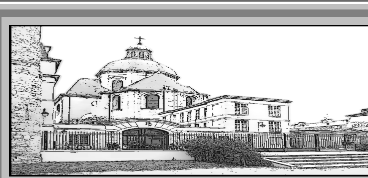
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 27 janvier
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD16

◁ 0 ▷ Un exercice d'oral des Mines propose d'étudier les matrices carrées $\boxed{M \text{ telles que } M + (Com(M))^T \text{ soit une matrice scalaire}}$ *(propriété que j'ai décidé d'appeler* Selvol*, juste pour faire référence à une citation souvent mal interprétée de ²Joseph Proudhon)*. C'est quoi une matrice scalaire ? C'est un multiple de I_n.
Résolvez déjà le problème pour n égal à 2 *(si vous trouvez un espace vectoriel, donnez sa dimension)*, sinon, donnez son cardinal.

La comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés : $Com(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ *et* $Com(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$*)*.

$\sim$0) Complétez la matrice suivante pour qu'elle vérifie la propriété $Selvol$: $\begin{pmatrix} & & 4 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

I$\sim$0) Quelles sont en taille 3 les matrices diagonales solutions de notre problème ? Forment elles un espace vectoriel ? Si oui, quelle en est la dimension ? Sinon, quel en est le cardinal ?

I$\sim$1) Écrivez un script `Python` qui prend en entrée une matrice de taille 3 (liste de listes) et répond par le booléen `True` ou `False` suivant qu'elle vérifie ou non la propriété $Selvol$ *(elle devra répondre* `False` *aussi si la matrice n'est pas de taille* 3 *sur* 3*)*.

II$\sim$0) Montrez que si A et B sont deux matrices carrées de taille n, alors on a ${}^t(A.B) = {}^t B.{}^t A$.

II$\sim$1) Montrez que si A et B sont deux matrices inversibles de taille n, alors on a $Com(A.B) = Com(A).Com(B)$.

II$\sim$2) Montrez que si A, inversible vérifie la la propriété $Selvol$, alors toute matrice semblable à A vérifie aussi la propriété.[1]

III$\sim$0) Montrez que si une matrice M vérifie la propriété $Selvol$, alors il existe deux réels λ et d vérifiant $M^2 - \lambda.M + d.I_n = 0$.

III$\sim$1) Déduisez que si une matrice diagonale D vérifie la propriété, alors elle n'a pas plus de deux valeurs différentes sur la diagonale *(comme* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *dont vous vérifierez qu'elle est correcte)*.

III$\sim$2) Quelles sont les matrices diagonalisables de taille 4 vérifiant la propriété ?

III$\sim$3) Donnez une matrice diagonalisable de taille 5, non diagonale, vérifiant la propriété $Selvol$.

IV$\sim$0) Montrez que si une matrice A vérifie la propriété $Selvol$ alors il existe deux réels α et β vérifiant $(A - \alpha.I_n).(A - \beta.I_n) = 0_n$.

IV$\sim$1) On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrez que tout vecteur U de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} - \dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ avec $\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha}$ dans $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \alpha.X\}$ et $\dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ dans $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$.

IV$\sim$2) Déduisez $\mathbb{R}^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \alpha.X\} \oplus \{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$.

1. Rappel : deux matrices M_1 et M_2 sont dites semblables si et seulement si il existe P inversible vérifiant $M_1.P = P.M_2$.

V∼0) Soit A une matrice de la forme $\mu.I_n + N$ avec $N^2 = 0_n$. Montrez que A vérifie la propriété *Selvol* si et seulement si μ est une racine $(n-2)^{ieme}$ de l'unité.

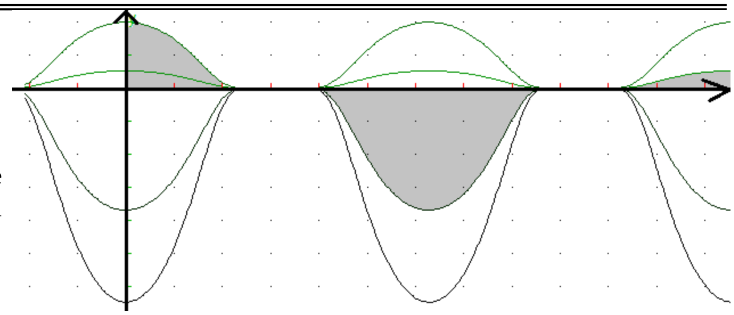
◁1▷

	Q.C.M. de Roger Mansuy prof à Saint Louis	Vrai	Faux
a	Pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=-n}^{n} (-1)^k = 0$		
b	$\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(\sum\limits_{j=i}^{n} a_i^j\Big) = \sum\limits_{j=i}^{n}\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^j\Big)$		
c	$\sum\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\equiv 1\ mod 2}} a_k = \sum\limits_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$		
d	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$		
e	$\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k)^p = \sum\limits_{p=1}^{n} (a_p)^k$		

◁2▷ Démontrez $\sum\limits_{k=0}^{n} k^5 = \dfrac{n^2.(n+1)^2.(2.n^2+2.n-1)}{12}$ puis calculez $\sum\limits_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5$ notée S.

Vous n'avez pas confiance ? Écrivez un script **Python** qui va calculer cette somme S.
♯ Vous avez confiance en vous pour la programmation : ajoutez le script qui va décomposer S *(ou tout autre nombre)* en produit de facteurs premiers.

◁3▷ Calculez $\sum\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} k.2^i$ et $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^i.3^j$.



De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t \longmapsto \exp\left(\dfrac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?

◁4▷ Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

◁5▷ Donnez une primitive de $\theta \longmapsto \cos^4(\theta)$.
Résolvez l'équation $y''_t + y_t = \cos^3(t)$ d'inconnue y fonction de t en utilisant la méthode de variation des constantes. **(source : oral C.C.P.)**

Et si vous le faisiez sans variation des constantes ? En linéarisant le second membre ?

◁6▷ Questions issues d'un Q.C.M. de Roger Mansuy.

•a• Une fonction f dérivable vérifie $f' = 2.f$ si, et seulement si, pour tout x, il existe C tel que $f(x) = C.e^{2.x}$.

•b•Si une fonction f dérivable vérifie $f' = 2.f$, alors, pour tout x, il existe C tel que $f(x) = C.e^{3.x}$.

•c•Les solutions de $y'(x) + a.y(x) = 0$ sont de la forme $x \longmapsto C.e^{a.x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

•d•Les solutions de $y'(x) = a(x).y(x)$ sont de la forme $x \longmapsto C.e^{a(x).x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

•e•Les solutions de $y''(x) - 2.y'(x) + 2.y(x) = 0$ sont de la forme $x \longmapsto e^{-x}.(A.\cos(x) + B.\sin(x))$ avec $(A,\ B) \in \mathbb{R}^2$.

•f•Soit $a > 0$. L'équation $y'(x) = a.y(x)$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

•g•L'équation $y'(x) = a.y(x)$ admet des solutions polynomiales non constantes si, et seulement si, a∈N.

•h•Soit $a > 0$. L'équation $y'(x) = a.y(x) + \sin(3.x)$ admet au plus une solution périodique.

•i• Les solutions de $y' - y = \sin(x)$ sont deux à deux proportionnelles.

•j• Les solutions de $y' + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•k• Les solutions de $y'' + a.y' = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•l• Les solutions de $y'' + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•m• La fonction $x \longmapsto e^{r.x}$ est solution de $a.y'' + b.y' + c.y = 0$ si, et seulement si, r est racine de l'équation caractéristique.

•n• Les solutions de $y'' + y' + y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

•o• La fonction $x \longmapsto arccos(x)$ est solution de $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

•p• Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \sin(2x)$ sont solutions d'une même équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels.

•q• La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants si, et seulement si, i est racine de l'équation caractéristique de cette équation.

•r• L'équation $y'' - 2.y' + 2.y = x.e^x$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x)$.ex avec P un polynôme.

•s• L'équation $y'' - 3.y' + 2.y = (x+1).e^{-x}$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x).e^x$ avec P un polynôme de degré 2.

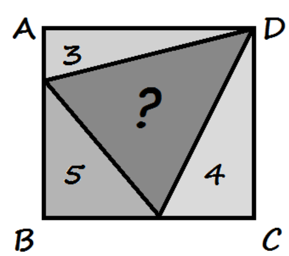
•t• L'équation $y'' - 3.y' + 2.y = \ln(x)$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x).e^{a.x}$ avec P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.

•u• Il y a une unique solution de $y'(x) = x.y(x)$ vérifiant $y(0) = 1$.

◁7▷

♡0 Donnez une équation différentielle à coefficients constants linéaire d'ordre 2 homogène dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$ et $t \longmapsto e^{t+1}.\cos(t)$.

♣0 La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5 + \sqrt{7}$.



(A,B,C,D) est un carré. On connaît les aires de trois triangles. Calculez l'aire du dernier.

◁8▷ a, b et c sont trois réels distincts.

On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} b.c & c.a & a.b \\ -b-c & -c-a & -a-b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

Calculez $V.L.D$ et $L.D.V$. Inversez V.

◁9▷ On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonalisez M sachant qu'on travaille avec $range(17)$ et les opérations modulo 17.
Combien la suite $(M^n)_{n \leqslant 2021}$ a-t-elle d'éléments ?
On travaille cette fois avec $(range(7)$ et les opérations modulo 7, montrez que M n'est pas diagonalisable. Trouvez quand même $T \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et P inversible vérifiant $M.P = P.T$ (déjà, qui est forcément a ?).

◁10▷ ♡ On définit la suite u, périodique de période 6 dont les premiers termes sont les suivants :
$(1,\ 4,\ 5,\ 2,\ 7,\ 1,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7, \dots)$. Écrivez un script `Python` qui pour n donné donne u_n.

◁11▷ ♡ La suite a vérifie $a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Trouvez a_n pour tout n.

La suite b vérifie $b_{n+2} = 3.b_{n+1} - 2.b_n - 1$ avec $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Trouvez b_n pour tout n (que pensez vous de la suite $(b_n - n)$?).
La suite c vérifie $c_{n+2} = 3.c_{n+1} - 2.c_n + 2$ avec $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Trouvez c_n pour tout n.
♠ La suite d vérifie $d_{n+2} = 3.d_{n+1} - 2.d_n + n$ avec $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$. Trouvez d_n pour tout n.

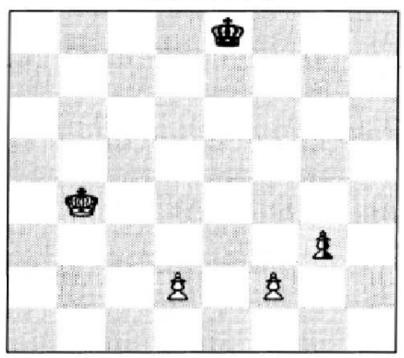
◁ 12 ▷ ♣ Construisez une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sans point fixe.
Soit u une suite réelle et σ une permutation de $\mathbb{N}$ *(bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)*. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Conseil : utiliser la quantification $\forall \varepsilon, \exists N_\epsilon, \forall n, |u_n - a| > \varepsilon \Rightarrow n < N_\varepsilon$.
Soit u une suite réelle et σ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Construisez une suite u et une surjection σ telle que u converge et $(u_{\sigma(n)})$ diverge.

"In retrograde analysis," I asked Holmes one day, "is the problem always to ascertain either the direction, the last move, or the square on which a given piece was captured?"
"Oh, by no means," replied Holmes. "The questions that arise are sometimes of a far more intriguing and bizarre nature."
"Can you give me an example?" I inquired.
Holmes thought for a moment. "Not a sufficiently elementary one for you to comprehend at your present stage. . . . But wait! I have just thought of an ideal problem for you right now!"
With a curious look of amusement, Holmes set some pieces on the board. "Wait, Watson, the position is not complete!" said Holmes as he went over to his shelf and brought back a tiny box which had often caught my eye. "I've many times had the feeling, Watson, that you were on the verge of asking me what is in this box, but politeness forbade you. Am I right?"

"Why yes, Holmes," I confessed, "I've many times wondered what is in that box."
"Well now, Watson, let us see!"
With the air of a mischievous child, or of a stage magician, he slowly and rather melodramatically opened the lid and removed, of all things, a pawn. The pawn was identical in shape to the pawns of Holmes's chess set, only this pawn was painted half black and half white.
"Where on earth did you get that?" I laughed.
"Oh, Watson, I keep this as a memento of the little problem I am about to show you." So saying, Holmes placed the mysterious pawn on g3, and the position was this:

"In this game," said Holmes, "no piece or pawn has ever moved from a white square to a black square, nor from a black square to a white square. The question is: What is the color of the pawn on g3?"
"That's easy," I jested. "The pawn on g3 is Black and White!"
"No, seriously," laughed Holmes, "what color pawn—Black or White—should be put on g3 to make the position compatible with the given conditions?"
I looked, but could see no clue at all. A thought struck me: "You say that no piece has ever moved from a square of one color to a square of another. Under these circumstances, how could the knights have ever moved?"
"Good point, Watson, good point! Obviously, they never did!"
"Then whatever happened to them?"
"Clearly they were captured on their own squares."

Black-1 or 2



White-3 or 4

This struck me as a trifle odd, to say the least, but as certainly within the realm of possibility. "Is this a hint to the solution?" I asked.
"No, Watson, not to this problem—though it does figure in some other problems of this type."
"Then I am completely in the dark; I see no clue whatsoever."
"The clue," Holmes remarked, "is in the position of the White king."
"The White king!" I exclaimed. "The White king could have come from any of the four squares a3, a5, c5, or c3."
"Yes, yes," said Holmes, "but how did he ever escape from his home square, e1?"
I looked at the position, perplexed. The king could not have escaped via the black squares d2 or f2, since the pawns there had not yet moved. And, of course, he could not have escaped via the squares d1, e2, or f1, since they are white. So how did he get out? Then I saw it: "White castled," I said triumphantly.

"Excellent, Watson! Did he castle on the king's side or the queen's side?"
I thought for a moment and said, "On the king's side."
"Why?" asked Holmes.
"Because had he castled on the queen's side, the queen's rook would have had to move from a1—a black square—to d1—a white square."
"Better and better," cried Holmes. "Now, does that not solve the mystery of our little pawn?"
"I don't see how, Holmes," I replied, but then I suddenly saw it: "Of course! The only way the king could get from g1 to his present position is via the squares h2 and g3. If the pawn on g3 is White, then it must have come from h2, and the king could never have got out! So the mystery pawn must be Black."
"Now, Watson," he said, "you are really beginning to get the hang of retrograde analysis!"

◁ 13 ▷

◁ 14 ▷ On rappelle la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe $(G, *)$ de neutre e : $Ord(a) = Inf\{n > 0 \mid a^n = e\}$ (si un tel n existe).
On suppose que $(G, *)$ est commutatif
a est d'ordre 5 et b d'ordre 7.
Montrez que $a * b$ est d'ordre 35.
Montrez que ce n'est plus forcément vrai si $(G, *)$ n'est pas commutatif.

◁ 15 ▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{\sum\limits_{\substack{k \leqslant 2.n \\ k \text{ pair}}} k}{\sum\limits_{\substack{k \leqslant 2.n \\ k \text{ impair}}} k}$.

◁ 16 ▷ ♡ N est un entier naturel fixé. Montrez que les suites $\left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{2^n}{N+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{2^N}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

◁ 17 ▷ Calculez $S_n = \sum\limits_{0\leq p\leq q\leq n} 2^p.3^q$. Calculez $O_n = \sum\limits_{\substack{0\leq p\leq n \\ 0\leq q\leq n}} 2^q.3^p$. Calculez $H_n = \sum\limits_{0\leq q\leq n} 2^q.3^q$. Calculez $E_n = \sum\limits_{0\leq p\leq n} 2^{2.p}.3^{3.p}$.
Calculez $L_n = \sum\limits_{0\leq p\leq q\leq n} 2^q.3^q$ (attention, q a son rôle, c'est un compteur).

◁18▷ Lesquels de ces programmes calculent un p.g.c.d. :

A
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

B
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a%b, b
....return a
```

C
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a, a%b
....return a
```

D
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........(a, b) = (b, a%b)
....return a
```

E
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, b%a
....return a
```

F
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........(a, b) == (b, a%b)
....return a
```

G
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a = b
........b = a%b
....return a
```

H
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........b = a%b
........a = b
....return a
```

I
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

◁19▷ On définit $x \longmapsto [x] * sin^2(\pi.x)$. Est elle continue en tout point ?
Est elle dérivable en tout point ?

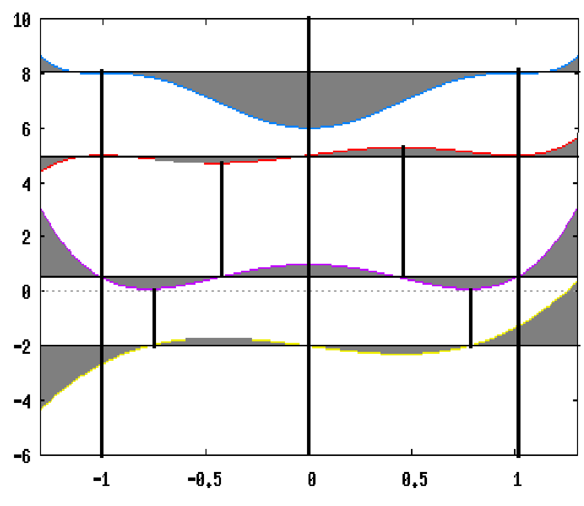
◁20▷ En quels points l'application $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \cos(x) & si & x \in \mathbb{Q} \\ \sin(x) & si & x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right|$ est elle continue ?

En quels points l'application $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \cos(x) & si & x \in \mathbb{Q} \\ \sin(x) & si & x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right|$ est elle dérivable ?

En quels points l'application $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \cos(x) & si & x \in \mathbb{Q} \\ -\cos(x) & si & x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right|$ est elle continue ?

En quels points l'application $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \cos(x) & si & x \in \mathbb{Q} \\ -\cos(x) & si & x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right|$ est elle dérivable ?

Pour tout n, on pose $H_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = (H_n)^{(n)}$.
Calculez P_n pour n de 0 à 3 .
Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant et sa parité[a]
Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $(H_n)^{(k)}(1) = 0$.
Montrez que pour tout k de 0 à $n-1$, $(H_n)^{(k)}$ admet $k+2$ racines réelles distinctes entre -1 et 1.
Déduisez que les n racines du polynôme P_n sont entre -1 et 1. Calculez leur somme, et leur produit.
Écrivez un script **Python** qui pour n donné rend la liste des coefficients du polynôme P_n.



[a]. et surtout, surtout, ce n'est pas parce qu'on a calculé les premiers qu'il faut avoir le réflexe "je vais faire une récurrence"

◁21▷

si le polynôme P de degré d admet d racines réelles, alors les racines du polynôme P' sont intercalées entre les racines de P.

Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.

Montrez pour z dans $\mathbb{C} - \{a, b, c, d\}$: $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{1}{z-b} + \dfrac{1}{z-c} + \dfrac{1}{z-d}\right)} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2} + \dfrac{z-d}{|z-b|^2} + \dfrac{z-c}{|z-c|^2} + \dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.

Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \dfrac{\lambda_1.a + \lambda_2.b + \lambda_3.c + \lambda_4.d}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$.

Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

Soit f n fois dérivable de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, admettant la même valeur en $n+1$ points, alors il existe au moins un point où $f^{(n)}$ s'annule.

On définit pour tout n : $P_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ Montrez que chaque $P_n$est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant, sa parité, et montrez qu'il a n racines, toutes entre -1 et 1.

◃22▹ Soient A et B deux ensembles. On définit $A \Subset B$ si il existe une application injective de A dans B.
♡ Montrez que cette relation est transitive et réflexive, mais pas symétrique ni antisymétrique (contre-exemples).

♠0♠ On veut maintenant montrer que si il existe une application injective f de A dans B et une application injective g de B dans A alors il existe au moins une bijection de A dans B.

On rappelle

pour $X \subset A$	on définit	$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ y = f(a)\}$
X partie de A		$f(X)$ partie de B
pour $Y \subset B$	on définit	$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$
Y partie de B		$f^{-1}(Y)$ partie de A

On rappelle que la notation $f^{-1}(Y)$ ne s'applique qu'à une partie et qu'on ne peut écrire $x = f^{-1}(y)$ que si f est bijective, ou à la rigueur y dans $f(X)$ (ensemble image, y a au moins un antécédent) et f injective (pour qu'il n'y ait pas d'ambigüité sur le choix de x).

Montrer que si $g(B)$ est égal à A alors g est une bijection de B dans A.

♠1♠ On suppose donc $g(B) \neq A$. On pose $X_0 = A - g(B)$ (c'est à dire $X_0 = \{a \in A \mid \forall b \in B,\ g(b) \neq a\}$). Justifiez l'existence de la suite d'ensembles (X_n) définie par $\forall n,\ X_n = g(f(X_n))$. Montrez que chaque X_n est une partie non vide de A non vide, de même que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

♠2♠ On pose enfin $X' = A - X$. Quantifiez $a \in X'$.

♠3♠ Montrez : $\forall x \in X,\ g(f(x)) \in X$.

♠4♠ Justifiez $\forall a \in X',\ \exists! b \in B,\ a = g(b)$.

On définit alors φ sur A par $\varphi(a) = f(a)$ si $a \in X$ et $\varphi(a)$ est l'unique antécédent de x par g si a est dans X' (voir question précédente).

♣0♣ Pour se mettre en situation le temps d'une question : $A = B = \mathbb{N}$ et $f = g = n \longmapsto n+1$ pouvez vous déterminer X, X' et φ ?

♠5♠ Justifiez : $\varphi(X') = g^{-1}(X')$ et $\varphi(X) = f(X)$.

♠6♠ Montrez : $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \emptyset$.

♠7♠ Montrez par disjonction de cas $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ \varphi(a) = \varphi(\alpha) \Rightarrow a = \alpha$

	$a \in X$	$a \in X'$
$\alpha \in X$		
$\alpha \in X'$		

♠8♠ Montrez par disjonction de cas : $\forall y \in B,\ \exists a \in A,\ \varphi(a) = y$

$g(y) \in X'$	$g(y) \in X$

♠9♠ Concluez.

◃23▹ Une suite de Skolem d'ordre n, du nom du mathématicien norvégien Thoralf Skolem qui les a étudiées en 1957, est une suite finie de $2.n$ entiers, constituée des entiers de 1 à n répétés chacun deux fois, les deux occurrences d'un entier k étant distantes de k.

Une suite de Langford, du nom de C. Dudley Langford qui a posé le problème de leur construction en 1958, en est la variante où les occurrences de k sont distantes de $k+1$ (autrement dit il y a k nombres entre les deux occurrences de k).

Par exemple, (4,2,3,2,4,3,1,1) est une suite de Skolem d'ordre 4 et (2,3,1,2,1,3) une suite de Langford d'ordre 3.

Donnez une suite de Skolem et une suite de Langford d'ordre 12.

Ecrivez une procédure Python qui teste si une suite est de Skolem.

Il existe une suite de Skolem d'ordre n si et seulement si n est congru à 0 ou 1 modulo 4. (Cette restriction tombe dans le cas des "suites de Skolem étendues", comprenant en plus l'entier 0).

La restriction analogue pour les suites de Langford est : n congru à 0 ou 3 modulo 4.

◁24▷ Tous les polynômes sont constants. On va prouver que $(P_n)' = 0$ pour tout n et tout polynôme de degré n..
On initialise à 0 : les polynômes de degré 0 sont constants. Ils ont une dérivée nulle.

On se donne n et on suppose que tous les polynômes de de degré inférieur ou égal à n ont une dérivée nulle.
On prend P de degré $n+1$. On va montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec X et Q de degré inférieur ou égal à n.
On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme U' et V' est nul, la somme est nulle.
On somme : P' est nulle.
Trouvez l'erreur.

◁25▷ ♡ Inversez $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$, après l'avoir complétée par un entier, sachant que son inverse est à coefficients entiers *(que vaut son déterminant ?)*. Oui, il y a deux solutions.

◁26▷ ♣ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez son déterminant puis son inverse *(pensez à la voir comme matrice d'un changement de base)*.
Calculez $det(A + I_6)$.
♣ Quelles valeurs peut prendre $\det(A + I_6)$ quand A décrit l'ensemble des permutations de taille 6 ?
♣♠ Même question en taille n.

◁27▷ On sait : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 3 \\ 2 & -1 & \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent.

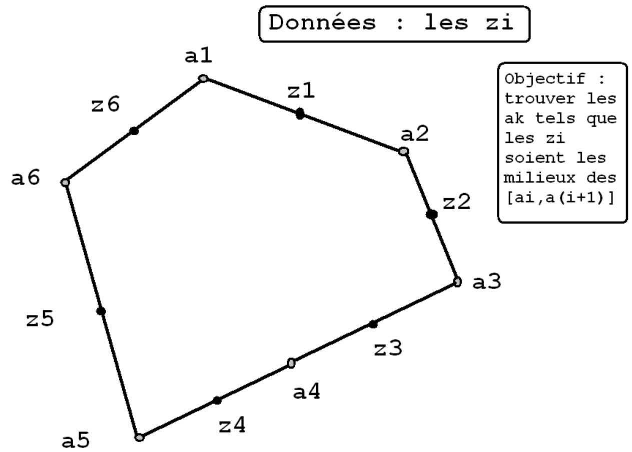
◁28▷ Rappel : on inverse les matrices carrées en calculant leur comatrice : $M^{-1} = \dfrac{{}^tCom(M)}{\det(M)}$ où la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés.

Utilisez cette méthode pour inverser $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en calculant déjà sa comatrice (attention aux signes devant les comatrices) et le produit $M.^t(Com(M))$.

◁29▷ ♡ Complétez ce qui manque : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \end{pmatrix}$.

◁30▷ ♡ Dérivez cette application (comptez bien) $(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$.

◁31▷ ♡ Complétez $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^3$ sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,0,1)$ et que $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ a les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

◁32▷ On se donne 9 points A_1 à A_9 dans le plan complexes, d'affixes z_1 à z_9. Montrez qu'il existe une unique famille de points M_1 à M_9 tels que les A_k soient les milieux des côtés du polygone $(M_1, \dots M_9)$.

A-t-on le même résultat pour dix points ?

Un vendangeur m'a véhiculé. Il shootait en priant. Les fées sont légion ! Le latiniste spécialiste de Crassus enquête beaucoup. Ils a des escargots lents (translation). Fidèles à Sion au présent (translation). La nausée est russe. J'ai croqué bien des galettes. Les phobies perturbent les ames. A-t-on des tenues pour caté ? Des belles hôtesses en France passent en montrant une belle assurance. L'arène pistée. Il n'a plus de foot, c'est pas un crado (translation) ! Les astronautes contrôlent l'orbite quand ils veulent. Vous aimez les rixes ? Plutôt céder !

◁33▷ Soit $(G, *)$ un groupe et A un sous-groupe de G. On définit :
$N(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A\}$ et $C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$.
Montrez que ce sont des sous-groupes de $(G, *)$.
Déterminez $N(A)$ et $C(A)$ pour $A = \{e\}$ *(sous groupe réduit au neutre).*

◁34▷ $(G, *)$ est un groupe. On enlève un élément, ça reste un groupe. Qui est G ?
$(G, *)$ est un groupe. On enlève deux élément, ça reste un groupe. Qui est G ? (deux solutions)
On pourra utiliser le théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

◁35▷ Pouvez vous trouver un groupe $(G, *)$ et trois sous-groupes stricts de $(G, *)$ E, F et H vérifiant $E \cup F \cup H = G$? (indication : cardinal 4 devrait suffire, si si).

◁36▷ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A^T.B)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices de taile 2 sur 2.

On définit les quatre matrices suivantes : : $(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})$.

Déterminez leur angle deux à deux.
Déterminez l'angle de chacun avec leur moyenne.

Rappel : produit scalaire : application qui prend deux éléments $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans un espace vectoriel et calcule un réel
forme : $(E,\ E) \to \mathbb{R}, (\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \longmapsto < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} >$
symétrique : $\forall (\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} > = < \overrightarrow{b} \mid \overrightarrow{a} >$
bilinéaire : $\forall (\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) \in E^3,\ < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} > = < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} > + < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} >$
et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ < \overrightarrow{a} \mid \lambda.\overrightarrow{b} > = \lambda. < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} >$
défini positive : $\forall \overrightarrow{a} \in E,\ < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{a} >> 0$ (sauf pour $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$).

Pour le passage $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow < \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{a} >> 0$ (qui dit aussi $< \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{a} > = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ par contraposée),
on pourra utiliser suivant l'exercice :
- *une somme de carrés de réels est nulle et et seulement si chacun est nu*
- *l'intégrale sur $[a,\ b]$ ($a < b$) d'une application continue positive est nulle si et seulement si l'application est identiquement nulle*
- *un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a plus de n racines est nul*
- *un polynôme qui est nul sur tout un intervalle non réduit à un point est nul partout*

◁37▷ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A^T.B)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices à deux lignes et trois colonnes.
Montrez que les six matrices de la base canonique forment une famille orthonormée.

$$(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

◃ 38 ▹ ♡ Montrez que $(X,\ Y)\ \longmapsto^t\ X.S.Y$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $|\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}| = \sqrt{5}$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}}) = \sqrt{6}/3$ (retrouvez déjà la matrice).

◃ 39 ▹ $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(k).Q^{(k)}(k)$ est il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?
Qeulle est la norme de chacun des trois vecteurs 1, X, X et X^3 ? Quels angles font ils entre eux

---

◃ 40 ▹ L'application $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k)$ est elle un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

L'application $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k+1)$ est elle un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

◃ 41 ▹ Montrez que $(f,\ g)\ \longmapsto\ \int_1^1 f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $[-1,\ 1]$ dans \R .
Montrez que $(f,\ g)\ \longmapsto\ \int_1^1 \frac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $[-1,\ 1]$ dans \R .
Montrez que l'angle entre Id et $t \longmapsto 1$ est le même pour les deux produits scalaires, mais que les deux vecteurs n'ont pas la même norme.
Donnez un vecteur (une fonction) dont la norme augmente quand on passe de la première norme[2] à la seconde.
Donnez une fonction dont la norme diminue par cette transformation.
Montrez que les polynômes de Tchebytchev forment une famille orthogonale pour l'un des deux produits scalaires (changement de vriable dans l'intégrale).

◃ 42 ▹ On définit $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x.x' + 5.y.y' + 6.z.z' - 2.(x.y' + x'.y) - 4.(y.z' + y'.z) + (x.z' + x'.z)$ pour tout couple de vecteurs de $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Pour la positivité de $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$, pensez déjà à développer$(x-2.y+z)^2$ puis à voir si ce qu'il reste n'est pas aussi une somme de deux carrés.

Donnez la norme de chaque vecteur de la base canonique. Donnez un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Donnez un vecteur non nul du plan $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ faisant le même angle avec chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Donnez un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$ mais de norme 1.
Donnez un vecteur dans l'ensemble des vecteurs de la forme $\overrightarrow{j} + \lambda.\overrightarrow{i}$ un vecteur orthogonal au premier vecteur trouvé.
Donnez un vecteur dans l'ensemble des vecteurs de la forme $\mu.\overrightarrow{j} + \nu.\overrightarrow{i}$ un vecteur de norme 1, orthogonal au premier vecteur trouvé.
Donnez un vecteur de la forme $\overrightarrow{k} + \lambda.\overrightarrow{i} + \lambda'.\overrightarrow{j}$ orthogonal aux deux premiers vecteurs trouvés.

Donnez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dont la matrice de passage vers la base canonique soit triangulaire supérieure.

---

2. ou plutôt de la norme issue du premier produit scalaire