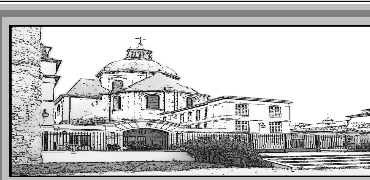
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 5 février

M.P.S.I.2



2024 2025

IS17

♡ 0 ♡ Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G. On définit $\Re$ par $(a \Re b) \Leftrightarrow (a * b^{-1} \in H)$. Montrez que si $\Re$ est une relation d'équivalence, alors H est un sous-groupe de $(G, *)$. 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A.B)$ est une forme bilinéaire symétrique, mais pas positive sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Quelle est l'amplitude de $t \longmapsto 4.\cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3.\cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$? 2 pt.

♣ 0 ♣ Donnez le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation $a + a.b + a.b.c = 42$ d'inconnue (a, b, c). 4 pt.

♯ 0 ♯ Et si vous n'arrivez pas à le dénombrer, pourquoi pas un programme Python, même en force brute. 2 pt.

♣ 1 ♣ L'élève dit : « $n!$ se termine avec exactement 17 chiffres 0 ». « Impossible » dit le colleur. Pourquoi ? 2 pt.

♢ 0 ♢ On donne $M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 3 \\ -10 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculez M^2. 1 pt. Complétez $M^3 + \dots .M^2 + \dots .M = \dots .I_4$. 2 pt. Exprimez M^{-1} comme combinaison de M^2,M et I_4. 2 pt.

♢ 1 ♢ n est un entier naturel donné, on note $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1).(X-1).(X-2)$.
Calculez $R_n(-1)$, $R_n(1)$ et $R_n(2)$. 2 pt.

♢ 2 ♢ Complétez : $R_n(X) = \dots .(X-1).(X-2) + \dots .(X-1).(X+1) + \dots .(X+1).(X-2)$. 2 pt.

♢ 3 ♢ Exprimez M^n comme combinaison de M^2, M et I_4. 2 pt.

♢ 4 ♢ Votre formule est elle cohérente pour $n = -1$? 1 pt.

♢ 5 ♢ On ne demande pas ici de prouver que $(f,\ g) \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des applications continues $2.\pi-$périodiques, on va juste l'utiliser.

♢ 6 ♢ Montrez que cos et sinsont orthogonales. 1 pt.

♢ 7 ♢ Quelle application $x \longmapsto \cos(x - \varphi)$ fait un angle $\pi/3$ avec cos ? 2 pt.

♢ 8 ♢ Quel est l'angle entre $\cos^2$ et 1 ? 2 pt.

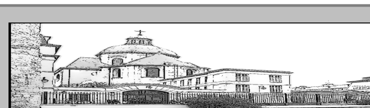
♢ 9 ♢ Quel est l'angle entre $\cos^2$ et $\sin^2$? 2 pt.

♠ 0 ♠ On définit sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi $*$ par $(a,\ x) * (b,\ y) = \left(a.b,\ \dfrac{x}{b} + y.a\right)$.
Montrez que c'est une loi interne, associative, non commutative. Donnez son neutre. Donnez le symétrique de $(a,\ x)$. 4 pt.

♠ 1 ♠ Calculez $(1,1) * (1,1) * (1,1) * \dots * (1,1)$ (n termes). 2 pt.

♠ 2 ♠ Calculez $(-1,1) * (-1,1) * (-1,1) * \dots * (-1,1)$ (n termes). 2 pt.

♠ 3 ♠ Donnez un sous-groupe de cardinal 2 de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$. 2 pt.



IS17 Relation d'équivalence.

La partie H est a priori juste une partie de G.
Mais déjà, la relation $\Re$ est réflexive.
Pour tout x de G, on a $x\Re x$. Et ceci donne $x * x^{-1} \in H$.
Gagné, e est dans H.

> *Piège que je ne relèverai pas. Il faut au moins un élément x pour pouvoir dire ça.*
> *Et on en a ?*
> *Oui, on prend $x = e$ tout simplement.*
> *On a alors $e\Re e$ et c'est ça qui nous donne $e \in H$.*

Ensuite, la relation $\Re$ est symétrique. C'est ce qui devrait nous permettre de montrer que H est stable par passage au symétrique.
On prend a dans H.
On peut dire $a\Re e$ puisque $a * e^{-1}$ est dans H.
Par symétrie de $\Re$ ont sait $e\Re a$. On traduit : $e * a^{-1} \in H$.
On reconnaît que a^{-1} est dans H. Gagné.

Enfin, la transitivité de la relation va nous donner la stabilité de H par la loi $*$.
On se donne a et b dans H.
On peut dire $a\Re e$ puisque $a * e^{-1}$ est dans H.
On peut dire aussi $b\Re e$ puisque $b * e^{-1}$ est dans H.
Par symétrie, on déduit $e\Re b$.
Par transitivité, on déduit $a\Re b$.
On traduit : $a * b^{-1} \in H$.

> *Pour ceux qui ne trouvent pas ceci convaincant, on fait usage de la « stabilité par inversion ».*
> *Pour a et b dans H, on sait que b^{-1}est aussi dans H et on applique le raisonnement précédent à a et b^{-1}.*

IS17 Forme bilinéaire pas positive.

Là, il faut bien décortiquer la question avec ce qui « marche » et « ce qui ne marche pas ».

Forme.
Pour A et B données, la matrice $A.B$ reste carrée de taille 2 et a une trace. $Tr(A.B)$ existe et c'est un réel.

Symétrique.
On se donne A et B et on compare $Tr(A.B)$ et $Tr(B.A)$. Il y a égalité par théorème du cours.

Bilinéaire.
On se donne A, B et C et on calcule $Tr(A.(\lambda.B + \mu.C))$ et $\lambda.Tr(A.B) + \mu.Tr(A.C)$. C'est bon par distributivité de la multiplication sur l'addition, et par linéarité de la trace.

Pas positive.
La positivité c'est $\forall A,\ (A|A) \geqslant 0$. Ici, on veut donc $\exists A \in M_2(\mathbb{R}),\ (A|A) < 0$.

> *Trouver un couple $(A,\ B)$ vérifiant $Tr(A.B) < 0$ ne prouvera rien.*
> *Même pour un produit scalaire, il existe des couples $(A,\ B)$ vérifiant $(A|B) < 0$, c'est la notion d'angle obtus.*
> *Et on a déjà $(-A|A) < 0$ d'ailleurs.*

On calcule pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $Tr(A.A) = a^2 + d^2 + 2.b.c$. On peut donc choisir par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour avoir un contre-exemple (celui que presque tout le monde va proposer d'ailleurs, même si il y en a plein d'autres).

IS17 Amplitude.

On décompose la fonction $t \longmapsto 4.\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)+3.\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ en combinaison de sinus et cosinus

$$t \longmapsto \cos(t).\left(4.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-\sin(t).\left(4.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+3.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Or, le signal $A.\cos + B.\sin$a pour amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$. L'amplitude de notre signal est donc

$$\sqrt{\left(4.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+\left(4.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+3.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$$

et en développant avec $\cos^2+\sin^2=1$ on trouve

$$\sqrt{16+9+24.\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

qu'on simplifie en $\sqrt{25+6.\sqrt{6}+6.\sqrt{2}}$si nécessaire.

IS17 Equation avec 42.

Écrivons l'équation $a+a.b+a.b.c=42$ sous la forme $a.(1+b.(1+c))=42$.
Il faut donc que a divise 42.
Qui sont les diviseurs de 42 ? : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.
Pour chaque diviseur a, l'équation devient $1+b.(1+c)=\dfrac{42}{a}$ soit encore $b.(1+c)=\dfrac{42}{a}-1$.
ON va donc chercher les diviseurs de $(42//a)-1$ pour le dire comme Python.
Et pour chaque diviseur b, on a le c associé par division et soustraction de 1.

$a=$	$(n//a)-1$	b	c	formule
1	42-1=41	1	40	1+1.1+1.1.40
		41	0	1+1.41+1.41+0
2	21-1=20	1	19	2+2.1+2.1.19
		2	9	2+2.2+2.2.9
		4	4	2+2.4+2.4.4
		5	3	2+2.5+2.5.3
		10	1	2+2.10+2.10.1
		20	0	2+2.20+2.20.0
3	14-1=13	1	12	3+3.1+3.1.12
		13	0	3+3.13+3.13.0
6	7-1=6	1	5	6+6.1+6.1.5
		2	2	6+6.2+6.2.2
		3	1	6+6.3+6.3.1
		6	0	6+6.6+6.6.0
7	6-1=5	1	4	7+7.1+7.1.4
		5	0	7+7.5+7.5.0
14	3-1=2	1	1	14+14.1+14.1.1
		2	0	14+14.2+14.2.0
21	2-1=1	1	0	21+21.1+21.1.0

Et si on cherche avec `Python` ? On y va carrément pour un entier n.
On va imbriquer trois boucles sur `a`, `b` et `c`, avec des bornes qui vont sans doutes trop loin :

```
def compte(n) : #int -> int
....c = 0 #initialisation compteur
....for a in range(n+1) : #a ne dépassera pas n
.......for b in range(n+1) : #et même (n//a)+1, non ?
...........for c in range(n) : #gros gâchis mais tant pis
...............if a+a*b+a*b*c == n : #une solution de plus
...................c += 1
....return c
```

IS17 Factorielle.

Pourquoi serait il impossible que $n!$ se termine avec exactement dix sept 0 ?

On sait déjà que le nombre de 0 va en croissant. Et qu'à chaque facteur 5 qui s'ajoute au produit, on a un 0 de plus, voir deux.

Je propose donc de juste compter les 0 à la fin de $n!$ « à la main » tant que n est petit.

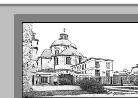
entier n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
nombre de 0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
entier n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
nombre de 0	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6

Oui, si 24! se termine bien par quatre 0 (pour le plaisir : 620 448 401 733 239 439 360 000), le passage à 25! crée carrément un facteur 100 et deux 0 de plus en un coup.
Poursuivons notre tableau, mais en regardent juste quand on gagne un 0 de plus, voire justement deux.

entier n	30		35		40		45		50		55		60		65		70		75	
nombre de 0	7		8		9		10		12		13		14		15		16		18	stop !

Impossible en effet d'avoir exactement dix sept 0.

IS17 Une matrice.



On calcule M^2 et si on en a le courage M^3

$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$M^1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 3 \\ -10 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$M^2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 3 \\ -12 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$M^3 = \begin{pmatrix} -19 & 9 & 0 & 9 \\ -34 & 17 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -20 & 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

A part les 0 autour du $(-1)^n$, il n'y a pas grand chose à deviner.

Mais quand même le calcul donne assez vite en regardant hors de la diagonale pour commencer

$$M^3 - 2.M^2 - M = -2.I_4$$

(et en regardant le polynôme $(X-1).(X+1).(X-2)$ qui semble nous inspirer pour la suite).

On a alors astucieusement

$$M.\frac{-M^2+2.M+I_4}{2} = \frac{-M^3+2.M^2+M}{2} = I_3$$

et ceci nous permet de proposer et vérifier $\boxed{M^{-1} = \frac{-M^2+2.M+I_4}{2}}$ (à vérifier à droite et à gauche, mais ici « tout commute »).

On part de la formule de la division euclidienne : $X^n = (X-1).(X+1).(X-2).Q_n(X) + R_n(X)$ et on calcule en remplaçant X par 1, -1 et 2

$1^n = 0 + R_n(1)$	$(-1)^n = 0 + R_n(-1)$	$2^n = 0 + R_n(2)$

On réagit en matheux face à la proposition $R_n(X) = \alpha_n.(X-1).(X-2) + \beta_n.(X-1).(X+1) + \gamma_n.(X+1).(X-2)$.
C'est à dire qu'on ne développe pas tout pour en faire une résolution de système. On réfléchit.
On remplace X par les trois valeurs de l'énoncé

	$R_n(X) =$	$\alpha_n.(X-1).(X-2)$	$+\beta_n.(X-1).(X+1)$	$+\gamma_n.(X+1).(X-2)$
$(-1)^n =$	$R_n(-1) =$	$\alpha_n.(-1-1).(-1-2)$	$+\beta_n.0$	$+\gamma_n.0$
$2^n =$	$R_n(2) =$	$\alpha_n.0$	$+\beta_n.(2-1).(2+1)$	$+\gamma_n.0$
$1 =$	$R_n(1) =$	$\alpha_n.0$	$+\beta_n.0$	$+\gamma_n.(1+1).(1-2)$

C'est ce qui permet de trouver tout de suite nos trois coefficients

$$R_n(X) = (-1)^n.\frac{(X-1).(X-2)}{6} + 2^n.\frac{(X-1).(X+1)}{3} - \frac{(X+1).(X-2)}{2}$$

Comme on sait que si on avait résolu un système on aurait eu une unique solution, on sait à présent que c'est notre solution.

Si on tient à l'écrire sur la base canonique

$$R_n(X) = \frac{(2^{n+1} + (-1)^n - 3)}{6}.X^2 + \frac{(1-(-1)^n)}{2}.X + \frac{(3+(-1)^n - 2^n)}{3}$$

L'exercice se termine en substituant cette fois la matrice M dans $X^n = (X-1).(X+1).(X-2).Q_n(X) + R_n(X)$

$$M^n = (M^3 - 2.M^2 - M + 2.I_4).Q_n(M) + R_n(M) = R_n(M)$$

$$M^n = \frac{(2^{n+1} + (-1)^n - 3)}{6}.M^2 + \frac{(1-(-1)^n)}{2}.M + \frac{(3+(-1)^n - 2^n)}{3}.I_4$$

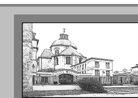
Que donne cette formule pour $n = -1$?

$$M^{-1} = \frac{(1+(-1)-3)}{6}.M^2 + \frac{(1-(-1))}{2}.M + \frac{(3+(-1)-\frac{1}{2})}{3}.I_4$$

$$M^{-1} = \frac{-1}{2}.M^2 + M + \frac{1}{2}.I_4 = \frac{-M^2 + 2.M + I_4}{2}$$

La formule est cohérente. Et elle le restera pour n dans $\mathbb{Z}$.

IS17 Applications2.π-périodiques.



Pour vérifier que cos et sin (applications $2.\pi-$périodiques) sont orthogonales, il suffit de calculer leur produit scalaire.
On a (trigonométrie et intégration)

$$\phi(\cos, \sin) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t).\sin(t).dt = \frac{1}{2}.\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2.t).dt = \left[\frac{-\cos(2.t)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \cos(2.\pi) - \cos(-2.\pi) = 0$$

On prend ensuite cos et n calcule sa norme

$$\sqrt{\phi(\cos, \cos)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t).dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2.t)+1}{2}.dt} = \sqrt{\left[\frac{\sin(2.t)}{2} + \frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

On prend celle qui est déphasée ($t \longmapsto \cos(t-\alpha)$ qu'on va noter c_α)

$$\sqrt{\phi(c_\alpha, c_\alpha)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t-\alpha).dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2.t-2.\alpha)+1}{2}.dt} = \sqrt{\left[\frac{\sin(2.t-2.\alpha)}{2} + \frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

Les deux applications ont la même norme. Calculons leur produit scalaire

$$\phi(c_\alpha, \cos) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-\alpha).\cos(t).dt = \cos(\alpha).\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t).dt + \sin(\alpha).\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t).\sin(t).dt$$

Ayant déjà calculé ces intégrales, on trouve $\pi.\cos(\alpha)$.

On l'avait aussi en linéarisant $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(t-\alpha+t)+\cos(t-\alpha-t)}{2}.dt$.

On peut alors calculer l'angle entre cos et c_α : $\cos(angle)=\dfrac{\phi(\cos,c_a)}{\sqrt{\phi(\cos,\cos)}.\sqrt{\phi(c_a,c_a)}}=\dfrac{\pi.\cos(\alpha)}{\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}$.
Et sans trop grande surprise (quoique), on trouve que cet angle vaut $\pi/3$ pour l'application $c_{\pi/3}$ c'est à dire $x\longmapsto\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Prenons $\cos^2$ et 1 (au sens de l'application constante ; toutes deux périodiques).
Pour linéariser $\cos^4$ j'écris $\cos^4(x)=\left(\dfrac{e^{i.x}+e^{-i.x}}{2}\right)^4=\dfrac{e^{4.i.x}+4.e^{2.i.x}+6+4.e^{-2.i.x}+e^{-4.i.x}}{16}=\dfrac{\cos(4.x)+4.\cos(2.x)+3}{8}$

$$\phi(\cos^2,\cos^2)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4(t).dt=\left[\frac{\sin(4.t)}{32}+\frac{\sin(2.x)}{4}+\frac{3.x}{8}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{3.\pi}{4}$$

Ensuite, directement $\phi(1,1)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}dt=2.\pi$, $\phi(\cos^2,1)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(t).dt=\pi$.

On effectue le quotient $\dfrac{\phi(\cos^2,\ 1)}{\sqrt{\phi(\cos^2,\cos^2)}.\sqrt{\phi(1,1)}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{3.\pi/4}.\sqrt{2.\pi}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Pas un angle forcément connu.

On recommence à calculer des produits scalaires et des normes.

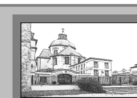
$$\phi(\cos^2,\sin^2)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(t).\sin^2(t).dt=\frac{1}{4}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2.t).dt=\frac{1}{2}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(4.t)}{2}.dt=\frac{\pi}{4}$$

et on a la même chose pour $\sin^4$.
Cette fois, l'angle se calcule

$$Arccos\Big(\frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{3.\pi}{4}}.\sqrt{\frac{3.\pi}{4}}}\Big)=Arccos\Big(\frac{1}{3}\Big)$$

On se rapproche de l'idée de $Arccos(-1/3)$, l'angle au centre du tétraèdre. Mais c'est par hasard.

IS17 Une étrange loi.



Pour « interne », on se donne (a,x) et (b,y) avec a et b non nul.
Par intégrité $a.b$ est non nul, bingo pour être la première coordonnée.
Et $\dfrac{x}{b}+y.a$ existe. C'est un réel. On a bien un couple de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

Pour « non commutative », on prend un exemple avec ce qui doit être simple (mais quand même pas deux fois le même élément, d'accord) :

$$(1,\ 1)*(2,\ 1)=\left(2,\ \frac{3}{2}\right)\ et\ (2,\ 1)*(1,\ 1)=(2,\ 3)$$

Pour associative, on se donne cette fois trois éléments et on calcule $(a,x)*\big((b,y)*(c,z)\big)$ et $\big((a,x)*(b,y)\big)*(c,z)$ pour trouver dans tous les cas

$$\left(a.b.c,\ \frac{1}{b.c}.x+\frac{a}{c}.y+a.b.z\right)$$

Pour le neutre, on cherche a et x vérifiant $a.b=b$ pour tout b (d'accord : $a=1$) et $\dfrac{x}{y}+y.1=y$ pour tout y. Là encore, le choix se porte sur $x=0$. Le neutre est bien $\boxed{(1,\ 0)}$

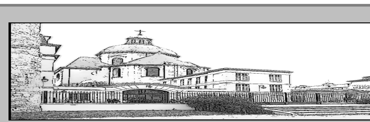
Place aux symétriques. On se donne (a,x) et on résout $(a,x)*(b,y)=(1,0)$ d'inconnues b et y.
On trouve $\boxed{(a,x)*\left(\dfrac{1}{a},\ -\dfrac{x}{a^2}\right)=(1,0)}$

Le calcul de $(1,1)*(1,1)*\ldots*(1,1)$ se traite par récurrence et donne $(1,n)$ (et l'initialisation est correcte même pour $n=0$).

Le calcul de $(-1,1)*(-1,1)*\ldots*(-1,1)$ se traite par récurrence et donne $((-1)^n,\ (-1)^{n+1}.n)$ (et l'initialisation est correcte même pour $n=0$).

Dans le sous groupe demandé de cardinal 2, on met le neutre, et l'élément qui est son propre symétrique : $\boxed{\{(1,0),\ (-1,0)\}}$

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 IS17 2025
45- points