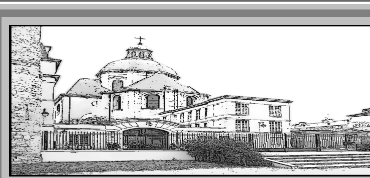
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 27 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025

TD16

◃0▹ Un exercice d'oral des Mines propose d'étudier les matrices carrées $\boxed{M \text{ telles que } M+^t(Com(M)) \text{ soit une matrice scalaire}}$ *(propriété que j'ai décidé d'appeler* Selvol*, juste pour faire référence à une citation souvent mal interprétée de ²Joseph Proudhon).* C'est quoi une matrice scalaire ? C'est un multiple de I_n.

Résolvez déjà le problème pour n égal à 2 *(si vous trouvez un espace vectoriel, donnez sa dimension)*, sinon, donnez son cardinal.

On travaille en dimension 2, avec une matrice M qu'on écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $Com(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ (on ne transpose pas encore, mais on n'oublie pas les signes moins).

On calcule : $M+^t(Com(M)) = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$. Elle est toujours multiple de I_2.

On a donc $\boxed{S = M_2(\mathbb{R}), \text{ c'est un espace vectoriel de dimension } 4}$.

∼0) Complétez la matrice suivante pour qu'elle vérifie la propriété *Selvol* : $\begin{pmatrix} & & 4 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

On part de la matrice A : $\begin{pmatrix} a & b & 4 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ et on calcule sa comatrice : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9.b-16 & 9.a & 4.a \\ 12.b+20 & -12.a & -5.a \end{pmatrix}$.

On transpose et on somme : $A+^t(Com(A)) = \begin{pmatrix} a+3 & -8.b-16 & 12.b+24 \\ 0 & 9.a-5 & 12-12.a \\ 0 & 4.a-4 & 9-5.a \end{pmatrix}$

On impose : $a=1$ et $b=-2$: $\boxed{A+^t(Com(A)) = 4.I_3}$ la matrice $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}}$ convient.

I∼0) Quelles sont en taille 3 les matrices diagonales solutions de notre problème ? Forment elles un espace vectoriel ? Si oui, quelle en est la dimension ? Sinon, quel en est le cardinal ?

On prend une matrice de taille 3, diagonale : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. On calcule :

$M+^t(Com(M)) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b.c & 0 & 0 \\ 0 & a.c & 0 \\ 0 & 0 & a.b \end{pmatrix}$ *(pas mal des déterminants de taille 2 sont nuls).*

Déjà, elle est diagonale. Mais de là à ce qu'elle soit scalaire, il reste un pas à franchir.

On doit avoir $\boxed{a+b.c = b+a.c = c+a.b}$ ce qui n'est pas forcément facile à avoir.
Certes, il y a le cas $a=b=c$ *(la matrice est déjà scalaire).*
Mais il se peut qu'il y en ait d'autres.
Que pensez vous de $(a,\ b,\ c) = (0,\ 1,\ 1)$?
On cherche donc les triplets vérifiant $a+b.c = b+a.c = c+a.b$.
On part déjà de $a+b.c = b+a.c$ qui donne $(a-b) = c.(a-b)$.
On a donc deux cas : $\boxed{a=b}$ ou $\boxed{c=1}$
Mais on a aussi $a+b.c = c+a.b$ qui donne $\boxed{a=c}$ ou $\boxed{b=1}$

On étudie donc les quatre cas

	$a=b$	$c=1$
$a=c$	$a=b=c$ connu	$a=c=1$ et b quelconque
$b=1$	$a=b=1$ et c quelconque	$b=c=1$ et a quelconque

On a raisonné par conditions nécessaires, elles s'avèrent suffisantes :

forme	vérification
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = (a+a^2).I_3$
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = (1+a).I_3$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = (1+b).I_3$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1+c).I_3$

Les solutions ne forment pas un espace vectoriel. En effet, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions *(elles vérifient $M +^t (Com(M)) = I_3$ pour l'une et $M +^t (Com(M)) = 2.I_3$ pour l'autre)*, mais leur somme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $M +^t (Com(M)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
cet ensemble est de cardinal infini.

I∼1) Écrivez un script **Python** qui prend en entrée une matrice de taille 3 (liste de listes) et répond par le booléen **True** ou **False** suivant qu'elle vérifie ou non la propriété *Selvol* *(elle devra répondre **False** aussi si la matrice n'est pas de taille 3 sur 3)*.

On teste d'abord que la matrice passée en paramètre a bien trois lignes, et que chaque ligne est de taille 3.
On peut ensuite créer une procédure qui construit la transposée de la comatrice, puis effectuer deux tests :
- chaque somme des termes hors de la diagonale est égale à 0
- les sommes des termes diagonaux sont égales.

On peut essayer une formule générale pour les termes de la comatrice, mais c'est un peu inutile :

```
def Comt(M) : #construit la transposée de la comatrice
....C = [[0 for k in range(3)] for i in range(3)] #on crée tCom(A)
....C[0][0] = M[1][1]*M[2][2]-M[1][2]*M[2][1] #on calcule les termes diagonaux
....C[1][1] = M[0][0]*M[2][2]-M[0][2]*M[2][0]
....C[2][2] = M[0][0]*M[1][1]-M[0][1]*M[1][0]
....C[0][1] = -M[0][1]*M[2][2]+M[2][1]*M[0][2] #et même hors de la diagonale
....C[0][2] = M[0][1]*M[1][2]-M[1][1]*M[0][2]
....C[1][0] = -M[1][0]*M[2][2]+M[2][0]*M[1][2]  #je vais me marrer à corriger ça
....C[1][2] = -M[0][0]*M[1][2]+M[1][0]*M[0][2]
....C[2][0] = M[1][0]*M[2][1]-M[2][0]*M[1][1]  #déjà, aurez vous mis neuf instructions ?
....C[2][1] = -M[0][0]*M[2][1]+M[2][0]*M[0][1]
....return C
```

Maintenant un test pour savoir si les termes d'une liste sont tous nuls :

```
def Tous_nuls(L) :
....for x in L :
........if x != 0 :
............return False
....return True
```

et un test pour savoir si tous les éléments d'une liste sont égaux *(au premier d'entre eux)* :

```
def Tous_egaux(L) :
....for x in L :
.......if x != L[0] : #si ne serait ce qu'un est non nul
...........return False #on sort définitivement par return
....return True #aucune boucle ne nous a fait sortir, la liste est bonne
```

On a tout mis en place. On prend une matrice A. On vérifie ses formats. On construit sa comatrice. On dresse les liste des termes hors-diagonale de $A +^t (Com(A))$. On dresse la liste des termes diagonaux de $A +^t (Com(A))$. On teste si tous les termes de la première sont nuls et si tous les termes de la seconde sont égaux.

```
def Test_Selvol(A) :
....if len(A) != 3 : #a-t-on trois ligne ?
........return False #la sortie par return est définitive
....if ((len(A[0]) == 3)*(len(A[0]) == 3)*(len(A[0]) == 3)) == 0 :
........return False #l'une des trois lignes a un booléen égal à 0, mauvais format
....C = Comt(A)
....HorsDiag = [] #on initialise une liste des termes "hors-diagonale"
....SurDiag = [] #on initialise une liste des termes "sur la diagonale"
....for i in range(3) :
........for k in range(3) : #on va parcourir toute la matrice
............if i != k : #terme hors diagonale"
................HorsDiag.append(A[i][k]+C[i][k])
............else : #terme "sur la diagonale"
................SurDiag.append(A[i][k]+C[i][k])
....return(Tous_nuls(HorsDiag) and Tous_egaux(SurDiag)) #test final
```

Il va de soi qu'il y a bien d'autres possibilités.

II∼0) Montrez que si A et B sont deux matrices carrées de taille n, alors on a ${}^t(A.B) =^t B.^t A$.

On commence par un lemme qui est du cours. On prend deux matrices de termes généraux a_i^k et b_i^k. On calcule la matrice produit $A.B$ et on écrit le terme général des matrices transposées :

matrice	A	B	${}^tA$	${}^tB$	$A.B$	${}^t(A.B)$	${}^tB.{}^tA$
terme général	a_i^k	b_i^k	$\alpha_i^k = a_k^i$	$\beta_i^k = b_k^i$	$c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$	$\gamma_i^k = c_k^i$	$d_i^k = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j.\alpha_j^k$

On explicite $d_i^k = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j.\alpha_j^k = \sum_{j=1}^{n} b_j^i.a_k^j = c_k^i = \gamma_i^k$.

Les matrices ${}^tB.{}^tA$ et ${}^t(A.B)$ ont les mêmes termes généraux, elles sont égales.

II∼1) Montrez que si A et B sont deux matrices inversibles de taille n, alors on a $Com(A.B) = Com(A).Com(B)$.

On prend deux matrices inversibles A et B. Leur produit l'est aussi, et on sait par le cours : $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ *(qu'on prouve en calculant $(A.B).(B^{-1}.A^{-1})$).*

Mais le cours nous donne aussi les formules explicites pour les inverses :

$A^{-1} = \dfrac{{}^t(Com(A))}{\det(A)}$	$B^{-1} = \dfrac{{}^t(Com(B))}{\det(B)}$	$(A.B)^{-1} = \dfrac{{}^t(Com(A.B))}{\det(A.B)}$

En reportant dans la formule au dessus, on a $\dfrac{{}^t(Com(B))}{\det(B)}.\dfrac{{}^t(Com(A))}{\det(A)} = \dfrac{{}^t(Com(A.B))}{\det(A.B)}$

On simplifie par $\det(A).\det(B)$ *(non nul et égal à $\det(A.B)$)* et on trouve ${}^t(Com(A.B)) =^t (Com(B)).^t(Com(A))$

On utilise le résultat du lemme : ${}^t(C.D) =^t D.^tC$. On a alors ${}^t(Com(A.B)) =^t (Com(A).Com(B))$.

On transpose à nouveau : $Com(A.B) = Com(A).Com(B)$.

Pour cette question, le sujet de concours donnait une piste : "quel est le lien entre $Com(A)$ et A^{-1}".
Mais en tout cas, je me demande ce qu'il est advenu des élèves qui auront tenté une démonstration en revenant aux déterminants de taille $n-1$ qui forment les comatrices. Ce sont ceux là qui ne peuvent progresser en mathématiques, car ils se bornent à prendre des définitions et à les appliquer sans aller plus loin. Comme ils le faisaient en Terminale.
Et je ne sais que penser même de ceux qui auront prouvé la propriété en taille 2 et auront tenté (ou même affirmé) de la démontrer par récurrence sur la dimension des matrices.

II$\sim$2) Montrez que si A, inversible vérifie la la propriété $Selvol$, alors toute matrice semblable à A vérifie aussi la propriété.[a]

[a] Rappel : deux matrices M_1 et M_2 sont dites semblables si et seulement si il existe P inversible vérifiant $M_1.P = P.M_2$.

On prend à présent une matrice inversible A vérifiant la propriété $Selvol$: $A +^t (Com(A)) = \lambda.I_n$ pour un certain λ.
On prend alors une matrice B semblable à A. Elle s'écrit $P.A.P^{-1}$ pour une matrice inversible P.
On a alors $Com(B) = Com(P.A.P^{-1}) = Com(P).Com(A).Com(P^{-1})$ par le résultat précédent *(appliqué deux fois)*.
On transpose : ${}^tCom(B) =^t Com(P^{-1}).{}^tCom(A).{}^tCom(P)$.
On remplace, en utilisant $P^{-1} = \dfrac{{}^t(Com(P))}{\det(P)}$. :
${}^tCom(B) = \Big(\det(P^{-1}).(P^{-1})^{-1}\Big).{}^tCom(A).\Big(\det(P).P^{-1}\Big)$.
Les deux complexes $\det(P)$ et $\det(P^{-1})$ peuvent être repoussés au début *(formule $M.a.N = a.M.N$ si a est un nombre)*. Il reste ${}^t(Com(B)) = P.{}^tCom(A).P^{-1}$.
On somme : $B +^t (Com(B)) = P.A.P^{-1} + P.{}^tCom(A).P^{-1}$.
On factorise : $B +^t (Com(B)) = P.\Big(A + {}^tCom(A)\Big).P^{-1}$.
On utilise l'hypothèse sur A *(il ne faut pas la prendre et taper dessus mais avoir à l'esprit qu'on va l'utiliser à un moment)* :

$$\boxed{B +^t (Com(B)) = P.\Big(\lambda.I_n\Big).P^{-1} = \lambda.I_n}$$

On reconnaît que la matrice B vérifie la propriété $Selvol$.

III$\sim$0) Montrez que si une matrice M vérifie la propriété $Selvol$, alors il existe deux réels λ et d vérifiant $M^2 - \lambda.M + d.I_n = 0$.

On prend une matrice A vérifiant la propriété : $A +^t (Com(A)) = \lambda.I_n$ pour un réel λ.
On multiplie par A *(à gauche par exemple, mais c'est sans importance)* : $A^2 + A.{}^t(Com(A)) = \lambda.A.I_n$. On trouve $A^2 + d.I_n = \lambda.A$ avec $d = \det(A)$.
C'est bien une équation de degré 2 dont A est solution.

III$\sim$1) Déduisez que si une matrice diagonale D vérifie la propriété, alors elle n'a pas plus de deux valeurs différentes sur la diagonale *(comme* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *dont vous vérifierez qu'elle est correcte)*.

On prend D de termes diagonaux α_1 à α_n, ce qu'on écrit naturellement : $D = Diag(\alpha_1, \dots \alpha_n)$. On a alors $D^2 = Diag((\alpha_1)^2, \dots (\alpha_n)^2)$ et même $D^k = Diag((\alpha_1)^k, \dots (\alpha_n)^k)$ pour tout k par récurrence évidente.
On somme : $D^2 + d.I_n = Diag((\alpha_1)^2 + d, \dots (\alpha_n)^2 + d)$.
On égalise avec $\lambda.D$: $(\alpha_i)^2 + d = \lambda.\alpha_i$ pour tout i.
C'est ce que donne avec des points de suspension $D^2 + d.I_n = \begin{pmatrix} (\alpha_1)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\alpha_n)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d \end{pmatrix}$ et $\lambda.D = \begin{pmatrix} \lambda.\alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda.\alpha_n \end{pmatrix}$ et on a bien $\boxed{\alpha^2 - \lambda.\alpha + d = 0}$ pour chaque coefficient diagonal α.
Il est inutile de résoudre l'équation, il suffit de dire qu'elle n'a que deux racines possibles.
Les α_j ne peuvent prendre que deux valeurs.

Mais attention, la condition n'est que nécessaire et nullement suffisante. Mais il est si difficile de passer le cap du "je calcule" à "je raisonne".

On note alors α et β les deux valeurs diagonales de la matrice D : $D = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix}$ avec p coefficients α et q coefficients β.
La matrice $Com(D)$ est encore diagonale. Ses termes diagonaux sont des déterminants où l'on a effacé un α ou un

$$\beta\ :\ {}^t(Com(D)) = Com(D) = \begin{pmatrix} \alpha^{p-1}.\beta^q & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha^{p-1}.\beta^q & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha^p.\beta^{q-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha^p.\beta^{q-1} \end{pmatrix}.$$

On somme, on a une matrice diagonale dont les deux coefficients diagonaux sont $\alpha + \alpha^{p-1}.\beta^q$ et $\beta + \alpha^p.\beta^{q-1}$. On veut qu'elle soit "scalaire", ce qui revient à demander $\alpha + \alpha^{p-1}.\beta^q = \beta + \alpha^p.\beta^{q-1}$.
On fait passer d'un côté : $\alpha - \beta = (\alpha - \beta).\alpha^{p-1}.\beta^{q-1}$.

On met de côté le cas où α est égal à β *(matrice déjà scalaire, elle est solution)*, on aboutit à $\boxed{\alpha^{p-1}.\beta^{q-1} = 1}$

C'est une condition nécessaire et suffisante.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ est de la forme voulue, avec $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $p = 3$ et $q = 2$.

On peut vérifier : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est scalaire.

III∼2) **Quelles sont les matrices diagonalisables de taille 4 vérifiant la propriété ?**

On cherche la forme des matrices diagonales en taille 4 en étudiant les différents cas, avec α et β, l'une de multiplicité p et l'autre de multiplicité $q = 4 - p$. Comme les rôles sont symétriques, on peut se limiter à p de 0 à 2.

p	forme	condition	vérification	exemple
4	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	aucune	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\alpha^2.\beta^0 = 1$	$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\alpha^1.\beta^1 = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\beta = \pm1$ et α quelconque	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	
0	$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	β quelconque	$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^3 \end{pmatrix}$	

On passe de « diagonale » à diagonalisable » par « matrices semblables ».

III∼3) **Donnez une matrice diagonalisable de taille 5, non diagonale, vérifiant la propriété *Selvol*.**

On veut construire un exemple en taille 5.

Il faut une matrice diagonalisable. La méthode n'est pas de partir au hasard ni de se lamenter "c'est trop dur cette question, les calculs sont infaisables".

Une matrice diagonalisable, c'est une matrice semblable à une matrice diagonale. C'est donc une matrice de la forme $P.D.P^{-1}$. C'est tout.
Il suffit donc de $\boxed{\text{choisir } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale}}$
Pour que M vérifie le critère, il faut et il suffit que D le vérifie car M et D sont semblables.
On doit donc juste trouver une matrice D vérifiant la propriété et la déplacer par une matrice inversible P.
On ne peut pas prendre D de la forme $\lambda.I_5$, car alors on a $P.D.P^{-1} = \lambda.I_5$ qui est restée diagonale.
On doit donc prendre une autre forme. Avec par exemple trois α et deux β sur la diagonale, et la relation $\alpha^2.\beta^1 = 1$.

On prend $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ *(on peut vérifier)*.

On prend P inversible par exemple $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On dit que la réponse est $P.D.P^{-1}$ et si on a du temps à perdre, on la calcule :

$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

IV∼0) Montrez que si une matrice A vérifie la propriété *Selvol* alors il existe deux réels α et β vérifiant $(A - \alpha.I_n).(A - \beta.I_n) = 0_n$.

On suppose que la matrice A vérifie la propriété. Par condition nécessaire, on sait que A est annulé par un polynôme de la forme $X^2 + d.1 - \lambda.X$: $A^2 + d.I_n = \lambda.A$.
On note α et β les deux racines de ce polynôme :
on a alors $X^2 + d.1 - \lambda.X = (X - \alpha).(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta).X + \alpha.\beta$.
On constate alors $(A - \alpha.I_n).(A - \beta.I_n) = A^2 - (\alpha + \beta).A + \alpha.\beta.I_n = 0_n$.
On a bien nos deux réels, ce sont les racines du polynôme annulateur. Il n'y avait pas à chercher trop loin.

IV∼1) On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrez que tout vecteur U de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} - \dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ avec $\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha}$ dans $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \alpha.X\}$ et $\dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ dans $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$.

La question suivante est quasiment un cadeau.
On se donne U et on vérifie $U = \dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} - \dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$. C'est un bon début.

On prend ensuite $\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha}$ qu'on nomme X et on calcule : $A.X = A.\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} = \dfrac{\beta.A.U - A^2.U}{\beta - \alpha}$. Or, on a $A^2 - (\alpha + \beta).A + \alpha.\beta.I_n = 0_n$ donc $\beta.A - A^2 = \alpha.\beta.I_n - \alpha.A = \alpha.(\beta.I_n - A)$.
On remplace : $A.X = A.\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} = \dfrac{\beta.A.U - A^2.U}{\beta - \alpha} = \dfrac{\alpha.(\beta.I_n - A).U}{\beta - \alpha} = \alpha.\dfrac{\beta.U - A.U}{\beta - \alpha} = \alpha.X$.
Le vecteur nommé X est bien dans l'espace demandé.

*La difficulté était juste de penser à remplacer $A^2 - \beta.A$ par $\alpha.A - \alpha.\beta.I_n$ en ayant en arrière plan les formules de Viète. Mais je crains que pour certain(e)s, la difficluté ait été de comprendre le sens de "*avec $\dfrac{A.U - \beta.U}{\beta - \alpha}$ dans $\{X \in \mathbb{R}^n \mid relation\}$*". Pour ceux là, je ne peux plus rien, à part leur dire "*apprenez par coeur les corrigés des cent quarante derniers sujets posés aux concours, et priez très fort*".*

Pour l'appartenance de $\dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ à $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$, c'est pareil sauf que cette fois, on écrit $(\alpha.A - A^2).U = (\beta.A - \alpha.\beta.I_n).U$.
Ah oui, et il faut mentionner que $\dfrac{\alpha.U - A.U}{\beta - \alpha}$ est bien un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par compatibilité des formats.

IV∼2) Déduisez $\mathbb{R}^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \alpha.X\} \oplus \{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$.

On a prouvé que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décomposait comme différence d'un vecteur de $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$ *(qu'on va noter E_β)* et d'un vecteur de $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \alpha.X\}$ *(qu'on va noter E_α)*.
On peut se demander si il ne faut pas prouver que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A.X = \beta.X\}$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n, +, .)$.
D'accord, pour écrire $\mathbb{R}^n = E_\alpha + E_\beta$, le cours demande que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ soit la somme d'un vecteur de E_α et d'un vecteur de E_β *(et pas la différence)*. Mais ça ne change rien, quitte à changer un vecteur en son opposé...
On a donc bien $\mathbb{R}^n = E_\alpha + E_\beta$
Il nous manque encore "*la somme est directe*", c'est à dire l'unicité de l'écriture.
Mais le cours nous indique un autre critère pour que la somme soit directe : $E_\alpha \cap E_\beta = \{\overrightarrow{0}\}$.
C'est ce critère qu'on va utiliser ici : on prend X à la fois dans E_α et E_β. Il vérifie $A.X = \alpha.X$ et $A.X = \beta.X$. On a donc $\alpha.X = \beta.X$. Et comme α n'est pas égal à β, on a forcément $X = 0$ *(vecteur nul de taille n)*.

V∼0) Soit A une matrice de la forme $\mu.I_n + N$ avec $N^2 = 0_n$. Montrez que A vérifie la propriété *Selvol* si et seulement si μ est une racine $(n-2)^{ieme}$ de l'unité.

Quel rapport avec la diagonalisabilité ?
Toujours le même, qu'on ne comprend pas forcément au premier abord quand on n'a pas de recul sur ce que les énoncés mathématiques nous

poussent à faire.
On a une somme directe. Il suffit de prendre une base de E_α et une base de E_β. En les mettant bout à bout, on a une base de $\mathbb{R}^n$, donc une matrice inversible P.
Les p premières colonnes U_1 à U_p vérifient $A.U_i = \alpha.U_i$ puisqu'elles sont dans $\{X \mid A.X = \alpha.X\}$.
Les q colonnes suivantes V_1 à V_q vérifient $A.V_j = \beta.V_j$ (passer là aussi de $A.V - \beta.V = 0$ à $A.V = \beta.V$).
Globalement :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & \dots & \dots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & \dots & \dots & a_n^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^p & v_1^1 & \dots & v_1^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^1 & \dots & u_n^p & v_n^1 & \dots & v_n^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.u_1^1 & \dots & \alpha.u_1^p & \beta.v_1^1 & \dots & \beta.v_1^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha.u_n^1 & \dots & \alpha.u_n^p & \beta.v_n^1 & \dots & \beta.v_n^q \end{pmatrix}.$$

Mais aussi

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^p & v_1^1 & \dots & v_1^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^1 & \dots & u_n^p & v_n^1 & \dots & v_n^q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.u_1^1 & \dots & \alpha.u_1^p & \beta.v_1^1 & \dots & \beta.v_1^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha.u_n^1 & \dots & \alpha.u_n^p & \beta.v_n^1 & \dots & \beta.v_n^q \end{pmatrix}$$

On a une relation de la forme $A.P = P.D$.
La matrice est bien diagonalisable. Et comme matrice diagonale, on prend $Diag(\alpha, \dots \alpha, \beta, \dots \beta)$ *(liste des valeurs propres)*.

Bilan : les matrices vérifiant la propriété *Selvol*, si elles ont deux valeurs propres distinctes, sont diagonalisables, avec $D = Diag(\alpha, \dots \alpha, \beta, \dots \beta)$.
Mais comme la propriété se transmet aux matrices semblables, il reste la condition déjà indiquée : $\alpha^{p-1}.\beta^{q-1} = 1$.
Il nous manque le cas où les deux valeurs propres sont égales.
C'est celui qui fait l'objet de la dernière question, sachant que le cours de Spé dit qu'alors la matrice ne se diagonalise peut être pas, mais s'écrit $D + N$ avec $D = Diag(\alpha, \dots \alpha)$ (puisque la seule valeur propre est α) *et N nilpotente* (c'est à dire "s'efface après quelques puissances").

On suppose donc A de la forme $\mu.I_n + N$, avec $N^2 = 0_n$ (pensez à une matrice telle que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On isole : $N = A - \mu.I_n$.
On élève au carré pour utiliser ce qu'on sait de N : $A^2 - 2.\mu.A + \mu^2.I_n$ *(les deux matrices sont permutables)*.
On factorise : $A.(2.\mu.I_n - A) = \mu^2.I_n$.
On divise par μ^2 : $A.\dfrac{2.I_n - A}{\mu^2} = I_n$.
On identifie que $\dfrac{2.I_n - A}{\mu^2}$ est l'inverse de A.
On note d le déterminant de A : ${}^tCom(A) = d.\dfrac{2.I_n - A}{\mu^2} = d.\dfrac{2.I_n - I_n - N}{\mu^2} = \dfrac{I_n - N}{\mu^2}$.
On reporte dans la condition nécessaire et suffisante pour que A vérifie la propriété *Selvol* : $(\mu.I_n + N) + d.\dfrac{2.I_n - .I_n - N}{\mu^2}$ est une matrice scalaire.
Il faut et il suffit *(liberté)* que $1 - \dfrac{d}{\mu^2}$ soit nul, et le coefficient de proportionnalité cherché est $\mu + \dfrac{d}{\mu^2}$.
Il nous manque un dernier détail : $\det(A) = \det(\mu.I_n) = \mu^n$.
On reporte alors dans $1 - \dfrac{d}{\mu^2} = 0$ et on obtient $\mu^{n-2} = 1$. On a une racine de l'unité d'ordre $n - 2$.
Dans le sujet d'oral, le libellé était encore plus compliqué :
Soit A inversible, non diagonale, n'ayant qu'une valeur propre. Montrez que A vérifie la propriété si et seulement si il existe N vérifiant $N^2 = 0_n$ et μ une racine $(n-2)^{ieme}$ de l'unité vérifiant $A = \mu.I_n + N$.

	Q.C.M. de Roger Mansuy prof à Saint Louis	Vrai	Faux
a	Pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k = 0$		
b	$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_i^j\right) = \sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^j\right)$		
c	$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\equiv 1 \ mod 2}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$		
d	$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$		
e	$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p = \sum_{p=1}^{n}(a_p)^k$		

◁1▷

a	Faux	il y a $2.n+1$ termes ! comment avoir 0 ?
b	Faux	le second membre n'a aucun sens
c	Presque vrai	k impair s'écrit $2.p+1$ et la condition donne $p \leqslant \frac{n-1}{2}$
	mais faux	prenez $n=2$ le second membre contient a_3
d	Vrai	évidemment
e	Faux	C'est quoi cette salade ?

◁2▷ Démontrez $\sum_{k=0}^{n} k^5 = \frac{n^2.(n+1)^2.(2.n^2+2.n-1)}{12}$ puis calculez $\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5$ notée S.

Vous n'avez pas confiance ? Écrivez un script **Python** qui va calculer cette somme S.
♯ Vous avez confiance en vous pour la programmation : ajoutez le script qui va décomposer S *(ou tout autre nombre)* en produit de facteurs premiers.

Une récurrence et c'est gagné.

Ensuite $\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - \sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ pair}}} k^5$

$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - \sum_{p\leqslant 50}(2.p)^5$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - 2^5.\sum_{p\leqslant 50} p^5$$

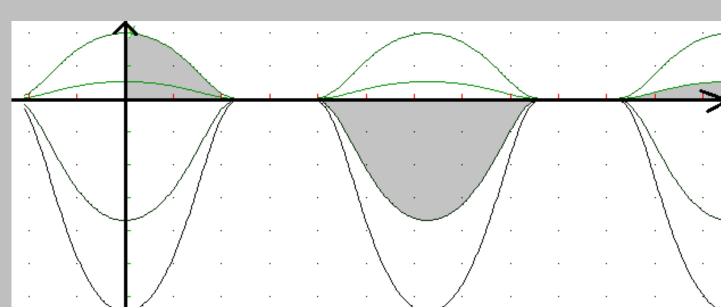
$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5 = S_{100} - 2^5.S_{50}$$

$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k \text{ impair}}} k^5 = 83291672500$ et on s'en fout.

◁3▷ Calculez $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} k.2^i$ et $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^i.3^j$.

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} k.2^i = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k.\sum_{0\leqslant i\leqslant n} 2^i = \frac{n.(2.n+1).(n+1)}{6}.(2^{n+1}-1)$$

◁4▷ De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t \longmapsto \exp\left(\frac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?



Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

Deux approches possibles.

On calcule y' et on ajuste pour avoir $y'_t + a_t.y_t = 0$ (ou même on calcule le quotient $\dfrac{y'_t}{y_t}$, comme dans la résolution physicienne).

On sait que les solutions sont de la forme $\lambda.\exp(-A_t)$. Pour retrouver a, il suffit d'identifier A et de dériver.

Ici, $A_t = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$ et donc $a_t = \dfrac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}$ (dérivez $\cos^{-2}$, c'est tout).

J'ai pour équation $\boxed{y'_t + \dfrac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}.y_t = 0}$

La résolution se fait sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Et on a un espace des solutions de dimension 1.

Si on connaît y_0, on connaît y_t pour tous les t de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sur le schéma, on a quatre solutions tracées en fonction de la valeur de y_0 justement.

Mais si l'équation est $\cos^3(t).y'_t + 2.\sin(t).y_t = 0$, qu'est ce qui change ?

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, rien.

Mais arrivé en $\dfrac{\pi}{2}$?

L'application $t \longmapsto \lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$ tend vers 0 (forme $e^{-\infty}$). Quel que soit le choix de λ.

Et elle arrive avec une belle tangente horizontale (à démontrer proprement).

Et sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3.\pi}{2}\right[$, que fait elle ? Elle repart sous la forme $t \longmapsto \lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$?

Oui, mais aussi $t \longmapsto 2.\lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$, c'est pareil, le raccordement sera de classe continue et dérivable.

Ou $t \longmapsto -3.\lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$ ou $t \longmapsto \pi.\dfrac{\lambda}{7}.e^{-1/\cos^2(t)}$.

On peut repartir sur n'importe que $t \longmapsto \mu.e^{-1/\cos^2(t)}$.

La connaissance de y_0 impose la valeur de λ, mais pas celle de μ.

La forme de la solution sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3.\pi}{2}\right[$ ne dépend plus de la valeur en 0.

On a deux univers séparés par un big crunch suivi d'un big bang (tout contraire à la physique de niveau Sup peut être, mais éclairant pour la physique en général).

L'espace des solutions est de dimension infinie. car à chaque intervalle de longueur π on peut choisir une nouvelle constante.

◃5▹ Donnez une primitive de $\theta \longmapsto \cos^4(\theta)$.
Résolvez l'équation $y''_t + y_t = \cos^3(t)$ d'inconnue y fonction de t en utilisant la méthode de variation des constantes. **(source : oral C.C.P.)**

Et si vous le faisiez sans variation des constantes ? En linéarisant le second membre ?

On linéarise :

$$\cos^4(\theta) = \frac{(e^{i.\theta} + e^{-i.\theta})^4}{16} = \frac{e^{4.i.\theta} + 4.e^{3.i.\theta}.e^{-i.\theta} + 6.e^{2.i.\theta}.e^{-2.i.\theta} + 4.e^{i.\theta}.e^{-3.i.\theta} + e^{-4.i.\theta}}{16} = \frac{\cos(4.\theta) + 4.\cos(2.\theta) + 3}{8}.$$

On intègre en $\boxed{\theta \longmapsto \dfrac{\sin(4.\theta)}{32} + \dfrac{\sin(2.\theta)}{4} + \dfrac{3.\theta}{8}}$

La méthode de variation est constantes est au programme de seconde année. Racontons la ici.

L'équation homogène est $h'' + h = 0$.

Ses solutions sont de la forme $a.\cos + b.\sin$.

On pose donc $y_t = a_t.\cos(t) + b_t.\sin(t)$.

On dérive : $y_t = -a_t.\sin(t) + b_t.\cos(t) + a'_t.\cos(t) + b'_t.\sin(t)$ et on exige $a'_t.\cos(t) + b'_t.\sin(t) = 0$ (condition suffisante).

Il reste $y_t = -a_t.\sin(t) + b_t.\cos(t)$

On redérive : $y_t = -a_t.\cos(t) - b_t.\sin(t) - a'_t.\sin(t) + b'_t.\cos(t)$.

On reporte dans l'équation et on donne la condition suffisante $\begin{array}{rcrcl} a'_t.\cos(t) & + & b'_t.\sin(t) & = & 0 \\ & et & & & \\ -a'_t.\sin(t) & + & b'_t.\cos(t) & = & \cos^3(t) \end{array}$

On résout : $a'_t = -\sin(t).\cos^3(t)$ et $b'_t = \cos^4(t)$ (vérifiez si vous ne me faites pas confiance).

Il est facile de remonter à $a_t = \alpha + \dfrac{\cos^4(t)}{4}$, et pour b, c'est la question précédente qui donne une réponse.

On n'a plus qu'à combiner

$$\frac{\cos^5(t)}{4} + \left(\frac{\sin(4.\theta)}{32} + \frac{\sin(2.\theta)}{4} + \frac{3.\theta}{8}\right).\sin(t) + \alpha.\cos(t) + \beta.\sin(t)$$

Mais on pouvait aussi se dire qu'on allait résoudre $y''_t + y_t = \dfrac{\cos(3.t) - 3.\cos(t)}{4}$.

Il ne restait qu'à chercher des solutions particulières sous les formes suivantes :

second membre	forme de la solution cherchée		
$\dfrac{\cos(3.t)}{4}$	$a.\cos(3.t) + b.\sin(3.t)$	analogie	$-\dfrac{\cos(3.t)}{32}$
$\dfrac{-3.\cos(t)}{4}$	$a.t.\cos(t) + b.t.\sin(t)$	augmentation car homogène	$-\dfrac{3.t.\sin(t)}{8}$

◁6▷ Questions issues d'un Q.C.M. de Roger Mansuy.

•a• Une fonction f dérivable vérifie $f\prime = 2.f$ si, et seulement si, pour tout x, il existe C tel que $f(x) = C.e^{2.x}$.

•b•Si une fonction f dérivable vérifie $f\prime = 2.f$, alors, pour tout x, il existe C tel que $f(x) = C.e^{3.x}$.

•c•Les solutions de $y\prime(x) + a.y(x) = 0$ sont de la forme $x \longmapsto C.e^{a.x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

•d•Les solutions de $y\prime(x) = a(x).y(x)$ sont de la forme $x \longmapsto C.e^{a(x).x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

•e•Les solutions de $y\prime\prime(x) - 2.y\prime(x) + 2.y(x) = 0$ sont de la forme $x \longmapsto e^{-x}.(A.\cos(x) + B.\sin(x))$ avec $(A,\ B) \in \mathbb{R}^2$.

•f•Soit $a > 0$. L'équation $y\prime(x) = a.y(x)$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

•g•L'équation $y\prime(x) = a.y(x)$ admet des solutions polynomiales non constantes si, et seulement si, a∈N.

•h•Soit $a > 0$. L'équation $y\prime(x) = a.y(x) + \sin(3.x)$ admet au plus une solution périodique.

•i• Les solutions de $y\prime - y = \sin(x)$ sont deux à deux proportionnelles.

•j• Les solutions de $y\prime + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•k• Les solutions de $y\prime\prime + a.y\prime = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•l• Les solutions de $y\prime\prime + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.

•m• La fonction $x \longmapsto e^{r.x}$ est solution de $a.y\prime\prime + b.y\prime + c.y = 0$ si, et seulement si, r est racine de l'équation caractéristique.

•n• Les solutions de $y\prime\prime + y\prime + y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

•o• La fonction $x \longmapsto arccos(x)$ est solution de $y\prime + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

•p• Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \sin(2x)$ sont solutions d'une même équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels.

•q• La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants si, et seulement si, i est racine de l'équation caractéristique de cette équation.

•r• L'équation $y\prime\prime - 2.y\prime + 2.y = x.e^x$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x)$.ex avec P un polynôme.

•s• L'équation $y\prime\prime - 3.y\prime + 2.y = (x+1).e^{-x}$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x).e^x$ avec P un polynôme de degré 2.

•t• L'équation $y\prime\prime - 3.y\prime + 2.y = \ln(x)$ admet une solution de la forme $x \longmapsto P(x).e^{a.x}$ avec P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.

•u• Il y a une unique solution de $y\prime(x) = x.y(x)$ vérifiant $y(0) = 1$.

a : Faux. Il existe C tel que pour tout x...

b : Vrai. Pour la même raison idiote qu'au dessus.

c : Faux.C'est $e^{-a.x}$.

d : Faux. primitive A de a et pas $a(x).x$!

e : Faux. $e^x.(A.\cos(x) + B.\sin(x))$.

f : Vrai. la fonction nulle.

g : faux. Exponentielles !

h : Faux. la solution particulière que vous construisez d'après le cours. Et sinon, il y a une exponentielle.

i : Faux. ce sont les homogènes qui sont proportionnelles.

j : Vrai. Toutes multiples de la même exponentielle.

k : Faux. Forme « exponentielle+constante ».

l : Faux. Combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles...

m : Vrai. C'est le cours.

n : Vrai. oscillateur amorti.

o : Faux. Testez !

p : Faux. sin va avec cos, pas avec sin du double.

q : Vrai. Et on la connaît l'équation !

r : Vrai. Méthode de recherche de solution particulière justement.

s : Faux. Le polynôme sera de degré 1 et pas 2.

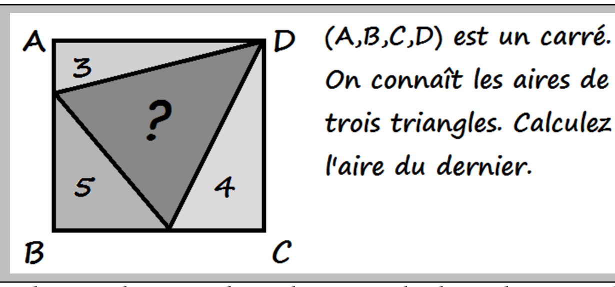
t : Faux. Et je n'ai pas envie de chercher une particulière.

u : Vrai. Et on sait même l'expliciter...

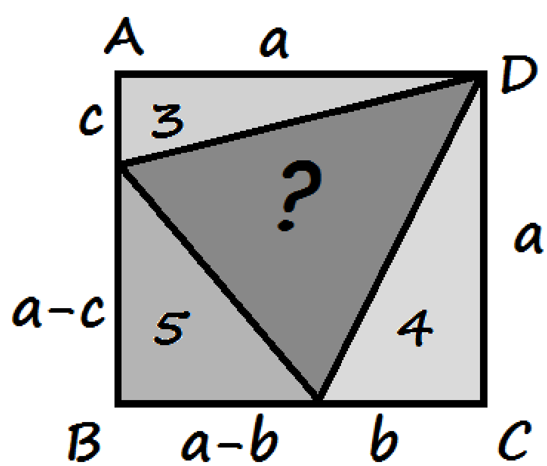
◃7▹

♡0 Donnez une équation différentielle à coefficients constants linéaire d'ordre 2 homogène dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$ et $t \longmapsto e^{t+1}.\cos(t)$.

♣0 La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5+\sqrt{7}$.



On décide de nommer les longueurs qui interviennent. a est le côté du carré, b et c les côtés de deux des triangles.



Les longueurs du troisième triangle se déduisent par soustraction : $a-b$ et $a-c$.
Mais la formule « base fois hauteur sur 2 » permet d'écrire $a.b = 8$ et $a.c = 6$ puis $(a-b).(a-c) = 10$.
On reporte : $\left(a - \frac{8}{a}\right).\left(a - \frac{6}{a}\right) = 10$.
On développe : $a^2 - 24.a + \frac{48}{a^2} = 0$.
On multiplie par a^2 non nul et on pose même $X = a^2$. On a cette fois $X^2 - 24.X + 48 = 0$.
On résout avec un discriminant positif : $X = 12 - 4.\sqrt{6}$ ou $X = 12 + 4.\sqrt{6}$.
Les deux sont positives. Gardons les a priori.
Mais alors le grand carré a pour aire justement a^2ce qui fait X.
Pour trouver l'aire du triangle central, il suffit de lui soustraire les aires des trois triangles déjà connus.

L'aire cherchée est donc $X-(3+4+5)=X-12$.

On voit que $X=12-4.\sqrt{6}$ conduit à une aire étrange et négative pour le triangle central.
On élimine. L'aire cherchée vaut donc $(12+4.\sqrt{6})-12$, ce qui fait effectivement $\boxed{4.\sqrt{6}}$

Si $t\longmapsto e^t.\cos(t+1)$ et $t\longmapsto e^{t+1}.\cos(t)$. sont dans l'espace des solutions, c'est qu'on y trouve $t\longmapsto e^t.\cos(t)$ (après division par une constante), puis $t\longmapsto e^t.\cos(t+1)$ et $t\longmapsto e^t.\cos(t).\cos(1)-e^t.\sin(t).\sin(1)$ et enfin $t\longmapsto e^t.\cos(t).\cos(1)-e^t.\sin(t).\sin(1)$ et $t\longmapsto e^t.\cos(t).\cos(1)-e^t.\sin(t).\sin(1)$ par combinaisons.
On reconnaît $t\longmapsto e^{(1+i).t}$ et $t\longmapsto e^{(1-i).t}$ après combinaison encore.
C'est donc que les deux valeurs propres sont $1+i$ et $1-i$. Avec somme et produit, l'équation caractéristique est $\lambda^2-2.\lambda+2=0$.
L'équation différentielle est $\boxed{y''_t-2.y'_t+2.y_t=0}$

◁8▷

a, b et c sont trois réels distincts.
On pose $V=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}b.c&c.a&a.b\\-b-c&-c-a&-a-b\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}b-c&0&0\\0&c-a&0\\0&0&a-b\end{pmatrix}$.
Calculez $V.L.D$ et $L.D.V$. Inversez V.

Étrange, mais quand on multiplie $V.L=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b.c&c.a&a.b\\-b-c&-c-a&-a-b\\1&1&1\end{pmatrix}$, on fait tomber sur des puissances en 1, x et x^2 les coefficients du polynôme $X^2-(b+c).X+b.c$.
Bref, on a par exemple $a^2-(b+c).a+b.c$, puis $b^2-(b+c).b+b.c$ et $c^2-(b+c).c+b.c$.
Ces trois quantités sont $(a-b).(a-c)$ puis $(b-b).(b-c)$ et $(c-b).(c-c)$.
La première colonne est formée de 1, puis 0 et 0.
On fait de même avec la seconde :

$$V.L=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b.c&c.a&a.b\\-b-c&-c-a&-a-b\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a-b).(a-c)&0&0\\0&(b-a).(b-c)&0\\0&0&idem\end{pmatrix}$$

On multiplie à droite par ce qui manque : $V.L.D=\begin{pmatrix}\Delta&0&0\\0&\Delta&0\\0&0&\Delta\end{pmatrix}$ avec $\Delta=(a-b).(b-c).(c-a)$.
Ce terme est non nul. On peut diviser. l'inverse de V est $\dfrac{L.D}{\Delta}$.
On vérifie de l'autre côté : $(L.D).V=\Delta.I_3$.

◁9▷

On pose $M=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$. Diagonalisez M sachant qu'on travaille avec $range(17)$ et les opérations modulo 17.
Combien la suite $(M^n)_{n\leqslant 2021}$ a-t-elle d'éléments ?
On travaille cette fois avec $(range(7)$ et les opérations modulo 7, montrez que M n'est pas diagonalisable.
Trouvez quand même $T\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$ et P inversible vérifiant $M.P=P.T$ (déjà, qui est forcément a ?).

On détermine trace, déterminant et polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$. On trouve respectivement 5, 1 et $X^2-5.X+1$.
Si on travaille sur $\mathbb{R}$ les valeurs propres sont... laides.
Si on travaille modulo 17, le discriminant vaut $25-4=21=4$. C'est un carré parfait.
Les racines se calculent $\dfrac{5+2}{2}=\dfrac{7}{2}=\dfrac{24}{2}=12$ et $\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{20}{2}=10$
(on peut aussi écrire que l'inverse de 2 est 9)
(on peut aussi proposer et vérifier $100-50+1=51=0$ et $144-60+1=85=0$).
(on peut aussi écrire $X^2-5.X+1=X^2+12.X+1=(X+6)^2-36+1=(X+6)^2-1=(X+6+1).(X+6-1)=(X-10).(X-12)$)

On a une matrice D (en fait deux) : $\begin{pmatrix}10&0\\0&12\end{pmatrix}$.
On trouve P en résolvant $M.U=10.U$ puis $M.V=10.V$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}}\text{ avec det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}\neq 0$$

Modulo 7, qu'est ce qui change ? Ni la trace, ni le déterminant, ni le polynôme caractéristique.

Mais son discriminant vaut 21, ce qui fait 0. On a une valeur propre double, et elle vaut $\dfrac{5}{2}$ ce qui fait 6.

Si la matrice M se diagonalisait, on aurait $M = P.(6.I_2).P^{-1} = 6.I_2$.
C'est fini, on ne pourra la diagonaliser.

Mais on va la trianguler *(on remplace D diagonale par T triangulaire, de la forme* $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$*)*. Que vaut a ? par égalité des traces et des déterminants, on n'a pas le choix : a vaut 6.

On cherche alors P de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

La première colonne dégénère en $3.\alpha + 5.\gamma = 6.\alpha$ soit $\gamma = 2.\alpha$

et $\alpha + 2.\gamma = 6.\gamma$ soit encore $\gamma = 2.\alpha$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \delta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour l'autre colonne : $3.\beta + 5.\delta = 6.\beta + 1$ soit $\gamma = 2.\alpha$

$\beta + 2.\gamma = 2 + 6.\gamma$ *(c'est la même, non ? tentons* $\beta = 6$ *et* $\gamma = 1$*)* :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}$$ *C'est une possibilité parmi tant d'autres...*

◁10▷ ♡ On définit la suite u, périodique de période 6 dont les premiers termes sont les suivants : $(1, 4, 5, 2, 7, 1, 1, 4, 5, 7, \dots)$. Écrivez un script **Python** qui pour n donné donne u_n.

On peut imbriquer des `if`

```
def Suite(n) :
....modulo = n%6
....if modulo == 0 or modulo == 5 :
........return 1
....if modulo == 1 :
........return 4
```

et ainsi de suite
En ayant pris garde de calculer n%6 une fois pour toutes et ne pas le re-solliciter à chaque fois.
Mais il y a plus direct avec

```
def Suite(n) :
....L = [1, 4, 5, 2, 7, 1]
....Index = n%6
....return L[Index]
```

Ou même

```
def Suite(n) :
....return [1, 4, 5, 2, 7, 1][n%6]
```

◁11▷ ♡ La suite a vérifie $a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Trouvez a_n pour tout n.
La suite b vérifie $b_{n+2} = 3.b_{n+1} - 2.b_n - 1$ avec $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Trouvez b_n pour tout n (que pensez vous de la suite $(b_n - n)$?).
La suite c vérifie $c_{n+2} = 3.c_{n+1} - 2.c_n + 2$ avec $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Trouvez c_n pour tout n.
♠ La suite d vérifie $d_{n+2} = 3.d_{n+1} - 2.d_n + n$ avec $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$. Trouvez d_n pour tout n.

Façon MPSI2 : On constate $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{ vérifiable } n=1, n=2 \text{ et } n=3$$

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

Façon Terminale : Je calcule les premiers termes histoire de deviner quelquechose.
$a_2 = 3.1 - 2.0 = 3$
$a_3 = 3.3 - 2.1 = 7$
$a_4 = 3.7 - 2.3 = 15$
Allez, on ne cherche plus : $a_n = 2^n - 1$.
Et une récurrence à double hérédité : $a_{n+2} = 3.(2^{n+1} - 1) - 2.(2^n - 1) = \ldots = 4.2^n - 1$

Façon PCSI : C'est une suite récurrente linéaire, il suffit de connaître son cours.
On écrit l'équation caractéristique : $\lambda^2 = 3.\lambda - 2$
(en fait, on se dit « quelle suite géométrique vérifierait ceci : $\lambda^{n+2} = 3.\lambda^{n+1} - 2.\lambda^n$)
On trouve deux racines : 1 et 2.
On sait (si si) que la suite est une combinaison $(\alpha.2^n + \beta.1^n)$.
La condition initiale donne α et β.

Pour la suite (b_n), on suit l'indication : on pose $a_n = b_n - n$.
On a alors $a_{n+2} = b_{n+2} - (n+2)$
$a_{n+2} = (3.b_{n+1} - 2.b_n - 1) - n - 2$
$a_{n+2} = (3.(a_{n+1} + n + 1) - 2.(a_n + n) - 1) - n - 2$
$a_{n+2} = 3.a_{n+1} + 3.n + 3 - 2.a_n - 2.n - 1 - n - 2$
$a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$

La suite (a_n) est « la même qu'au premier exercice ». Sauf pour la condition initiale.
On a donc $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$. Même pas besoin de la matrice...
Pour tout n, $a_n$est nul. Et $b_n = n$.
On pouvait le trouver en calculant les premiers termes et par récurrence...

Que faire pour la suite (c_n) ?
Allez, je vous donne la pise.
Poser $a_n = c_n + \alpha.n$ et $c_n = a_n - \alpha.n$.
Reporter : $\big(a_{n+2} - \alpha.(n+2)\big) = 3.\big(a_{n+1} - \alpha.(n+1)\big) - 2.\big(a_n - \alpha.n\big) + 2$
Simplifier : $a_{n+2} - 2.\alpha = 3.a_{n+1} - 3.\alpha - 2.a_n + 2$
Choisir $\alpha = 1$.
Retouver le premier exercice : $a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$.
Calculer alors a_0 et a_1 : $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$.
Trouver $a_n = 2.(2^n - 1)$.
Revenir : $\boxed{c_n = 2^{n+1} - 2 - n}$

◁ 12 ▷

♣ Construisez une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sans point fixe.
Soit u une suite réelle et σ une permutation de $\mathbb{N}$ *(bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)*. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Conseil : utiliser la quantification $\forall \varepsilon, \exists N_\epsilon, \forall n, |u_n - a| > \varepsilon \Rightarrow n < N_\varepsilon$.
Soit u une suite réelle et σ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Construisez une suite u et une surjection σ telle que u converge et $(u_{\sigma(n)})$ diverge.

On veut une application qui mélange les entiers sans en laisser un seul sur place.

Et si on les échangeait deux à deux :

0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	0	3	2	5	4	7	6	...

Difficile à expliciter ? Pas tant que ça ! $\boxed{\sigma(2.p) = 2.p + 1}$ $\boxed{\sigma(2.p+1) = 2.p}$
Et même $\sigma(n) = n + (-1)^{n+1}$. Et on montre sous cette forme $\sigma(\sigma(n)) = n$, ce qui prouve la bijectivité.

Quand on part d'une suite et qu'on mélange tout, on n'a pas une sous-suite, ça c'est un fait.
Mais quand même, $\sigma(n)$ doit tendre vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On écrit l'hypothèse et la conclusion cherchée comme toujours :

$\boxed{\text{H} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon)}$

$\boxed{? : \forall \varepsilon > 0,\ \exists S_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant S_\varepsilon \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \alpha| \leqslant \varepsilon)}$

On se donne ε et on veut que $|u_{\sigma(n)} - \alpha|$ soit plus petit que ε. Facile, il suffit de demander que $\sigma(n)$ soit assez grand, c'est à dire évite les valeurs de 0 à N_ε.

Mais il n'y a qu'un nombre fini de valeurs à éviter. Il suffit de prendre n assez grand.

Explicitement : on pose $A_\varepsilon = \{n \mid \sigma(n) < N_\varepsilon\}$. C'est un ensemble fini de cardinal N_ε. Il a un plus grand élément P. On pose $S_\varepsilon = P + 1$.

En fait, ici, plutôt que $(n \geqslant S_\varepsilon \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \alpha| \leqslant \varepsilon)$, on utilise la contraposée $(|u_{\sigma(n)} - \alpha| > \varepsilon \Rightarrow n < S_\varepsilon)$.

On a prouvé $((u_n)\ converge\ \Rightarrow (u_{\sigma(n)})\ converge)$.
On l'applique à la suite $(u_{\sigma(n)})$ et à la permutation σ^{-1} et on a la réciproque.
Remarque : | Il y a des fois où en « inversant les rôles », on trouve l'autre sens sans effort.

Pour une injection, on refait la même preuve avec $A_\varepsilon = \{n \mid \sigma(n) < N_\varepsilon\}$ qui est encore de cardinal fini (plus petit que N_ε et non plus forcément égal cette fois).
Pour la réciproque, si $u_{\sigma(n)}$ ne prend que des termes épars de la suite initiale, on ne peut rien conclure.
Prenons la célèbre $((-1)^n)$ et pour σ l'injection $n \longmapsto 2.n$. La suite $((-1)^{2.n})$ converge, mais la suite initiale ne le fait pas.

Si on demande juste à σ d'être surjective, c'est à dire d'atteindre tout entier au moins une fois, on perd le résultat.
On peut demander à ce qu'un entier comme 0 soit atteint une infinité de fois.

Prenons la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Elle converge vers 0. Et prenons la surjection

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sigma(n)$	0	1	0	2	0	3	0	4	...
$u_{\sigma(n)}$	1	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{1}{4}$	1	$\dfrac{1}{8}$	1	$\dfrac{1}{16}$	

La suite $(u_{\sigma(2.n)})$ vaut u_0 elle converge vers 1.
La suite $(u_{\sigma(2.n)})$ vaut $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Elle converge vers 0.
Avec ces deux sous-suites, la suite ne peut converger.

In retrograde analysis," I asked Holmes one day, "is the problem always to ascertain either the direction, the last move, or the square on which a given piece was captured?"

"Oh, by no means," replied Holmes. "The questions that arise are sometimes of a far more intriguing and bizarre nature."

"Can you give me an example?" I inquired.

Holmes thought for a moment. "Not a sufficiently elementary one for you to comprehend at your present stage. . . . But wait! I have just thought of an ideal problem for you right now!"

With a curious look of amusement, Holmes set some pieces on the board. "Wait, Watson, the position is not complete!" said Holmes as he went over to his shelf and brought back a tiny box which had often caught my eye. "I've many times had the feeling, Watson, that you were on the verge of asking me what is in this box, but politeness forbade you. Am I right?"

"Why yes, Holmes," I confessed, "I've many times wondered what is in that box."

"Well now, Watson, let us see!"

With the air of a mischievous child, or of a stage magician, he slowly and rather melodramatically opened the lid and removed, of all things, a pawn. The pawn was identical in shape to the pawns of Holmes's chess set, only this pawn was painted half black and half white.

"Where on earth did you get that?" I laughed.

"Oh, Watson, I keep this as a memento of the little problem I am about to show you." So saying, Holmes placed the mysterious pawn on g3, and the position was this:

"In this game," said Holmes, "no piece or pawn has ever moved from a white square to a black square, nor from a black square to a white square. The question is: What is the color of the pawn on g3?"

"That's easy," I jested. "The pawn on g3 is Black and White!"

"No, seriously," laughed Holmes, "what color pawn—Black or White—should be put on g3 to make the position compatible with the given conditions?"

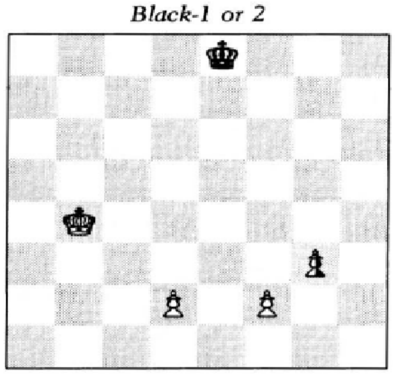
I looked, but could see no clue at all. A thought struck me: "You say that no piece has ever moved from a square of one color to a square of another. Under these circumstances, how could the knights have ever moved?"

"Good point, Watson, good point! Obviously, they never did!"

"Then whatever happened to them?"

"Clearly they were captured on their own squares."

Black-1 or 2



White-3 or 4

This struck me as a trifle odd, to say the least, but as certainly within the realm of possibility. "Is this a hint to the solution?" I asked.

"No, Watson, not to this problem—though it does figure in some other problems of this type."

"Then I am completely in the dark; I see no clue whatsoever."

"The clue," Holmes remarked, "is in the position of the White king."

"The White king!" I exclaimed. "The White king could have come from any of the four squares a3, a5, c5, or c3."

"Yes, yes," said Holmes, "but how did he ever escape from his home square, e1?"

I looked at the position, perplexed. The king could not have escaped via the black squares d2 or f2, since the pawns there had not yet moved. And, of course, he could not have escaped via the squares d1, e2, or f1, since they are white. So how did he get out? Then I saw it: "White castled," I said triumphantly.

"Excellent, Watson! Did he castle on the king's side or the queen's side?"

I thought for a moment and said, "On the king's side."

"Why?" asked Holmes.

"Because had he castled on the queen's side, the queen's rook would have had to move from a1—a black square—to d1—a white square."

"Better and better," cried Holmes. "Now, does that not solve the mystery of our little pawn?"

"I don't see how, Holmes," I replied, but then I suddenly saw it: "Of course! The only way the king could get from g1 to his present position is via the squares h2 and g3. If the pawn on g3 is White, then it must have come from h2, and the king could never have got out! So the mystery pawn must be Black."

"Now, Watson," he said, "you are really beginning to get the hang of retrograde analysis!"

◁13▷

◁14▷ ♡ N est un entier naturel fixé. Montrez que les suites $\left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{2^n}{N+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{2^N}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Pour la première : $\dfrac{2^{n+1}}{n+2} \geqslant \dfrac{2^n}{n+1}$ pour tout n (soustraire, réduire au dénominateur commun).

Pour la seconde $\frac{2^{n+1}}{N+1} \geqslant \frac{2^n}{N+1}$ pour tout n.

Pour la troisième : $\frac{2^N}{n+2} \leqslant \frac{2^N}{n+1}$.

◁15▷ Calculez $S_n = \sum_{0\leq p\leq q\leq n} 2^p.3^q$. Calculez $O_n = \sum_{\substack{0\leq p\leq n \\ 0\leq q\leq n}} 2^q.3^p$. Calculez $H_n = \sum_{0\leq q\leq n} 2^q.3^q$. Calculez $E_n = \sum_{0\leq p\leq n} 2^{2.p}.3^{3.p}$. Calculez $L_n = \sum_{0\leq p\leq q\leq n} 2^q.3^q$ (attention, q a son rôle, c'est un compteur).

◁16▷ Lesquels de ces programmes calculent un p.g.c.d. ?

A
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

B
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a%b, b
....return a
```

C
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a, a%b
....return a
```

D
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........(a, b) = (b, a%b)
....return a
```

E
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, b%a
....return a
```

F
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........(a, b) == (b, a%b)
....return a
```

G
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a = b
........b = a%b
....return a
```

H
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........b = a%b
........a = b
....return a
```

I
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

◁17▷ On définit $x \longmapsto [x] * sin^2(\pi.x)$. Est elle continue en tout point ?
Est elle dérivable en tout point ?

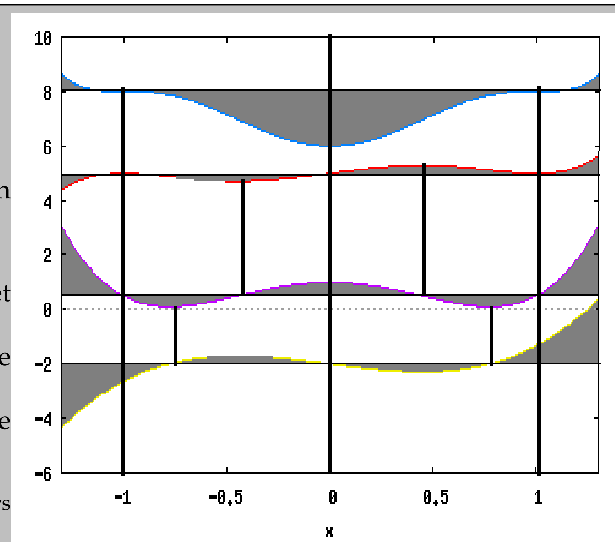
◁18▷ En quels points l'application $x \longmapsto \begin{cases} \cos(x) & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sin(x) & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est elle continue ?

En quels points l'application $x \longmapsto \begin{cases} \cos(x) & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sin(x) & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est elle dérivable ?

En quels points l'application $x \longmapsto \begin{cases} \cos(x) & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -\cos(x) & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est elle continue ?

En quels points l'application $x \longmapsto \begin{cases} \cos(x) & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -\cos(x) & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est elle dérivable ?

Pour tout n, on pose $H_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = (H_n)^{(n)}$.
Calculez P_n pour n de 0 à 3 .
Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant et sa parité[a]
Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $(H_n)^{(k)}(1) = 0$.
Montrez que pour tout k de 0 à $n-1$, $(H_n)^{(k)}$ admet $k+2$ racines réelles distinctes entre -1 et 1.
Déduisez que les n racines du polynôme P_n sont entre -1 et 1. Calculez leur somme, et leur produit.
Écrivez un script `Python` qui pour n donné rend la liste des coefficients du polynôme P_n.



a. et surtout, surtout, ce n'est pas parce qu'on a calculé les premiers qu'il faut avoir le réflexe "je vais faire une récurrence"

◁ 19 ▷

Un classique encore, j'en profite pour livrer un bout de cours :
Déjà, au premier rang, on refait ce que raconta déjà Rolle :

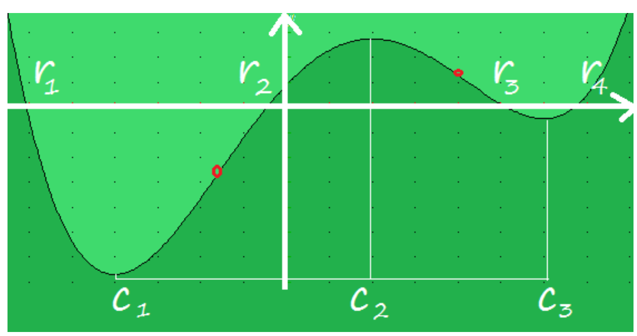
si le polynôme P de degré d admet d racines réelles, alors les racines du polynôme P' sont intercalées entre les racines de P.

En effet quitte à ordonner les racines de P, on a $r_1 < r_2 < \ldots < r_d$.
Sur les $d-1$ intervalles $[r_k,\ r_{k+1}]$, on appliquons le théorème de Rolle : P est continu de $[r_k,\ r_{k+1}]$ dans $\mathbb{R}$
P est dérivable sur $]r_k,\ r_{k+1}[$
$P(r_k) = P(r_{k+1})$

Il existe donc un certain c_k tel vérifiant $P'(c_k)$.
De plus $r_1 < c_1 < r_2 < c_2 < r_3 < c_3 < \ldots < c_{d-1} < r_d$, les $c_k$sont tous distincts.
On a trouvé $d-1$ racines pour P'. On les a toutes.

Vocabulaire : si P est scindé, alors P' est scindé.
Un polynôme scindé est un polynôme qui s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 : $P(X) = \lambda.\prod_{k=1}^{d}(X-r_k)$.
C'est ce qui est utile pour les formules de Viète.

On sait déjà depuis la seconde que le sommet de la parabole est juste au milieu des deux racines. mais le résultat s'étend aux degrés plus élevés.
Petit détail supplémentaire : la moyenne $\dfrac{c_1+\ldots+c_{d-1}}{d-1}$ est égale à la moyenne $\dfrac{r_1+r_2+\ldots+r_k}{k}$ (facile ! Viète).
On notera qu'on peut recommencer et insérer les racines de P'' entre les racines de P'.
Sur ce schéma, on a marqué en rouge les racines de P'', qui sont des points d'inflexion.
Et on localise encore les racines de $P^{(3)}$. Et ainsi de suite.



Cette idée se généralise sur $\mathbb{C}$, sans pouvoir utiliser le théorème de Rolle (car il utilise l'ordre sur $\mathbb{R}$[1]). C'est dans une IS.

1. rappelons que $t \longmapsto e^{i.t}$ prend la même valeur en $-\pi$ et en π, est dérivable, mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[-\pi,\ \pi]$ (la partie réelle s'annule une fois, la partie imaginaire aussi, mais pas en même temps)

Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C}-\{a,b,c,d\}$: $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{1}{z-b}+\dfrac{1}{z-c}+\dfrac{1}{z-d}\right)} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2}+\dfrac{z-d}{|z-b|^2}+\dfrac{z-c}{|z-c|^2}+\dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \dfrac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

Maintenant, on généralise, même quand l'application n'est pas un polynôme.
Rolle en cascade.

Soit f n fois dérivable de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, admettant la même valeur en $n+1$ points, alors il existe au moins un point où $f^{(n)}$ s'annule.

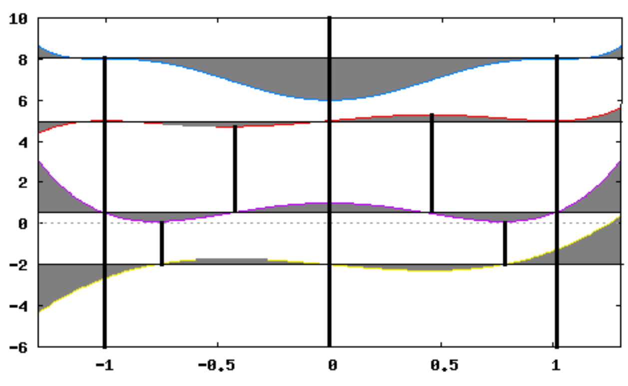
☹ Le cas $n=1$ correspond exactement au théorème de Rolle : la fonction dérivable qui prend la même valeur en deux points a une dérivée qui s'annule au moins une fois.

Pour l'hérédité, on suppose que toute application numérique qui prend la même valeur en $n+1$ points d'un intervalle a sa dérivée n^{ieme} qui s'annule au moins une fois. On prend alors une application f *($n+1$ fois dérivable)* qui prend la même valeur en $n+2$ points d'un intervalle, qu'on va noter a_0 jusqu'à a_{n+1}, et qu'on va supposer triés par ordre croissant.
On applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_k,\ a_{k+1}]$ *(f y est continue, dérivable, et prend la même valeur aux deux extrémités)*. Pour chacun, il existe au moins un point α_k de l'intervalle ouvert $]a_k,\ a_{k+1}[$ où f' s'annule :

$$a_0 < \alpha_0 < a_1 < \alpha_1 < a_2 \ldots < \alpha_n < a_{n+1}$$

L'application f' est alors $n+1$ fois dérivable et prend la même valeur *(nulle)* en $n+1$ points distincts *(les α_k pour k de 0 à n)*. Par hypothèse de récurrence, sa dérivée n^{ieme} s'annule au moins une fois. ☻

Et on va faire mieux avec l'exercice proprement dit : quand Rolle rencontre Leibniz.

Ce qui suit est classique, dans des sujets de concours et dans des oraux.

On définit pour tout n : $P_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ Montrez que chaque $P_n$est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant, sa parité, et montrez qu'il a n racines, toutes entre -1 et 1.

Attention, pour définir P_n, on doit d'abord calculer $(X^2-1)^n$ puis le dériver n fois.

n	$(X^2-1)^n$	P_n
0	1	0
1	X^2-1	$2.X$
2	$X^4-2.X^2+1$	$12.X^2-4$
3	$X^6-3.X^4+3.X^2-1$	$120.X^3-72.X$

On fait tout de suite tomber les résultats évidents, en introduisant une notation : $Q_n(X) = (X^2-1)^n$. Et donc $P_n = (Q_n)^{(n)}$. C'est en créant cette notation qu'on commence à rendre les choses plus faciles à raconter.
• Chaque Q_n est un polynôme à coefficients entiers, donc chaque $P_n$est un polynôme à coefficients entiers.
• Q_n est de degré $2.n$, on le dérive n fois : P_n est de degré n.

• Le terme dominant de Q_n est $X^{2.n}$, donc P_n est de degré $2.n - n$
le terme dominant de P_n est $(2.n).(2.n-1)\dots(n+1).X^{2.n-n}$ c'est à dire $\dfrac{(2.n)!}{n!}.X^n$

• Q_n est pair ($Q_n(-x) = Q_n(x)$), donc
- *les dérivées de Q_n sont alternativement paires et impaires*
- *P_n est pair pour n pair ($P_n(-x) = P_n(x)$)*
- *P_n est impair pour n impair ($P_n(-x) = -P_n(x)$)*
- *P_n a la même parité que n ($P_n(-x) = (-1)^n.P_n(x)$)*
- *tous les termes de P_n ont des exposants de même parité*

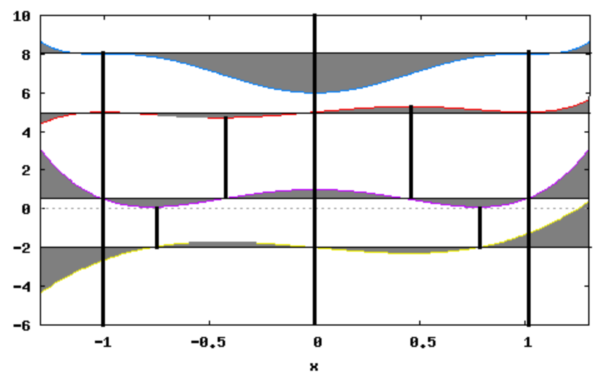
Maintenant, il faut identifier les racines de P_n.
On commence par Q_n prend la même valeur en -1 et en 1 (parité).
Donc, il existe un réel entre -1 et 1 où $(Q_n)'$ s'annule (en fait c'est en 0).

Mais ensuite ? Eh bien ensuite, $(Q_n)'$ est encore nul en -1 et 1 : $Q_n'(X) = n.2.X.(X^2-1)^{n-1}$.
Ainsi, Q_n' admet trois racines au moins : -1, la racine « Rolle » et 1.
On a trois racines, donc deux intervalles, donc deux racines pour sa dérivée Q_n'', on les note $r_{2,0}$ et $r_{2,1}$.
D'accord, ça donne une racine pour $Q_n^{(3)}$. Mais mieux encore. Aux deux bornes de l'intervalle, il surgit encore deux racines :

$$Q_n''(X) = n.2.(X^2-1)^{n-1} + 4.n.(n-1).X^2.(X^2-1)^{n-2}$$

est nul en -1 et 1.
On sent venir la généralisation : à chaque étape, $(Q_n)^{(k)}$ a k racines venant du théorème de Rolle, mais il en gagne aussi deux en -1 et 1.
Il a donc $k+2$ racines successives.
Entre ces racines, il y a $k+1$ intervalles, et donc $k+1$ fois où l'on peut appliquer le théorème de Rolle.
Ce qui donne pour sa dérivée $k+1$ racines.
Et c'est ce qu'on voulait !

Reste à rendre ceci rigoureux. C'est à vous de prendre l'initiative d'introduire des notations.
n est fixé pour tout l'exercice, ce n'est pas sur lui qui porte la récurrence, mais sur le nombre k de dérivations [2].

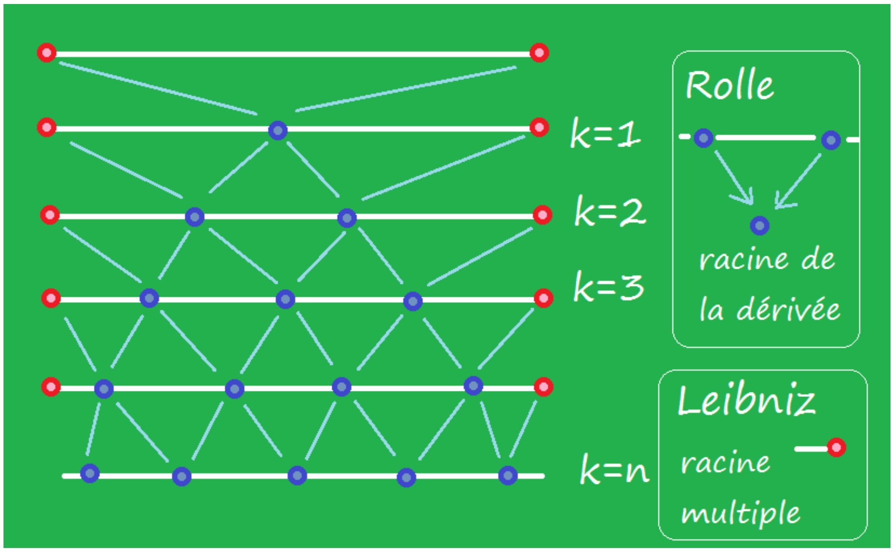


On va donc au rang k dire que $(Q_n)^{(k)}$ admet k racines.
On va les nommer.
Il faut alors un double indice, pour dire « i^{eme} racine de la dérivée k^{ieme} de Q_n » :
$r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k}$.
On n'a que $k-1$ intervalles, mais le coup de génie est de dire : $(Q_n)^{(k)}$ s'annule aussi en -1 et 1.
On a donc maintenant :
$-1 < r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k} < 1$
On applique le théorème de Rolle sur les $k+1$ intervalles de $[-1,\ r_{k,1}]$ à $[r_{k,k},\ 1]$ en passant par les $[r_{k,i},\ r_{k,i+1}]$.
Sur chaque intervalle $(Q_n)^{(k)}$ est continue, dérivable, et prend la même valeur (en l'occurrence 0) aux deux extrémités ; les théorème s'applique, et donne une racine de $(Q_n)^{(k+1)}$qu'on note donc $r_{k+1,i}$.
On a donc pour $(Q_n)^{(k+1)}$:

$$-1 < r_{k+1,1} < r_{k,1} < r_{k+1,2} < r_{k,2} < r_{k+1,3} < \dots < r_{k,k} < r_{k+1,k+1} < 1$$

C'est le bon nombre de racines.

2. depuis le temps que vous vous tanne pour que vous disiez sur qui porte la récurrence !



En colle où à un oral de concours, l'usage de craies de couleur semble s'imposer pour visualiser ceci.
Avec une couleur pour indiquer les racines obtenues par théorème de Rolle, et une couleur pour les racines qui reviennent en -1 et 1 par calcul des dérivées.

Petit détail quand même : on va jusqu'où comme ça ? Jusqu'à $(Q_n)^{(n)}$ qui admet alors n racines $-1 < r_{n,1} < r_{n,2} < \ldots < r_{n,n} < 1$ (ici, n et k se rejoignent).
Ce qui devrait vous inquiéter : si on continue, on va avoir trop de racines !
Qu'est ce qui fait que le phénomène s'arrête au rang $k = n$?
cette fois ci, on n'a plus $(Q_n)^{(n)}(-1) = (Q_n)^{(n)}(1) = 0$ à rajouter aux bouts...

Mais on s'en moque, car $(Q_n)^{(n)}$ vient d'avouer qu'il avait n racines. Or, il est de degré n. On les a donc toutes.
C'est le genre de détail qu'il faut surveiller pour bien dire qu'on a compris toute la question qui a été posée.

Et ensuite, on se dit qu'il reste quand même un problème :
il faut quand même justifier la formule $(Q_n)^{(k)}(-1) = (Q_n)^{(k)}(1) = 0$ qui fait resurgir une source à chaque bout du champ.
Et ce n'est pas si évident. Surtout si on se dit que les premières dérivées de Q_n sont $Q_n'(X) = n.2.X.(X^2-1)^{n-1}$ et

$$Q_n''(X) = n.2.(X^2-1)^{n-1} + 4.n.(n-1).X^2.(X^2-1)^{n-2}$$

Mais quel nom ai-je cité au début ? Leibniz. C'est une histoire de polynôme qui s'annule en -1 et en 1.
On factorise $Q(X) = (X-1)^n.(X+1)^n$. Et on voit que -1 et 1 sont racines « très multiples » de Q_n. Les termes $(X-1)$ et $(X+1)$ vont rester en facteur même après plusieurs dérivations :

$$(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!\binom{k}{}}{i!.(k-i)!}.((X+1)^n)^{(i)}.((X-1)^n)^{(k-i)}$$

tant que k et i sont assez petits, on sait dériver ces puissances :

$$((X+a)^n)^{(i)} = n.(n-1)\ldots(n-i-1).(X+a)^{n-i}$$

(récurrence ? oui, sur qui ? sur i).
et même $((X+a)^n)^{(i)} = \dfrac{n!}{(n-i)!}.(X+a)^{n-i}$.
On reporte :

$$(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!(n!)^2}{i!.(k-i)!.(n-i)!.(n-k+i)!}.(X+1)^{n-i}.(X-1)^{n-k+i}$$

tant que k est plus petit que k (donc i aussi), les exposants sont restés strictement positifs, et on a bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$, et $(Q_n)^{(k)}(-1) = 0$.
On est bien d'accord, c'est bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$ et pas $(Q_n(1))^{(k)}$.

Un exercice assez dense, mais sans difficulté particulière.

◁20▷ Soient A et B deux ensembles. On définit $A \Subset B$ si il existe une application injective de A dans B.
♡ Montrez que cette relation est transitive et réflexive, mais pas symétrique ni antisymétrique (contre-exemples).

Réflexive | On se donne un ensemble A. Il existe une application injective de A dans A, c'est l'identité.

$\boxed{\text{Transitive}}$ On se donne cette fois A, B et C. On suppose qu'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans C. Le cours garantit que $g \circ f$ est injective de A dans C.

$\boxed{\text{Non symétrique}}$ Un contre-exemple suffit : il existe une application injective de $\emptyset$ dans $\{0\}$ (ne rien faire), mais il n'existe pas d'application injective de $\{0\}$ dans $\emptyset$.

$\boxed{\text{Non antisymétrique}}$ Prenons $\{0\}$ et $\{1\}$. Il existe une application injective du premier vers le second, et vice versa.
Mais ces deux ensembles ne sont pas égaux. C'est donc un contre-exemple à $\forall(A, B),\ \Big((A \Subset B)\ et\ (B \Subset A)\Big) \Rightarrow (A = B)$.

En revanche, on va prouver $(A \Subset B)$ et $(B \Subset A)$ implique « il existe une bijection entre A et B ».

♠ 0 ♠

On veut maintenant montrer que si il existe une application injective f de A dans B et une application injective g de B dans A alors il existe au moins une bijection de A dans B.

On rappelle

pour $X \subset A$	on définit	$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ y = f(a)\}$
X partie de A		$f(X)$ partie de B
pour $Y \subset B$	on définit	$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$
Y partie de B		$f^{-1}(Y)$ partie de A

On rappelle que la notation $f^{-1}(Y)$ ne s'applique qu'à une partie et qu'on ne peut écrire $x = f^{-1}(y)$ que si f est bijective, ou à la rigueur y dans $f(X)$ (ensemble image, y a au moins un antécédent) et f injective (pour qu'il n'y ait pas d'ambigüité sur le choix de x).

Montrer que si $g(B)$ est égal à A alors g est une bijection de B dans A.

Si on suppose que $g(B)$ est égal à A, ceci signifie que tout élément a de A est dans $g(B)$ et s'écrit donc $g(b)$ pour un b de B.
Ceci signifie : tout élément a de A a un antécédent b par g dans B.
C'est la surjectivité de g. Et comme g est déjà injective, la voilà bijective.

Il va de soi qu'on ne peut pas faire des raisonnements sur les cardinaux. Ce serait d'une grande naïveté. On a le droit de travailler sur des ensembles infinis. Tout l'intérêt du théorème est même là.
Il existe une injection de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{N}$: ($f = \dfrac{p}{q} \longmapsto 2^p.3^q$)
il existe aussi une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}^+$: ($g = n \longmapsto n$),.
Mais aucune des deux n'est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}^+$.
Pourtant, il doit bien exister des bijections entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}^+$.
Je vous invite à vérifier que f est bien clairement définie ci dessus et injective.
$f\left(\dfrac{2}{5}\right) = 2^2.3^5$, $f\left(\dfrac{5}{16}\right) = 2^5.3^{16}$, $f(2) = 2^2.3^1$, $f(0) = 2^0.3^1$
2024 *n'a pas d'antécédent par f (car c'est $2^3.11.23$).*
2048 *n'a pas d'antécédent car il faudrait avoir $p = 11$ et $q = 0$ dans le rationnel $\dfrac{p}{q}$.*
1944 *a pour antécédent $\dfrac{3}{5}$ car on a $1944 = 2^3.3^5$.*

♠ 1 ♠

On suppose donc $g(B) \neq A$. On pose $X_0 = A - g(B)$ (c'est à dire $X_0 = \{a \in A \mid \forall b \in B,\ g(b) \neq a\}$). Justifiez l'existence de la suite d'ensembles (X_n) définie par $\forall n,\ X_n = g(f(X_n))$. Montrez que chaque X_n est une partie non vide de A non vide, de même que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

X_0 est donc formé des éléments de A sans antécédent par g.
C'est une partie de A.
Son image directe par f est une partie de B.
L'image directe par g de cette partie de B est une partie de A.

Proprement, une récurrence déjà initialisée :
On se donne n quelconque. On suppose que $X_n$est une partie de A non vide (disons qu'il y a dedans un élément x_n).
L'ensemble X_{n+1} est alors $\{g(f(x)) \mid x \in X_n\}$.
Il est non vide car on y trouve $g(f(x_n))$.
C'est une partie de A car $g \circ f$ va de A dans A.

Enfin, une réunion de parties non vides est non vide. On a même $X_0 \subset X$.

Si on tente de regarder sur notre exemple

	$f = \dfrac{p}{q} \longmapsto 2^p.3^q$	
$\mathbb{Q}^+$	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	$\mathbb{N}$
	$g = n \longmapsto n$	

$g(\mathbb{N})$ est égal à tous les entiers positifs,
X_0 est formé de tous les rationnels positifs sauf les entiers.
$f(X_0)$ est donc formé des $f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ avec q différent de 1. Ce sont les $2^p.3^q$ avec $q > 1$.
Ce sont donc les entiers ne se décomposant qu'avec que des 2 et des 3, avec au moins deux facteurs 3. Le millésime 1944 en fait encore partie.
Facile d'expliciter X_1, ce sont les mêmes.
Et ensuite, ça devient horrible.

♠ 2 ♠ On pose enfin $X' = A - X$. Quantifiez $a \in X'$.

Être dans X c'est être dans au moins un des X_n.
Être un des x de X_n (n fixé) c'est vérifier $\exists a \in X_0,\ x = (g \circ f)^n(a)$.
On a donc $X = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a \in X_0,\ (g \circ f)^n(a) = x\}$.

Ne pas y être, c'est donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in X_0,\ (g \circ f)^n(a) \neq x$.

Et si on y tient

$$\Big(x \in X'\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall a \in A,\ ((\forall b \in B,\ a \neq g(b)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ (g \circ f)^n(a) \neq x))\Big)$$

♠ 3 ♠ Montrez : $\forall x \in X,\ g(f(x)) \in X$.

Là c'est direct.
On prend x dans X. C'est donc qu'il est dans un des X_n. Il s'écrit $(g \circ f)^n(a)$ pour un a de X_0.
Mais alors $g(f(x)) = (g \circ f)^{n+1}(a)$.
On reconnaît que $g(f(x))$ est dans X_{n+1}. Il est donc dans la réunion X.

♠ 4 ♠ Justifiez $\forall a \in X',\ \exists! b \in B,\ a = g(b)$.

Prenons a dans X' (donc a fortiori dans A).
Il n'est dans aucun des X_n, en particulier : $a \notin X_0$.
Par définition de X_0 vu comme complémentaire, ceci signifie $a \in g(B)$.
Il a donc au moins un antécédent b dans B par g.
Mais par injectivité de g, cet antécédent est unique.

On définit alors φ sur A par $\varphi(a) = f(a)$ si $a \in X$ et $\varphi(a)$ est l'unique antécédent de x par g si a est dans X' (voir question précédente).

♣ 0 ♣ Pour se mettre en situation le temps d'une question : $A = B = \mathbb{N}$ et $f = g = n \longmapsto n+1$ pouvez vous déterminer X, X' et φ ?

C'est quand même plus simple que mon exemple avec des $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 2^p.3^q$.
Ici, f et g vont bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (et même de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$) et sont injectives.
L'ensemble X_0 est égal à $\mathbb{N} - \mathbb{N}^*$ c'est à dire $X_0 = \{0\}$ (ensemble).

L'application $g \circ f$ n'est autre que $n \longmapsto n+2$.
On a donc $X_1 = \{2\}$, $X_2 = \{4\}$ et ainsi de suite.
Par réunion : $X = 2.\mathbb{N}$ (ensemble des entiers pairs).

Par complémentaire : X' est l'ensemble des entiers impairs.

Comment est alors définie φ ?
$\varphi(x) = f(x) = x + 1$ si x est pair.
$\varphi(x) = g^{-1}(x) = x - 1$ si x est impair.
Elle a déjà fait l'objet d'exercices dans nos T.D., c'est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui échange les couples d'entiers

« pair/impair ». Elle est sa propre réciproque.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	$2.p$	$2.p+1$	...	n	...
φ	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
$\mathbb{N}$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	...	$2.p+1$	$2.p$	...	$n+(-1)^n$	...

♠5♠ Justifiez : $\varphi(X') = g^{-1}(X')$ et $\varphi(X) = f(X)$.

C'est par définition même.
On prend b dans $\varphi(X')$. On a donc $b = \varphi(a)$ pour un a de X'.
Par définition même, b est l'unique antécédent de a par g. Il est donc dans $g^{-1}(X')$.

Prenons b dans $g^{-1}(X')$. C'est donc que $g(b)$ est dans X'.
C'est donc que $g(b)$ admet un antécédent par g, unique. C'est b.
On a alors $\varphi(g(b)) = b$ par définition de φ avec $g(b)$ dans X'.
On reconnaît $b \in \varphi(X')$.

On prend b dans $\varphi(X)$. Il s'écrit $\varphi(a)$ pour un a de X.
Par définition de φ pour les éléments de X : $\varphi(a) = f(a)$.
b est de la forme $f(a)$ pour un a de X : b est dans $f(X)$.

On prend b dans $f(X)$. Il s'écrit $b = f(a)$ pour un a de X.
Mais comme a est dans X, on a $\varphi(a) = f(a)$.
On a donc $b = \varphi(a)$ pour un a de X. On reconnaît $b \in \varphi(X)$.

♠6♠ Montrez : $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \emptyset$.

On prend b dans $\varphi(X) \cap \varphi(X')$. On va aboutir à une absurdité : un tel b ne pourra donc pas exister.
Il est donc dans $\varphi(X)$ et dans $\varphi(X')$.
Par la question précédente, on a donc $b \in f(X)$ et $b \in g^{-1}(X')$.
On traduit : $\exists a \in X,\ b = f(a)$ et $g(b) \in X'$.
On emboite pour ce a de X : $g(f(a)) \in X'$.
Or, pour a dans X, $g(f(a))$ est dans x (vu plus haut), ce qui contredit $g(f(a)) \in X'$. On la tient notre contradiction.

♠7♠ Montrez par disjonction de cas $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ \varphi(a) = \varphi(\alpha) \Rightarrow a = \alpha$

	$a \in X$	$a \in X'$
$\alpha \in X$		
$\alpha \in X'$		

On prend a et α dans A. On suppose $\varphi(a) = \varphi(\alpha)$ (objectif $a = \alpha$).
Premier cas : a est dans X et α dans X'.
Par définition, $\varphi(a)$ est dans $\varphi(X)$ et $\varphi(\alpha)$ est dans $\varphi(X')$.
Mais comment ce même élément peut il être dans $\varphi(X)$ et $\varphi(X')$ puisque leur intersection est vide (vu juste avant).
Ce cas conduit donc à une impossibilité.

De même, le cas a est dans X' et α dans X par symétrie des rôles.

On a donc éliminé deux cases

	$a \in X$	$a \in X'$
$\alpha \in X$		impossible
$\alpha \in X'$	impossible	

Passons à « a est dans X et α aussi ».
On a alors $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$.
Notre hypothèse devient alors $f(a) = f(\alpha)$ et par injectivité de f (hypothèse du début) : $a = \alpha$.

	$a \in X$	$a \in X'$
$\alpha \in X$	$a = \alpha$ par injectivité de f	impossible car $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \emptyset$
$\alpha \in X'$	impossible car $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \emptyset$	

On termine avec « a est dans X' et α aussi ».
Par définition : $\varphi(a) = b$ avec $g(b) = a$ et $\varphi(\alpha) = \beta$ avec $g(\beta) = \alpha$ (antécédents par g).
On met bout à bout $\varphi(a) = b$, $\varphi(\alpha) = \beta$ et $\varphi(\alpha) = \varphi(a)$: $b = \beta$.
On applique g : $g(b) = g(\beta)$ et c'est bien $a = \alpha$.

Ça se raconte bien aussi avec des mots sur qui est l'antécédent de qui.

Les quatre cas sont traités, f est injective.

♠ 8 ♠ Montrez par disjonction de cas : $\forall y \in B,\ \exists a \in A,\ \varphi(a) = y$ | $g(y) \in X'$ | $g(y) \in X$

On nous donne y, il faut lui construire un antécédent a.
La discussion ne peut donc porter que sur y. Et $g(y)$ existe, et c'est un élément de A.
Par définition d'un ensemble et de son complémentaire, on a deux possibilités en effet | $g(y) \in X'$ | $g(y) \in X$
Si $g(y)$ est dans X', on peut calculer comme par hasard $\varphi(g(y))$.
Par définition, c'est l'unique antécédent par g de $g(y)$.
Donc, par unicité/injectivité, c'est b.
On peut donc poser $a = g(y)$.

Si $g(y)$ est dans X, c'est qu'il est dans un des X_n.
Si il est dans X_0, il y a une contradiction. En effet, X_0 est formé des éléments qui ne sont l'mage de personne par g.
Si il est dans un X_n avec n strictement positif, il est donc l'image par $g \circ f$ d'un élément de X_{n-1}.
On s'écrit donc $g(y) = g(f(a))$ pour un a de X_{n-1}.
Mais par injectivité de g ceci donne $y = f(a)$ pour ce a de X_{n-1}.
Gagné, on a un antécédent !

♠ 9 ♠ Concluez.

On a construit une application φ de A dans B.
Elle est injective comme on l'a vu avec la première disjonction de cas.
Elle est surjective sur B comme on l'a vu par la seconde.
Elle est donc bijective.
On a su construire une bijection de A dans B (et sa réciproque de B dans A).

Bilan (théorème de Cantor Bernstein) :
si il existe une application injective de A dans B et une application injective de B dans A alors il existe une bijection de A sur B.

Corolaire :
On définit la relation « avoir le même cardinal que » (ou plus proprement « être équipotent à » par $A \,\Re\, b$ si il existe une bijection entre A et B.
On a alors une relation d'équivalence (les classes d'équivalence sont les cardinaux).

Ensuite on définit une relation sur les cardinaux :
$Card(\mathbb{A}) \leqslant card(\mathbb{B})$ si il existe une injection de A dans B (où A est un ensemble de cardinal $\mathbb{A}$ et b un ensemble quelconque de cardinal $\mathbb{B}$).
Le théorème de Cantor Bernstein nous montre que cette relation est antisymétrique.
On la savait aussi réflexive et transitive, c'est donc une relation d'ordre.

◃ 21 ▹

Tous les polynômes sont constants. On va prouver que $(P_n)' = 0$ pour tout n et tout polynôme de degré n..
On initialise à 0 : les polynômes de degré 0 sont constants. Ils ont une dérivée nulle.

On se donne n et on suppose que tous les polynômes de de degré inférieur ou égal à n ont une dérivée nulle.
On prend P de degré $n+1$. On va montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec X et Q de degré inférieur ou égal à n.
On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme U' et V' est nul, la somme est nulle.
On somme : P' est nulle.
Trouvez l'erreur.

C'est quand on veut passer de 0 à 1 qu'il y a un problème.
Reprenons justement ce raisomment, mais avec $n = 0$.
On prend P de degré $0 + 1$. On prétend montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec X et Q de degré inférieur ou égal à 0 ?

Non, X est de degré 1...

On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme U' et V' est nul, la somme est nulle.
Et X' n'est pas nul...
Il reste donc un terme.

J'ai failli me faire avoir.

◁22▷ ♡ Inversez $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$, après l'avoir complétée par un entier, sachant que son inverse est à coefficients entiers *(que vaut son déterminant ?)*. Oui, il y a deux solutions.

Sachant qu'on inverse par une formule $\dfrac{1}{\det(M)}.{}^t Com(M)$, on se dit que les déterminants de taille 2 dans la comatrice seront entiers.
Mais on va diviser par $\det(M)$. On rsique de quitter le monde entier au profit du monde rationnel.
On va donc demander $\det(M) = 1.$ ou $\det(M) = -1$.

Le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ vaut $13 - a$. On a donc deux solutions :

$a = 12$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$	inverse	$\begin{pmatrix} -37 & 59 & 8 \\ 5 & -8 & -1 \\ 13 & -22 & -3 \end{pmatrix}$
$a = 14$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}$	inverse	$\begin{pmatrix} 43 & -69 & -8 \\ -5 & 8 & 1 \\ -16 & 26 & 3 \end{pmatrix}$

Et avec par exemple $a = 10$, on obtenait $A^{-1} = \begin{pmatrix} -31/3 & 49/3 & 8/3 \\ 5/3 & -8/3 & -1/3 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$. pas tous entiers...

On note qu'il y a quand même ici des coefficients etiers. Le cofacteur pondéré est divisible par le déterminant.
Serait il d'ailleurs possible que le déterminant soit égal à 2 mais que tous les cofacteurs soient pairs ? La matrice inverse serait alors à coefficients entiers.
Seulement voilà : $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont entiers si A et A^{-1} sont à coefficients entiers.
Et alors $\det(A).\det(A^{-1})$ ne peut valoir 1 qu'avec $\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$ ou $\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$.

◁23▷ ♣ On pose $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$. Calculez son déterminant puis son inverse *(pensez à la voir comme matrice d'un changement de base)*.
Calculez $det(A + I_6)$.
♣ Quelles valeurs peut prendre $\det(A + I_6)$ quand A décrit l'ensemble des permutations de taille 6 ?
♣♠ Même question en taille n.

A est une matrice de permutation, son détemrinant vaut -1 ou 1. En fait, la signature nous le dit.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \text{puis} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \text{puis} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \text{puis} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \text{enfin} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Gagné, ce sera 1.

Et pour l'inverse : $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

On propose et vérifie la transposée.
En échangeant le rôle des lignes et des colonnes, on fait intervenir σ^{-1} à la place de σ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant.}$$

On soustrait une ligne sur l'autre : $2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

On recommence : $2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\det(M + I_6)$ vaut 4.
Pour l'instant, ça va. C'est purement calculatoire.

$\det(A + I_6)$ est le déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est un entier.
Naturel ou relatif, on n'en sait rien à l'avance.
Si on applique la formule de Sarrus avec ses 6! termes, on a des $Sgn(\sigma').a_1^{\sigma(1)} \dots a_6^{\sigma(6)}$ où les $a_i^{\sigma(i)}$ peuvent valoir 0, 1 ou 2.
On peut atteindre 2^6 avec $\det(I_6 + I_6)$.

◁ 24 ▷ On sait : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 3 \\ 2 & -1 & \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent.

Nommons les coefficients de A qui manquent $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$ (déjà $Com(A) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ autant calculer celui qu'on a déjà facilement !).

On écrit les relations qu'on peut :

$$\begin{array}{llccc} \text{ligne 3} & \text{colonne 1} & \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} & = 2 & b = 1 \\ \text{ligne 3} & \text{colonne 2} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} & = -1 & a = 0 \\ \text{ligne 1} & \text{colonne 3} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} & = 1 & d = 1 \\ \text{ligne 2} & \text{colonne 3} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{vmatrix} & = 3 & c = 2 \end{array}$$

Connaissant A, on a la comatrice : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Com(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$

Et même le déterminant et l'inverse.

◁ 25 ▷ Rappel : on inverse les matrices carrées en calculant leur comatrice : $M^{-1} = \dfrac{{}^t Com(M)}{\det(M)}$ où la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés.

Utilisez cette méthode pour inverser $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en calculant déjà sa comatrice (attention aux signes devant les comatrices) et le produit $M.^t(Com(M))$

$$\left(\begin{array}{cccc}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}\right)$$

On n'oublie pas l'alternance de signes. Et il faut ensuite transposer.

On trouve $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

Mais quand on effectue le produit avec la matrice initale, on trouve

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui nous fait dire « le déterminant vaut 3 et il faut par 3 la matrice encadrée.

◃26▹ ♡ Complétez ce qui manque : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \\ \end{pmatrix}$.

On écrit $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ sous forme de trois équations et trois inconnues. La première donne $-a - 3.b = -5$: a vaut 2. La seconde donne $b + 1 = 2$ donc $b = 1$. La dernière donne c :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◃27▹ ♡ Dérivez cette application (comptez bien) $(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$.

$(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$ est déjà une dérivée *(la dérivée première d'un polynôme en x)*. Il faut encore dériver. On en est à la dérivée seconde. Il ne reste rien. Sauf si la fonction initiale est un polynôme de degré 2. Et c'est le cas, il y a un terme en x^2, issu par exemple de $\begin{vmatrix} & & 4 & \\ x & & & \\ & x & & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$.

Pour avoir un terme de degré 2 il faut déjà mettre un x quand on développe par rapport à la première colonne : $-x.\begin{vmatrix} & 2 & 4 & 5 \\ * & & & \\ & x & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + autres$. Et il faut mettre encore un x en redévéloppant : $-x.(-x).\begin{vmatrix} & & 4 & 5 \\ * & & & \\ & * & & \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Il y a finalement deux termes en x^2 dans le déterminant, avec coefficient total $4 - 10$. On dérive deux fois ce $(-6.x)^2$ et on a

$\boxed{-12}$ Si vous avez perdu du termes, vous avez dérivé deux fois $x \longmapsto -6.x^2 + 12.x - 8$.

◁28▷ ♡ Complétez $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^3$ sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,0,1)$ et que $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ a les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On doit compléter un vecteur en base de $\mathbb{R}^3$, il en manque deux autres, qu'on va appeler $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ (non coplanaires avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$).

Le fait que $\overrightarrow{i}$ ait pour anciennes composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (base canonique) et nouvelles $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ signifie : $\overrightarrow{i} = 1.\overrightarrow{a} + 0.\overrightarrow{b} + 1.\overrightarrow{c}$.

Ceci nous donne $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{a}$ c'est à dire $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{j}$.

Quant à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ ses c omposantes sur la base canonique et la nouvelle sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

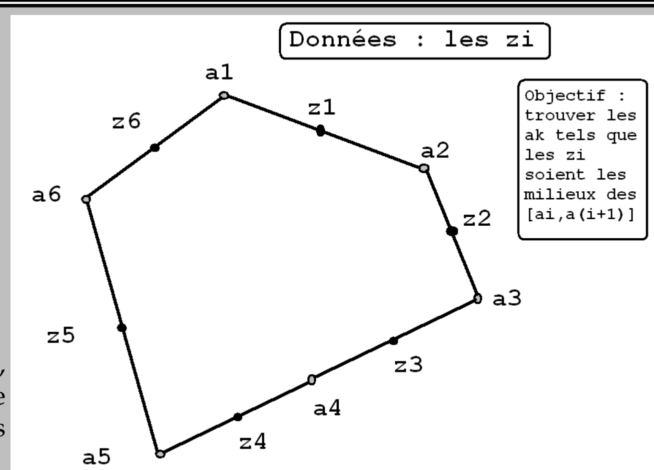
On a donc $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.

On a donc $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Sauf erreur de calcul.

◁29▷ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

On se donne 9 points A_1 à A_9 dans le plan complexes, d'affixes z_1 à z_9. Montrez qu'il existe une unique famille de points M_1 à M_9 tels que les A_k soient les milieux des côtés du polygone $(M_1, \dots M_9)$.

A-t-on le même résultat pour dix points ?



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant vaut 2.

Comment l'obtenir ? On soustrait la première ligne sur la seconde : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la seconde sur la troisième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la troisième sur la quatrième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

On termine avec la quetrième sur la cinquième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière ligne $D = 2.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Et in calcule même son inverse si nécessaire

$$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note que sur la matrice de taille 4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le même algorithme conduit à un déterminant nul.

On généralise même • taille impaire : non nul,
• taille paire : nul

Notons z_1 à z_9 les affixes des points imposés.
Et on cherche des affixes de neuf points a_1 à a_9.
La condition « être le milieu de » devient $z_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (avec à la fin $z_9 = \dfrac{a_9 + a_1}{2}$).
Ceci se traduit par un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

mais de taille 9 sur 9.
Les données sont les z_k et les inconnues des a_k.
La matrice de taille 9 a aussi un déterminant non nul.
Le système a donc une unique solution.
Et je puis même vous indiquer la façon de la construire par « fausse position ».

En revanche en taille 10, le déterminant est nul.
Si les z_i sont mal choisis, il n'y a pas de solution.
Si ils sont bien choisis, il y en a une infinité.
Et on sait les construire.

Bref, l'exercice est loin d'être fini.
Et il illustre bien la notion de résolution de $M.U = B$: M inversible, une unique solution
M non inversible, B hors de l'image : pas de solution
B dans l'image : une infinité de solutions

Un v*en*dangeur m'a véh*i*culé. Il *sh*ootait en *pr*iant. Les f*ées* sont lég*ion* ! Le latiniste spécialiste de Cra*ssus* en*quète* beaucoup. Ils a des escarg*o*ts lents (translation). F*id*èles à Sion au présent (translation). La n*ausée* est r*usse*. J'ai *cr*o*qu*é bien des *gal*ettes. Les *ph*obies perturbent le*s* ames. A-t-on des *t*enues pour *c*até ? Des belles hô*t*esses en *F*rance *pa*ssent en montrant une belle a*ssu*rance. L'arène pistée. Il n'a plus de foot, c'est pas un c*r*ado (translation) ! Les astronautes contrôlent l'*o*rbite quand ils v*eu*lent. Vous aimez les *ri*xes ? Plutôt *cé*der !

◁ 30 ▷

> Soit $(G, *)$ un groupe et A un sous-groupe de G. On définit :
> $N(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A\}$ et $C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$.
> Montrez que ce sont des sous-groupes de $(G, *)$.
> Déterminez $N(A)$ et $C(A)$ pour $A = \{e\}$ *(sous groupe réduit au neutre)*.

$C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$ est formé des éléments x qui commutent avec tous les éléments de A.
On doit montrer inclusion, présence du neutre, stabilité et passage à l'inverse.
Les inclusions se lisent dans la définition : $N(A) = \{x \in G \mid \ldots\}$.
Pour le neutre, on vérifie | $\forall a \in A,\ e * a * e^{-1} = a$ | $\forall a \in A,\ e * a * e^{-1} = a \in A$ |
On peut le mettre dans le rôle du x des définitions.

On se donne x et y dans $N(A)$: $\forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A$ et $\forall a \in A,\ y * a * y^{-1} \in A$.
On pose $z = x * y$ et on regarde si il est dans $N(A)$. On se donne donc un a quelconque dans A et on doit regarder si $z * a * z^{-1}$ est dans A. Cet élément s'écrit

$$(x * y) * a * (x * y)^{-1} = x * y * a * y^{-1} * x^{-1} = x * (y * a * y^{-1}) * x^{-1}$$

Comme y est dans $N(A)$, l'élément $(y * a * y^{-1})$ est dans A. On le note α et $x * \alpha * x^{-1}$ est à son tour dans A puisque x est dans $C(A)$. On a prouvé $\forall a \in A,\ (x * y) * a * (x * y)^{-1} \in A$. On reconnait $x * y \in N(A)$.

On se donne x et y dans $C(A)$: $\forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a$ et $\forall a \in A,\ y * a * y^{-1} = a$
On pose $z = x * y$ et on calcule pour tout a de A :

$$(x * y) * a * (x * y)^{-1} = x * y * a * y^{-1} * x^{-1} = x * (y * a * y^{-1}) * x^{-1} = x * a * x^{-1} = a$$

On a établi $\forall a \in A,\ (x * y) * a * (x * y)^{-1} = a$. On reconnait $x * y \in C(A)$. L'ensemble $C(A)$ est stable par la loi $*$.

On se donne x dans $N(A)$. On pose $z = x^{-1}$. On doit vérifier que pour tout a de A, $z * a * z^{-1}$ est dans A.
Or, on constate

$$z * a * z^{-1} = (x^{-1} * a * x) = (x * a^{-1} * x^{-1})^{-1}$$

Comme a est dans A, a^{-1} est aussi dans A. Comme x est dans $N(A)$, $x * a^{-1} * x^{-1}$ est dans A. Comme A est un groupe, son inverse $(x * a^{-1} * x^{-1})^{-1}$ y est aussi. C'est ce que l'on voulait.

On se donne x dans $C(A)$. On pose $z = x^{-1}$. On doit vérifier que pour tout a de A, $z * a * z^{-1} = a$, c'est à dire $x^{-1} * a * x = a$.
On doit prouver $(x * a^{-1} * x^{-1})^{-1} = a$ soit encore $x * a^{-1} * x^{-1} = a^{-1}$. Mais quand a est dans A, a^{-1} y est aussi. Et comme x est dans $C(A)$, on a $x * a^{-1} * x^{-1} = a^{-1}$. Gagné !

◁ 31 ▷

$(G, *)$ est un groupe. On enlève un élément, ça reste un groupe. Qui est G ?
$(G, *)$ est un groupe. On enlève deux élément, ça reste un groupe. Qui est G ? (deux solutions)
On pourra utiliser le théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

On note n le cardinal de G.
On enlève un élément (pas le neutre), et on a encore un groupe, donc un sous-groupe.
Et le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe. $n - 1$ divise n.
n vaut 2.

Par exemple $(\{Id,\ \overrightarrow{(1\ 2)}\}, \circ)$. *Et c'est* $\overrightarrow{(1\ 2)}$ *qu'on enlève, et il reste le groupe le plus simple.*
Ou alors $\{0, 1\}$ *pour l'addition modulo* 2.

Pour le second, $n - 2$ divise n.
n vaut 3 ou 4.
$\{0,\ 1,\ 2\}$ pour l'addition modulo 3 et on enlève 1 et 2.
Ou alors $\{1,\ j,\ j^2\}$ pour la multiplication, et on enlève j et j^2.

$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ pour l'addition modulo 4 et on enlève 1 et 3.
Ou alors $\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ pour la multiplication, et on enlève $-i$ et i.

Rappel : le cardinal d'un sous-groupe de $(G, *)$ *divise toujours le cardinal de* G.
C'est le théorème de Lagrange, il est officiellement au programme de seconde année.
Je vous le donnerai peut être en exercice.

◁ 32 ▷

Pouvez vous trouver un groupe $(G, *)$ et trois sous-groupes stricts de $(G, *)$ E, F et H vérifiant $E \cup F \cup H = G$?

On prend l'addition modulo 2 sur $\{0,\ 1\}^2$:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)

On a bien un groupe. Les trois ensembles suivants $E = \{(0,0),\ (1,0)\}$, $F = \{(0,0),\ (0,1)\}$, et $H = \{(0,0),\ (1,1)\}$ sont trois sous-groupes.
Leur réunion re-donne le groupe entier.

◁ 33 ▷

Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A^T.B)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices de taille 2 sur 2.
On définit les quatre matrices suivantes : : $(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})$.
Déterminez leur angle deux à deux.
Déterminez l'angle de chacun avec leur moyenne.

◁34▷ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A^T.B)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices à deux lignes et trois colonnes.
Montrez que les six matrices de la base canonique forment une famille orthonormée

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

◁35▷ ♡ Montrez que $(X,\ Y) \longmapsto^t X.S.Y$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $|\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}| = \sqrt{5}$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}}) = \sqrt{6}/3$.

L'application $(X,\ Y) \longmapsto^t X.S.Y$ est par construction une forme (formats compatibles), bilinéaire (distributivité du produit matriciel).
Pour qu'elle soit symétrique, il faut et il suffit que S soit symétrique. Ici, on complète donc déjà : $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & & 1 \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
L'information $|\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}|^2 = 5$ donne $|\overrightarrow{i}|^2_\phi + |\overrightarrow{j}|^2_\phi + 2.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 5$. En notant a le terme qui manque sur la diagonale : $2 + a - 2 = 5$, donc $a = 5$.

Il ne nous manque plus qu'un terme qu'on note b et qui vaut $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$. On a alors $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = |\overrightarrow{i}|_\phi.|\overrightarrow{k}|_\phi.\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}})$.

On simplifie $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \sqrt{2}.|\sqrt{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}$. On simplifie, il reste 2. La matrice cherchée est $\boxed{S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

Mais il faut quand même vérifier que la forme est positive, défini positive.

On teste un vecteur contre lui même : $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On trouve $2.x^2 + 5.y^2 + 3.z^2 - 2.x.y + 4.x.z + 2.y.z$.
On se débrouille pour factoriser un début de carré imposé par $2.x^2$:
$2.\left(x - \dfrac{y}{2} + z\right)^2 + 5.y^2 + 3.z^2 + 2.y.z - \dfrac{y^2}{2} - 2.z^2 + 2.y.z$
On simplifie $2.\left(x - \dfrac{y}{2} + z\right)^2 + \dfrac{9}{2}.y^2 + z^2 + 4.y.z$
On factorise ce qui reste en se laissant imposer par le $\dfrac{9}{2}.y^2$:
$2.\left(x - \dfrac{y}{2} + z\right)^2 + \dfrac{9}{2}.\left(y + 2.\dfrac{z}{9}\right)^2 + z^2 - \dfrac{9}{2}.\dfrac{4}{81}.z^2 = 2.\left(x - \dfrac{y}{2} + z\right)^2 + \dfrac{9}{2}.\left(y + 2.\dfrac{z}{9}\right)^2 + \dfrac{7}{9}.z^2$
C'est une somme de carrés de réels, c'est positif : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geqslant 0$.

Pour que cette somme soit nulle, il faut que chaque terme soit nul : $\begin{array}{rrrcl} x & -\frac{y}{2} & +z & = & 0 \\ & y & +\frac{2.z}{9} & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}$. Le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.

◁36▷ $(P,\ Q) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(k).Q^{(k)}(k)$ est il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

Le lot de propriétés élémentaires passe bien.
Tout ce qui pose problème est « défini positif ».

On prend P et on suppose $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (P^{(k)}(k))^2 = 0$. Il faut aboutir à $P = 0$.

Déjà, la somme de carrés de réelles nulle donne que chacun des quatre $P^{(k)}(k)$ est nul.
On écrit $P(X) = a + b.X + c.X^2 + d.X^3$.
La condition $P^{(3)}(3) = 0$ donne $6.d = 0$. P s'écrit $P(X) = a + b.X + c.X^2$
On reporte dans $P^{(2)}(2) = 0$ donne $c = 0$.On continue, et finalement, P est nul (système triangulaire).

◁ 37 ▷ L'application $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k)$ est elle un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?
L'application $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k+1)$ est elle un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

Pour le premier, on a « forme, bilinéaire et symétrique sans effort ».
de même que positive (somme de carrés de réels).

Pour défini positive, si $\sum_{k=0}^{4}(P(k)^2$ est nul, c'est que P est nul en 0, 1, 2, 3 et 4. trop de racines pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, le voilà nul.

La seconde forme n'est même pas symétrique : $(1,\ X) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} 1.(k+1) = 15$

$$(X,\ 1) \longmapsto \sum_{k=0}^{4} k.1 = 10$$

◁ 38 ▷ Montrez que $(f,\ g)\ \longmapsto\ \int_1^1 f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $[-1,\ 1]$ dans \R .
Montrez que $(f,\ g)\ \longmapsto\ \int_1^1 \frac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $[-1,\ 1]$ dans \R .
Montrez que l'angle entre Id et $t \longmapsto 1$ est le même pour les deux produits scalaires, mais que les deux vecteurs n'ont pas la même norme.
Donnez un vecteur (une fonction) dont la norme augmente quand on passe de la première norme [3] à la seconde.
Donnez une fonction dont la norme diminue par cette transformation.
Montrez que les polynômes de Tchebytchev forment une famille orthogonale pour l'un des deux produits scalaires (changement de vriable dans l'intégrale).

◁ 39 ▷ On définit $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x.x' + 5.y.y' + 6.z.z' - 2.(x.y' + x'.y) - 4.(y.z' + y'.z) + (x.z' + x'.z)$ pour tout couple de vecteurs de $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Pour la positivité de $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$, pensez déjà à développer$(x-2.y+z)^2$ puis à voir si ce qu'il reste n'est pas aussi une somme de deux carrés.

Donnez la norme de chaque vecteur de la base canonique. Donnez un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
Donnez un vecteur non nul du plan $Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ faisant le même angle avec chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
Donnez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dont la matrice de passage vers la base canonique soit triangulaire supérieure.

On met sous forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
On a en une fois « forme bilinéaire symétrique ».
On met $x^2+5.y^2+6.z^2-4.x.y-8.y.z+2.x.z$ sous forme d'une somme de carrés :
$x^2+5.y^2+6.z^2-4.x.y-8.y.z+2.x.z = (x-2.y+z)^2+y^2+5.z^2+4.y.z$
car $(x-2.y+z)^2 = x^2-4.x.y+2.x.z+(4.y^2+z^2-4.y.z)$
$x^2+5.y^2+6.z^2-4.x.y-8.y.z+2.x.z = (x-2.y+z)^2+(y+2.z)^2+z^2$

Cette somme de carrés de réels est nulle si et seulement si chaque terme de la somme l'est : $\begin{array}{rrrl} x & -2.y & +z & =0 \\ & y & +2.z & =0 \\ & & z & =0 \end{array}$.

Remarque : pas de formule agréable pour les trois valeurs propres réelles positives de la matrice symétrique.
Environ $0,05$, $1,93$ et $10,01$.

---

3. ou plutôt de la norme issue du premier produit scalaire

Les trois vecteurs de la base canonique ont pour normes 1, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$. C'est leur droit.

Un vecteur normal à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ a des composantes vérifiant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On résout le système $\begin{array}{cccc} x & -2.y & +z & = 0 \\ -2.x & +5.y & -4.z & = 0 \end{array}$.

On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ (proposez/vérifiez et dites qu'on trouve une droite, c'est tout).

On cherche une bissectrice.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ doit vérifier $\dfrac{\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})}{|\overrightarrow{u}|_\phi.|\overrightarrow{i}|_\phi} = \dfrac{\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})}{|\overrightarrow{u}|_\phi.|\overrightarrow{j}|_\phi}$.

On veut donc $\dfrac{1}{1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

On traduit : $x - 2.y = \dfrac{-2.x + 5.y}{\sqrt{5}}$.

Je vous laisse finir ce calcul.

On suit la méthode d'orthonormalisation de Gran-Schmidt : $\overrightarrow{i}$ est déjà normé, merci.

Ensuite, $\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

Et il est normé !

Enfin, $\overrightarrow{k} - \overrightarrow{i} + 2.(\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{i})$ est orthogonal aux deux autres. On le sait d'ailleurs depuis le début.

Et lui aussi est normé !

Matrice de passage : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inverse : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérification $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$;