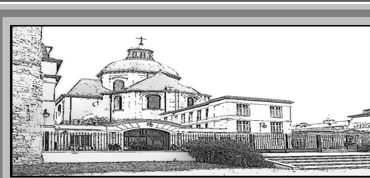
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 1 février

M.P.S.I.2



2024 2025

IS16

♡ 0 ♡ Montrez que $(A,B) \longmapsto Tr(A^T.B)$ est une forme bilinéaire symétrique défini positive sur l'espace des matrices carrées de taille 2. 4 pt.

♣ 0 ♣ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez l'angle entre A et A^2. 2 pt.

♣ 1 ♣ Calculez l'angle entre I_2 et A^n et montrez qu'il tend vers une limite α que vous préciserez. 4 pt.

◇ 0 ◇ P est un polynôme de degré d et a est un réel donné. Montrez pour tout n :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i + \frac{1}{n!}.\int_{u=a}^{x} (x-u)^n.P^{(n+1)}(u).dt = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i$$

◇ 1 ◇ On suppose $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$. Montrez qu'il existe un polynôme $Q(X)$ vérifiant $P(X) = (X-a)^k.Q(X)$.

◇ 2 ◇ Réciproquement, on suppose que $P(X)$ s'écrit $P(X) = (X-a)^k.Q(X)$ pour un entier k plus petit que d et $Q(X)$ un polynôme de degré $d-k$. Montrez alors pour tout i de 0 à k (inclus ?) : $P^{(i)}(a) = 0$.

On pose $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et on définit sur E deux lois et une relation

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a.d + b.c,\ b.d),\ (a,\ b) \otimes (c,\ d) = (a.c,\ b.d),\ ((a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)) \Leftrightarrow (a.\beta = b.\alpha)$$

◇ 3 ◇ Montrez que $\oplus$ et $\otimes$sont des lois internes sur E, commutatives. Combien sont associatives ? 4 pt.

◇ 4 ◇ Montrez que $\otimes$ n'est pas distributive sur $\oplus$. 2 pt.

◇ 5 ◇ Montrez que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence de E (RST). 3 pt.

◇ 6 ◇ Montrez que $\oplus$ et $\otimes$ sont compatibles avec $\Re$ $(\forall (X,Y,X',Y') \in E^4,\ (X\Re X' \ et\ Y\Re Y') \Rightarrow (X \oplus Y)\Re(X' \oplus Y'))$. 2 pt.

◇ 7 ◇ Montrez que tous les éléments de la classe d'équivalence de $(0,\ 1)$ sont « neutres pour $\oplus$ modulo $\Re$ ». 1 pt. $\forall (a,b),\ \big((a,b)\Re(0,1)\big) \Rightarrow \big(\forall (x,y),\ (a,b) \oplus (x,y)\Re(x,y)\big)$

◇ 8 ◇ Montrez que tous les éléments de la classe d'équivalence de $(1,\ 1)$ sont « neutres pour $\otimes$ modulo $\Re$ ». 1 pt.

◇ 9 ◇ Montrez que $\otimes$ est distributive sur $\otimes$ modulo $\Re$. 1 pt.

◇ 10 ◇ Montrez que chaque élément $(a,\ b)$ de E admet pour $\oplus$ un symétrique modulo $\Re$. 1 pt.

◇ 11 ◇ Montrez que chaque élément $(a,\ b)$ de E, s'il n'est pas en relation avec $(0,1)$, admet pour $\otimes$ un symétrique modulo $\Re$. 1 pt.

♮ 0 ♮ Que `2*n+1` divise `2*n+1` c'est normal. Mais que `2*n+1` divise `2**n+1`, c'est plus joli. Et c'est vrai pour 1 (3 divise 3), pour 2 (5 divise 5), pour 6 (13 divise 65) pour 9 (19 divise 513). Et même 2025. Écrivez moi un programme (efficace ?) qui pour p donné calcule les p premiers entiers de Curzon (c'est leur nom). 3 pt.

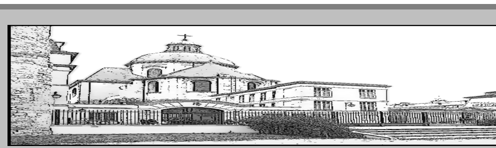
◇ 12 ◇ φ est solution de l'équation différentielle $y'' = -\sin(y)$ avec condition initiale $y_0 = 0$ et $y'_0 = a$. Montrez que φ est de classe C_∞. 2 pt. Montrez : $\varphi'.\varphi^{(4)} = \varphi^{(3)}.\varphi'' - (\varphi')^3.\varphi''$. 2 pt. Calculez $\varphi^{(5)}(0)$. 2 pt.

♣ 2 ♣ Douze kangourous portent les dossards numérotés de 1 à 12. Ils forment trois groupes de quatre. La somme des dossards d'un groupe est 41, celle d'un autre 26. Parmi les propositions suivantes, quel numéro est dans le même groupe que le kangourou 9 :

3	5	7	8	10

. 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 1 février
M.P.S.I.2



2024 2025
IS16
CORRECTION

IS16 Angles entre matrices.

Forme : pour tout couple $(A,\ B)$, le produit $A^T.B$ se calcule, donne une matrice carrée dont la trace se calcule

Calcul explicite : $<\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} >= Tr(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} a.\alpha + c.\gamma & \\ & b.\beta + d.\delta \end{pmatrix}) = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$

Symétrique : pour A et B quelconques données, $< B|A >= Tr(B^T.A) = Tr((B^T.A)^T) = Tr(A^T.B) =< A|B >$.
Bilinéaire : on se donne trois matrices et deux réels et on compare $Tr(A^T.(\lambda.B + \mu.C))$ et $\lambda.Tr(A^T.B) + \mu.Tr(A^T.C)$, il y a bien égalité.
positivité stricte : pour A donnée, la somme $Tr(A^T.A)$ vaut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; elle est positive et n'est nulle que pour A égale à la matrice nulle.

Pour la matrice A de l'énoncé, on calcule ce dont on a besoin

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$
$A^T.A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 13 \end{pmatrix}$	$(A^2)^T.A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & \\ & 85 \end{pmatrix}$
$< A\|A >= 14$	$< A^2\|A^2 >= 98$
$A^T.A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 33 \end{pmatrix}$	

On rappelle $< A|A^2 >= \sqrt{< A|A > . < A^2|A^2 >}.\cos(angle)$ et donc

$$angle = Arccos\Big(\frac{36}{\sqrt{14}.\sqrt{98}}\Big) = Arccos\Big(\frac{18}{7.\sqrt{7}}\Big)$$

Je n'irai pas dire que c'est un angle simple et agréable.

Pour l'angle entre A et A^n on a besoin de A^n. On diagonalise avec valeurs propres 1 et 2

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^{n+1}-1 \\ 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

On a de a chance les coefficients sont entiers.

$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^{n+1}-1 \\ 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$	
$(A^n)^T.A = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-1 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2-2^n & 2^{n+1}-1 \\ 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2^n-1)^2 + (2^n-2)^2 & \\ & (2^{n+1}-1)^2 + (2^{n+1}-2)^2 \end{pmatrix}$	$(I_2)^T.I_2^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$< A^n\|A^n >= 10.2^{2.n} - 18.2^n + 10$	
$(A^n)^T.I_2 = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-1 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-2^n) & \\ & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$ trace : $2^n + 1$	

La formule donne cette fois $\boxed{Arccos\Big(\frac{2^n+1}{\sqrt{10.2^{2.n} - 18.2^n + 10}.\sqrt{2}}\Big)}$ (si vous trouvez évident que le terme dans la parenthèse est entre -1 et 1 je dis chapeau).

Et quand n tend vers l'infini ?
Certains vont me dire « je le fais comme en physique, je ne garde que les plus gros termes »

$$\frac{2^n+1}{\sqrt{10.2^{2.n} - 18.2^n + 10}.\sqrt{2}} = \frac{2^n}{\sqrt{10.2^{2.n}}.\sqrt{2}} = \frac{2^n}{\sqrt{20}.2^n} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

Je dirai juste
« si tu mets des égalités, c'est de la physique, d'accord, mais c'est les outils des maths tenus par la lame au lieu du manche, c'est tout »

« si tu mets des « tend vers » tu n'as rien compris »
« si tu mets des « équivalents quand n tend vers l'infini », c'est des maths ».

$$\frac{2^n+1}{\sqrt{10.2^{2.n}-18.2^n+10}.\sqrt{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{10.2^{2.n}}.\sqrt{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{20.2^n}} \sim \frac{1}{\sqrt{20}}$$

« si tu divises tout par le terme dominant, c'est la même idée, façon terminale »

$$\frac{2^n+1}{\sqrt{10.2^{2.n}-18.2^n+10}.\sqrt{2}} = \frac{2^n.(1+2^{-n})}{2^n.\sqrt{10-18.2^{-n}+10.2^{-2.n}}.\sqrt{2}} = \frac{(1+2^{-n})}{\sqrt{10-18.2^{-n}+10.2^{-2.n}}.\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{20}}$$

IS16 Polynômes et racines.

Dans $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i + \frac{1}{n!}.\int_{u=a}^{x}(x-u)^n.P^{(n+1)}(u).dt = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i$ il y a deux formules :
• une qui dépend de n et qu'on va prouver par récurrence sur n
• la seconde qui ne dépend pas de n, mais ressemble à la précédente, coupée de son intégrale.

On initialise pour n égal à 0 : $P(x) = \frac{P(a)}{1}.(x-a)^0 + \frac{1}{1}.\int_a^x 1.P'(u).du$. C'est le théorème fondamental du calcul intégrale $\int_a^x P'(u).du = [P(u)]_{u=a}^x$.

Pour l'hérédité, on suppose la formule vraie à un rang n et on intègre par parties

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i + \frac{1}{n!}.\int_{u=a}^{x}(x-u)^n.P^{(n+1)}(u).dt$$

$$\int_{u=a}^{x}(x-u)^n.P^{(n+1)}(u).dt = \Big[\frac{-(x-u)^{n+1}}{n+1}.P^{(n+1)}(u)\Big]_{u=a}^{x} - \int_a^x \frac{-(x-a)^{n+1}}{n+1}.P^{(n+2)}(u).du$$

Le terme crochet s'incorpore à la somme en $\frac{P^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}$, et l'intégrale passe au rang $n+1$.

Héréditaire et initialisée, la formule est vraie à tout rang n.

Et si on l'appliquait alors au rang d ?

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i + \frac{1}{n!}.\int_{u=a}^{x}(x-u)^n.P^{(d+1)}(u).dt$$

Mais comme P est de degré d, le polynôme $P^{(d+1)}$ est nul. la fonction dans l'intégrale est nulle, et il ne reste que la somme.

On retient :
on a montré la formule de Taylor avec reste intégrale (un classique, ici sous sa forme $\int_a^x \ldots$*)*
on a montré que pour un polynôme, la formule de Taylor tombe juste une fois qu'on a assez dérivé

On va montrer une équivalence sur la multiplicité des racines d'un polynôme.

racine simple		$P(a)=0$				
racine double		$P(a)=0$	$P'(a)=0$			
racine triple		$P(a)=0$	$P'(a)=0$	$P''(a)=0$		
multiplicité k		$P(a)=0$	$P'(a)=0$	$P''(a)=0$	$\ldots$	$P^{(k-1)}(a)=0$

Premier sens. Si on a $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$, on peut effacer les k premiers termes dans la somme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i = \sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i = (X-a)^k.\sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^{i-k}$$

Il ne reste plus qu'à poser $Q(X) = \sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^{i-k}$ et dire que c'est un polynôme (exposants positifs).

Attention aux arnaques. Par exemple $Q(X) = \sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^{i-k-1}$ vérifie $P(X) = (X-a)^{k+1}.Q(X)$ mais $Q(X)$ n'est pas un polynôme car il traine des exposants négatifs.
C'est comme ceux qui écrivent que 17 divise $\binom{19}{18}$ car $\binom{19}{18} = 17.\frac{19.18.16!}{18!.1!}$ en ayant factorisé 17 au numérateur.

Deuxième sens. On suppose que $P(X)$ est de la forme $(X-a)^k.Q(X)$.
On voit que $P(a)$ est nul. On dérive, il reste un $X-a$ en facteur.
Si on persiste à bricoler, on raconte, on invente des trucs.
Et si on est matheux, on dit « formule de Leibniz » :

$$P^{(i)}(X) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}.\frac{k!}{(k-j)!}.(X-a)^{k-j}.Q^{(i-j)}(X) \ avec\ j \leqslant i < k$$

Tous les $(X-a)^{k-j}$ sont nuls en a, la somme l'est aussi.

En revanche, pour $i = k$ il reste un terme.

IS16 Equation différentielle.

On part de $y'' = -\sin(y)$ (je m'en veux que la formule ne soit pas homogène, sans le classique ω^2 mais c'est pour alléger les calculs).

Par récurrence sur n, chaque solution est de classe $D_{2.n}$.

Initialisation : comment parler de y'' dans l'équation si l'application n'est pas déjà de classe D_2.

On se donne n et on suppose que la solution est de classe $D_{2.n}$. Mais alors par théorème $\sin(y)$ (ou plutôt la composée $\sin \circ \varphi$) est de classe $D_{2.n}$. On reporte dans l'équation différentielle, et y'' est de classe $D_{2.n}$. Mais ceci signifie que y est de classe $D_{2.n+2}$. Et c'est bien la conclusion attendue.

Maintenant que la solution est de classe suffisante, on peut re-dériver l'équation autant de fois qu'on veut

$y^{(2)} = -\sin(y)$		$y^{(3)} = -\cos(y).y'$		$y^{(4)} = +\sin(y).(y')^2 - \cos(y).y''$

Partons alors de $y^{(4)} = +\sin(y).(y')^2 - \cos(y).y''$ et essayons d'y retrouver les termes déjà croisés, quitte à multiplier déjà par y'

$$y^{(4)}.y' = +\sin(y).(y')^3 - \cos(y).y'.y''$$

on peut remplacer $-\cos(y).y'$ par $y^{(3)}$ et $\sin(y)$ par $-y''$

$$y^{(4)}.y' = -y^{(2)}.(y')^3 + y^{(3)}.y''$$

Si on l'écrit sur la fonction solution, on a bien $\boxed{\varphi'.\varphi^{(4)} = \varphi^{(3)}.\varphi'' - (\varphi')^3.\varphi''}$

Reprenons nos lignes de dérivées, mais regardons cette fois en 0 :

				$y^{(2)} = -\sin(y)$		$y^{(3)} = -\cos(y).y'$		$y^{(4)} = +\sin(y).(y')^2 - \cos(y).y''$
$\varphi(0) = 0$		$\varphi'(0) = a$		$\varphi^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$		$\varphi^{(3)} = -\cos(0).a = -a$		$\varphi^{(4)} = \sin(0).(a)^2 - \cos(0).0 = 0$

On pourra accéder aux dérivées successives en 0 (et trouver que chaque $\varphi^{(2.k)}(0)$ est nul).

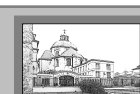
On repart de $\varphi'.\varphi^{(4)} = \varphi^{(3)}.\varphi'' - (\varphi')^3.\varphi''$ et on dérive une fois de plus

$$\varphi^{(2)}.\varphi^{(4)} + \varphi'.\varphi^{(5)} = \varphi^{(4)}.\varphi^{(2)} + \varphi^{(3)}.\varphi^{(3)} - 3.(\varphi')^2.\varphi^{(2)}.\varphi^{(2)} - (\varphi')^3.\varphi^{(3)}$$

Je vous laisse estimer en 0.

Et si on veut aller plus loin, Formule de Leibniz, version multinôme.

IS16 Construction (non avouée) de $\mathbb{Q}$.



On pose $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et on définit sur E deux lois et une relation

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a.d + b.c,\ b.d),\ (a,\ b) \otimes (c,\ d) = (a.c,\ b.d),\ \big((a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)\big) \Leftrightarrow (a.\beta = b.\alpha)$$

Les lois, c'est $\oplus$ et $\otimes$ (qui prennent deux éléments de E et en construisent un nouveau pour chacune). La relation c'est , tantôt vraie, tantôt fausse, suivant les couples choisis.

Montrez que $\oplus$ et $\otimes$sont des lois internes sur E, commutatives.

On se donne des couples d'entiers $(a,\ b)$ et $(c,\ d)$, avec « dénominateur » non nul.
Les quantités $a.d + b.c$, $b.d$ et $a.c$ sont des entiers relatifs.
Reste à vérifier que $b.d$ est non nu. C'est l'intégrité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ ($(b \neq 0\ et\ d \neq 0) \Rightarrow (b.d \neq 0)$ utilisé en forme contraposée).

Pour la commutativité, on quantifie des couples et on vérifie directement

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a.d + b.c,\ b.d) = (c.b + d.a,\ d.b) = (c,\ d) \oplus (a,\ b)$$

et l'autre encore plus simple.

Combien sont associatives ?

La seconde sans hésiter. Il suffit de quantifier et de comparer

$$\big((a,\ b) \otimes (c,\ d)\big) \otimes (e,\ f)\ et\ (a,\ b) \otimes \big((c,\ d) \otimes (e,\ f)\big)$$

Pour la première c'est un peu plus long, mais $\big((a,\ b) \otimes (c,\ d)\big) \otimes (e,\ f)$ et $(a,\ b) \otimes \big((c,\ d) \otimes (e,\ f)\big)$ donnent

$$(a.d.f + b.c.f + b.d.e,\ b.d.f)$$

(et on explique en fait avec $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a.d + b.c}{b.d} + \frac{e}{f} = \frac{(a.d + b.c).f + e.b.d}{b.d.f}$).

Montrez que $\otimes$ n'est pas distributive sur $\oplus$.

Il suffit d'un contre-exemple. On peut commencer avec des formules générales pour voir ce qu'il se passe entre

$$(a.d.e + b.c.e,\ b.d.f)\ et\ (a.d.e.f + b.c.e.f,\ b.f.d.f)$$

Mais attention, on est en maths.
Celui qui écrit $(a.d.e + b.c.e,\ b.d.e)\ \neq\ (a.d.e.f + b.c.e.f,\ b.f.d.f)$ a mal répondu.
Car il y a des cas où il y a égalité.
De même que deux expressions « qui ne se ressemblent pas » sont quand même égales.
Rappelons au passage que l'élève de seconde dira « eh, tu t'es trompé, t'as confondu $\exp(0)$ *et* $\cos(0)$ *».*

L'élève qui veut des points de maths écrit

$$\big((1,1) \oplus (1,\ 2)\big)\ \otimes\ (1,2)\ = (3,\ 4)\ \neq\ (6,8)\ =\ \big((1,1)\big) \otimes (1,2)\big)\ \oplus \big((1,\ 2) \otimes (1,2)\big)$$

car oui, le contre-exemple est une réponse. C'est même la réponse.

Montrez que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence de E (RST).

On se donne tout de suite trois couples (avec « dénominateur » non nul) et on affirme
$(a,b)\Re(a,b)$

$(a,b)\Re(c,d)\ \Rightarrow\ (c,d)\Re(a,b)$

$\big((a,b)\Re(c,d)\ et\ (c,d)\Re(e,f)\big) \Rightarrow\ (a,b)\Re(e,f)$

La première repose sur une trivialité : $a.b = b.a$.
La seconde est tout aussi évidente.
Pour la troisième, on passe de $(a.d = b.c)$ et $(c.f = d.e)$ à $(a.f = b.e)$
en multipliant la première par f $(a.d.f = b.c.f)$ en remplaçant $c.f$ par $d.e$ dans le second membre $(a.d.f = b.d.e)$ puis en simplifiant par b qui est non nul.

Attention quand même pour la première une fois encore.
On est en maths, on aligne des arguments et pas des polymères chimiques de formules.
On attend de vous que vous écriviez $\forall(a,b)\in E,\ (a,b)\Re(a,b)$ *car* $\forall(a,b)\in E,\ a.b=b.a$ *(formule*$*$*)*
et pas $\forall(a,b)\in E,\ (a,b)\Re(a,b)\Leftrightarrow(a.b=b.a)$. *(formule* $\blacksquare$*).*

La ligne $*$ *dit que* $(a,b)\Re(a,b)$ *est toujours vrai (et donne l'argument).*
La ligne $\blacksquare$ *ne dit pas que* $(a,b)\Re(a,b)$ *est toujours vrai.*
Elle dit que $(a,b)\Re(a,b)$ *est vrai si et seulement si* $a.b=b.a$ *est vrai. Elle recopie une définition.*
Certes, dans votre tête, vous dites ensuite « or, il est évident que $a.b=b.a$ *est toujours vrai, donc* $(a,b)\Re(a,b)$ *est toujours vrai aussi. Mais ça vous l'avez sous-entendu et pas écrit sur la feuille.*
Rappelons que je peux écrire aussi $\forall(a,b)\in E,\ non((a,b)\Re(a,b))\Leftarrow(a.b\neq b.a)$*, et ce serait correct, et ne m'apporterait rien.*
Donc, pas de $\Leftrightarrow$ *n'importe où.*

$\boxed{\text{Montrez que } \oplus \text{ et } \otimes \text{ sont compatibles avec } \mathbb{R}.}$

C'est pour passer aux classes d'équivalence « modulo $\Re$ ».
On se donne quatre éléments de E : (a,b), (c,d), (α,β) et (γ,δ).

On fait deux hypothèses qu'on traduit

$(a,b)\Re(\alpha,\beta)$	et	$(c,d)\Re(\gamma,\delta)$
$a.\beta=b.\alpha$		$c.\delta=\gamma.d$

On calcule quatre images

$(a,b)\oplus(c,d)=(a.d+b.c,\ b.d)$	et	$(a,b)\otimes(c,d)=(a.c,\ b.d)$
« sommes »		« produits »
$(\alpha,\beta)\oplus(\gamma,\delta)=(\alpha.\delta+\beta.\gamma,\ \beta.\delta)$		$(\alpha,\beta)\otimes(\gamma,\delta)=(\alpha.\gamma,\ \beta.\delta)$

et on doit vérifier qu'elles sont deux à deux en relation

$(a.d+b.c,\ b.d)\ \Re\ (\alpha.\delta+\beta.\gamma,\ \beta.\delta)$	et	$(a.c,\ b.d)\ \Re\ (\alpha.\gamma,\ \beta.\delta)$
car		car
$(a.d+b.c).(\beta.\delta)\ =\ (\alpha.\delta+\beta.\gamma).(b.d)$		$(a.c.\beta.\delta)\ =\ (b.d.\alpha.\gamma)$

La relation $(a.c.\beta.\delta)\ =\ (b.d.\alpha.\gamma)$ est une conséquence directe de $a.\beta=b.\alpha$ et $c.\delta=\gamma.d$.
La relation $(a.d+b.c).(\beta.\delta)\ =\ (\alpha.\delta+\beta.\gamma).(b.d)$ est moins directe mais tout aussi facile.

Pas de difficulté dans ces questions.
A part « se poser la bonne question ».
Bref, one more time, des maths, pas du calcul.

$\boxed{\text{Montrez que tous les éléments de la classe d'équivalence de } (0,\ 1) \text{ sont « neutres pour } \oplus \text{ modulo } \Re \text{ ».}}$

On prend donc un élément (a,b) dans la classe d'équivalence de $(0,1)$. On traduit pour que ça serve : $a.1=b.0$. Bon, a est nul.

C'est en fait une écriture de $\dfrac{0}{1}$, donc une écriture de la forme $\dfrac{0}{b}$ avec b non nul.

On veut monter sa « neutralité », on va donc le confronter à un autre élément (x,y) et effectuer la « somme »

$$(0,\ b)\oplus(x,\ y)\ =\ (0.y+b.x,\ b.y)\ =\ (b.x,\ b.y)$$

Certes, on n'a pas obtenu (x,y) mais le nouvel élément $(b.x,\ b.y)$ vérifie bien $(x,y)\Re(b.x,\ b.y)$ (certains diront « en simplifiant par b non nul »).

$\boxed{\text{Montrez que tous les éléments de la classe d'équivalence de } (1,\ 1) \text{ sont « neutres pour } \otimes \text{ modulo } \Re \text{ ».}}$

Cette fois, l'élément (a,b) est en relation avec $(1,1)$ (le rationnel 1). Il vérifie $a=b$.

On se donne (x,y) quelconque. On calcule le « produit »

$$(a,\ a)\oplus(x,\ y)\ =\ (a.x,\ a.y)$$

et cet élément est en $\Re$elation avec (x,y).

$\boxed{\text{Montrez que } \otimes \text{ est distributive sur } \otimes \text{ modulo } \Re.}$

On se doute qu'il faut maintenant prouver que pour tout triplet de couples (X,Y,Z), à défaut d'avoir $(X\oplus Y)\otimes Z\ =\ (X\otimes Z)\oplus(Y\otimes Z)$ on aura

$$\big((X\oplus Y)\otimes Z\big)\ \Re\ \big((X\otimes Z)\oplus(Y\otimes Z)\big)$$

Reprenons des notations déjà introduites et un calcul déjà mené

$$(a.d.e + b.c.e,\ b.d.f)\ \Re\ (a.d.e.f + b.c.e.f,\ b.f.d.f)$$

car $(a.d.e + b.c.e).(b.f.d.f)$ est égal à $(a.d.e.f + b.c.e.f).(b.d.f)$.

Montrez que chaque élément $(a,\ b)$ de E admet pour $\oplus$ un symétrique modulo $\Re$.

Que peut signifier cette question ? On se donne (a, b) et il faut trouver (α, β) tel que $(a, b) \oplus (\alpha, \beta)$ soit « l neutre additif » ou pour le moins « dans la classe d'équivalence du neutre additif ».
Or, on a trouvé cette classe, c'est celle de $(0,\ 1)$.
On cherche donc (α, β) vérifiant

$$\big((a,\ b)\ \oplus\ (\alpha,\ \beta)\big)\ \Re\ (0,\ 1)$$

Et assez naturellement

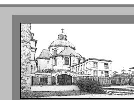
$$\big((a,\ b)\ \oplus\ (-a,\ b)\big)\ =\ (0,\ b^2)\ \Re\ (0,\ 1)$$

L'opposé de (a, b) est $(-a,\ b)$. Quel scoop !

Montrez que chaque élément $(a,\ b)$ de E, s'il n'est pas en relation avec $(0, 1)$, admet pour $\otimes$ un symétrique modulo $\Re$.

Cette fois, le symétrique de $(a,\ b)$ sera $(b,\ a)$.
Il est dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ si a est non nul, ce qui revient à dire que (a, b) n'est pas en relation avec $(0, 1)$ (le rationnel nul).

IS16 Nombres de Curzon.



On a une condition à remplir `(2**n+1) % (2*n+1) == 0`.

Et une condition : il en faut `p` comme ça. On va donc créer une liste et exécuter une boucle conditionnelle `while` (tant que la liste est trop courte).

```
def scooby(p) : #int -> list of int
....L = [ ] #la liste à remplir
....n = 0 #l'entier qui va avancer peu à peu
....d = 1 #vous allez comprendre
....while len(L) < p : #on arrêtera à len(L)=p
........if (d+1) % (2*n+1) == 0 : #la condition
............L.append(n) #un de plus
........n += 1 #entier suivant
........d *= 2 #d est la puissance de 2
....return L
```

On évite ici de recommencer le calcul de 2**n à chaque tour. Autant se contenter de multiplier le précédent par 2.

Cela dit, avec `2<<n`, Python crée tout de suite le nombre binaire fait d'un `1` et de `n` zéros.
C'est connu quand on travaille avec le binaire pour des manipulations de fonctions indicatrices d'ensembles par exemple.

IS16 Des kangourous.

Trois groupes de quatre.
Pourquoi ne nous donne-t-on que les totaux de deux des groupes ?
Parce qu'on peut reconstituer le troisième.

D'ailleurs, on va le faire, car ces totaux de 41 et 26 me semblent élevés.

Total des dossards : $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$.
On enlève les deux groupes à 41 et 26, il reste 11.
C'est peu. Il faut des kangourous de « ptits dossards » car déjà $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
La seule façon de ne pas dépasser 11 (avec des dossarsd différents) c'est $1 + 2 + 3 + 5$.

On a donc maintenant les kangrous 4 et de 6 à 12 à répartir dans deux groupes de totaux 41 et 26.

Mais la question est « avec qui est le 9 ? ».

Il n'est pas dans le premier groupe.
Donc il n'est pas avec 3 ni avec 5.

Peut il être avec le 10 ? Dans ce cas, la somme des dossards de son groupe atteint déjà 19.
Et il reste deux individus dont les dossards valent au moins 4 puis 6. On va dépasser 26.
C'est donc qu'ils sont dans le groupe de total 43.
Comment le former : 9, 10, il manque 24. Pas jouable.

On fait le même type de raisonnement si il est avec kagourou 8.

Au final, la seule solution est 9 est avec 7. Dans le groupe de gros total 26 :

1, 2, 3, 5	4, 6, 7, 9	8, 10, 11, 12
total 11	total 26	total 41