 & & \\ & -5 & \\ & & 46 \end{pmatrix}$
$Tr(M) = 3$	$Tr(M^2) = 17$	$Tr(M^3) = 27$

Les trois coefficients de la diagonale de D vérifient $\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & = & 3 \\ a^2 & +b^2 & +c^2 & = & 17 \\ a^3 & +b^3 & +c^3 & = & 27 \end{array}$.

Les trois réels a, b et c sont les racines de $X^3 - 3.X^2 - 4.X - P$

puisque $a.b + a.c + b.c = \dfrac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2}{2} = \dfrac{3^2-17}{2}$.

On somme ensuite $\begin{array}{ccccc} a^3 & -3.a^2 & -4.a & -P & = 0 \\ b^3 & -3.b^2 & -4.b & -P & = 0 \\ c^3 & -3.c^2 & -4.c & -P & = 0 \end{array}$ et on trouve P.

On pouvait trouver P en passant par le déterminant.

La polynôme $X^3 - 3.X^2 - 4.X + 12$ a pour racines 3, 2 et -2 : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

...ou toute permutation de cette matrice.

On cherche P vérifiant $M.P = P.D$ avec une ligne de 1 en première ligne (chaque vecteur colonne peut être modifié et remplacé par un de ses multiples, on peut donc imposer un 1 comme première composante) :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On résout et on trouve ici

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Mais on a aussi $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et des variantes suivant la permutation choisie.

C'est ainsi qu'il y a six matrices D possibles et les six matrices P qui vont avec en mélangeant les colonnes.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie en calculant le produit !

L'énoncé proposait les lignes de la matrice inverse.

L'élève mathématicien testera des produits
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

jusqu'à trouver celui qui donne I_3.
L'élève physicien ira lire tout ce qu'il trouve sur les méthodes pour inverser une matrice 3 sur 3, avec des formules qu'il appliquera, en tentant de les comprendre.
L'élève SII prendre un logiciel pour inverser les matrices.

On a $M = P.D.P^{-1}$ puis $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

On trouve donc tous calculs faits $\boxed{\begin{pmatrix} 4.2^n-(-2)^n-2.3^n & -2.2^n+(-2)^n+3^n & -2^n+3^n \\ 4.2^n-2.(-2)^n-2.3^n & -2.2^n+2.(-2)^n+3^n & -2^n+3^n \\ 4.2^n-4.3^n & -2.2^n+2.3^n & -2^n+2.3^n \end{pmatrix}}$

Le mot clef « suite géométrique de raison à gauche M donne

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2^n-(-2)^n-2.3^n & -2.2^n+(-2)^n+3^n & -2^n+3^n \\ 4.2^n-2.(-2)^n-2.3^n & -2.2^n+2.(-2)^n+3^n & -2^n+3^n \\ 4.2^n-4.3^n & -2.2^n+2.3^n & -2^n+2.3^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

◁7▷ Une matrice M (carrée de format 2 sur 2) vérifie $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Diagonalisez la et calculez M^2 et M^{2019}.

On colle les deux informations : $M.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
Ceci permet de trouver $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.
On peut alors chercher ses valeurs propres par la méthode usuelle.
Mais on peut faire mieux.
On pousse plus loin la première ligne :

$$M.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une information de la forme $M.P = P.D$.
On a diagonalise M : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Mais on a alors $D^2 = I_2$ et $D^{2019} = D$.
On a donc $M^2 = I_2$ et $M^{2019} = M$.

◁8▷ Pour tout l'exercice, le corps de base est $(\mathbb{F}_5, +, .)$ (addition et multiplication modulo 5).
$(E, +, .)$ est l'espace des matrices de taille 2 sur 2. Quel est le cardinal de E ?
Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notée A) est diagonalisable.
Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?
Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (notée B) n'est pas diagonalisable dans E (est elle inversible ?).
Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?
Trouvez une matrice M telle que le cardinal de $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit le plus grand possible.

Il n'y a que 5 nombres disponibles
Pour remplir une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ il faut (et suffit) de choisir quatre nombres a, b, c et d.
Chaque choix est indépendant deux autres. Donc $5 \times 5 \times 5 \times 5$ matrices, de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ en passant par $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et autres.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonale. Dommage que ce ne soit pas $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est déjà diagonale.
Cela dit, elles ont même trace et même déterminant.

On va donc tenter de diagonaliser $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout donc $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. La seule condition est $b = 0$.

On choisit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On résout ensuite $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. b fait ce qu'il veut. Prenons $b = 1$ (pas 0 en tout cas).

On trouve alors $3.a + 1 = 2.a$ d'où $a = -1 = 4$.

On choisit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c'est bon : $13 = 8$ et $2 = 2$).

On a donc bien $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue des produits parce que c'est rapide :

	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Mais on a trouvé $A^4 = I_2$.
Inutile de chercher plus loin : la suite (A^n) est périodique de période 4.
La famille des A^nse limite à quatre éléments : I_2, A, A^2 et A^3.
On peut dire aussi que c'est I_2,A, $4.I_2$ et $4.A$.

Et avec des exposants dans $\mathbb{Z}$, ça ne change rien ! Ayant $A^4 = I_2$, on a $A^{-1} = A^3$ déjà dans la liste.
Et on passe son temps à retrouver les mêmes.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 3 (d'inverse 2).

Elle est donc inversible d'inverse $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

soit $2.\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

puis $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

et même $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

On vérifie : $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de même de l'autre côté : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour ce qui est de la diagonaliser, on trouve sa trace et son déterminant : 0 et 3.
On cherche donc deux nombres de somme 0 et de produit 3.

On résout $X^2 + 3 = 0$ d'inconnue X en testant les cinq nombres un par un :

X	0	1	2	3	4
$X^2 + 3$	3	4	2	2	4

Impossible d'obtenir 0.
Faute de valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable.

Remarque : *Allez, c'est quand même bien pratique les corps ayant peu d'éléments.*
Pas besoin de grosse théorie pour les équations.
On teste les cinq nombres, c'est direct.

On ne peut pas calculer B^n en diagonalisant, mais on teste :

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est B^8 qui donne I_2. Et aucune puissance d'exposant moins élevé.
L'ensemble cherché (exposant dans $\mathbb{N}$ comme exposant dans $\mathbb{Z}$) a pour cardinal 4.

Pour toute matrice M, l'ensemble $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sera forcément fini, puisque inclus dans E. Mais pourra-t-il avoir un « grand » cardinal ? Ou va-t-on très vite retomber sur M ?

Imaginons déjà M diagonale : $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec a et b valent 0, 1, 2, 3 ou 4. Mais alors $M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.
Et on retombe très vite sur les mêmes valeurs. ce n'est pas moi qui le dis, c'est Fermat. Ou le calcul direct.

a	a^2	a^3	a^4	a^5
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	3	1	2
3	4	2	1	3
4	1	4	1	4

Bref, on aura $M^5 = M$ et l'ensemble n'aura pas plus de cinq éléments. Par exemple $M = 2.I_2$.

Si M est diagonalisable, la situation est la m^me : $M^n = .D^n.P^{-1}$. Il y a une période sur les puissances de M si et seulement si les puissances de D le sont.

Reste le cas « non diagonalisable », comme par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (si elle se diagonalisait, elle ne pourraît être semblable qu'à $2.I_2$ et serait donc déjà égale à $2.I_2$).
Et cette fois, la liste est plus longue :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
et on recommence				

Et je vous garantis qu'on ne peut pas faire mieux... sauf si vous me trouvez mieux.

◃9▹ La notation de la factorielle a longtemps été $\underline{n|}$, jusqu'à ce qu'en 1808, Christian Kramp invente la notation $n!$, plus pratique. Comme on est en MPSI2, il faut qu'on invente autre chose : n♪ est le produit des entiers plus petits que n, mais premiers avec n. Par exemple, 10! vaut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10, alors que 10♪ vaut 1.3.7.9. Calculez n♪ pour n de 1 à 13. La suite (n♪) est elle monotone ? Calculez p♪ pour p premier. Calculez pour tout n le *p.g.c.d.* de n et n♪. Montrez : 2018♪ $= \dfrac{2018!}{2^{1009}.1009!.1009}$ *(en sachant que* 1 009 *est premier)*. Décomposez 30♪ en produit de facteurs premiers. Résolvez n♪ $= 3^3.7.11.13.17.19$. Trouvez le premier entier n tel que n♪ soit un multiple de 1 000.
$\sharp_0$ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne n♪.

Tout commence par un tableau :

n	produit	résultat		n	produit	résultat
1	1	1		8	1.3.5.7	105
2	1	1		9	1.2.4.5.7.8	2 240
3	1.2	2		10	1.3.7.9	189
4	1.3	3		11	1.2.3.4.5.6.7.8.9.10	3 628 800
5	1.2.3.4	24		12	1.5.7.11	385
6	1.5	5		13	1.2.3...12	479 001 600
7	1.2.3.4.5.6	720		14	1.3.5.9.11.13	19 305

Ces premiers calculs donnent tout de suite des contre-exemples : la suite n'est ni croissante ni décroissante

non croissante	5 = 6♪ < 5♪ = 24
non décroissante	3 = 4♪ > 3♪ = 2

Pour p premier, p♪ contient tous les entiers de 1 à $p-1$ (n'abusons pas, p n'est pas premier avec p). On a donc

$\boxed{p♪ = (p-1)!}$

Comme n♪ est fait d'entiers tous premiers avec n, il est forcément premier avec n :

$\boxed{p.g.c.d.(n,\ n♪) = 1 \text{ pour tout } n}$

Pour 2018♪, on doit prendre les entiers de 1 à 2018 et éliminer ceux qui ont un facteur commun avec 2018. C'est à

dire ceux qui contiennent un facteur 2 ou un facteur 1009 *(et même 2018 qui a deux facteurs communs avec lui même)*.
Il ne reste que des entiers impairs, et encore, il n'y a même pas 1009.
$2018♪ = \dfrac{1.2.3.4.5\dots 2016.2017.2018}{2.4.6\dots 2016.2018}.\dfrac{1}{1009}$ le second terme étant là pour éliminer le 1009 dans ce qu'il reste : $1.3.5.7\dots 2017$.
Mais le produit $2.4.6\dots 2018$ est fait de 1009 entiers pairs. On extrait un facteur 2 de chacun : $2.4.6\dots 2018 = 2^{1009}.(1.2.3\dots 1009) = 2^{1009}.1009!$.
Proprement :

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2018\\ k\ pair}} k = \prod_{p=1}^{1009}(2.p) = \Big(\prod_{p=1}^{1009} 2\Big).\Big(\prod_{p=1}^{1009} p\Big) = 2^{1009}.1009!$$

On effectue le quotient et c'est fini.

On veut trouver $n♪ = 3^3.7.11.13.17.19$. Le produit de ces entiers jusqu'à n (en en effaçant certains) doit contenir 17 et 19. n est donc supérieur à 19.

Il n'y a pas de 23. C'est donc que 23 n'est pas entre 1 et n, ou que 23 n'était pas premier avec n. Mais si n est un multiple de 23 autre que 23, c'est donc que n vaut au moins 46 et on aura d'autres nombres premiers à prendre dans le calcul de $n♪$.

Mais si n vaut 23, alors 2, 4 et autres sont premiers avec n, et il y a des 2 dans $n♪$. Dès lors, n ne vaut pas 23.

D'ailleurs, si n est impair, alors 2 est dans le produit $1.2\dots n$ et n'est pas effacé. On a donc n *impair* $\Rightarrow$ $n♪$ *pair*.

En lisant bien d'ailleurs, comme il y n'a pas de 2 ni de 5 dans $n♪$, c'est qu'il y en a dans n.
On arrive vite à $\boxed{n = 20}$

On vérifie en barrant les multiples de 2 et les multiples de 5 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		3				7		9		11		13				17		19	

Pour que $n♪$ soit un multiple de 1000, il faut qu'on y trouve $2^3.5^3$.
On peut l'obtenir en mettant dans $n♪$ les entiers 2, 4, 5, 8, 10, 15 (et on n'en a pas assez avant).

Il faut donc que n dépasse 15 et soit premier avec 2 et 5.

$\boxed{\text{Prenons } 17♪\text{. C'est } 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16}$ On a les facteurs demandés.

Et avec n plus petit que 17, on n'aura jamais assez de 5 dans $n♪$.

On va avoir besoin de savoir si des entiers sont premiers entre eux, on écrit donc une procédure qui calcule le p.g.c.d. de deux entiers :

```
def pgcd(a, b) :
....if a%b == 0 :
........return b
....return pgcd(b, a%b)
```

Il ne reste plus qu'à créer une procédure avec une boucle impérative sur une variable qui va de 1 à n (inclus, mais ça ne sert à rien) ; pour chaque k, on calcule le p.g.c.d. et s'il est convenable, on multiplie, sinon on n'en fait rien :

```
def fucktorielle(n) :
....p = 1 #on initialise le produit
....for k in range(1, n+1) : #on parcourt
........if pgcd(n, k) == 1 : #on teste
............p *= k #le facteur k est dans le produit
....return p #on a fini la boucle
```

◁10▷ Simplifiez $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\frac{n^3-1}{n^3+1}$ en pensant à factoriser et télescoper.

Le cours dit tout de suite que n^3+1 et n^3-1 se factorisent. Pour un point : $\begin{array}{ccccc}(n^3 & -1) & = & (n-1) & .(n^2+n+1) \\ (n^3 & +1) & = & (n+1) & .(n^2-n+1)\end{array}$.
On sent qu'on va pouvoir séparer et télescoper au moins les $n+1$ et les $n-1$ (décalage de 2, mais qu'importe) :

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n+1}.\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}.\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\frac{(N-1)!}{(N+1)!/2}.\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

(en effet $\prod_{n=2}^{N}(n-1)=1.2.3\dots(N-1)$ reconstruit une factorielle, tandis que $\prod_{n=2}^{N}(n+1)$ reconstruit tout de 3 à $N+1$, c'est $(N+1)!$ au premier facteur près).

Mais peut on encore simplifier $\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$? Peut y voir un autre produit télescopique ?
Posons comme par hasard $P(n)=n^2-n+1$ et calculons $P(n+1)=(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1$. C'est trop fort :

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\prod_{n=2}^{N}\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{P(N+1)}{P(2)}=\frac{N^2+N+1}{3}$$

Finalement : $\boxed{\prod_{n=2}^{N}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{N.(N+1)}.\frac{N^2+N+1}{3}}$ qu'on pourrait prouver aussi par récurrence.

◁11▷ Calculez $\sum_{k=0}^{p}k^2$, $\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2$ et $\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2$ pour tout p.
Calculez $\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}$ suivant la parité de n (oui, $(-1)^n$en bas). Montrez : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}=2$.

La somme $\sum_{k=0}^{p}k^2$ vaut $\frac{p.(p+1).(2.p+1)}{6}$ c'est du cours.
Ensuite, pour $\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2$, on doit séparer en fonction de la parité de k :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2=\sum_{q=0}^{p}(2.q)^2-\sum_{q=0}^{p}(2.q+1)^2=\sum_{q=0}^{p}4.q^2-\sum_{q=0}^{p}(4.q^2+4.q+1)$$

Il ne reste que la somme $\sum_{q=0}^{p}(4.q+1)$ (arithmétique de raison 4) : $\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2=-(2.p+1).(p+1)$.

La somme $\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2$ a juste un terme de moins (et encore, c'est un terme négatif) :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2=\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2+(2.p+1)^2=p.(2.p+1)$$

On peut aussi regrouper dans cette somme les termes deux à deux :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2=(-1+2^2)+(-3^2+4^2)+\dots+(-(2.q-1)^2+2.q^2)+\dots+(-(2.p-1)^2+(2.p)^2)=3+7+\dots+(4.q-1)+\dots+(4.p-1)$$

Pour tout n, on peut donc calculer le quotient $\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}$ en distinguant les cas suivant la parité de n :

n pair ($n=2.p$)	n impair ($n=2.p+1$)
$\dfrac{\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^n.k^3}=\dfrac{p.(2.p+1)}{(2.p.(2.p+1))^2/4}=\dfrac{1}{p.(2.p+1)}$	$\dfrac{\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^n.k^3}=\dfrac{-(p+1).(2.p+1)}{-((2.p+1).(2.p+2))^2/4}=\dfrac{1}{(p+1).(2.p+1)}$

Mais finalement, on a toujours $\dfrac{2}{n.(n+1)}$. Vérifiez : $\dfrac{2}{2.p.(2.p+1)}=\dfrac{1}{p.(2.p+1)}$ et $\dfrac{2}{(2.p+1).(2.p+1+1)}=\dfrac{1}{(2.p+1).(p+1)}$.

La dernière série est à termes positifs. Et c'est la série de terme général $\dfrac{2}{n.(n+1)}$.

Elle télescope : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n.(n+1)}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\lim_{N\to+\infty}2-\frac{2}{N+1}=2$

◁ 12 ▷ On travaille avec les entiers de $range(7)$ et les opérations modulo 7 :
$A=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 3\\ & 5 & \end{pmatrix}$ et $Com(A)=\begin{pmatrix}3 & & 2\\ & 2 & \\ 1 & & 6\end{pmatrix}$. Retrouvez les valeurs absentes (entiers entre 0 et 6).
Vérifiez que $M-5.I_3$ n'est pas inversible (toujours modulo 7 voyons).
Trouvez un vecteur U dont la première composante vaut 1 et vérifiant $M.U=5.U$. Calculez alors $M^6.U$.

Posons $A=\begin{pmatrix}a & 1 & b\\ 2 & 1 & 3\\ c & 5 & d\end{pmatrix}$ et calculons $Com(A)=\begin{pmatrix}d-15 & 3.c-2.d & 10-c\\ 5.b-d & a.d-b.c & c-5.a\\ 3-b & 2.b-3.a & a-2\end{pmatrix}$.

Sachant qu'on a aussi $Com(A)=\begin{pmatrix}3 & & 2\\ & 2 & \\ 1 & & 6\end{pmatrix}$, on trouve $d-15=3$ soit $d=18$ et même $d=4$.
De même (ligne 1 colonne 3) $10-c=2$ donc $c=8=1$.
On poursuit $3-b=1$ donc $b=2$ et enfin $a=1$. On vérifie au centre : $a.d-b.c=1.4-1.2=2$.

On complète ensuite avec les termes absents : $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&5&4\end{pmatrix}$ et $Com(A)=\begin{pmatrix}3&2&2\\6&2&3\\1&1&6\end{pmatrix}$

On passe au déterminant

$$\det(A-5.I_3)=\begin{vmatrix}1-5 & 1 & 2\\ 2 & 1-5 & 3\\ 1 & 5 & 4-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&2\\2&3&3\\1&5&6\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix} & \\ 3&3\\5&6\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}1&2\\ & \\5&6\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}1&2\\3&3\\ & \end{vmatrix}$$

Il reste$3.3-2.(-4)+1.(-3)=2+1+4=0$. Il est bien nul.

On résout ensuite $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&5&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5.x\\5.y\end{pmatrix}$ avec trois équations pour deux inconnues.
Les deux premières donnent déjà $x+2.y=4$ et $2+x+3.y=5.x$ (et donc $-4.x+3.y=-2$ puis $3.x+3.y=5$ et enfin $x+y=4$).
On trouve $x=4$ et $y=0$. On vérifie dans la dernière équation :

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&5&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}=5.\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

Pour ce vecteur, on a $M^6.U=5^6.U$ (en mettant en boucle $M.U=5.U$). Mais $5^6=1$ (c'est Fermat qui le dit).

◁ 13 ▷ Un élève me dit : si la loi $\otimes$ est anticommutative ($\forall(a,\,b),\ a\otimes b=-b\otimes a$), alors elle ne peut pas être associaitive, à moins d'être nulle. Il a raison ?

◁ 14 ▷ On pose $a_k=\dbinom{20}{k}.\dbinom{30}{k}$ pour k de 0 à 20. Calculez $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ puis $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}-1$ et dites moi lequel des a_k est le plus grand.

On a posé $a_k = \dfrac{20!}{k!.(20-k)}.\dfrac{30!}{k!.(30-k)!}$ et calculé

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{20!}{(k+1)!.(19-k)}.\frac{30!}{(k+1)!.(29-k)!}.\frac{k!.(20-k)!}{20!}.\frac{k!.(30-k)!}{30!} = \frac{(30-k).(20-k)}{(k+1)^2}$$

Et si on nous le demande : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - 1 = \dfrac{599-52.k}{(k+1)^2}$.
Le signe de cette quantité nous renseigne sur la croissance et décroissance de a_k.
Tant que $52.k$ est plus petit que 599, la suite croît. Son maximum est donc aux alentours de $\dfrac{599}{52}$.

Voici d'ailleurs des valeurs calculées à l'ordinateur :

a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2 403 028 914 000	5 550 996 791 340	9 175 201 308 000	10 895 551 553 250	9 283 783 572 000	5 636 582 883 000	2 404 942 030 080

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Lambert.

III∼0) *On note f l'application $x \longmapsto x.e^x$ définie sur* $\mathbb{R}$. Montrez que f réalise une bijection de $[-1\ +\infty[$ sur $[-e^{-1},\ +\infty[$ dont la réciproque (de $[-e^{-1},\ +\infty[$ sur $[-1,\ +\infty[$) sera notée W en hommage à Lambert[a]. Justifiez que W est continue et même C^∞de $]-1,\ +\infty[$ dans $]-1,\ +\infty[$.

[a]. Jean-Henri Lambert ; né à Mulhouse (à l'époque « cité état » indépendante) en 1728, il écrivit en allemand, en français et en latin des textes mathématiques et philosophies, il était expert en cartographie et en astronomie, ce fut lui qui en premier prouva l'irrationalité de π : il n'y a aucun W dans cette présentation, donc la lettre W s'impose

f a pour dérivée $x \longmapsto (x+1).e^x$.
Elle est strictement croissante sur $[-1,\ +\infty[$ et continue.
Le cours ,nous assure qu'elle réalise un homéomorphisme de l'intervalle $[-1,\ +\infty[$ sur l'intervalle image. celui ci est $[-e^{-1},\ +\infty[$ *(limites aux bornes et T.V.I.).*
Mieux encore, comme f' ne s'annule jamais sur $]-1,\ +\infty[$, elle réalise un C^1 difféomorphisme entre cet intervalle et son intervalle image.
En mettant en boucle $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ on obtient que f^{-1} est aussi C^∞*(résultat technique du cours, par mise en boucle).*
On a donc un C^∞difféomorphisme si on se place entre les deux intervalles ouverts.

$W(a)$ est la solution plus grande que -1 (si il y en a) de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue réelle x.

Pour $t.e^t = 0$ d'inconnue t, on n'a qu'une solution, et c'est 0. On a bien $W(0) = 0$.

Pour la dérivation, on a $W'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ sachant $f(a) = b$. On a donc $W'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$ =1 .

III∼1) Calculez $W(0)$ et $W'(0)$. Justifiez $W(x) \sim_{x\to 0} x$. Montrez : $W''(0) = -2$.

Le développement limité de W en 0 (elle y est C^∞) donne $W(0+x) = W(0) + h.W'(0) + o(h)$.
Avec les valeurs $W(h) = h + o(h)$ et donc bien $W(h) \sim_{h\to 0} h$.

Les deux graphes (f et W) ont pour tangente à l'origine la première bissectrice.

On repart de $W(f(x)) = x$ pour tout x de $]-1,\ +\infty[$.
On dérive, et pas qu'une fois, puisqu'on sait que toute est C^∞ :
$W'(f(x)).f'(x) = 1$ et $W''(f(x)).(f'(x))^2 + W'(f(x)).f''(x) = 0 = x$ pour tout x.
En particulier en 0 : $W''(0).(1)^2 + W'(0).2 = 0$.
On isole : $W''(0)$ vaut -2 *(alors que $f''(0)$ valait 2).*

L'une est convexe au voisinage de 0 (c'est f) et l'autre est concave (c'est W).

III∼2) Montrez $W(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.

Par composition, on peut écrire $W(x).e^{W(x)} = x$ pour x plus grand que $-e^{-1}$ (c'est $f(W(x)) = x$).
On passe au logarithme :

$$\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$$

Mais comme $W(x)$ tend vers l'infini, on a $\ln(W(x)) = o(W(x))$ (c'est $\ln(t) = o(t)$).
Il reste : $W(x) + o(W(x)) = \ln(x)$ quand x tend vers l'infini.
On reconnaît $W(x) \sim \ln(x)$.

III~3) Calculez $W(e)$ et justifiez $\int_0^e W(t).dt = e - 1$.

Pour calculer $W(e)$, on doit résoudre l'équation $x.e^x = e$ d'inconnue réelle x plus grande que -1.
On devine une solution *(évidente ?)* : $x = 1$. C'est LA solution : $W(e) = 1$.

Le graphe de W est symétrique du graphe de f.
Prenons le rectangle $x \in [0,\ 1]$ et $y \in [0,\ e]$. Son aire est de e.
On le découpe en graphe de $x \longmapsto f(x)$ pour x de 0 à 1
et graphe de $y \longmapsto W(y)$ pour y de 0 à e.
L'association des deux donne le rectangle :

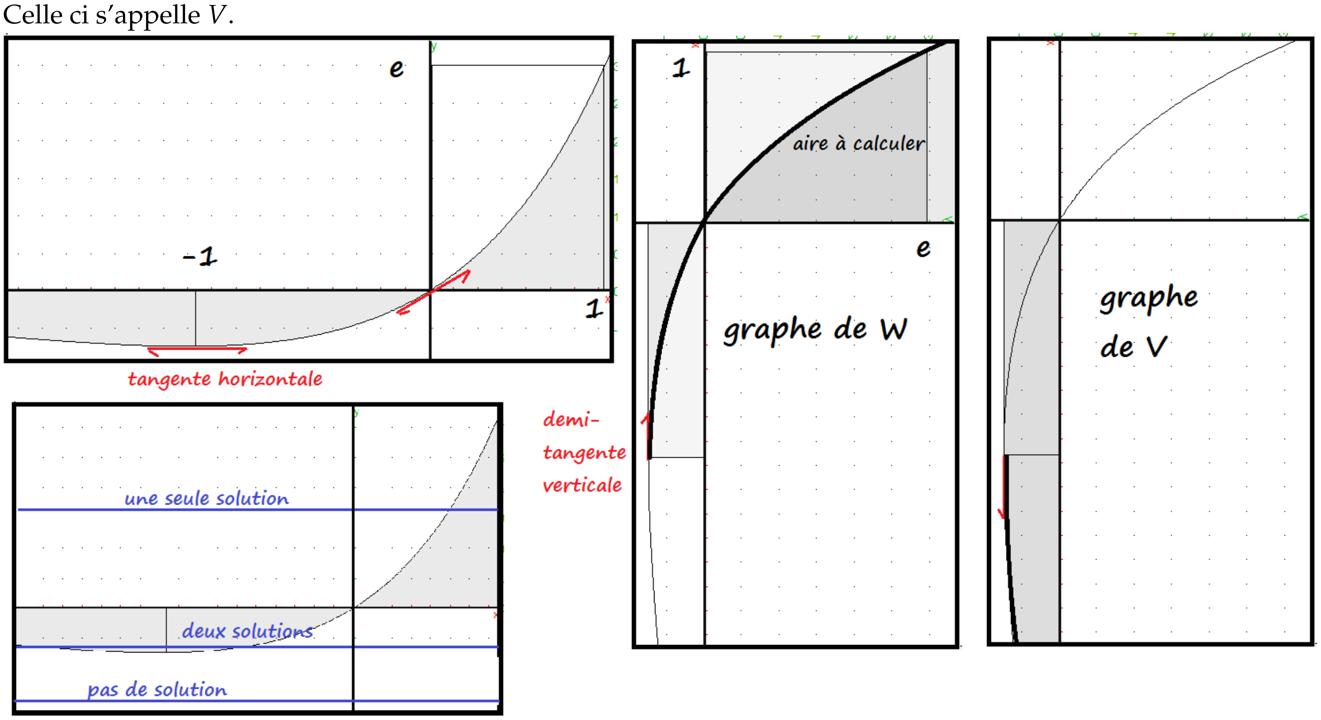
$$\int_{x=0}^{1} f(x).dx + \int_{y=0}^{e} W(y).dy = 1.e$$

On calcule $\int_{x=0}^{1} x.e^x.dx$ par parties : $[(x-1).e^x]_{x=0}^{1} = 1$.
Par soustraction $\int_{y=0}^{e} W(y).dy = e - 1$.

On pouvait aussi changer de variable : $\int_{y=0}^{y=e} W(y).dy = \int_{x=0}^{1} W(f(x)).f'(x).dx$ *en posant* $y = f(x)$.
On a donc $\int_0^1 x.(x+1)..e^x.dx = [(x^2 - x + 1).e^x]_{x=0}^{1} = e - 1$.

III~4) Montrez que f réalise un homéomorphisme de $]-\infty,\ -1]$ sur $[-e^{-1},\ 0[$ dont la réciproque sera notée V.

On peut prendre aussi l'autre branche de f : de $]-\infty,\ -1]$ vers son intervalle image.
f est strictement croissante continue, dérivable. On lui trouve une réciproque.
Celle ci s'appelle V.



Rapport du jury :
En Q1 et Q8 entre continuité, stricte monotonie (justifiée) et limite en l'infini il y a souvent au moins un argument manquant.
Le résultat concernant la dérivabilité de la réciproque n'est pas connu.

III∼5) Donnez en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $x.e^x = m$ d'inconnue réelle x (nombre noté n_x). Calculez $\int_{-3}^{3} n_x.dx$.

L'équation $f(x) = m$ d'inconnue x peut avoir deux solutions si m est entre $-e^{-1}$ et 0.

m	$m < -e^{-1}$	$m = -e^{-1}$	$-e^{-1} < m < 0$	$0 \leqslant m$
		$W(-e^{-1}) = V(-e^{-1}) = -1$	$V(m) < -1 < W(m)$	$W(m)$
nombre de solutions	0	1	2	1

La fonction $m \longmapsto n(m)$ est donc en escalier.
Son intégrale de -3 à 3 est une somme d'aires de rectangles.

	de -3 à $-e^{-1}$	en $-e^{-1}$	de $-e^{-1}$ à 0	de 0 à 3
valeur	$n(x) = 0$	$n(x) = 1$	$n(x) = 2$	$n(x) = 1$
intégrale	0	rien	$2.e^{-1}$	3

La valeur 1 en un point isolé ne compte pas. la non continuité en 0 ne pose pas de problème.
l'intégrale vaut donc $3 + 2.e^{-1}$.

III∼6) En utilisant V et W, donnez suivant m les solutions de $x.e^x \leqslant m$ d'inconnue réelle x, et illustrez graphiquement les différents cas.

Pour l'inéquation, on a des intervalles :

m	$m < -e^{-1}$	$m = -e^{-1}$	$-e^{-1} < m < 0$	$0 \leqslant m$
solutions	$\emptyset$	$\{1\}$	$[V(m),\ W(m)]$	$]-\infty,\ W(m)]$

Rappel : ne pas écrire $\{\emptyset\}$, puisque $\emptyset$ est déjà un ensemble...

III∼7) Pour a et b réels non nuls, donnez le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x : $e^{a.x} + b.x = 0$. Exprimez ces solutions à l'aide de W et V.

Comme on suppose b non nul, $e^{a.x} + b.x = 0$ est équivalent à $b.x.e^{-a.x} = -1$.
Comme on suppose a non nul, $e^{a.x} + b.x = 0$ est équivalent à $(-a.x).e^{(-a.x)} = \dfrac{a}{b}$.

a/b	$a/b < -e^{-1}$	$a/b = -e^{-1}$	$-e^{-1} < a/b < 0$	$0 \leqslant a/b$
solutions pour $-a.x$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{V(a/b),\ W(a/b)\}$	$\{W(a/b)\}$
solution pour x	$\emptyset$	$\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$	$\left\{-\dfrac{V(a/b)}{a},\ -\dfrac{W(a/b)}{a}\right\}$	$\left\{-\dfrac{V(a/b)}{a}\right\}$

Rapport du jury :
En Q11 les paramètres a et b sont non nuls, inutile de discuter ces cas particuliers ; le sujet demande explicitement d'utiliser les fonctions V et W.

Une formule d'Abel.

IV∼0) *n est un entier naturel donné et a un complexe donné. On pose $A_0 = 1$ et $A_k = \dfrac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$ pour tout k de 1 à n.* Montrez que $(A_0,\ A_1, \dots A_n)$ est une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

Chaque polynôme $A_k$est exactement de degré k. Il appartient donc à $(\mathbb{C}_n[C], +, .)$.
Comme la famille est échelonnée en degré, elle est libre.
Comme elle a le bon cardinal, elle forme une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

On peut exprimer la famille $(A_0,\ A_1, \dots A_n)$ sur la base canonique.
La matrice est triangulaire supérieure, donc inversible. C'est fini.

IV∼1) Démontrez pour k entre 1 et n : $A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$.

On se donne k entre 1 et n. On dérive le produit A_k :

$$A_k'(X) = \frac{(X-k.a)^{k-1} + (k-1).X.(X-k.a)^{k-2}}{k!}$$

Regroupons : $A_k'(X) = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(X-a.k+(k-1).X)}{k!} = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(k.X-a.k)}{k!}$.

Simplifions : $A_k'(X) = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(X-a)}{(k-1)!}$ *(k est non nul, tout va bien)*.

Comparons : $A_{k-1}(X-a) = \dfrac{(X-a).\Big((X-a)-(k-1).a\Big)^{k-2}}{(k-1)!} = \dfrac{(X-a).\Big(X-k.a\Big)^{k-2}}{(k-1)!}$. Il y a bien coïncidence.

Rapport du jury :
En Q22 la formule $A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$ a souvent été mal comprise, le membre de droite étant vu comme un produit au lieu d'une composition.
Un argument de degré rendait cette interprétation impossible.

J'allais le dire !

IV∼2) Déduisez pour j et k entre 0 et n la valeur de $A_k^{(j)}(j.a)$ (séparer suivant la position de j par rapport à k).

Redérivons : $A_k''(X) = A_{k-1}'(X-a) = A_{k-2}(X-a-a)$.
En tout cas, pour k au moins égal à 2.

On recommence et on effectue une récurrence sur l'indice j de dérivation.
Tant que j est plus petit que k, on a $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X-j.a)$.

Il n'est pas obligatoire de faire vraiment la récurrence.
Mais il est impossible de ses contenter du vocable « par récurrence », car on ne sait pas si elle porte sur j ou sur k (voire sur n fixé par l'énoncé et bornant à son tour j et k.

Parvenu à $j = k$ (légitime), on a $A_k^{(k)}(X) = 1_0(X-k.a) = 1$.

Au dejà, il ne reste plus rien, puisqu'on dérive un polynôme constant.

On va pouvoir ensuite estimer en $j.a$. Comme par hasard : $A_{k-j}(X)$ contient un facteur X.
$A_{k-j}(j.a-j.a)$ est donc nul.

	$j<k$	$j=k$	$j>k$
$A_k^{(j)}(X)$	$A_{k-j}(X-j.a)$	$A_0(X-k.a)=1$	0 (trop dérivé)
$A_k^{(j)}(j.a)$	0	1	0

IV∼3) *Soit P un polynôme d'écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k.A_k$ sur la base déjà citée.* Montrez $P^{(j)}(j.a) = a_j$ pour tout j de 0 à n.

Tout polynôme P se décompose d'une façon unique sur la base, c'est le mot base qui le dit *(mais il ne se fatigue pas à développer explicitement !)*.

On écrit donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k(X)$. On se fixe un entier j entre 0 et n.

On dérive j fois (par linéarité) : $P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k^{(j)}(X)$.

On calcule en $j.a$: $P^{(j)}(j.a) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k^{(j)}(j.a)$.

Chaque $A_k^{(j)}(j.a)$ est nul, sauf quand justement k et j sont égaux $P^{(j)}(j.a) = a_j.A_j^{(j)}(j.a) + \sum_{k\neq j} a_k.A_k^{(j)}(j.a)$.

Il reste bien $P^{(j)}(j.a) = a_k$.

A lire dans le sens : $a_k = P^{(j)}(j.a)$ qui donne les valeurs des coefficients de P sur la base.
$P(X) = \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(j.a).\dfrac{X.(X-j.a)^{j-1}}{j!} = P(0) + \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\dfrac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$ *en isolant un terme et en changeant le nom de l'indice.*

IV∼4) Déduisez : $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$ pour tout triplet (x, y, n) de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$.

On se donne x, y et a (n est déjà donné).

On se dit qu'on doit pouvoir relier $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$ à ce qu'on vient de faire.

y fixé, on pose $P(X) = (X+y)^n$, et on se dit que le premier membre sera $(X+y)^n$.
Le début du second sera $P(0) = y^n$.

La somme du second membre se calcule : $\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\dfrac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$.

On sait dériver X^n k fois, on trouve $n.(n-1)\ldots(n-k+1).X^{n-k}$ *(récurrence inutile, c'est du cours)*.

Proprement même : $(X^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}.X^{n-k}$.

On translate : $P^{(k)}(X) = \dfrac{n!}{(n-k)!}.(X+y)^{n-k}$.

On calcule en $k.a$: $P^{(k)}(k.a) = \dfrac{n!}{(n-k)!}.(k.a+y)^{n-k}$.

On reporte dans la somme

$$\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\frac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}.(y+k.a)^{n-k}.\frac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$$

Si on pense à regrouper les factorielles en un binomial, il reste bien $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(y+k.a)^{n-k}.X.(X-k.a)^{k-1}$.

Il ne reste plus qu'à passer de l'égalité entre polynômes à l'égalité entre fonctions : $\forall x$.

Le terme y^n peut il être ré-inséré à la somme en y voyant $\binom{n}{k}.(y+k.a)^{n-k}.x.(x-k.a)^{k-1}$ pour k égal à 0 ?

IV∼5) Déduisez $n.y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.

On va passer de $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$ à $n.y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.

Il n'y a plus de x dans le seconde, c'est que x a pris une valeur. Peut être 0, non ?
Et il y a des exposants plus petits ? N'aurait on pas dérivé ?

On part de $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.

On dérive par rapport à x :

$$n.(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.\Big((x-k.a)^{k-1} + x.(x-k.a)^{k-2}\Big).(y+k.a)^{n-k}$$

Et quand x est nul, c'est parfait.

Rapport du jury :
Le jury a été agréablement surpris par la gestion de certains calculs, par le nombre de candidats ayant su obtenir l'identité d'Abel et son corolaire.

Pour ma part, j'espère ne pas croiser de copies où à chaque question vous reprenez tout à zéro, sans profiter de ce qui précède.
De même, je banirai ceux qui tenteront de mener des récurrences brut de décoffrage sans profiter des idées d'Abel...

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Dévelolopement limité.

V∼0) Justifiez : $W(t) = t.(1+W(t)).W'(t)$ pour tout t.

On veut prouver $W(t) = t.(1+W(t)).W'(t)$ alors qu'on ne connaît ni W ni W'.

Partons quand même de $W(t).e^{W(t)} = t$ qui caractérise $W(t)$.
Dérivons : $W'(t).e^{W(t)} + W(t).W'(t).e^{W(t)} = 1.$[4]
Ca prend forme. Factorisons : $W'(t).(1+W(t)).e^{W(t)} = 1$.
Mais que faire de $e^{W(t)}$? Reprenons $Wt(t).e^{W(t)} = t$ qui va servir à nouveau !
On multiplie $W'(t)(1+W(t)).e^{W(t)} = 1$ par t et on remplace : $W'(t).t.(1+W(t)).e^{W(t)} = t = W(t).e^{W(t)}$.
On simplifie par $e^{W(t)}$ jamais nul. Et on a l'équation différentielle vérifiée par W : $t.y'_t.(1+y_t) = y_t$.

> *En Terminale : on résout des équations différentielles (simples).*
> *En physique : on résout les mêmes, et on tombe sur d'autres qu'on résout de manière approchée car on n'a pas de solutions explicite.*
> *En S.I.I. : on a des équations différentielles, on fait des trucs magiques dessus, et les voilà résolues.*
> *En maths : on part d'une fonction qu'on ne connaît pas et on crée une équation qu'on ne sait pas résoudre.*
> *En info : c'est quoi une équation différentielle ?*

V∼1) Déduisez pour tout n : $W^{(n)}(0) = (-n)^{n-1}$.

Profitons de notre équation différentielle en 0, même si elles laide.
Et dérivons la n fois. C'est classique comme idée.
On écrit à l'étage des fonctions : $Id.(1+W).W' = W$.
On la dérive n fois : $(Id.(1+W).W')^{(n)} = W^{(n)}$.
Le premier membre est la dérivée d'un produit.
On va utiliser la formule de Leibniz. Mais avec trois fonctions :

Id	$(1+W)$	W'

On recopie la formule du multinôme : $(u.v.w)^{(n)} = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!.j!.k!}.u^{(i)}.v^{(j)}.w^{(k)}$.
Mais u est juste $t \longmapsto t$. Ses dérivées vont vite s'en aller :
dans notre formule il ne restera que $i = 0$ et $i = 1$.

Mieux encore, comme on va calculer en 0, il ne restera que $Id^{(1)}(0) = 1$.
Donc, on ne va conserver que le terme $i = 1$.

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{1+j+k=n} \frac{n!}{1!.j!.k!}.Id'(0).(1+W)^{(j)}(0).(W')^{(k)}(0)$$

A présent j et k sont juste liées par la relation $j + k = n - 1$. On peut en faire varier une et suivre l'autre :

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{.j!.(n-1-j)!}(1+W)^{(j)}(0).(W')^{(n-1-j)}(0)$$

On profite de la réindexation : $(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).(1+W)^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$.

On isole un terme (car dériver 1 c'est un peu nul) :

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \binom{n}{0}.(n-0).(1+W)(0).W^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).W^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$$

(vous avez bien joué au jeu des sept différences ?)

En reportant dans l'équation différentielle :

$$W^{(n)}(0) = n.2.W^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).W^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$$

On n'est pas peu fier de cette formule, mais en quoi permet elle de calculer chaque $W^{(n)}(0)$?

En tout cas, elle permet de les calculer de proche en proche.

4. différence entre le cours de maths et le cours de physique : on dit dans les deux cas par rapport à qui on dérive, dans un cas en prcéisant qui était la variable dans la fonction, dans l'autre en écrivant $\frac{d}{dt}$; mais surtout, en maths, avant de dériver, on dit « car on a prouvé par théorème du difféomorphisme que W est dérivable »

Et on nous donne une autre suite : $((-n)^{n-1})$.

Si on montre qu'elle démarre pareil (c'est le cas) et qu'elle vérifie la même relation de récurrence, on aura gagné. Et là, il me semble que justement, c'est par la relation d'Abel qu'on démontre qu'en remplaçant $W^{(k)}(0)$ par $(-k)^{k-1}$ ça marche.

Le sujet de Centrale attaquait cette question dans une démarche plus seconde année.
Il définissait $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.x^n$, sous le nom d'une fonction S (existence à prouver au moins sur un intervalle par théorie des séries entières).
Il demandait de la dériver, et de montrer : $x.(1+S(x)).S'(x) = S(x)$ en développant les sommes de sommes et en simplifiant par la formule d'Abel.
Ensuite, il demandait de montrer que W vérifiait la même équation différentielle (ça, je vous l'ai demandé).
Il ne restait qu'à utiliser le bon théorème de seconde année pour garantir l'unicité de la solution de l'équation différentielle.
On avait donc finalement $W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.x^k$ (somme infinie), ce qui est mieux que $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.x^k + o(x^n)$.
Patience, vous serez en Spé bien plus tôt que vous ne le pensez..

. Approximation de W. .

VI∼0) *Pour tout réel positif x, on définit $\phi_x = t \longmapsto x.e^{-x.e^{-t}}$ (plus lisible : $x.\exp(-x.\exp(-t))$).* Montrez que $W(x)$ est point fixe de ϕ_x.

Attention aux variables. x est fixé, et on définit une fonction de variable t.
On doit montrer $\phi_x(W(x)) = W(x)$.
On commence par le côté compliqué : $\phi_x(W(x)) = x.e^{-x.e^{-W(w)}}$ et remplaçons $x.e^{-W(x)}$ par $W(x)$ puisque $W(w).e^{W(x)} = x$.
On a donc $\phi_x(W(x)) = x.e^{-W(x)}$.
Remplaçons à nouveau : $\phi_i(W(x)) = W(x)$.

Une fois de plus : savoir utiliser un objet (ici $W(x)$) non pour ce qu'il vaut (on ne le sait pas) mais pour ce qu'il vérifie : $f(W(x)) = x$). C'est la preuve de la présence dans votre crâne d'un cerveau avec des vrais neurones dedans. savoir raisonner par rapport à savoir calculer...

VI∼1) Montrez : $0 \leqslant \phi'_x(t) \leqslant \frac{x}{e}$ pour tout réel t (retrouvez $f(\dots)$ dans ϕ'_x).

ϕ_x est une fonction où la variable est dans une exponentielle d'exponentielle.
On dérive $\phi_x = t \longmapsto x.e^{-x.e^{-t}}$ donc $\phi'_x = t \longmapsto x^2.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}$.
Déjà, $\phi'_x(t)$ est positif ou nul.

Mais on retrouve $f(-x.e^t)$ là dedans ! $\phi'_x(t) = -x.(-x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}) = -x.f(-x.e^{-t})$.
Or, x est positif et e^{-t}est négatif. le produit est négatif.
Que peut on dire de f sur $\mathbb{R}^-$? Elle est bornée par 0 et $f(-1)$.
On a donc $-e^{-1} \leqslant (-x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}) \leqslant 0$. On redresse le signe $0 \leqslant x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}} \leqslant e^{-1}$.
On multiplie par x positif : $0 \leqslant \phi'_x(t) \leqslant x.e^{-1}$.

Le sujet proposait de dériver deux fois.
J'ai préféré vous donner l'indice « retrouvez f dans ϕ'_x ».

VI∼2) *On pose $w_0(x) = 1$ et $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$ pour tout n.* Montrez pour tout x de $[0,\ e]$ et tout n de $\mathbb{N}$: $|w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n.|1 - W(x)|$. Déduisez que la suite $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

On contrôle la dérivée de ϕ_x ? On contrôle donc les accroissements de ϕ_x.
Pour tout couple $(t,\ u)$: $|\phi_x(t) - \phi_x(u)| \leqslant \frac{x}{e}.|t-u|$.

En Terminale : si on connaît la dérivée, on connaît les variations de la fonction.
En Sup : si on connaît la dérivée, on connaît les accroissements de la fonction (et pas juste leur signe)...

...grâce au théorème des accroissments finis.

Vous voyez venir le théorème du point fixe ?
On applique la formule à $t = w_n(x)$ et $u = W(x)$ (point fixe).
On a donc $|\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leqslant \dfrac{x}{e.}.|w_n(x) - W(x)|$ c'est à dire $|w_{n+1}(x) - W(x)| \leqslant \dfrac{x}{e.}.|w_n(x) - W(x)|$.

En mettant en boucle cette propriété (récurrence avec des inégalités entre réels positifs) :

$$|w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e.}\right)^n.|w_0(x) - W(x)|$$

C'est l'inégalité demandée, sachant $w_0(x) = 1$.

Si on a pris x plus petit que e, le rapport x/e est entre 0 et 1. La suite $\left(\left(\dfrac{x}{e}\right)^n\right)$ converge vers 0, et par encadrement, $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

Le sujet de concours parlait ensuite de convergence uniforme sur le segmenet $[0,\ a]$, c'est une définition et des théorèmes de Spé. En gros, il faut quae dans la quantification de la convergence de $w_n(x)$ vers $W(x)$, le rang N_ε ne dépende pas de x pris dans $[0,\ a]$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Application aux probabilités.

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité$1-p$ (dans $]0,\ 1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère α dans $]0,\ 1[$ et on veut réaliser la condition $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$. Montrez : $P(X = k) = \dbinom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

On réalise n expriences indépendantes, avec succès ou échec (probabilités p et $1-p$).
C'est ce que l'on appelle « modèle de Bernoulli ». Avec un arbre, on comprend tout.
Sinon, pour avoir k erreurs parmi r expériences, il faut déjà choisir ces k erreurs : k parmi r
que les k cases choisies soient des échecs : $(1-p)$ pour chacune, et donc $(1-p)^k$ pour les k cases « indépendantes »
que les $r-k$ autres cases soient des succès : p pour chacune, donc p^{r-k} pour leur « produit ».
Finalement, on a bien ce $\dbinom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

Vérifiez $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} P(X = k) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} k.P(X = k) = r.(1-p)$ *(espérance)*

La somme des probabilités vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} P(X = k)$ car il n'y a pas d'autre valeur possible que ce range(k+1).
La formule du binôme valide : cette somme vaut $((1-p)+p)^n$ ce qui fait 1.

L'espérance est la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} k.P(X = k)$.

Même sans avoir compris on peut appliquer la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} k.\binom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

On peut sommer à partir de 1 et remplacer : $k.\dbinom{r}{k} = k.\dfrac{r!}{k!.(r-k)!} = \dfrac{r.(r-1)!}{(k-1)!}.(r-k)! = r.\dbinom{r-1}{k-1}$.

On remplace : $E(X) = r.\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \binom{r-1}{k-1}.(1-p)^k.p^{r-k} = r.\sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j}.(1-p)^{j+1}.p^{r-1-j}$.

On sort encore $(1-p)$, et la somme $\sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j}.(1-p)^j.p^{r-1-j}$ vaut $((1-p)+p)^{r-1}$ce qui fait 1.

Sinon, sans effort. Comme X est une somme de r expériences du même type, l'espérance de la somme est la somme de n espérances égales.
Or, chaque transmission a pour espérance $1-p$ justement.

puis $\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k) - \Big(\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k)\Big)^2 = r.p.(1-p)$ *(variance).*

Pour la variance, on sort un résultat du cours du même type : la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances.
Sinon, c'est encore du calcul sur les coefficients binomiaux.
Je vous invite à penser à cette astuce : on définit $(p,\ q) \longmapsto \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}.q^k.p^{r-k}$.
C'est l(application $(p,\ q) \longmapsto (q+p)^r$, facile à dériver par rapport à q ou par rapport à p.
On dérive par rapport à q et on applique ensuite en $q = 1-p$.

L'espérance et la variance du modèle de Bernoulli (r lancers de pile ou face) sont des résultats du cours.
Aux concours vous pouviez les sortir directement sanspreuve de votre cerveau.
Mais ils n'étaient pas offerts...

Justifiez : $\sum_{k=2}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=2}^{r} \frac{k}{2}.P(X=k) \leqslant \frac{r.(1-p)}{2}$.

La formule $\sum_{k=2}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=2}^{r} \frac{k}{2}.P(X=k)$ est un cadeau.

Il suffit de majorer terme à terme : $\frac{k}{2}$ est plus grand que 1 quand k dépasse justement 2, et $P(X=k)$ est positif.

La majoration $\sum_{k=2}^{r} \frac{k}{2}.P(X=k) \leqslant \frac{r.(1-p)}{2}$ vient de

• l'égalité $\sum_{k=2}^{r} \frac{k}{2}.P(X=k) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} k.P(X=k)$

• la majoration $\sum_{k=2}^{r} k.P(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{r} k.P(X=k)$ (on ajoute un terme)

• le calcul explicite $\sum_{k=0}^{r} k.P(X=k) = r.(1-p)$ déjà effectué.

Cette formule $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$ pour une variable aléatoire postivie est dans le cours et s'appelle « inégalité de markov ». D'ailleurs, le sujet de Centrale disait juste pour cette question : en utilisant l'inégalité de Markov, démontrez que si $r \leqslant 2.\frac{1-\alpha}{1-p}$ alors la condition $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$ est vérifiée ».

Montrez que la condition $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$ est satisfaite pour $r \leqslant 2.\frac{1-\alpha}{1-p}$. Montrez que ceci équivaut à $x.e^x \leqslant -\alpha.a.e^{-a}$ si on a posé $a = \frac{p.\ln(p)}{1-p}$ et $x = r.\ln(p) - a$. *C'est là qu'intervient la fonction de Lambert !*

Rapport du jury :
Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x \longmapsto x.e^x$.
On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro.
Deux applications en probabilité sont mises en avant (une seule pour nous).
Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.
Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.
Analyse globale des résultats Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.
Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.
.

◃0▹

Parce qu'il faut bien un peu de `Python`.
`315` est à la fois un multiple de `35` et de `15` (mais pas de `31` c'est vrai).
`405` est un multiple de `05` et de `45` (mais pas de `40`).
`480` est un multiple de `48` et de `80` (et aussi de `40`).
`170` est un multiple de `17` et de `10` (mais pas de `70`).

Écrivez un script qui donne la liste de tous les nombres à trois chiffres `abc` tels que au moins deux des trois nombres `ab`, `ac` et `bc` divisent `abc`.

Pour créer les nombres à trois chiffres, on peut prendre un `range(100, 1000)`.

Mais ensuite, pour extraire les nombres à deux chiffres, on va galérer.

Autant alors utiliser une triple boucle `for` et travailler ensuite sur les trplets de chiffres.

```
for a in range(10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
```

Celle ci va avoir un défaut : elle va créer aussi des nombres à deux chiffres comme 034.
On préférera donc

```
for a in range(1, 10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............abc = 100*a + 10*b + c
```

Avant, on crée une liste vide pour accueillir nos solutions.
Ensuite, on créer les trois nombres utiles : ab, ac et bc.

```
L = [ ]
for a in range(1, 10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............abc = 100*a + 10*b + c
............ab, bc, ac = 10*a+b, 10*b+c, 10*a+c
```

On détermine trois booléens :

```
L = [ ]
for a in range(1, 10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............abc = 100*a + 10*b + c
............ab, bc, ac = 10*a+b, 10*b+c, 10*a+c
............abc%ab == 0 abc%ac == 0 abc%bc == 0
```

Mais on en fait quoi ? On fait leur somme ! Et on regarde si elle vaut au moins 2.

```
L = [ ]
for a in range(1, 10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............abc = 100*a + 10*b + c
............ab, bc, ac = 10*a+b, 10*b+c, 10*a+c
............if (abc%ab == 0)+(abc%ac == 0)+(abc%bc == 0) >= 2 :
................L.append(abc)
```

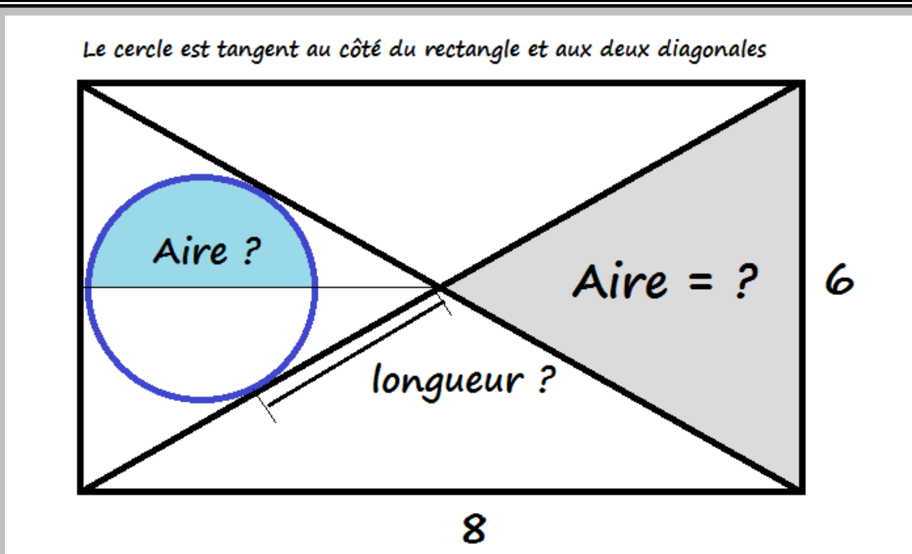
Il reste un défaut. On risque la divvision par 0 avec par exemple `abc=300` qui donne `bc=00`.

```
L = [ ]
for a in range(1, 10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............abc = 100*a + 10*b + c
............ab, bc, ac = 10*a+b, 10*b+c, 10*a+c
............if bc != 00 :
................if (abc%ab == 0)+(abc%ac == 0)+(abc%bc == 0) >= 2 :
....................L.append(abc)
print(L)
```

On aurait pu créer une procédure

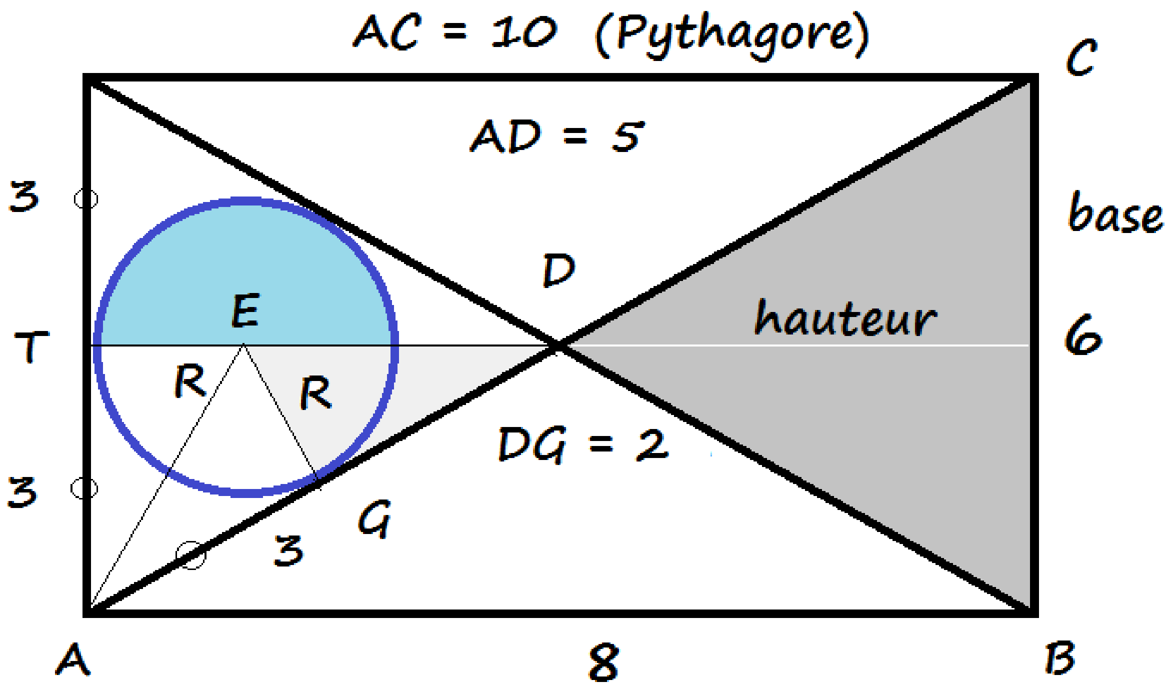
```
def test(a, b, c) :
....abc = 100*a + 10*b + c
....ab, bc, ac = 10*a+b, 10*b+c, 10*a+c
....if bc == 00 :
........return False
....return (abc%ab == 0)+(abc%ac == 0)+(abc%bc == 0) >= 2
```

et l'utiliser ensuite `if test(a, b, c) : L.append(100*a+10*b+c)`



◁ 1 ▷

Retrouvez l'aire du demi disque (et les autres quantités demandées).



Le rectangle a pour aire 48 et est découpé en quatre parts égales. L'aire à droite vaut 12.

> *On peut aussi écrire « base fois hauteur sur 2 » avec pour base BC de longueur 6 et pour hauteur la demi longueur $AB/2$ égale à 4.*
> *On peut aussi mesurer les aires des triangles de base 8 et de hauteur 3.*

Le rectangle a pour côtés 8 et 6 donc pour diagonale 10 (Pythagore).
Sa demi diagonale vaut donc 5 : $AD = 5$.
Le cercle est symétrique par rapport au trait horizontal tracé, son centre est donc à mi-hauteur $AT = 3$.

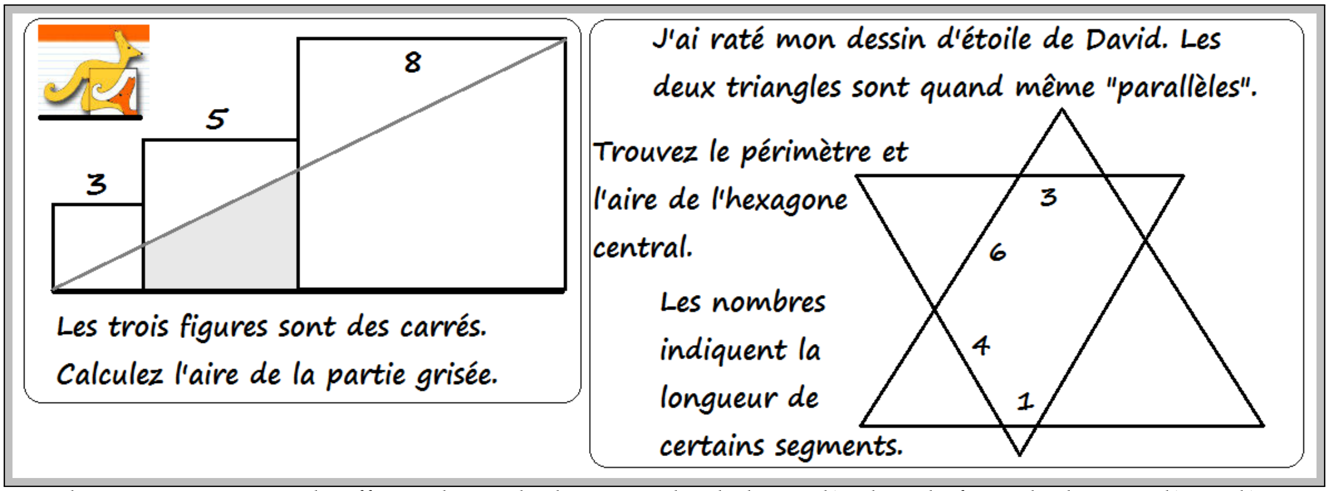
Mais comme AT et AG sont deux tangentes issues de A, on a $AG = AT = 3$.
Il reste $TD = 2$.

Dans le triangle légérement grisé, rectangle en G, on peut écrire $R^2 + 2^2 = ED^2$.
Horizontalement entre T et D on peut écrire $R + ED = 4$.
On reporte : $ED = 4 - R$ puis $ED^2 = R^2 - 8.R + 16$.
On reporte dans $R^2 + 4 = ED^2$: $4 = 16 - 8.R$ et $\boxed{R \text{ vaut } 3/2}$
L'aire du demi disque est alors $\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^2/2$ ce qui fait $\frac{\pi.9}{8}$ mais en fait comme à chaque fois, on s'en fout de la valeur.

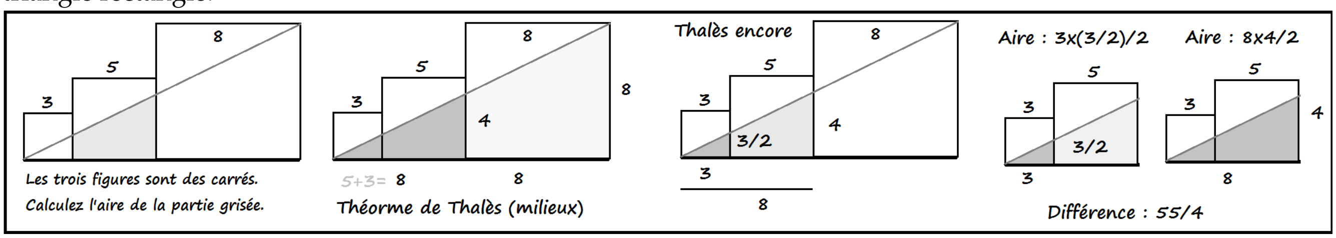
◁2▷

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On sait $A.B = B.A$, $Tr(B) = 5$ et $\det(B) = 6$. Pouvez vous retrouver B et la diagonaliser (deux solutions) ?

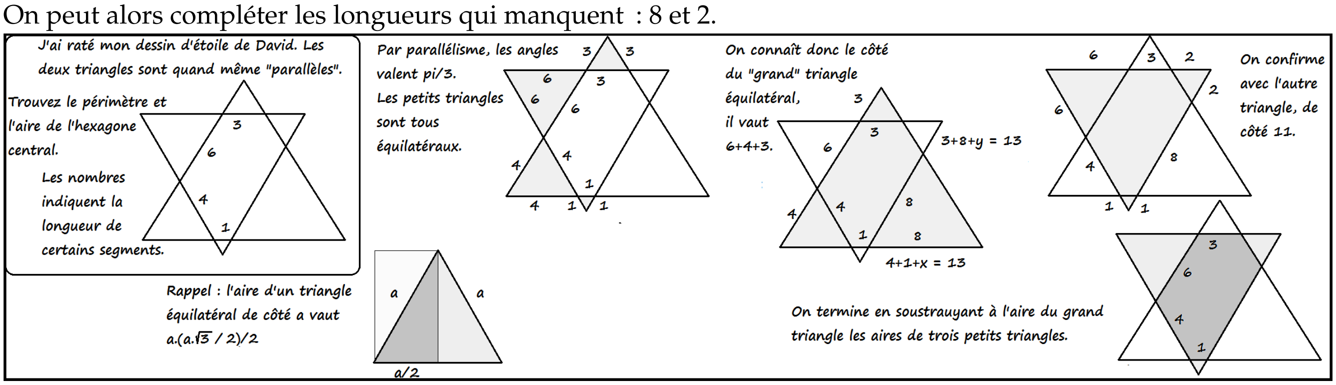
◁3▷



Pour le premier exercice, il suffit appliquer le théorème de Thalès et d'utiliser la formule donnant l'aire d'un trapèze (hauteur fois moyenne des deux bases), ou de soustraire l'aire d'un petit triangle rectangle à celle d'un grand triangle rectangle.



Pour le second, on calcule la longueur du côté de chaque triangle équilatéral. On trouve 11 et 13.
On peut alors compléter les longueurs qui manquent : 8 et 2.



L'aire de l'hexagone est une différence d'aires : un grand triangle moins trois petits.

On trouve suivant le découpage $\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(11^2-1^2-2^2-6^2\right)$ ou $\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(13^2-3^2-4^2-8^2\right)$.

Dans les deux cas : $\boxed{20.\sqrt{3}\text{ u.a.}}$

◁4▷ Dans un devoir de physique (pas cette année, vous êtes bons ☺), des élèves ont écrit $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.
SCT m'en a parlé beaucoup en salle des profs.
J'ai tenté de les sauver en trouvant des exemples où ça marche quand même...
Trouvez une solution dans $\mathbb{C}$. Et des solutions dans range(13) pour les opérations modulo 13.

Dans $\mathbb{C}$, on a $\frac{1}{j+j^2}=\frac{1}{-1}=-1$ et $\frac{1}{j}+\frac{1}{j^2}=j^2+j=-1$.

Ça marche !

On donne la liste des inverses à toutes fins utiles :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^{-1}	non	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

Peut on avoir $a^{-1}+b^{-1}=(a+b)^{-1}$? On doit prendre a non nul, b non nul et $a+b$ non nul.
Raisonnons par équivalence en multipliant par $a+b$: on veut $(a^{-1}+b^{-1}).(a+b)=(a+b)^{-1}.(a+b)=1$.

On développe le premier membre : $a^{-1}.a + b^{-1}.a + a^{-1}.b + b^{-1}.b = 1$.
On simplifie : $a^{-1}.b + b^{-1}.a + 1 = 0$.
Comme a et b sont non nuls, on peut multiplier par a et par b en raisonnant par équivalences : $a.b.a^{-1}.b + a.b.b^{-1}.a + a.b = 0$.
On simplifie (la multiplication est commutative) : $b^2 + a^2 + a.b = 0$.
Attention, aucun raisonnement sur un éventuel signe. ce mot n'a aucun sens ici.
Rappelons que le critère pour qu'une équation du second degré ait des solutions n'est pas et n'a jamais été « le discriminant est positif ». C'est « le discriminant est un carré ».

On ajoute $a.b$: $(a+b)^2 = a.b$.
En posant $s = a + b$, et $p = a.b$, on demande donc $s^2 = p$.
Ceci signifie que a et b sont les solutions non nulles de $X^2 - s.X + s^2 = 0$.
On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = -3.s^2 = 10.s^2$.
La question devient : $10.s^2$ est il un carré.
Elle ramène à 10 est il un carré ? On dresse la liste des carrés :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

La réponse est oui.

A faire.

De même, dans $\mathbb{C}$, $-3.s^2$ est un carré. Et c'est ce qui explique les solutions proposées issues de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$: $\dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{j^2} = \dfrac{1}{j + j^2}$.

On pouvait aussi utiliser un script Python.
On crée la liste des inverses à exploiter. Ensuite, on fait un double parcours :

```
Inv = [None, 1, 6, 4, 3, 9, 2, 8, 7, 5, 10]
L = [ ]
for a in range(1, 13) :
....for b in range(1, 13) :
.......if (a+b)%11 != 0 :
...........if (Inv[a]+Inv[b])*(a+b))%11==0 :
................L.append([a,b])
print(L)
```

On trouve par exemple les couples (1, 3).
[[1, 3], [1, 9], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 9], [4, 10], [4, 12], [5, 2], [5, 6], [6, 2], [6, 5], [7, 8], [7, 11], [8, 7], [8, 11], [9, 1], [9, 3], [10, 4], [10, 12], [11, 7], [11, 8], [12, 4], [12, 10]]

◁5▷ Explicitez

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$	$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[$	$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{n},\ 2^{n}[$
$D = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ 2.n[$	$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ 2.n[$	$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{n}[$

$A = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$B = \{0\}$	$C =]-2,\ 2[$
$D = \emptyset$	$E =]1,\ 2[\cap]2,\ +\infty[$ confus sur $\mathbb{R}^-$	$F =]0,\ 2[$

◁6▷ ♡ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

On prend M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on calcule sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique et même le discriminant de celui ci.

$a + c$	$a.c - b^2$	$X^2 - (a+c).X + (a.c - b^2)$	$\Delta = (a+c)^2 - 4.(a.c - b^2) = (a-c)^2 + 4.b^2$

Le discriminant est toujours positif, on a deux valeurs propres réelles (éventuellement double).

Si a est différent de c ou b non nul, alors Δ est strictement positif. On a alors deux valeurs propres distinctes :

$$\begin{array}{rcll}\lambda_+ & = & \dfrac{a+c}{2} & +\frac{\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2} \\ \lambda_- & = & \dfrac{a+c}{2} & -\frac{\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}\end{array}$$

Chaque système $M.X = \lambda_\pm.X$ est dégénéré et admet des solutions non nulles.
On peut donc créer une matrice de taille 2 sur 2 formée des deux colonnes.
La matrice de passage ainsi construite est inversible, et on la note P.

Si a est égal à c et b nul, on a deux fois la même valeur propre. La matrice risque de ne pas être diagonalisable.
Mais en fait elle est déjà diagonale. Donc diagonalisable, via $P = I_2$.

◃7▹ ♡♣ On donne $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. On doit diagonaliser A. C'est moche, les valeurs propres sont des irrationnels.
Sauf que le corps sur lequel on travaille est $range(11)$ pour l'addition et la multiplication modulo 11. Et là, tout doit aller vite.
Résolvez alors l'équation $A^n = A$ d'inconnue entière n.

Dans $\mathbb{R}$ comme ailleurs, les valeurs propres sont solutions de $\lambda^2 - 10.\lambda - 9 = 0$.
Le discriminant vaut $100 + 36$ ce qui fait 4 car on travaille modulo 11.
Les racines sont alors $\dfrac{10+2}{2}$ et $\dfrac{10-2}{2}$.
La somme $6 + 4$ vaut bien 10 et le produit 24 (et c'est bien -9 puisque $24 + 9 = 33 = 0$).

On choisit $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on résout

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Condition nécessaire colonne 1 : $9 + 2.a = 6$	Condition nécessaire colonne 2 : $9 + 2.b = 4$
Valeur trouvée : $a = 4$	Valeur trouvée : $b = 3$
Condition suffisante colonne 1 : $9 + a = 6.a$	Condition suffisante colonne 1 : $9 + b = 4.a$

0n a donc $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
et si on y tient $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

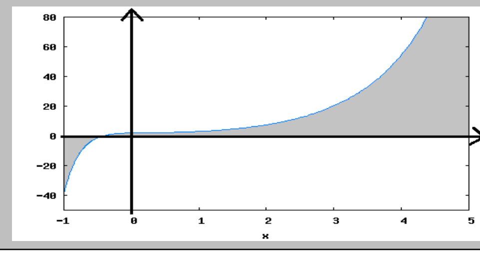
Peut on avoir $A^n = A$?
Il faut et il suffit d'avoir $D^n = D$ c'est à dire $6^n = 6$ et $4^n = 4$.
Fermat, vous connaissez ? $6^{11} = 6$ et $4^{11} = 4$.
Et $6^{10} = 6$ et $4^{10} = 4$
Les solutions sont donc de la forme $n = 11 + 10.p$ avec p dans $\mathbb{N}$.
Et aussi $n = 1$ quand même !
Et le cycle des puissances de 6 modulo 11 nous dit qu'il n'y a pas d'autre solution.

◃8▹ ♡ Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t$ et $t \longmapsto e^{3.t}$.
Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t)$ et $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$.

Si on nous donne deux solutions (dont aucune n'est multiple de l'autre), on a deux valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$.
On a l'équation caractéristique : $(\lambda - 1).(\lambda - 3) = 0$ puis l'équation différentielle $\boxed{y'' - 4.y' + 3.y = 0}$

$t \longmapsto e^t.\cos(t)$ et $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$ sont des combinaison s de $t \longmapsto e^t.\cos(t)$ et $t \longmapsto e^t.\sin(t)$.
Puis de $t \longmapsto e^t.e^{i.t}$ et $t \longmapsto e^t.e^{-i.t}$.
Le spectre est $\{1+i,\ 1-i\}$ et l'équation est $\boxed{y'' - 2.y' + 2.y = 0}$.

◁9▷ ♡ On veut résoudre l'équation différentielle $y_t^{(3)} = 3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t$ d'inconnue y fonction de t avec conditions initiales $y_0 = 2$, $y'_0 = 1$ et $y''_0 = -7$. Calculez $y_0^{(3)}$ et $y_0^{(4)}$.



On pose : $u_t = y''_t - 2.y'_t - 8.y_t$. Calculez u_0 et démontrez : $u'_t = u_t$.
Déterminez alors u_t pour tout t.
On pose ensuite $v_t = y''_t - 5.y'_t + 4.y_t$. Dérivez v. Déterminez v_t pour tout t.
On pose $w_t = y''_t + a.y'_t + b.y_t$. Ajustez a et b pour avoir $w'_t = 4.w_t$.
Déterminez alors w_t pour tout t.

$y_t^{(3)} = 3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t$ donne en $t = 0$: $y_0^{(3)} = 3.y''_0 + 6.y'_0 - 8.y_0 = 3.(-7) + 6.1 - 8.2 = -31$.

On re-dérive : $y_t^{(4)} = 3.y_t^{(3)} + 6.y''_t - 8.y'_t$ et en 0 : $y_0^{(4)} = 3.(-31) + 6.(-7) - 8.1$. Et pourquoi pas : -143 !

On a $u_0 = y''_0 - 2.y'_0 - 8.y_0 = -7 - 2.1 - 8.2 = -25$.
On dérive et remplace : $u'_t = y_t^{(3)} - 2.y''_t - 8.y'_t$
$u'_t = (3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t) - 2.y''_t - 8.y'_t$
$u'_t = y''_t - 2.y'_t - 8.y_t$
$u'_t = u_t$ Étonnant !
On résout cette équation linaire d'ordre 1 : $u_t = u_0.e^t$
$u_t = -25.e^t$

De même, $v_0 = y''_0 - 5.y'_0 + 4.y_0 = -7 - 5.1 + 4.2 = -4$.
On dérive aussi $v'_t = y_t^{(3)} - 5.y''_t + 4.y'_t$
$v'_t = (3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t) - 5.y''_t + 4.y'_t$
$v'_t = -2.y''_t + 10.y'_t - 8.y_t$
$v'_t = -2.v_t$ (tiens cette fois la valeur propre c'est 2)
On résout : $v_t = -4.e^{-2.t}$.

On parie qu'on va tomber sur $w'_t = 4.w_t$ (la dernière valeur propre) ?
On dérive $w'_t = y_t^{(3)} + a.y''_t + b.y'_t$
$w'_t = (3.y''_t + 6.y'_t - 8.y_t) + a.y''_t + b.y'_t$
$w'_t = (3 + a).y''_t + (6 + b).y'_t - 8.y_t$
$w'_t = 4.y''_t + (6 + b).y'_t - 8.y_t$ avec $a = 1$: $w_t = y''_t + y'_t + b.y_t$
$w'_t = 4.y''_t + 4.y'_t - 8.y_t$ avec $b = -2$: $w_t = y''_t + y'_t - 2.y_t$
et ça tombe juste.
Pouvait on deviner cette formule en $w_t = y''_t + y'_t - 2.y_t$ après avoir vu $u_t = y''_t - 2.y'_t - 8.y_t$ et $v_t = y''_t - 5.y'_t + 4.y_t$?
Moi je dis oui.

L'idée générale :
On écrit le polynôme caractéristique $\lambda^3 = 3.\lambda^2 + 6.\lambda - 8$.
On en trouve les trois racines a, b et c. On écrit même $\lambda^3 = (a + b + c).\lambda^2 - (a.b + a.c + b.c).\lambda + a.b.c$.
On en choisit une, disons a. Il reste b et c, et le polynôme $X^2 - (b + c).X + b.c$[5].
On crée alors $y'' - (b + c).y' + b.c.y$ *qu'on appelle U.*
On dérive : $U' = y^{(3)} - (b + c).y'' + b.c.y'$.
On remplace : $U' = ((a + b + c).y'' - (a.b + a.c + b.c).y' + a.b.c.y) - (b + c).y'' + b.c.y'$.
On regroupe : $U' = a.y'' - (a.b + a.c).y' + a.b.c.y$.
On factorise : $U' = a.(y'' - (b + c).y' + b.c.y)$.
On reconnaît : $U' = a.U$.
On résout : $U_t = U_0.e^{a.t}$.
C'est comme ça que vient le terme en $e^{a.t}$.

C'est avec $y'' - (a + c).y' + a.c.y$ *et* $y'' - (a + b).y' + a.b.y$ *qu'on aura* $e^{b.t}$ *et* $e^{c.t}$.

A ce stade, qu'on a eu ? : $u_t = -25.e^t$, $v_t = -4.e^{-2.t}$ et $w_t = w_0.e^{4.t}$avec w_0 calculable.
Rappelons que 1, -2 et $'$ sont les trois racines du polynôme caractéristique.

5. *ah, Viète, toujours plus utile que* $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Mais si on l'écrit en revenant aux définition : $\begin{matrix} y''_t & -2.y'_t & -8.y_t & = & u_0.e^t \\ y''_t & -5.y'_t & +4.y_t & = & v_0.e^{-2.t} \\ y''_t & +y'_t & -2.y_t & = & w_0.e^{4.t} \end{matrix}$.

On peut en profiter pour extraire y_t. En résolvant $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$.

On inverse : $\begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$ et seule la dernière ligne nous intéressera.

En l'occurrence : $\begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{18}. \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$.

Sinon, « à la main » : $\left\{ \begin{matrix} y''_t & -2.y'_t & -8.y_t & = & u_0.e^t & & \\ y''_t & -5.y'_t & +4.y_t & = & & v_0.e^{-2.t} & \\ y''_t & +y'_t & -2.y_t & = & & & w_0.e^{4.t} \end{matrix} \right|$

devient $\left\{ \begin{matrix} y''_t & -2.y'_t & -8.y_t & = & u_0.e^t & & \\ & -3.y'_t & +12.y_t & = & -u_0.e^t & v_0.e^{-2.t} & \\ & 3.y'_t & +6.y_t & = & -u_0.e^t & & +w_0.e^{4.t} \end{matrix} \right|$

puis $\left\{ \begin{matrix} y''_t & -2.y'_t & -8.y_t & = & u_0.e^t & & \\ & -3.y'_t & +12.y_t & = & -u_0.e^t & +v_0.e^{-2.t} & \\ & & +18.y_t & = & -2.u_0.e^t & +v_0.e^{-2.t} & +w_0.e^{4.t} \end{matrix} \right|$

On a fini, il suffit d'être propre et méthodique. En résolvant un système et non en balançant tout au hasard.

Par cette méthode « sans diagonalisation explicite », on comprend aussi la combinaison d'exponentielle.

A la fin : $\dfrac{25.e^t - 2.e^{-2.t} - 5.e^{4.t}}{9}$.

◁10▷ ♡ Soit f solution de l'équation différentielle $y''_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t. Calculez $f(t) + f(t+\pi)$ pour tout t.
Soit f solution de l'inéquation $y''_t + y_t \geqslant 0$ d'inconnue y fonction de t. Comparez $f(0) + f(\pi)$ et $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$.
Déduisez pour tout x : $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$ *(pensez à translater)*.

Les solutions de $y'' + y = 0$ sont de la forme $A.\cos(t) + B.\sin(t)$ avec A et B à déterminer.
Quand on calcule en t et en $t+\pi$, on trouve 0 par $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$.

Remarque : | Vous passez par $\cos(\theta+\pi) = \cos(\theta).\cos(\pi) - \sin(\theta).\sin(\pi) = -\cos(\theta)$?
Vous savez calculer. C'est bien.
Mais vous n'irez pas loin. Vous n'avez pas les bonnes méthodes. Vous êtes bourrin...
Vous pourrez certes faire un sujet de bac en quatre heures
mais un sujet de concours en une semaine...
Il faut juste voir « point diamétralement opposé sur le cercle trigonométrique ».
Il ne suffit pas d'arriver à une réponse. Il faut être efficace. Vous devez accepter de casser vos (mauvaises) habitudes.
Elles vous ont permis de réussir jusqu'au bac, n'espérez pas progresser ensuite si vous ne changez pas.

Si on a juste $y'' + y \geqslant 0$ pour tout n, on ne sait pas comment conclure...
Pour comparer $f(0) + f(\pi)$ et $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$, on part du plus compliqué : $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$

On sépare en $\int_0^\pi \sin(t).f(t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(t)).dt$ on intègre par parties

$f(t)$	$\hookrightarrow$	$f'(t)$
$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$

pour l'un et

$f''(t)$	$\hookleftarrow$	$f'(t)$
$\sin(t)$	$\hookrightarrow$	$\cos(t)$

.

Les deux intégrales se compensent avec un signe moins. Restent les termes crochets qui valent justement $f(0)$ et $f(\pi)$.

$$\int_0^\pi \sin(t).f(t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(t)).dt =$$

$$\Big[-\cos(t).f(t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t).\cos(t).dt + \Big[\sin(t).f'(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t).\cos(t).dt$$
$$\int_0^\pi \sin(t).(f(t)+f''(t)).dt = f(0)+f(\pi)$$

Regardons cette intégrale. Le sinus est positif, car on est entre 0 et π.
Et la somme $f''(t)+f(t)$ est positive, grâce à l'équation différentielle.
L'intégrale est positive : $f(0)+f(\pi)\geqslant 0$.

C'est un début. Évidemment, il ne faut pas dire « et je vais démontrer $f(t)+f(\pi+t)\geqslant 0$ par récurrence sur t. On est sur $\mathbb{R}$ cette notion n'a pas de sens.

On tente d'écrire $f(x)+f(x+\pi)$ sous la forme similaire d'une intégrale.

$$\int_0^\pi \sin(t).f(x+t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(x+t)).dt =$$
$$\Big[-\cos(t).f(x+t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x+t).\cos(t).dt + \Big[\sin(t).f'(x+t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x+t).\cos(t).dt$$
$$\int_0^\pi \sin(t).(f(x+t)+f''(x+t)).dt = f(x)+f(x+\pi)$$

Dans l'intégrale, tout est positif (sinus sur le bon intervalle, et inéquation différentielle).
Le terme de droite est positif aussi.

◃11▹ Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution ch et sh ?
Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution $t \longmapsto ch(t)$ et $t \longmapsto ch(2.t)$?

On veut à la fois $\begin{array}{ccc} ch(t) & +a_t.sh(t) & = & b_t \\ & et & & \\ sh(t) & +a_t.ch(t) & = & b_t \end{array}$ ou même $\begin{array}{ccccc} a_t.sh(t) & - & b_t & = & -ch(t) \\ et & & & & \\ a_t.ch(t) & - & b_t & = & -sh(t) \end{array}$.

On trouve $a_t = 1$ et $b_t = e^t$. On vérifie. C'était évident .

La seconde équation donne des choses plus laides.On peut retrouver l'équation homogène en disant que la différence de deux solutions générale est solution homogène.
Les solutions de $h'_t + a_t.h_t = 0$ sont donc les multiples de $t \longmapsto ch(2.t) - ch(t)$.
C'est donc que l'on a $\exp(-A_t) = ch(2.t) - ch(t)$ sur un intervalle convenable.
On trouve A_t avec un logarithme et on dérive pour avoir a_t.
$a_t = \dfrac{sh(t) - 2.sh(2.t)}{ch(2.t) - ch(t)}$ (sur un intervalle ne contenant pas 0 !).

◃12▹ On veut résoudre l'équation différentielle $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) =_{\forall t>0} 0$ d'inconnue f fonction de t sur $]0, +\infty[$ (notée (E))). On pose alors $g = x \longmapsto= f(e^x)$. Calculez g' et g''. Montrez que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que vous résoudrez. Explicitez la solution de (E) qui vaut 1 en 1 et aussi en 2.

On a affaire ici à une équation différentielle linéaire à coefficients non constants. Du type « Euler-homogène » (on les étudiait en Prépas à une époque).
La méthode « équation caractéristique » est vouée ici à l'échec. En effet, elle consisterait à écrire classiquement $Y'_t = M.Y_t$ mais avec M qui dépend du temps.
rappelons que la résolution de $Y'_t = M.Y_t$avec M ne dépendant pas du temps passe par la diagonalisation (quand il n'y a pas de valeur propre double) : $M = P.D.P^{-1}$.
On écrit $Y'_t = P.D.P^{-1}.Y_t$ puis on pose $U_t = P^{-1}.Y_t$, on dérive $U'_t = P^{-1}.Y'_t$, on reporte $U'_t = D.U_t$ et on résout composante par composante : $u'_t = \lambda_1.u_t$ et $v'_t = \lambda_2.v_t$.
Jusqu'ici tout va bien.
Mais si M dépend de t, alors D et P dépendant de t.
Et quand on pose $U_t = P_t^{-1}.Y_t$et qu'on dérive, on a $U'_t = P_t^{-1}.Y'_t + (P_t^{-1})'.Y_t$.
Oui, il y a un terme en plus, et plus rien ne va dans la suite.

Il faut donc se laisser guider dans la résolution de cette équation différentielle.
Au fait, son nom d'homogène vient de son écriture $2.t^2.\dfrac{d^2y}{dt^2} - 7.t.\dfrac{dy}{dt} + 4.y_t = 0$.
Le physicien qui sommeille dans le matheux [6] voit une homogénéité aux dimensions-temps dans les opérateurs $t^2.\dfrac{d^2}{dt^2}$ et $t.\dfrac{d}{dt}$.

---

6. *des fois, il faut quand même le réveiller, mais pas forcément le laisser parler, faut pas pousser*

C'est parti pour le changement de variable.
On pose donc $g = x \longmapsto f(e^x)$. On comprend que si on connaît g alors on connaît f, en composant à rebours par logarithme[7].
On dérive : $g'(x) = e^x.f'(e^x)$ et on redérive : $g''(x) = e^x.f'(e^x) + e^{2.x}.f''(e^x)$.
Mais si on regarde dans l'équation initiale $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) = 0$, en posant $t = e^x$, on a $2.e^{2.x}.f''(e^x) - 7.e^x.f'(e^x) + 4.f(e^x) = 0$ pour tout x.
Remplaçons $e^{2.x}.f''(e^x)$ par $\dfrac{7.e^x.f'(e^x) - 4.f(e^x)}{2}$ dans $g''(x)$: $g''(x) = e^x.f'(e^x) + \dfrac{7.e^x.f'(e^x) - 4.f(e^x)}{2}$.
On a donc déjà $2.g''(x) = 2.e^x.f'(e^x) + 7.e^x.f'(e^x) - 4.f(e^x)$ et même $2.g''(x) = 9.e^x.f'(e^x) - 4.f(e^x)$.
Mais remplaçons même $e^x.f(x)$ par $g'(x)$.
On a alors $2.g''(x) = -5.g'(x) + 4.f(e^x)$.
Et en remplaçant ultimement : $\boxed{2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0}$
Oui, une équation différentielle en g, à coefficients constants...

On y accédait aussi « dans l'autre sens ». je vous le fais, pour que vous ayez les deux.
On a posé $g = x \longmapsto f(e^x)$, on a donc $f = t \longmapsto g(\ln(t))$.
On dérive donc une fois : $f'(t) = \dfrac{g'(\ln(t))}{t}$ (composée).
On redérive : $f''(t) = -\dfrac{g'(\ln(t))}{t^2} + \dfrac{g''(\ln(t))}{t^2}$.
On reporte dans $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) = 0$ qui devient
$2.t^2.\Big(- \dfrac{g'(\ln(t))}{t^2} + \dfrac{g''(\ln(t))}{t^2}\Big) - 7.t.\Big(\dfrac{g'(\ln(t))}{t}\Big) + 4.g(\ln(t) = 0$.
On simplifie (ah oui, c'était pour ça le changement de variable) : $2.g''(\ln(t)) - 9.g'(\ln(t)) + 4.g(\ln(t)) = 0$.
Et en remplaçant la variable $\ln(t)$ qui a le droit de décrire tout $\mathbb{R}$: $2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0$.

Déjà, avec soulagement, on trouve la même équation différentielle.
Et on constate que si on n'a pas posé proprement le changement de variable, avec des dérivées de composées, on écrit des bêtises.
On est quand même passé de $2.t^2.y''_t - 7.t.y'_t + 4.y_t = 0$ à $2.z''_x - 9.z'_x + 4.z_x = 0$.

A présent, on résout l'équation à coefficients constants $2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0$

Équation caractéristique : $2.\lambda^2 - 9.\lambda + 4 = 0$.

Spectre : 4 et $\dfrac{1}{2}$.

Solutions : $Vect(t \longmapsto e^{4.t},\ t \longmapsto e^{t/2})$.

Mais attention, on ne se contente pas de ça. On a trouvé $g = t \longmapsto A.e^{4.t} + B.e^{t/2}$ avec A et B à déterminer.
Mais l'inconnue était f. Avec $g(t) = f(e^x)$.
On obtient : $f = x \longmapsto A.e^{4.\ln(x)} + B.e^{\ln(x)/2}$.
Ou même directement $g = t \longmapsto A.(e^t)^4 + B.(e^t)^{1/2}$ donc $\boxed{f = x \longmapsto A.x^4 + B.x^{1/2}}$

Avec un esprit odieusement M.P.S.I.2, on peut dire qu'on attend pour $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) = 0$ un espace des solutions de dimension 2.
Il suffit donc de trouver deux solutions indépendantes pour les retrouver toutes par combinaisons linéaires.
On tente sa chance avec $t \longmapsto t^4$ de dérivées $t \longmapsto 4.t^3$ et $t \longmapsto 12.t^2$.
Surprise : $2.t^2.12.t^2 - 7.t.4.t^3 + 4.t^4 = 0$.

On tente sa chance aussi avec $t \longmapsto \sqrt{t}$. Pareil !
Ou même $t \longmapsto t^\lambda$ de dérivées $t \longmapsto \lambda.t^{\lambda-1}$ et $t \longmapsto \lambda.(\lambda-1).t^{\lambda-2}$.
On reporte : $2.t^2.\lambda.(\lambda-1).t^{\lambda-2} - 7.t.\lambda.t^{\lambda-1} + 4.t^\lambda = 0$. On aboutit comme par hasard à une équation en λ : $2.\lambda^2 - 9.\lambda + 4 = 0$.
Déjà traitée...

---

7. ce changement de variable consiste à tracer le graphe sur un papier millimétré à échelle logarithmique, que vous croisez peut être en labo de physique/chimie

◃13▹ Un élève un peu bas de plafond prétend : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'}{g'}$ (formule ☻). Évidemment, il a tort. Mais il indique que c'est vrai pour

$f = t \longmapsto e^{4.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{2.t}$
$f = t \longmapsto \sqrt{\frac{t}{1-2.t}}$	et	$g = t \longmapsto \sqrt{t}$
$f = t \longmapsto e^{t^2+t}.\sqrt{1-2.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{t^2}$
$f = t \longmapsto e^{a.t}$	et	$g = t \longmapsto e^{b.t}$

pour la dernière ligne, c'est à vous de choisir convenablement b en fonction de a, et pour toutes les autres, c'est à vous de faire.

Le professeur le met alors au défi : on prend $g = \cos$ *(sur* $]0, \pi/2[$*)*. Aidez le en trouvant f pour qu'il y ait égalité dans sa formule (☻). Vous serez amené à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. Vous montrerez que ce qu'on note classiquement a_t est une fonction de $\tan(t)$. Vous ferez un changement de variable $\tau = \tan(t)$, et vous devrez décomposer en éléments simples quelquechose de la forme $\dfrac{\alpha.t^2+\beta.t+\gamma}{(\gamma.t+\delta).(t^2+1)} = \dfrac{\lambda}{\gamma.t+\beta} + \dfrac{\mu.t+\nu}{t^2+1}$. Ah oui, on ne triche pas, on ne prend pas f identiquement nulle !

On doit vérifier des couples $(f,\ g)$ pour avoir $\dfrac{f'.g-f.g'}{g^2} = \dfrac{f'}{g'}$ ou même $\forall t,\ \dfrac{f'(t).g(t)-f(t).g'(t)}{g^2(t)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$.

$f(t) = e^{4.t}$	$\dfrac{f(t)}{g(t)} = e^{2.t}$	$f'(t) = 4.e^{4.t}$	
$g(t) = e^{2.t}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(t) = 2.e^{2.t}$	$g'(t) = 2.e^{2.t}$	$\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = 2.e^{2.t}$

puis

$f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{1-2.t}}$	$\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2.t}}$	$f'(t) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\frac{1}{(1-2.t)^2}}{\sqrt{\frac{t}{1-2.t}}} = \dfrac{1}{2.\sqrt{t}.(1-2.t)^{3/2}}$	
$g(t) = \sqrt{t}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(t) = -\dfrac{-2}{2.(1-2.t)^{3/2}}$	$g'(t) = \dfrac{1}{2.\sqrt{t}}$	$\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \dfrac{1}{(1-2.t)^{3/2}}$

$f(t) = e^{t^2+t}.\sqrt{1-2.t}$	$\dfrac{f(t)}{g(t)} = e^t.\sqrt{1-2.t}$	$f'(t) = e^{t^2+t}.(2.t+1).\sqrt{1-2.t} + e^{t^2+t}.\frac{-2}{2.\sqrt{1-2.t}}$
$g(t) = e^{t^2}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(t) = e^t.\sqrt{1-2.t} + e^t.\dfrac{-2}{2.\sqrt{1-2.t}}$	$g'(t) = 2.t.e^{t^2}$

Les deux quotients valent $e^t.\dfrac{-2.t}{\sqrt{1-2.t}}$ car $f'(t) = e^{t^2+t}.\dfrac{(2.t+1).(1-2.t)-1}{\sqrt{1-2.t}} = e^{t^2+t}.\dfrac{-4.t^2}{\sqrt{1-2.t}}$.

Pour conclure

$f(t) = e^{a..t}$	$\dfrac{f(t)}{g(t)} = e^{(a-b).t}$	$f'(t) = a.e^{\alpha.t}$	
$g(t) = e^{b.t}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(t) = (a-b).e^{(a-b).t}$	$g'(t) = b.e^{b.t}$	$\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \dfrac{a}{b}.e^{(a-b).t}$

Relions a et b par la relation $a - b = \dfrac{a}{b}$:

Passons au cas du cosinus. On veut $\dfrac{f'.\cos + f.\sin}{\cos^2} = \dfrac{f'}{-\sin}$ (à l'étage des fonctions, allez !).

Sur un intervalle convenable tel que $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on fait le produit en croix : $f'.(\cos.\sin + \cos^2) - \sin^2.f = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu, qu'on met sous forme de Cauchy Lipschitz entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{f' + a.f = 0 \text{ avec } a = \dfrac{\sin^2}{\cos^2 + \cos.\sin}}$ C'est la fonction qu'on va devoir intégrer.

On divise haut et bas par $\cos^2$: $\boxed{a = \dfrac{\tan^2}{1+\tan}}$

On cherche donc $\displaystyle\int \frac{\tan}{1+\tan(\theta)}.d\theta$ *(bornes non indiquées, pour une fois, on cherche une primitive).*

On effectue un changement de variable comme indiqué : $t = \tan(\theta)$ donc $dt = (1+\tan^2(\theta)).d\theta$ et $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{\tan}{1+\tan(\theta)}.d\theta = \int \frac{t^2}{(1+t).(1+t^2)}.dt$$

On est sur la bonne piste, l'énoncé propose de décomposer en éléments simples une fraction de ce type :

$$\frac{\alpha.t^2+\beta.t+\gamma}{(\gamma.t+\delta).(t^2+1)} = \frac{\lambda}{\gamma.t+\beta} + \frac{\mu.t+\nu}{t^2+1}$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.
On veut donc

$$\frac{t^2}{(t+1).(t^2+1)} = \frac{\lambda}{t+1} + \frac{\mu.t+\nu}{t^2+1} = \frac{\lambda.(t^2+1)+(\mu.t+\nu).(t+1)}{(t+1).(t^2+1)} = \frac{(\lambda+\mu).t^2+(\mu+\nu).t+(\nu+\lambda)}{(t+1).(t^2+1)}$$

On résout donc $\left\{\begin{array}{cccc} \lambda & +\mu & & = & 1 \\ & \mu & +\nu & = & 0 \\ \lambda & & +\nu & = & 0 \end{array}\right|$ par formules de Cramer par exemple : $\lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

Bref : $\boxed{\dfrac{t^2}{(t+1).(t^2+1)} = \dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{t-1}{t^2+1}\Big)}$

On reporte dans l'intégrale : $\displaystyle\int \frac{2.t^2}{(1+t).(1+t^2)}.dt = \int \frac{1}{t+1}.dt + \int \frac{t}{t^2+1}.dt - \int \frac{1}{t^2+1}.dt.$

On intègre : $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1+t).(1+t^2)}.dt = \frac{\ln(1+t)}{2} + \frac{\ln(1+t^2)}{4} - \frac{Arctan(t)}{2}.$

On revient à la variable initiale : $\boxed{a(\theta) = \displaystyle\int \frac{\tan}{1+\tan(\theta)}.d\theta = \frac{\ln(1+\tan(\theta))}{2} + \frac{\ln(1+\tan^2(\theta))}{4} - \frac{\theta}{2}}$

Il ne reste qu'à coller un signe moins, et passer à l'exponentielle : $\boxed{f = \theta \longmapsto \dfrac{e^{\theta/2}}{\sqrt{1+\tan(\theta}.\sqrt[4]{1+\tan^2(\theta)}}}$

Sans doute vous contenterez vous de cette formule. Pourtant $1+\tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+\tan^2(\theta)}} = \sqrt{\cos(\theta)}$ puis $\dfrac{\sqrt{\cos(\theta)}}{\sqrt{1+\tan(\theta)}} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta+\sin(\theta)}}$.

Remarque : *Mais après on n'a pas beaucoup mieux...*

◃ 14 ▹

La formule de Faa di Bruno dit :
$\displaystyle\frac{d^n}{dx^n}f(g(x)) = \sum_{m_1+2.m_2+3.m_3+\ldots+n.m_n=n} \frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}} f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \Big(g^{(j)}(x)\Big)^{m_j}.$
Vérifiez sa cohérence pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et même $n = 4$.

$\dfrac{d^1}{dx^1}f(g(x)) = f'(g(x)).g'(x)$

$\dfrac{d^2}{dx^2}f(g(x)) = f''(g(x)).\Big(g'(x)\Big)^2 + f'(g(x)).g''(x)$

$\dfrac{d^3}{dx^3}f(g(x)) = f^{(3)}(g(x)).\Big(g'(x)\Big)^3 + 3.f''(g(x)).g'(x).g''(x) + f'(g(x)).g^{(3)}(x)$

On peut vérifier la cohérence, en explicitant par exemple les solutions de $m_1 + 2.m_2 + 3.m_3 = 3$ et en regardant alors le coefficient $\dfrac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}}$.

$3+2.0+3.0$	$1+2.1+3.0$	$0+2.0+3.1$

◃ 15 ▹

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ (changez de variable en tangente, mais prenez garde aux bornes).

Réflexe basique avant de commencer : l'existence.

Monsieur, ce n'est pas demandé !
Si !
Vous n'êtes plus dans les petites classes où on dit « puisque le prof dit de la calculer, c'est qu'elle existe, je lui fais confiance ».
Non, vous allez devenir ingénieurs, pas techniciens sous les ordres d'un ingénieur.

L'application sous le signe somme est continue. l'intégrale existe.

> *Monsieur, j'ai écrit «* le dénominateur ne s'annule pas, la fonction existe *», et vous avez barré. Pourquoi ?*
> *Parce que l'existence ne suffit pas. On rappelle que* $1_{\mathbb{Q}}$ *est définie en tout point mais son intégrale de* 0 *à* 1 *n'existe pas...*
> *Tous les mots ont leur importance.*

Maintenant on change de variable, et c'est Bioche qui nous recommande $\theta \to \theta + \pi$ donc $t = \tan(\theta)$, $\theta = Arctan(t)$ et $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^0 \frac{1}{2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)} = 0$$

NON !
Le changement de variable n'est pas un difféomorphisme. Il a un défaut d'injectivité. Et de continuité. En $\dfrac{\pi}{2}$.
Il faut découper :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} + \int_{\pi/2}^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)} + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)}$$

C'est même $2.\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ pour des raisons de symétrie.
On passe le $(1+t^2)^2$ au numérateur, et simplifie :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{2.(1+t^2)^2+(1-t^2)^2}.dt$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{3.t^4+2.t^2+3}.dt$$

Il faut encore décomposer en éléments simples en la variable t^2 pour commencer. Puis intégrer.

Plus rapide : on force la main avec un peu d'habitude pour voir $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ dérivée de la tangente, et de la tangente :

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\sin^2(\theta)+2.\cos^2(\theta)+\cos^2(\theta)}.d\theta$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\sin^2(\theta)+3.\cos^2(\theta)}.d\theta$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\tan^2(\theta)+3}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$$

On a une forme en $\dfrac{u'}{2.u^2+3}$, on sait faire !

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)^2+1}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}.\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)^2+1}.\frac{\sqrt{2}.d\theta}{\sqrt{3}.\cos^2(\theta)}$$

On trouve $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.Arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \dfrac{\sqrt{2}.\pi}{\sqrt{3}.2}$ comme tout à l'heure.

◃16▹ ♡ On cherche toutes les applications f dérivables vérifiant $\forall t,\ f'(t) = f(\pi - t) + e^t$.
Montrez que f est solution de l'équation différentielle $y''_t + y_t = e^t - e^{1-t}$ d'inconnue y fonction de t (notée (E)).
Résolvez (E). Trouvez toutes les applications f vérifiant $\forall t,\ f'(t) = f(1-t) + e^t$.

Comme on a $\forall t,\ f'(t) = f(\pi - t) + e^t$, on déduit que f' est à son tour dérivable *(dans le second membre, l'exponentielle l'est, de même que $t \longmapsto f(\pi - t)$).*
On dérive donc : $\forall t,\ f''(t) = -f'(\pi - t) + e^t$ en rappelant qu'il y a un signe moins, car on dérive une composée $t \longmapsto \pi - t \longmapsto f(\pi - t)$.
Mais l'hypothèse de départ $\forall t,\ f'(t) = f(\pi - t) + e^t$ s'applique autant à t qu'à $\pi - t$:
$f'(\pi - t) = f(\pi - (\pi - t)) + e^{\pi - t} = f(t) + e^{\pi - t}$.
On reporte : $\forall t,\ f''(t) = -f(t) - e^{\pi - t} + e^t$, c'est l'équation différentielle de l'énoncé.

On résout l'équation homogène associée : $h''(t) = -h(t)$: $Vect(\cos,\ \sin)$.
On résout l'équation avec second membre continu simple, par principes de superposition et d'analogie :

$p_1''(t) + p_1(t) = e^t$	$p_1(t) = \dfrac{e^t}{2}$
$p_2''(t) + p_2(t) = -e^{\pi - t}$	$p_2(t) = -\dfrac{e^{\pi - t}}{2}$

$S_E = \left\{ t \longmapsto A.\cos(t) + B.\sin(t) + \dfrac{e^t - e^{\pi - t}}{2} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

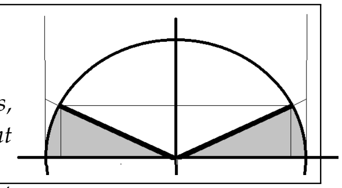
Mais attention, on a raisonné par condition nécessaires, pas forcément suffisante. Il se peut qu'il reste des relations entre A et B pour que f soit solution de l'équation initiale *(en dérivant, on a perdu des informations)*.

On pose donc $f = t \longmapsto A.\cos(t) + B.\sin(t) + \dfrac{e^t - e^{\pi - t}}{2}$ et on dérive :

$f'(t) = -A.\sin(t) + B.\cos(t) + \dfrac{e^t + e^{\pi - t}}{2}$

On remplace aussi : $f(\pi - t) = A.\cos(\pi - t) + B.\sin(\pi - t) + \dfrac{e^{\pi - t} - e^{\pi - (\pi - t)}}{2} = -A.\cos(t) + B.\sin(t) + \dfrac{e^{\pi - t} - e^t}{2}$.

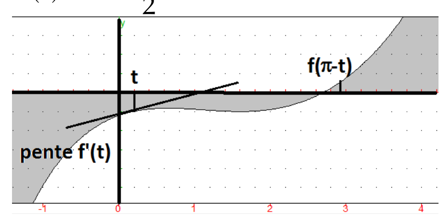
Les formules de trigonométrie $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ sont dans le cours, s'obtiennent visuellement, et si possible pas par $\sin(\pi - t) = \sin(\pi).\cos(t) - \cos(\pi).\sin(t)$ qui sont le summum de la lourdeur.



On veut avoir $\forall t,\ -A.\sin(t) + B.\cos(t) + \dfrac{e^t + e^{\pi - t}}{2} = B.\sin(t) - A.\cos(t) + \dfrac{e^{\pi - t} - e^t}{2} + e^t$.

Il faut et il suffit d'avoir $A = -B$.
On a cette fois raisonné par conditions nécessaires et suffisantes :

$$\boxed{S_E = \left\{ t \longmapsto A.(\cos(t) - \sin(t)) + \dfrac{e^t - e^{\pi - t}}{2} \mid A \in \mathbb{R} \right\}}$$



◃17▹ ♡ On sait : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = 3.2^n - 3^n$. Complétez la matrice :
$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacktriangle & \bigstar \\ \blacklozenge & \blacktriangledown \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

P.S.I. : $\begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 3.2^{n+1} - 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ 3.2^n - 3^n \end{pmatrix}$

On demande donc $\begin{array}{ccccccc} 2.2^n & + & 3.3^n & = & (a+3.b).2^n & + & (a-b).3^n \\ & & & \text{et} & & & \\ 6.2^n & - & 3.3^n & = & (c+3.d).2^n & + & (c-d).3^n \end{array}$

Il suffit d'avoir $\begin{array}{ccccc} a & + & 3.b & = & 2 \\ a & - & b & = & 3 \end{array}$ et $\begin{array}{ccccc} c & + & 3.d & = & 6 \\ c & - & d & = & -3 \end{array}$.

Il ne reste qu'à résoudre.

M.P. : On souhaite avoir en particulier $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

On demande donc $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On extrait la matrice en multipliant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} . \frac{1}{4}$.

On l'a, il ne reste qu'à vérifier.

M.P.* : On écrit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$

Mais aussi $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

Et donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si nécessaire, on calcule la matrice du milieu.

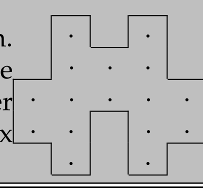
Et si on vous demande de la diagonaliser, gardez la sous la forme

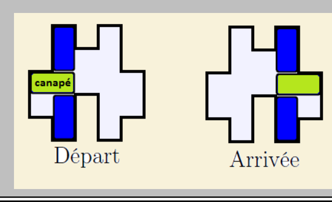
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$,

comprenez vous pourquoi ?

◁18▷ La chambre de Bintou est un truc pas permis, conçu par un élève ayant fait de la S.I.I. complètement bourré, vous en avez ci contre le plan vu de haut. Et en plus, elle a un canapé et deux armoires qui ont une forme rectangulaire qui occupent les rectangles repérés sur le schéma.

Et elle doit les déplacer aux emplacements du troisième dessin. Elle a le droit de les faire glisser, mais pas de les soulever ou de les faire tourner. Combien de déplacements ? Et comment coder ces déplacements pour transmettre l'information sans faire dix ou douze dessins ?





◁19▷ ♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$ (noté A). Montrez que l'équation $M^2 = A$ n'a aucune solution dans $M_2(\mathbb{R})$. Combien pouvez vous en trouver dans $M_2(\mathbb{C})$?

Trace = 3	Déterminant = -4	Polynôme : $X^2 - 3.X - 4$	Spectre : $\{4, -1\}$
$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	
$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$	$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

Sans aller chercher plus loin qu'un raisonnement par l'absurde en profitant du déterminant et de ses propriétés. Si il y avait une solution à $M^2 = A$,on aurait $\det(M^2) = -4$ donc $(\det(M))^2 = -4$, ce qui dans $\mathbb{R}$est impossible.

Remarque : L'élève qui face à cette question pose quatre coefficients et écrit un système avec des $a^2 + b.c = -11$ et autres a certes compris comment calculer ;
Mais n'a pas compris comment on raisonne.
On n'attaque presque jamais un problème matriciel en écrivant des coefficients et des équations.
On réfléchit avant de calculer somme un bourrin. Et souvent, ça évite même de calculer comme un bourrin.
C'est en ça que c'est des maths. Donc pas des « maths de Terminale ».

En revanche, il faut comprendre que la diagonalisation permet de calculer les puissances de $M := P.D.P^{-1}$ donc $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

Mais ne peut on espérer utiliser cette idée pour d'autres exposants ?

La matrice D a-t-elle des « racines carrées », c'est à dire les matrices vérifiant $R^2 = D$?

Oui, et on en a quatre :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Et ensuite, $(P.R.P^{-1})^2 = P.R.P^{-1}.P.R.P^{-1} = P.R^2.P^{-1} = P.D.P^{-1} = M$ (quand une idée est bonne pour les exposants entiers, on la garde).

Tous calculs faits (mais faire les calculs, c'est ici perdre tout l »intérêt de ce qu'on a deviné) :

$\begin{pmatrix} -4+3.i & 2-i \\ -12+6.i & 6-2.i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4+3.i & -2-i \\ 12+6.i & -6-2.i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -4-3.i & 2+i \\ -12-6.i & 6+2.i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4-3.i & -2+i \\ 12-6.i & -6+2.i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$

La question qu'on est en droit de se poser : sont ce les seules solutions ?
Et la réponse est oui, mais ce n'est pas trivial.
Et une fois de plus, ce n'est pas par le calcul bourrin.
Supposons qu'une matrice M vérifie $M^2 = A$.
On va se ramener à l'univers de D en quelque sorte.
$M^2 = A$ signifie $M = P.D.P^{-1}$ puis $P^{-1}.M.P = D$.
On pose alors $R = P^{-1}.M.P$ et l'équation devient avec cette nouvelle inconnue : $R^2 = D$.

Bon, me direz vous, c'est la même idée que tout à l'heure, mais tout à l'heure, on a proposé nos $\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$.
Ceci prouvait (par explication) que c'étaient des solutions. Mais pas forcément toutes les solutions.
Alors quoi, on pose quatre coefficients et on raisonne par implications ? Comme un Terminable ?
Non. On raisonne.
On part de $R^2 = D$. On calcule alors $D.R - R.D$.
Astucieux comme vous allez le voir : $D.R - R.D = (R^2).R - R.(R^2) = R^3 - R^3 = 0_{2,2}$.
Bref, R commute avec D.
Et là, pour une fois, on redescend jusqu'aux coefficients :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $4.a = 4.a$ donc a quelconque
$4.b = -b$ donc $b = 0$
$-c = 4.b$ donc $c = 0$
$-d = -d$ donc d est quelconque
Donc, R est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. mais c'est juste nécessaire.
Mais on revient à $R^2 = D$, et on a cette fois $a^2 = 4$ et $d^2 = -1$. D'où les quatre solutions.

◁20▷ ♡ εest un réel strictement positif. La suite (a_n) vérifie $a_{n+2} = 4.a_{n+1} - (4-\varepsilon^2).a_n$ pour tout n avec $a_0 = \alpha$ et $a_1 = 2.\alpha + 2.\beta$.
Calculez a_n pour tout n.
Donnez la limite de a_n lorsque εtend vers 0 (il faudra lever une forme indéterminée).

L'équation caractéristique $\lambda^2 = 4.\lambda + (4-\varepsilon^2)$ a pour discriminant $4.\varepsilon^2$.
Ses deux racines sont $2+\varepsilon$ et $2-\varepsilon$.
On trouve que la suite est de la forme $n \longmapsto A.(2+\varepsilon)^n + B.(2-\varepsilon)^n$ avec A et B dépendant des conditions initiales.
En l'occurrence : $\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & \alpha \\ (2+\varepsilon).A & + & (2-\varepsilon).B & = & 2.\alpha+2.\beta \end{array}$
On trouve $A = \dfrac{\alpha.\varepsilon + 2.\beta}{2.\varepsilon}$ et $B = \dfrac{\alpha.\varepsilon - 2.\beta}{2.\varepsilon}$.
et donc $a_n = \dfrac{\alpha.\varepsilon + 2.\beta}{2.\varepsilon}.(2+\varepsilon)^n + \dfrac{\alpha.\varepsilon - 2.\beta}{2.\varepsilon}.(2-\varepsilon)^n$ pour tout n.

On fait tendre ε vers 0 ? Pas facile, sauf à regrouper :
$a_n = \dfrac{\alpha}{2}.(2+\varepsilon)^n + \dfrac{\alpha}{2}.(2-\varepsilon)^n + \dfrac{\beta}{\varepsilon}.\Big((2+\varepsilon)^n - (2-\varepsilon)^n\Big)$.
Déjà, $\dfrac{\alpha}{2}.(2+\varepsilon)^n + \dfrac{\alpha}{2}.(2-\varepsilon)^n$ converge vers $\alpha.2^n$.
Et $\beta.\dfrac{(2+\varepsilon)^n - (2-\varepsilon)^n}{2}$ est une forme indéterminée qui tend vers $\beta.n.2^{n-1}$.

Pourquoi ? Par la formule du binôme

◁21▷ * La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date de naissance de deux élèves vous prend une demi-seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date de naissance.
La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date d'anniversaire de deux élèves vous prend un tiers de seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date d'anniversaire.

Il faut faire $\binom{n}{2}$ tests, ce qui fait $\frac{n.(n-1)}{2}$.
On retrouve • n choix d'un premier élève.
• $n-1$ choix d'un autre élève (ne pas poser à un élève « as tu le même anniversaire que toi »
• division par 2 car si on a pris « A suivi de B », ce n'est pas la peine de prendre « B suivi de A »
Informatiquement :

```
def Test(Classe) :
....for in in range(len(Classe)) :
........for j in range(i) : #ne prendre que les élèves pas encore testés avec lui
............if anniv[i] == anniv[j] : #test à expliciter
................return False
....return True #on a tout traversé sans contre-exemple
```

Rappelons que

```
def Test(Classe) :
....for in in range(len(Classe)) :
........for j in range(len(Classe)) : #ne prendre que les élèves pas encore testés avec lui
............if anniv[i] == anniv[j] : #test à expliciter
................return False
....return True #on a tout traversé sans contre-exemple
```

conduirait à une bêtise. Quel est le seul cas où la réponse serait True ?

On note que si on s'intéresse aux dates d'anniversaires, il n'y a que 366 dates possibles.
Donc, si `len(Classe)` dépasse 367, pas la peine de lancer le test, la réponse sera « `False` ».

◁22▷ ♡ L'élève Aissé-Sontencohr-Okupéh constate que les matrices suivantes ont pour déterminant 1 ou -1 et sont leur propre inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prouvez le, y compris en taille 6.
Généralisez en donnant la forme du coefficient de ligne i colonne k et si possible en prouvant $M^2 = I_n$ *(là, ça devient ♠ ou ♣, on peut penser à l'application qui passe de $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + \ldots + a_n.X^n$ à $a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + \ldots + a_n.(1-X)^n$ et l'appliquer deux fois).*

Que ces matrices soient inversibles, c'est évident, à cause de leur déterminant égal à 1 ou -1.

Pour ce qui est d'être leur propre inverse, c'est aussi clair en calculant à chaque fois leur carré.

Maintenant, l'idée géniale. Qu'on va expliquer pour la dernière.

Si on nous donne un polynôme $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4$ on crée le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ (cinq lignes, on est dans $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$, de dimension 5).

On construit ensuite l'application $P(X) \longmapsto P(1-X)$. Elle est linéaire.

L'objet sur lequel porte la linéarité, c'est $P(X)$ et on calcule donc $\phi(P(X) + Q(X))$ et $\phi(\lambda.P(X))$.

Déterminons l'image de $P(X)$ par cette application, puis mettons la sous forme vectorielle (sur la base canonique en fait !) :

$$\phi(P(X)) = a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + a_4.(1-X)^4$$

On développe par la formule du binôme et on regroupe suivant les puissances.
Le porc écrit

$$\phi(P(X)) = a_0 + a_1 + a_2 + a_{''} + a_4 - a_1.X - 2.a_2.X - 3.a_3.X - 4.a_4.X + a_2.X^2 + 3.a_3.X^2 + 4.a_4.X^2 - a_3.X^3 - 4.a_4.X^3 + a_4.X^4$$

L'élève rigoureux écrit $\phi(P(X)) = \begin{array}{ccccc} (a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4) \\ - & (a_1 & +2.a_2 & +3.a_3 & +4.a_4).X \\ & + & (a_2 & +3.a_3 & +6.a_4).X^2 \\ & & - & (a_3 & +4.a_4).X^3 \\ & & & & +a_4.X^4 \end{array}$.

Et là, la forme matricielle de $\phi(P(X)))$ saute aux yeux, et on peut même introduire une matrice (pardon ! notre matrice)

$$\begin{pmatrix} a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 \\ & -a_1 & +2.a_2 & -3.a_3 & -4.a_4 \\ & & a_2 & 3.a_3 & +6.a_4 \\ & & & -a_3 & -4.a_4 \\ & & & & +a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & +1 & +3 & +6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

En notation où on confond le polynôme avec sa représentation vectorielle : $\phi(P(X)) = M.P(X)$. Ou plus rigoureusement $V_{\phi(P(X))} = M.V_{P(X)}$ où $V_{P(X)}$ est la représentations dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$ du polynôme de $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$.

Alors qui sera M^2 ? Ce sera la matrice de $\phi \circ \phi$.

$$V_{\phi(\phi(P(X)))} = M.V_{\phi(P(X))} = M.(M.V_{P(X)})) = M^2.V_{P(X)}$$

Et dans le même temps, qui est $\phi \circ \phi$? C'est

$$P(X) \longmapsto P(1-X) \longmapsto P(1-(1-X))$$

Simplement : $\phi \circ \phi = Id_{\mathbb{R}_4[X]}$, et sa matrice est la matrice unité. On confrme : $M^2 = Id$.

◁23▷ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Changez un coefficient pour qu'elle soit non inversible.
Ah oui, comme souvent, on travaille avec les entiers de range(7) pour les opérations modulo 7.

On calcule le déterminant de par règle de Sarrus ou développement en ligne/colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 1 - 2 = 4$$

Le déterminant est non nul (d'inverse 2), la matrice est inversible.

On calcule la matrice des cofacteurs $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

on réduit modulo 7 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ on transpose $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et divise par 4 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

On vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 14 \\ 21 & 15 & 21 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I_3$$

◁24▷ ♡ Complétez, sachant que cette matrice a un déterminant réel : $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le plus simple est de choisir un réel, et d'annuler alors le cofacteur de $1+i$: $\begin{vmatrix} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Il suffit de prendre $a = 0$. le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ est nul à cause de la relation $4.C_1 + C_2 - 3.C_3 = 0_3$.
Retrouvez la combinaison qui colle sur les lignes aussi.
Et avouez que c'est plus joli qu'un calcul de déterminant. Enfin, question de goût, c'est vrai...

Mais il y a aussi une solution, puisque nul ne nous force à prendre a réel.
Si on a $\begin{vmatrix} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 - i$, alors le produit « facteur fois cofacteur » donne un réel : $1+i).(1-i)$!

Rappel :
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A : $\det(\lambda.I_n - A)$.
- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les λ pour lesquels il existe au moins un vecteur X non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.
- Noyau d'une application linéaire f : ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.
- Noyau d'une matrice rectangulaire A (format n sur k) : ensemble des vecteurs X de taille k vérifiant $M.X = 0_n$.
- Le déterminant du produit est le produit des déterminants.
- La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

◁25▷ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés).
Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. En taille 2, c'est facile : $Com(Com(A)) = A$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour comatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Pardon ? Je pars dans le mauvais sens ? A voir...

Regardons alors « par hasard » la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est carrément raté pour les signes.

Alors on tente son opposé : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour comatrice... $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ encore...
(normal, $Com(-A) = Com(A)$ en taille 3 car on a des déterminants de taille 2, pour lesquels le signe moins ne change rien).

D'où l'idée de prendre $\begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 2.i & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Sa comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais vous vous dites que faire appel à i de carré -1, c'est tricher.

Pas tant que ça. Si on reste sur $\mathbb{R}$, il n'y aura pas de matrice dont la comatrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Je vous le prouve. Supposons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Com(A)$.

La relation $A.^t(Com(A)) = \det(A).I_3$ donne, en passant au déterminant $\det(A).\det(Com(A)) = (\det(A))^3$ puis $\det(Com(A)) = (\det(A))^2$.

Le déterminant d'une comatrice est (en taille 3) toujours un carré.

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant négatif. Elle n'est la comatrice de personne sur $\mathbb{R}$.