♡ 0 ♡ Rédigez l'hérédité de « la composée de deux applications n fois dérivables est n fois dérivable ». 2 pt.

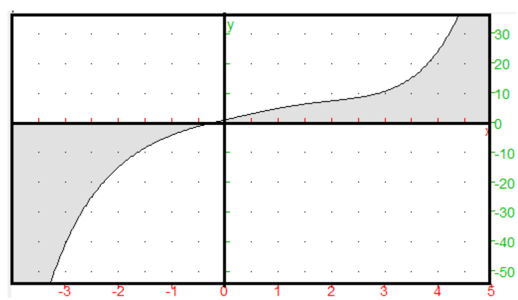
♡ 1 ♡ Exprimez $\cos^3(\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\cos(2.\theta)$ et $\cos(3.\theta)$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Montrez que deux matrices semblables ont la même trace. 2 pt.

◇ 0 ◇ On veut résoudre l'équation différentielle $\forall t,\ t.y''_t + 2.y'_t + t.y_t = 0$. d'inconnue y fonction de t. L'élève écrit l'équation caractéristique $t.\lambda^2 + 2.\lambda + t = 0$ et trouve $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-t^2}}{t}$ et trouve donc les combinaisons de $t \longmapsto e^{-1+\sqrt{1-t^2}}$ et $t \longmapsto e^{-1-\sqrt{1-t^2}}$. Pourquoi est il plus que totalement crétin ? 2 pt.
Le colleur dit « dérive n fois l'équation différentielle, calcule en 0 et donne moi la relation de récurrence vérifiée par la suite $a_n = y^{(n)}(0)$. 2 pt.
On suppose $y_0 = 1$. Que vaut y'_0 ? Que vaut $y_0^{(n)}$? 3 pt.

◇ 1 ◇ On m'a donné des informations sur une matrice de taille 3 sur 3 : spectre $[1,\ 2,\ -1]$ et vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez sa trace et son déterminant. 2 pt. Problème : on ne m'a pas dit quel vecteur propre allait avec quelle valeur propre. Indiquez combien il y a de matrices possibles, et donnez moi leur somme, et leur produit. 4 pt. Mais au fait, le résultat pour « produit » dépend il de l'ordre dans lequel j'effectue ces produits ?

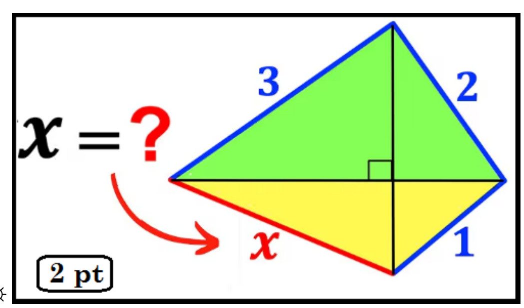
◇ 2 ◇ Je vous offre la diagonalisation de $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ en $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & & -2 \\ & 1 & \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent. 3 pt. Calculez M^{-1} et diagonalisez la. 3 pt.



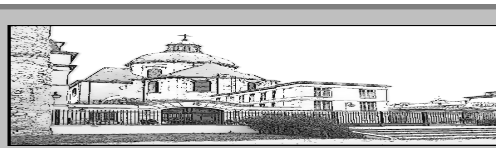
$\mathcal{H}_0$ On définit $f(x) = \cos(x) + 4.sh(x)$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = ch(x) + 4.\sin(x)$ si $x > 0$. Montrez que f admet un DL_1 en 0 de la forme $f(0+h) = a + b.h + o(h)$ mais pas de DL_2. 3 pt.

$\star_0$ f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞, on définit $g = x \longmapsto f(\ln(x))$ sur $]0,\ +\infty[$. Calculez g', g'' et $g^{(3)}$. 3 pt.
$\star_1$ Montrez l'existence d'une suite de coefficients $(d_{n,k})$ (à double indice) vérifiant
$\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)} = x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}.\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.f^{(k)}(\ln(x))$. 2 pt.
$\star_2$ Calculez $b_{n,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5$ (ça en fait combien ?). 2 pt.
$\star_3$ Écrivez un script Python qui pour n donné calcule (efficacement ?) la liste des $d_{n,k}$: $[d_{n,0}, \dots d_{n,n}]$. 3 pt.
$\star_4$ On se donne λ réel, en étudiant le cas particulier $f = x \longmapsto e^{\lambda.x}$ montrez : $\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.\lambda^{n-k} = \prod_{p=1}^{n} (\lambda - p)$. 3 pt.

☼



LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 22 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025
IS15
CORRECTION

IS15 Questions de cours.

On se donne un entier naturel n quelconque (non nul).
On note P_n la proposition « la composée de deux applications de classe D_n est de classe D_n ».
On veut protéger la même au rang $n+1$. On se donne alors f et u de classe D_{n+1}.
On sait déjà que $f \circ u$ se dérive en $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$ (en composant les développements limités).

> *On écrit en effet $u(a+h) = u(a) + h.u'(a) + h.\varepsilon_1(h)$ avec $\varepsilon_1(h) \longrightarrow_{h \to 0} 0$.*
> *On écrit aussi $f(u(a)+k) = f(u(a)) + k.f'(u(a)) + k.\varepsilon_2(k)$ avec $\varepsilon_2(k) \longrightarrow_{k \to 0} 0$. On compose*

$f(u(a+h)) =$	$f(u(a))$	$+h.u'(a).f'(u(a))$	$+h.\Big(f'(u(a)).\varepsilon_1(h) + (u'(a) + \varepsilon_1(h)).\varepsilon_2(h.u'(a) + h.\varepsilon_1(h))\Big)$

On voit ensuite que f' est de classe D_n de même que u (qui est même D_{n+1}). Par P_n, $f' \circ u$ est n fois dérivable.
De plus, u' est $(n+1)-1$ fois dérivable.
Par « formule de Leibniz », le produit $(f' \circ u) \times u'$ est n fois dérivable.
Comme $(f \circ u)'$ est n fois dérivable, c'est que $f \circ u$ est $1+n$ fois dérivable.

Pour linéariser $\cos^3(\theta)$, on peut partir de $\Big(\dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta)}}{2}\Big)^3 = \dfrac{e^{3.i.\theta} + e^{-3.i.\theta} + 3.e^{i.\theta} + 3.e^{-i.\theta}}{8}$.

On peut aussi partir de notre $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$: $\boxed{\cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3.\theta) + 3.\cos(\theta)}{4}}$

Et sous cette forme, il sera facile de dériver, d'intégrer.

On se donne A et B carrées de même format et on les suppose semblables. Il existe P inversible vérifiant $A = P.B.P^{-1}$. On calcule alors

$$Tr(A) = Tr(P.B.P^{-1}) = Tr((P).(B.P^{-1})) = Tr((B.P^{-1}).(P)) = Tr(B.P^{-1}.P = Tr(B)$$

IS15 Equation différentielle.

L'équation $\forall t,\ t.y''_t + 2.y'_t + t.y_t = 0$ n'est pas à coefficients constants.
La méthode des cours de maths et cours de physique ne fonctionne pas.

> *Mais se contenter de dire ça n'est pas un argument véritable pour dire que l'élève fait n'importe quoi. Sinon, c'est peut être juste que le cours de maths et le cours de physique sont insuffisant, ce qui arrive.*

Quand le physicien dit « on propose $x \longmapsto e^{\lambda.}$ et on regarde si il y a des valeurs de λ pour lesquelles l'application est solution ».
Si λ est « une constante », c'est bon, on dérive en $t \longmapsto \lambda.e^{\lambda.t}$ puis $t \longmapsto \lambda^2.e^{\lambda.t}$ et en reportant dans l'équation différentielle, on a bien la célèbre équation caractéristique.

Mais si λ n'est pas une constante, on fait quoi ? $t \longmapsto e^{\lambda_t.t}) = (t \longmapsto (\lambda'_t.t + \lambda_t).e^{\lambda_t.t})$ et c'est pire encore pour $(t \longmapsto e^{\lambda_t.t})''$. Aucune raison que l'équation soit alors validée.

> *De même, dans la méthode $\begin{pmatrix} y'_t \\ y''_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2/t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_t \\ y'_t \end{pmatrix}$, on va certes diagonaliser la matrice compagnon en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2/t \end{pmatrix} = P_t.D_t.P_t^{-1}$ et quand on va écrire $U_t = P_t^{-1}.Y_t$, la dérivation ne passera pas puisqu'on aura $U'_t = (P_t^{-1})'.Y_t + (P_t^{-1}.Y'_t)$ et on n'aura plus $U'_t = D_t.U_t$.*

Bref, l'élève a prétendu appliquer des méthodes sans se souvenir de ce qu'il y avait derrière.
C'est un ingénieur ça ?

Dérivons n fois l'égalité $Id.y'' + 2.y' + Id.y = 0$ puisque c'est une égalité entre fonctions (vraie partout)

$$(Id.y'')^{(n)} + 2.(y')^{(n)} + (Id.y)^{(n)} = 0$$

et comme tout est bien à l'étage des fonctions, la formule de Leibniz s'applique (en ne laissant que deux termes)

$$(Id.(y'')^{(n)} + n.Id'.(y'')^{(n-1)} + 0) + 2.(y')^{(n)} + (Id.(y)^{(n)} + n.Id'.(y)^{(n-1)} + 0) = 0$$

On simplifie les ordres de dérivation et on descend à l'étage des réels

$$t.y_t^{(n+2)} + n.{y_t}^{(n+1)} + 2.{y_t}^{(n+1)} + t.y_t^{(n)} + n.y^{(n-1)} = 0$$

On calcule ensuite en 0

$$0 + n.{y_t}^{(n+1)}(0) + 2.{y_t}^{(n+1)}(0) + 0 + n.y_t^{(n-1)}(0) = 0$$

et en posant $a_n = y^{(n)}(0)$ on a la relation de récurrence $\boxed{a_{n+1} = -\dfrac{n.a_n}{n+2}}$

Regardons l'équation différentielle en $t = 0$: $0.y''_0 + 2.y'_0 + 0.y_0 = 0$. On n'a pas le choix : y'_0 est nul.

Mais alors en mettant en boucle la formule $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{n+2}$ qui avance de 2 en 2 : $\boxed{a_{2.n+1} = 0 \text{ pour tout } n}$

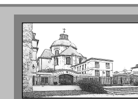
Et ceci ne dépend même pas du choix de y_0.

Avec $y_0 = 1$, on a $a_0 = 1$ puis $a_2 = -\dfrac{1}{3}$; on poursuit avec $a_4 = \dfrac{1}{5}$ et ensuite $a_6 = -\dfrac{1}{7}$.

On généralise (et on prend le temps de prouver par récurrence) : $\boxed{a_{2.n} = \dfrac{(-1)^n}{2.n+1}}$

Allez, la fonction cherchée est $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$. Saurez vous le prouver ?

IS15 Trois valeurs propres, trois vecteurs propres.



On nous a donne les valeurs propres et les vecteurs propres, il n'y a plus rien à faire, à part écrire

$$M = P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

en vérifiant quand même que le déterminant de celle que j'ai appelée P est non nul (il vaut -2).
La trace de M et le déterminant de M sont ceux de D : $\boxed{Tr(M) = 1 + 2 + (-1) = 2 \text{ et } \det(M) = 1 \times 2 \times (-1) = -2}$

Mais il y a six matrices D possibles, de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en passant par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule chacune et on somme ?
Non, on somme et on calcule : $\sum_{k=1}^{6} M_k = \sum_{k=1}^{6} P.D_k.P^{-1} = P.\Big(\sum_{k=1}^{6} D_k\Big).P^{-1}$
Or, la somme des six matrices $D_k$est simple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ldots + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Et avec P et P^{-1} il reste juste $\boxed{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 = 4.I_4}$

Et pour le produit, les $P.P^{-1}$se simplifient dans $P.D_1.P^{-1}.P.D_2.P^{-1}.P.D_3.P^{-1} \ldots P.D_6.P^{-1}$ et il reste $P.D_1.D_2.D_3 \ldots D_6.P^{-1}$.
Les matrices diagonale commutent deux à deux. L'ordre d'écriture n'a aucune importance.

Et on a la matrice produit $\begin{pmatrix} 1^2.2^2.(-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2.2^2.(-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2.2^2.(-1)^2 \end{pmatrix}$.

Étrangement, la somme et le produit des six solutions donne la même chose : $4.I_3$.

IS15 

Diagonalisation de taille 3 sur 3.

Il nous manque des coefficients ?
Mais si M se diagonalise en D, alors elles ont la même trace.

Comme D a pour trace 2, le coefficient qui manque sur la diagonale est un 5 : $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

D'autre part, les deux matrices de part et d'autres de D sont inverse l'une de l'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & & -2 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire $\boxed{\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Quelques du physicien : ah il ne fallait pas développer $P^{-1}.D.P$ et identifier avec M ? C'était moins calculatoire que ça ?
Question du mathématicien pur : combien aurais-je pû cacher de coefficients pour que le problème ait quand même une solution, unique.

Maintenant qu'on a $M = P.D.P^{-1}$, on trouve sans effort le déterminant de M : c'est le même que D.

$\det(M)$ vaut -2 ; il est non nul. M est inversible.

Et pour inverser M, il suffit de calculer sa comatrice :

$$Com(\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -8 & 9 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

puis transposer et diviser par le déterminant $\boxed{\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$

On diagonalise comme en cours ou T.D. de maths : $M = P.D.P^{-1}$ donc

$$M^{-1} = (P.D.P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$$

On note que le et mathématique est commutatif.
A la question « inverser M et diagonaliser M^{-1} », rien n'interdisait de diagonaliser $M^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$ puis de calculer par cette formule $\boxed{\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -6 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

IS15 

Un développement limité d'ordre 2.

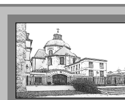
On estime qu'on connaît les développements limités usuels en 0. On écrit alors

sur $]+\infty, 0]$				sur $]0, +\infty[$			
$\cos(x) =$	1		$-x^2/2 + o(x^2)$	$ch(x) =$	1		$+x^2/2 + o(x^2)$
$4.sh(x) =$		$4.x$	$+o(x^2)$	$4.sin(x) =$		$4.x$	$+o(x^2)$
$f(x) =$	1	$+4.x$	$-x^2/2 + o(x^2)$	$f(x) =$	1	$+4.x$	$+x^2/2 + o(x^2)$

En mettant les termes en x^2 dans un $o(x)$, on a le même développement de chaque côté : $1 + 4.x + o(x)$.

En revanche, on n'a pas de développement d'ordre 2 car d'un côté il y a un signe plus et de l'autre un signe moins.

IS15 Dérivation et composition avec le logarithme.



On peut dériver la composée $x \longmapsto f(\ln(x))$ autant de fois que demandé

$g^{(0)}(x)$	$g^{(1)}(x)$	$g^{(2)}(x)$	$g^{(3)}(x)$
$f(\ln(x))$ $d_{0,0} = 1$	$\frac{1}{x}.f'(\ln(x))$ $d_{1,1} = 1$	$-\frac{1}{x^2}.f'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}f''(\ln(x))$ $d_{2,1} = -1, d_{2,2} = 1$	$\frac{2}{x^3}.f'(\ln(x)) - \frac{3}{x^3}f''(\ln(x)) + \frac{1}{x^3}.f^{(3)}(x)$ $d_{3,1} = 2, d_{3,2} = -3, d_{3,3} = 1$

On va montrer par récurrence l'existence de cette suite de coefficients

J'ai pris la peine d'initialiser cette suite ci dessus.
Supposons ensuite la propriété vraie à un rang n donné, et dérivons une fois de plus, puisque les applications en jeu son C^∞

$$g^{(n+1)} = \Big(x \longmapsto \frac{1}{x^n}.\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.f^{(k)}(\ln(x))\Big)'$$

$$g^{(n+1)} = \Big(x \longmapsto \frac{-n}{x^{n+1}}.\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.f^{(k)}(\ln(x)) + \frac{1}{x^k}.\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.\frac{f^{(k+1)}(\ln(x))}{x}\Big)$$

On ré-indexe la seconde somme et on fusionne

$$g^{(n+1)} = \Big(x \longmapsto \frac{1}{x^{k+1}}.\sum_{k=0}^{n}(-n.d_{n,k}).f^{(k)}(\ln(x)) + \frac{1}{x^{k+1}}.\sum_{k=1}^{n+1} d_{n,k-1}.f^{(k)}(\ln(x))\Big)$$

il est temps de créer les nouveaux coefficients en posant $\boxed{d_{n+1,k} = -n.d_{n,k} + d_{n,k-1}}$ en tout cas pour les indices centraux et $d_{n+1,0} = -k.d_{n,0}$ puis $d_{n+1,n+1} = d_{n,n} = 1$.

Ceci permet de les calculer de proche en proche

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=0	1						
n=1	0	1					
n=2	0	-1	1				
n=3	0	2	-3	1			
n=4	0	-6	11	-6	1		
n=5	0	24	-50	35	-10	1	
n=6	0	-120	274	-225	85	-15	1

Pour le script Python, on peut partir dans le récursif brutal $d_{n,k} = -(n-1).d_{n-1,k} + d_{n-1,k-1}$ en réfléchissant à la condition d'arrêt

```
def faa(n, k) : #int, int -> int
....if n == 0 and k == 0 : #condition d'arrêt classique
........return 1
....if k < 0 ou k> n : #condition d'arrêt en cas de débordement
........return 0
....return faa(n-1, k-1) - (n-1)*faa(n-1, k) #cas général
```

Mais il vaut mieux construire les lignes jusqu'à arriver sur la bonne.

```
def faaLigne(N) : #int -> list of int
....L = [1] #ligne d'indice 0
....T = [L]
....for n in range(1, N+1) : #création de chaque nouvelle ligne
........L = [0] #premier terme
........for k in range(1, n) : #les n termes du milieu de la ligne
............L.append(T[n-1][k-1] - (n-1)*T[n-1][k]) #formule de récurrence
.........L.append(1) #le dernier de la ligne
.........T.append(L) #insertion de la nouvelle ligne
....return L
```

Et voici quand même les termes de la ligne d'indice 10 :
`[0, -362880, 1026576, -1172700, 723680, -269325, 63273, -9450, 870, -45, 1]`
Mais on va voir qu'on peut les trouver autrement.

On prend f égale à $x \longmapsto e^{\lambda.x}$ (de classe $\mathbb{C}^\infty$). L'application g est donc $x \longmapsto e^{\lambda.\ln(x)}$ et se simplifie en $x \longmapsto x^\lambda$.
On connait ses dérivées successives : $x \longmapsto \lambda.x^{\lambda-1}$, $x \longmapsto \lambda.(\lambda-1).x^{\lambda-2}$ et ainsi de suite

$$g^{(n)} = x \longmapsto \Big(\prod_{p=0}^{n-1}(\lambda-p)\Big).x^{\lambda-n}$$

Mais la formule démontrée ne dépend pas de la fonction f, on a donc

$$g^{(n)} = x \longmapsto \Big(\prod_{p=0}^{n-1}(\lambda-p)\Big).x^{\lambda-n} = x \longmapsto \frac{1}{x^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.f^{(k)}(\ln(x))\Big)$$

Les dérivées successives de f sont des exponentielles : $f^{(k)} = x \longmapsto \lambda^k.e^{\lambda.x}$. Notre membre de droite devient

$$x \longmapsto \frac{1}{x^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.\lambda^k.e^{\lambda.\ln(x)}\Big) = x \longmapsto x^{\lambda-n}.\Big(\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.\lambda^k\Big)$$

En identifiant les deux dérivées de g (et en effaçant le $x \longmapsto x^{\lambda-n}$)

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}.\lambda^k = \prod_{p=0}^{n-1}(\lambda-p)$$

Pour n égal à 5, on a bien

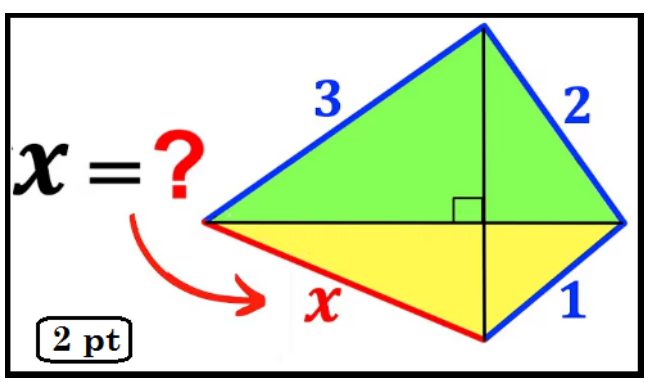
$$\lambda.(\lambda-1).\lambda-2).(\lambda-3).(\lambda-4) = 1.\lambda^5 - 10.\lambda^4 + 35.\lambda^3 - 50.\lambda^2 + 24.\lambda - 0$$

On peut d'ailleurs démontrer cette formule juste par récurrence sur n avec la formule $d_{n+1,k} = -n.d_{n,k} + d_{n,k-1}$.

IS15 Une longueur à retrouver.

On nomme les longueurs des segments issus du point d'intersection des deux segments perpendiculaires a, b, c et d (dans le sens trigonométrique).
Je vous laisse le faire sur le dessin et vérifier la cohérence des formules suivantes, issues du théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & +b^2 & & & = 2^2 \\ & b^2 & +c^2 & & = 3^2 \\ & & c^2 & +d^2 & = x^2 \\ a^2 & & & d^2 & = 1^2 \end{array}$$



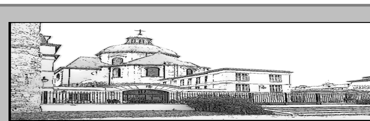
Quatre équations pour cinq inconnues dont une seule nous intéresse, est ce assez ?

Si vous n'avez pas l'âme matheuse, vous reportez des résultats les uns dans les autres, pour arriver à la réponse.

Si vous êtes matheux, vous effectuez une combinaison $L1 - L2 + L3 - L4$. Et il reste $0 = 2^2 - 3^2 + x^2 - 1^2$.
x^2 vaut 6 et $\boxed{x \text{ vaut } \sqrt{6}}$

On notera qu'on ne connaît pas forcément les longueurs des deux diagonales. On peut imposer une valeur (cohérente) à a et trouver les valeurs de b, c et d. Mais là, ça devient un autre exercice.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 IS15 2025
22- points