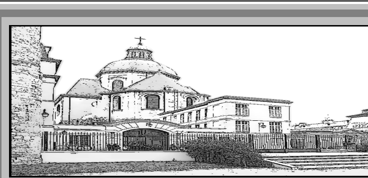
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 février
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD17

◁0▷ ♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C.
Exprimez A comme combinaison de B et C.

◁1▷ ♡ Montrez que les matrices de taille 2 sur 2 à déterminant non nul forment un groupe pour la multiplication, non commutatif.
Montrez que l'ensemble des matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 en forme un sous-groupe.
En est il de même pour les matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 ou -1.

◁2▷ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Déduisez $Tr(M^2) \leqslant Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice M. Cas d'égalité ?
Déduisez $Tr(M^2) \geqslant -Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice M. Cas d'égalité ?

◁3▷ ♣ Existe-t-il un produit scalaire de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ pour lequel $\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est orthogonal à $4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$? Si oui, choisissez en un, et construisez une base orthonormée de premier vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$.

◁4▷ ♡ Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a des solutions.
Parmi les solutions l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ y en a-t-il qui sont solutions de $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$.

Rappel : pour $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ donnés dans $\mathbb{R}^3$, qui est $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$?		
S.I.I.	Physique	Mathématiques
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.z' - z.y' \\ z.x' - x.z' \\ x.y' - y.x' \end{pmatrix}$	le vecteur positiviement orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, dont la norme est l'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$	l'unique vecteur vérifiant : $\forall \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$, $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$

◁5▷ Montrez : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ (juste avec la relation de Chasles et la multilinéarité).

◁6▷ ♡ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ est un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

◁7▷ Construisez un produit scalaire dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour que $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

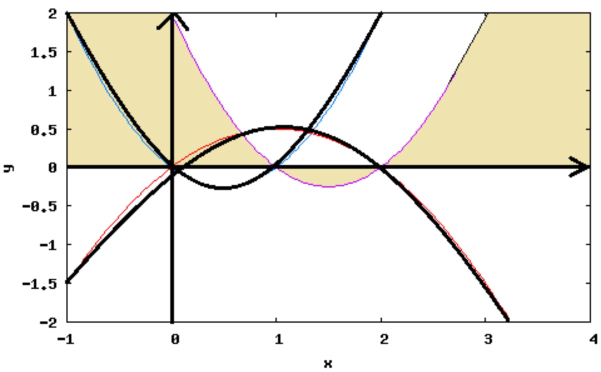
◁8▷ ♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto 34.x.x' - 12.x.y' - 12.x'.y + 41.y.y'$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ (noté ϕ).
♣ Donnez deux vecteurs non nuls, orthogonaux à la fois pour ce produit scalaire et pour le produit scalaire usuel (c'est à dire $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$).

Parés côté **t**ennis, des taupins trichent sur les **m**aths. Des fe**ss**ées, ça fait mal à la nu**q**ue. Ce vieux c**r**û gâte le **g**out du **b**lanc. Des pa**rr**ains se b**ut**ent, et ces br**ut**es sont privées de P**âq**ues. Que fait ce ver**rat** das ce ch**am**p ? Confinés, il faut remonter la **p**ente !
*Les conf**i**nés sont ils à l'abri des pannes ? Face au**x** ados dans les lycées, aux **p**ions et aux con**f**inés, Blanquer prétend **rec**tifier les **no**tions. Grosse peine à Suc**y**. Le **f**eu à la **N**ièvre. Combien de k**inés** conf**us** ? Des confinés ont du mal à piger. Faut il*

*conf**in**er les p**or**teurs ?*
*On l'a trop **g**âté à la **t**aule. Ce **j**us sent le **c**oing. Faut il éva**c**uer l'é**l**u ? T**rain** de Put**eaux**. Les cheminots **d**outent des **g**ares. Ce viticulteur a vu é**c**later bien des fûts. On observe des **b**ruits en **t**as. Ce cli**mat** trop chaud c'est à **Tho**non ? La dessinatrice **quê**te des **ma**quettes. Cette **B**u**z**in n'arrête pas de **p**é**t**er.*
L'employée qui fait des **c**olis s'attend à être **f**ouillée. Je laisse **p**asser ma belle-**m**ère. J'ai explosé quelques b**u**lles sur le quAI. Qu'est ce qui é**to**nne du cli**mat** ? La b**r**aise échauffe le tout. Coup de fou**d**re dans l'é**th**er, hier. Tu es bienve**n**u, tu peux déco**ll**er. Ma**n**ille aime les **f**eux. A cause des car**en**ces, on ne veut plus des B**é**Dés.

Gérard Durand Gérant du Rare (spécialiste des palindromes) :
Luc note : « Taré, tu palis si la .... rate ton ... ! ».
Ami, Sheila pompa Papon, là chez Mia. (syllabes).
Alec a soif : Ed (rapporte Luc, né ici, ... trop, par défi ?) osa cela. (Retrouvez le mot qui manque dans ce palindrome).
Oui, Dora ! Il .... au gourbi, ce bi, gourd obèse. Il adore, oui. (celui là, il est syllabique).
Mon Edmond, rare génie, venu à Noël à Segré, va ....., ... râpé par Luc, reçu, sa ..... sale ! On a une veine, Gérard, nom de nom !
J'ai enlevé quelques mots, mais comme ce sont des palindromes, vous pouvez retrouver les lettres qui manquent.

Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{2} P(k).Q(k)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$. Montrez que la famille $(X.(X-1),\ X.(2-X),\ (X-1).(X-2))$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
Qui sont les polynômes orthogonaux au sous-espace vectoriel des polynômes constants ? Donnez une base de ce plan. Donnez même une base orthonormée.
◁9▷ Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.



Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.

◁10▷ Vrai ou faux : $\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2.k.\pi$ *ou* $a + b = 2.k.\pi$
$(a = b + 2.k.\pi\ (\forall k \in \mathbb{Z})) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$
Vrai ou faux : si A commute avec B et C alors B commute avec C (matrices de taille 2 sur 2).

Vrai ou faux : $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $t \longmapsto f(t)$.

Vrai ou con : $x \longmapsto x.\int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$.

Lesquelles sont bonnes :

$[2.x] = 2.[x]$		$\exists x,\ [2.x] = 2.[x]$		$\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$	
$[2.x] \neq 2.[x]$		$\exists x,\ [2.x] \neq 2.[x]$		$\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$	

◁11▷ Retrouvez sans effort que (dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel) l'orthogonal du plan d'équation $x + y - 3.z = 0$ est $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$.

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$?

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$?

◁12▷ ♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Est elle orthogonale pour le produit scalaire $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$?
Donnez une matrice orthogonale aux trois premières pour ce produit scalaire.
Construisez un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ pour lequel cette base est orthonormée *(en définissant par exemple le produit scalaire de* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*)*. Calculez la norme de la matrice unité.

Existe-t-il S telle que ce produit scalaire soit $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$? Donnez une base orthonormée de l'espace vectoriel des matrices de trace nulle. De toutes les matrices T de trace nulle, laquelle est la plus proche de I_2 *(c'est à dire, laquelle minimise $|T - I_2|^2$?).*

◁13▷

$\diamondsuit_1$ Calculez pour tout N $\sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N} \binom{n}{k}.2^k$.

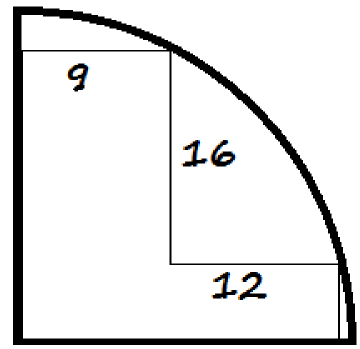
$\diamondsuit_2$ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1}$ et $\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1}$.

$\diamondsuit_3$ On rappelle la table de la loi de la multiplication dans $(\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}}, +, \times)$:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2		4		
2	2		6			5
3	3	6				
4	4		5			
5		3			4	
6				3		

.

Complétez. On note M la matrice obtenue (de colonnes C_1 à C_6). Calculez sa trace. Calculez $C_1 - C_3 - C_4 + C_6$. Calculez $\det(M)$.



Retrouvez le rayon du cercle.

◁14▷ Soit ϕ un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ tel que la famille suivante soit une base orthonormée : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Calculez la norme de la matrice unité. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il S telle que ce produit scalaire soit $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$?

◁15▷ ♡ Montrez que $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Calculez la norme de $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *(notée R)*. Donnez une matrice non nulle orthogonale à R.

Montrez que $M \longmapsto R.M$ et $M \longmapsto M.R$ sont deux isomorphismes de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ qui préservent les normes.

◁16▷ ♡ Construisez un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ tel que la base $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ soit orthonormée (calculez par exemple $|\overrightarrow{i}|$, $|\overrightarrow{j}|$ et le produit scalaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$).

◁17▷ Montrez que $(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$. Donnez une base orthonormée.

$(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(k).Q^{(k)}(k)$ est il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

◁18▷ Vérifiez que ces formes bilinéaires symétriques sont des produits scalaires et dites moi si la dérivation est un produit scalaire pour celles sur $Vect(\sin, \cos)$:

$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + 2.b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + +a.\beta + b.\alpha + 3.b.\beta$
$(f,\ g)$	$f(0).g(0) + f'(0).g'(0)$
$(f,\ g)$	$\int_0^{2.\pi} f(t).g(t).dt$

$Vect(\sin, \cos)$ est l'espace des applications de la forme $t \longmapsto a.\cos(t) + b.\sin(t)$.

◁19▷ On va faire de l'arithmétique *(diviseurs, p.g.c.d., Euclide)* sur un ensemble plus gros que $\mathbb{Z}$, contenant $\sqrt{2}$.

I∼0) On commence par redémontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais en évitant le raisonnement que tout le monde fait [1].

1. le site CutTheJKnot a référencé trente preuves, pourquoi tout le monde donne la même et fait semblant de croire qu'il faut retenir la

On pose $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n.\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$. Montrez : $\forall n \in A,\ n.\sqrt{2} - n \in A$. Concluez que A est vide. Concluez pour $\sqrt{2}$.

Déduisez que si un réel x s'écrit $a + b.\sqrt{2}$ avec a et b entiers, alors a et b sont uniques.

On pose $E = \mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z} = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\alpha_n = (\sqrt{2}+1)^n$ *et* $\beta_n = (\sqrt{2}-1)^n$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
Montrez la suite d'inégalités pour les éléments suivants de E :
$0 < 17 - 12.\sqrt{2} < 53 - 37.\sqrt{2} < -19 + 14.\sqrt{2} < 97 - 68.\sqrt{2} < 8 - 5.\sqrt{2} < 42 - 29.\sqrt{2} < 1$ [2]

II∼0) Montrez l'existence de deux suites d'entiers naturels (r_n) et (i_n) vérifiant $\alpha_n = r_n + \sqrt{2}.i_n$ pour tout n. Exprimez r_{n+1} et i_{n+1} à l'aide de r_n et i_n et exprimez β_n à l'aide de r_n et i_n.

II∼1) Complétez d'ailleurs $\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{◐} & \text{◑} \\ \text{◖} & \text{◗} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix}$ *(oui, je l'ai posé dans le mauvais sens)*.

II∼2) Montrez que r_n et i_n sont toujours premiers entre eux.

II∼3) Écrivez un script `Python` qui prend en entrée `n` et retourne les deux entiers r_n et i_n [3].

II∼4) Que pensez vous de l'idée de l'élève Regercées-Iféfroi : on identifie $a + b.\sqrt{2}$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & 2.b \\ b & a \end{pmatrix}$, et on regarde addition, multiplication, division.

III∼0) Pour tout élément $a + b.\sqrt{2}$ de E, on définit son module $(\!|x|\!) = |a^2 - 2.b^2|$. Montrez que le module d'un élément de E est toujours un entier. Combien d'éléments de E ont un module nul ?

III∼1) Montrez que $(E, +, .)$ est un anneau dans lequel le module du produit est le produit des modules.

III∼2) Montrez que chaque α_n et chaque β_n est dans E et a pour module 1 *(pensez à calculer $\alpha_n.\beta_n$)*.

IV∼0) Soient u et v deux réels distincts *($u < v$)* ; montrez que $p.\beta_n$ est dans E et est entre u et v pour $n = \left[\dfrac{\ln(v-u)}{\ln(\sqrt{2}-1)}\right] + 1$ et $p = \left[\dfrac{u}{\beta_n}\right] + 1$ *(on commencera par montrer : $0 \leqslant \beta_n \leqslant v - u$)*.

V∼0) Montrez qu'un élément x de E est inversible d'inverse dans E si et seulement si son module vaut 1 *(attention, il y a deux sens, pour l'un, pensez à $(\!|x.x^{-1}|\!)$)*.
On notera U l'ensemble des élément de E de module 1.
V∼1) Soit x un élément de U, d'écriture $a + b.\sqrt{2}$. On suppose $1 \leqslant x < 1 + \sqrt{2}$. Montrez alors $-1 \leqslant a - b.\sqrt{2} \leqslant 1$ et $0 \leqslant 2.a \leqslant 2 + \sqrt{2}$. Déduisez la valeur de a puis de b.
V∼2) Soit x un élément de U plus grand que 1. Montrez qu'il existe un entier k vérifiant $\alpha_k \leqslant x < \alpha_{k+1}$. Déduisez alors $1 \leqslant x.\beta_k < \alpha_1$ puis $x = \alpha_k$.
V∼3) Montrez que les seuls éléments de U sont les α_n, les β_n, les $-\alpha_n$ et les $-\beta_n$.

VI∼0) Un élément x de E est dit premier si $\forall (u,\ v) \in E^2,\ x = u.v \Rightarrow (u \in U \text{ ou } v \in U)$ *(les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$ sont caractérisés par $\forall (u,\ v) \in E^2,\ p = u.v \Rightarrow (|u| = 1 \text{ ou } |v| = 1)$)*. Montrez que les α_n sont dans P *(ensemble des nombres premiers)*. Montrez que $3 + \sqrt{2}$, $9 + 5.\sqrt{2}$, $5 - 13.\sqrt{2}$ sont dans P *(calculez leur module)*.

Montrez que $8 + 3.\sqrt{2}$ n'est pas dans P.

VI∼1) Donnez des éléments de module 7. Déduisez que 7 n'est pas dans P.

---

même pour tous et pas une autre...

2. Au fait, on est en maths. Il est donc hors de question que votre preuve passe par $\sqrt{2} \simeq 1,4142135623...$ (mnémotechnique : J'AIME L'ŒIL DE L'AMI NICOLAS, GARÇON DE SUP). S'il vous plait : aucun symbole $\simeq$, de l'intelligence...

3. quand on dit prend un entrée `n` et retourne `rn` et `in`, on attend

```
def Fonction(n) :
.....
....return(rn, in)
```

et pas des trucs avec des `n = int(input('Donnez l'entier n : '))` jusqu'à `print(rn, in)` qui est juste du dialogue gentillet avec l'ordinateur et pas de la programmation

VI~2) Montrez : $\forall (u,\ v) \in \mathbb{Z}^2,\ u^2 - 2.v^2 = 5 \Rightarrow (5|u \text{ et } 5|v)$. Déduisez que 5 est dans P.

VII~0) Passons à l'existence d'une division euclidienne dans E. On se donne x et y dans E avec y non nul ($x = a + i.b$ et $y = c + i.d$). Il faut prouver l'existence de q et r dans E vérifiant $x = q.y + r$ et r plus petit que b. Quel sens donner à « r plus petit que b » : $(\!|r|\!) < (\!|y|\!)$.
Voici des exemples de l'algorithme :

x	y	$\dfrac{x}{y}$	q	r
$5+\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	$\dfrac{5+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{13-2.\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2})} = (2) + \left(-\dfrac{1}{7} - \dfrac{2.\sqrt{2}}{7}\right)$	2	$-1-\sqrt{2}$
$7+\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$\dfrac{7+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{23+10.\sqrt{2}}{7} = (3+\sqrt{2}) + \left(\dfrac{2}{7} + \dfrac{3.\sqrt{2}}{7}\right)$	$3+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
23	$6+5.\sqrt{2}$	$\dfrac{23}{6+5.\sqrt{2}} = \dfrac{-138+115.\sqrt{2}}{14} = -10+8.\sqrt{2} + \left(\dfrac{2+3.\sqrt{2}}{14}\right)$	$-10+8.\sqrt{2}$	$3+2.\sqrt{2}$

Divisez $11 + 7.\sqrt{2}$ par $5 + 2.\sqrt{2}$.
Divisez $2020 + 2019.\sqrt{2}$ par $7 + 5.\sqrt{2}$.
Divisez $2019 + \sqrt{2}$ par $17 + 8.\sqrt{2}$.
Expliquez l'algorithme général, et justifiez.

Donnez le p.g.c.d. de $91 + 49.\sqrt{2}$ et $37 - 4.\sqrt{2}$.

◃ 20 ▹ Pouvez vous trouver deux matrices A et B de taille 2 sur 2 telles que les spectres soient

A	B	$A+B$
$\{1,\ 3\}$	$\{1,\ 5\}$	$\{4,\ 6\}$

,

A	B	$A+B$
$\{1,\ 3\}$	$\{2,\ 5\}$	$\{1,\ 4\}$

,

A	B	$A+B$
$\{0,\ 3\}$	$\{2,\ 5\}$	$\{4,\ 6\}$

(trois exercices dont une réponse NON).

◃ 21 ▹ On a posé : $n = 88\ 825$ et $p = 7\ 267$. Votre voisin a écrit : $192\ 171.p - 15\ 722.n = 7$. Vous en déduisez : $p.g.c.d.(n,\ p) = 7$.
Vous avez tort. Pourquoi ?

◃ 22 ▹ ♡ Montrez que $\phi = (a,\ b) \longmapsto 2^a.(2.b+1)$ est bijective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
Ecrivez un script Python qui prend en entrée n et retouve son antécédent par ϕ.

◃ 23 ▹ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 4 & 7 \\ x^3 & 4^3 & 7^3 \end{vmatrix} = 0$ (devrez vous développer ?).

◃ 24 ▹ J'ai tracé un quadrilatère $(A,\ B,\ C,\ D)$ dans le plan. J'ai mesuré ses quatre côtés et une de ses diagonales. J'ai trouvé les mesures suivantes, triées par ordre croissant :

4	8	11	20	30

Dites moi laquelle est la longueur d'une des diagonales *(et prouvez le)*.

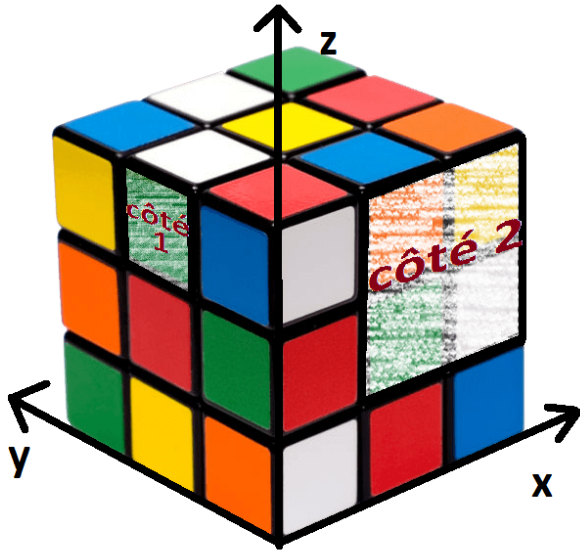
Indiquez comment retrouver alors la longueur de l'autre diagonale. Combien de valeurs peut prendre cette longueur de l'autre diagonale ?

◃ 25 ▹ Si a, b, c, d, e, f et g sont sept nombres, écrivez avec une formule la plus courte (avec 21 symboles $\neq$) qu'ils sont tous distincts.

◃ 26 ▹ Un polygone convexe régulier a 527 diagonales. Calculez le plus petit angle non nul entre deux diagonales *(étape intermédiaire : calculez le nombre de sommets)*.

◃ 27 ▹ Placez aux huit sommets d'un cube les entiers de 1 à 8.
Il faut ensuite que pour chaque face, le produit des quatre entiers aux quatre coins de la face soit la valeur imposée sur le patron du développement du cube ci contre :

	280		
96	1344	420	30
	144		

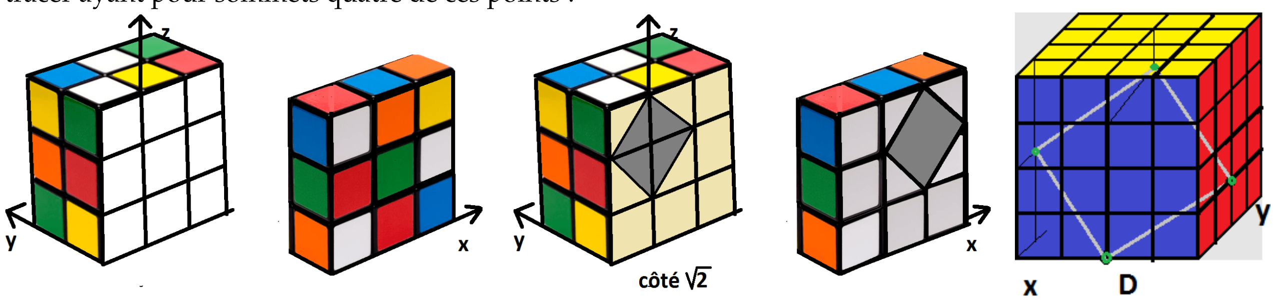


♣$_0$ On pose $\tau=\overrightarrow{(1\ 2)}$ et $\sigma=\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$. Décomposez $\overrightarrow{(1\ 3)}$ et $\overrightarrow{(2\ 3)}$ uniquement avec des σ et des τ.

♡$_1$ Le polynôme $X^3+p.X+q$ a pour racines a, b et c. On définit $\alpha=a+b.c$, $\beta=b+a.c$ et $\gamma=c+a.b$. Exprimez $\alpha+\beta+\gamma$ et $\alpha.\beta.\gamma$ à l'aide de p et q. Donnez le polynôme de racines α, β et γ.

♣$_1$Un Rubik'Cube est formé de vingt sept cubes articulés, et donc aussi soixante quatre « sommets » numérotés de 0 à 63 ou de $(0,0,0)$ à $(3,3,3)$, c'est comme vous voulez. Combien de carrés de côté unité pouvez vous tracer ayant pour sommets quatre de ces points ? Combien de carrés pouvez vous
◁28▷ tracer ayant pour sommets quatre de ces points ?

2018



◁29▷ Montrez que ce sont des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$:

$\mathbb{Z}$	$\left\{\frac{a}{7}+\frac{2.b}{5}\mid(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	$\left\{\frac{a}{7}+\frac{2.b}{5}+c\mid(a,\ b,\ c)\in\mathbb{Z}^3\right\}$	$\left\{a.\sqrt{4}+b.\sqrt{25}\mid(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
$\mathbb{Q}$	$\left\{a+\sqrt{2}.b\mid(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	$\left\{a+\sqrt{2}.b+c.\sqrt{3}\mid(a,\ b,\ c)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	

Lesquels peuvent s'écrire sous la forme $\{a.p\mid p\in\mathbb{Z}\}$ pour au moins un réel a bien choisi ?

◁30▷ On définit sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ une relation et deux lois :

$(a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)$	$(a,\ b)\oplus(c,\ d)$	$(a,\ b)\otimes(c,\ d)$
si et seulement si	est égal à	est égal à
$a.\beta=b.\alpha$	$(a.d+b.c,\ b.d)$	$(a.c,\ b.d)$

Montrez que ce sont des lois internes sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, commutatives, associatives.
Donnez le neutre de chacune.

Montrez que les deux lois sont compatibles avec $\Re$ $\left.\begin{array}{c}(a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)\\ \textit{et}\\ (c,\ d)\Re(\gamma,\ \delta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}((a,\ b)\oplus(c,\ d))\Re((\alpha,\ \beta)\oplus(\gamma,\delta))\\ \textit{et}\\ ((a,\ b)\otimes(c,\ d))\Re((\alpha,\ \beta)\otimes(\gamma,\delta))\end{array}\right\}$.

Montrez que tout élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ admet *(modulo* $\Re$*)* un symétrique pour l'addition *(c'est à dire pour tout q il existe q' vérifiant $q\oplus q'\Re(0,1)$).*

Montrez que tout élément de $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ admet (modulo $\Re$) un symétrique pour la multiplication *(c'est à dire pour tout q il existe q' vérifiant $q\otimes q'\Re(1,1)$).*

Est il vrai que la multiplication est directement distributive sur l'addition ?

Montrez que tout élément est en relation par $\Re$ avec un élément irréductible (a,b) avec a et b premiers entre eux et b positif.

Que venez vous de construire ? Était ce passionnant ?

◁31▷ ♡ La relation « ne pas être inclus dans » est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur $P(\mathbb{R})$? Est elle compatible avec $\cap$? Est elle compatible avec $\cup$?

◁32▷ Soit $(G,*)$ un groupe à onze éléments, et a un élément de G différent du neutre e. Montrez, en étudiant $p\longmapsto a^p$ de $\mathbb{N}$ dans G qu'il existe deux exposants p et q distincts vérifiant $a^p=a^q$ *(a^p désigne $a*a*\ldots a$ p fois)*. Déduisez qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r=e$.

Déduisez que a^{-1} *(inverse de a)* est une puissance de a. Montrez qu'il existe même r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r=e$ et

$a^k \neq e$ pour tout k de 1 à $r-1$.

Quel est alors le cardinal de $\{a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté A)* et montrez que cette partie est un sous-groupe de $(G, *)$.

On définit sur G le relation $\bowtie$ par $(x \bowtie y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

On suppose qu'il y a un élément b de G qui n'est pas dans A. Montrez qu'alors $\{b * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté B)* a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A.

On suppose qu'il y a un élément c de G qui n'est ni dans A ni dans B. Montrez qu'alors $\{c * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté C)* a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A ni avec B.

En notant que l'on "tranche" G en parties ayant toutes le même cardinal, concluez que le cardinal de A vaut 1 ou 11 *(mais on a déjà éliminé 1)*.

Concluez que G est égal à A et est commutatif.

Par quoi pouvez vous remplacer 11 ?

◁ 33 ▷ Combien le groupe $(\mathbb{Z}_{48.\mathbb{Z},+})$ a-t-il de sous-groupes ?

◁ 34 ▷ ♡ Pour tout groupe $(G,\ *)$, on note Z l'ensemble $\{a \in G \mid \forall b \in G,\ a * b = b * a\}$. Montrez que Z est égal à G si et seulement si $(G,\ *)$ est commutatif. Montrez que Z est un sous-groupe de $(G,\ *)$.

◁ 35 ▷ Quel est le plus petit sous groupe de $(range(2019), +_{mod\ 2019})$ contenant 51 ?

◁ 36 ▷ On prend l'ensemble des entiers de 1 à 28 pour la multiplication modulo 29 *(on rappelle que c'est un groupe, donnez la liste des inverses si vous en avez le courage)*.
Montrez que $\{7^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 6\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 6\}$?
Montrez que $\{12^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 3\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 3\}$?
Montrez que $\{5^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 13\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 13\}$?
Bon, quelle valeur de q faut il prendre pour que $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant q\}$ soit un sous-groupe de l'ensemble initial ?
Quelle est la probabilité que vous ayez eu envie de traiter cet exercice si vous avez le profil à aller en P.S.I. avec ou sans étoile ?

◁ 37 ▷ Trouvez le reste (et juste le reste) de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 3.X + 2$, en donnant à X des valeurs particulières bien choisies.

◁ 38 ▷ ♠ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez son polynôme caractéristique (c'est $\det(A - X.I_3)$)..
Montrez que A n'admet qu'une valeur propre, que l'on déterminera.

A est elle diagonalisable ?

Trouvez un polynôme P de degré le plus petit possible *(mais quand même non nul)* vérifiant $P(A) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

Déterminez pour tout n donné le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ (en calculant en 1 puis en dérivant $X^n = (X-1)^2.Q(X) + R(X)$) et en calculant en 1).

Déduisez la forme de A^n.

◁ 39 ▷ ♠ On pose $A = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -4 \\ 6 & -11 & -3 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez la trace et le déterminant de A. Complétez : $A^3 = Tr(A).A^2 + \ldots A + \det(A).I_3$.
Donnez les racines du polynômes $X^3 - 3.X + 2$.
On note R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3.X + 3$ (caractérisé par $X^n = (X^3 - 3.X + 2).Q_n(X) + R_n(X)$). Calculez $R_n(1)$ et $R_n(-2)$.
Calculez aussi $R'_n(1)$. Déduisez la forme de $R_n(X)$. Indiquez comment terminer pour obtenir A^n.

♣ Un élève prétend que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez qu'effectivement ces deux matrices ont même trace, même déterminant. Montrez aussi $Tr(A^2) = Tr(D^2)$, et même $Tr(A^n) = Tr(D^n)$. Mais un autre élève explique que si A et D étaient semblables, alors les trois colonnes de $A - I_3$ devraient être proportionnelles. Concluez qu'effectivement A n'est pas diagonalisable.

◁40▷ ♡ J'ai appliqué l'algorithme d'Euclide à deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$. Les quotients sont dans l'ordre $X^2 + 1$, $X + 2$ et $X + 1$. Le dernier reste non nul est $X - 3$. Pouvez vous retrouver A et B ?

◁41▷ ♡ En appliquant l'algorithme d'Euclide, j'ai trouvé les quotients successifs
1, 34, 2, 2, 2, 1 et 2
et le dernier reste non nul valait 3. Qui étaient les deux nombres initiaux ?
Même question, avec le même dernier reste et pour quotients 0, 4, 1, 1, 30 et 11.

◁42▷ ♡ Déterminez le p.g.c.d. de 2^{2015} et 2^{531}.
Déterminez le p.g.c.d. de 2^{2015} et $2^{2015} - 1$.
Déterminez le p.g.c.d. de $2^{2015} - 1$ et $2^{531} - 1$ (divisions euclidiennes successives ?)

◁43▷ ♣ J'ai calculé tous les restes des divisions euclidiennes de 2018 par les entiers de 1 à 2018 (`[2018%k for k in range(1, 2019)]`). Quel est le plus petit obtenu ? Quel est le plus grand obtenu.
Ça se traite sans Python.

◁44▷ ♡ Donnez le *p.g.c.d.* de 1 234 et 4 321, et donnez une identité de Bézout.
Donnez le *p.g.c.d.* de 12 345 et 54 321, et donnez une identité de Bézout.

◁45▷ ♡ Donnez une identité de Bézout entre 270 et 105 dont un coefficient soit plus grand que 1000.

◁46▷ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

◁47▷ Le théorème de *Be*$\mathbb{Z}$*out* c'est $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{Z}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (a \wedge b = 1) \Big)$.

Mais on a aussi *Be*$\mathbb{N}$*out* et *Be*$\mathbb{Q}$*out* $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{N}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (Be\mathbb{N}out) \Big)$

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z},\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{Q}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (Be\mathbb{Q}out) \Big)$

◁48▷ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a \wedge b = 12$ (p.g.c.d.), $b \vee c = 120$ (p.p.c.m.) et $c \wedge a = 5$?

◁49▷ On veut résoudre $(p.g.c.d.(a,\ b))^2 + a.b = 101$. Montrez que le *p.g.c.d.* vaut 1. Résolvez.
Et pour $(p.g.c.d.(a,\ b))^2 + a.b = 400$?

◁50▷ Calculez le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de $X^5 - X^4 + 2.X^3 + 1$ et de $X^5 + X^4 + 2.X^2 - 1$.
Appliquez un algorithme d'Euclide.

◁51▷ ♡ Donnez une liste de onze entiers consécutifs dont aucun n'est premier.
Montrez que de $2019! + 2$ à $2019! + 2018$, il y a 2017 nombres, et qu'aucun d'entre eux n'est un nombre premier.

Écrivez un script **Python** qui pour N donné trouve la première liste de N entiers consécutifs dont aucun n'est premier *(on supposera qu'on dispose d'une fonction qui teste si un nombre donné est premier)*.

◁52▷ ♡ J'ai calculé le p.g.c.d. de 2017 (premier !) et a par algorithme d'Euclide. Évidemment, j'ai trouvé 1.
Les quotients successifs ont été 4, 2, 4, 1,3, 3 et 3.
Qui est a ?

◁53▷ Résolvez dans $\mathbb{N}^2$ le système « $p.g.c.d.(a, b) = 84$ et $a + b = 2016$ ».