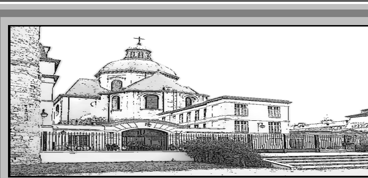
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 février
M.P.S.I.2



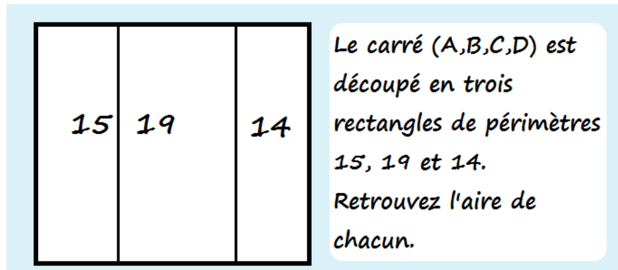
2024 2025

TD18

◁0▷ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

◁1▷ Pour combien d'entiers n plus petits que 2025 le nombre $p.p.c.m.(n,\ 9)$ est il un carré parfait ?

◁2▷



♡$_0$ Sachant $2^{3.a} = 9$, $3^{2.b} = 10$, $10^c = 11$ et $11^d = 12$, calculez $a.b.c.d$.

♦$_0$ Sachant que $A = \begin{pmatrix} 11 & \\ & -13 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, retrouvez $\det(A)$ et $Sp(A)$.

♦$_1$ Pour la matrice A plus haut, j'ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un de ses vecteurs propres. Trouvez alors la matrice A (deux possibilités) et diagonalisez la (choisissez une des deux possibilités).

◁3▷ On sait $5^x + 5^y = 630$ et $\dfrac{x+y}{5} = 1$. Retrouvez x et y (pour information $630 = 625 + 5$, si si).

◁4▷ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$.
Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les deux premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les trois premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les trois derniers déterminants soient nuls ?

◁5▷ Entre 1 et 1 105, il y a 221 multiples de 5 ; il y a 65 multiples de 17, et enfin 85 multiples de 13.
Dois je en déduire que entre 1 et 1 105, il y a $1105 - (221 + 65 + 85)$ nombres premiers avec 1105 ?

◁6▷ ♡ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{ccc|} n & = & 3 \ [5] \\ n & = & 7 \ [9] \\ n & = & 1 \ [4] \end{array} \right.$ d'inconnue entière n.

◁7▷ ♡ En appliquant l'algorithme d'Euclide, j'ai trouvé les quotients successifs
1, 34, 2, 2, 2, 1 et 2
et le dernier reste non nul valait 3. Qui étaient les deux nombres initiaux ?
Même question, avec le même dernier reste et pour quotients 0, 4, 1, 1, 30 et 11.

◁8▷ Exprimez le $p.g.c.d.$ de a^2 et b^2 à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $2.a$ et $2.b$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $a!$ et $b!$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b si nécessaire.

◁9▷ Peut on avoir $p.g.c.d.(a,\ b) = 2016$, $p.g.c.d.(b,\ c) = 2017$ et $p.g.c.d.(c,\ a) = 2018$?
Si oui, combien de solutions ?
Information : $2^5.3^2.7$, tandis que 2017 et 673 sont premiers.

◁10▷ On pose $A = \{a,\ b,\ c\}$ et $B = \{b,\ c,\ d\}$. Donnez un élément qui est dans $P(A \cup B)$ mais pas dans $P(A) \cup P(B)$.
Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \cup P(B)$? Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A \times B)$?Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \times P(B)$?

◁11▷ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

◁12▷ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a \wedge b = 12$ (p.g.c.d.), $b \vee c = 120$ (p.p.c.m.) et $c \wedge a = 5$?

◁13▷ ♡ Avez vous besoin de calculer $\begin{vmatrix} 150 & 235 & 195 \\ 164 & 23 & 3 \\ 246 & 41 & 27 \end{vmatrix}$ pour me prouver qu'il est multiple de 30 ?

◁14▷

Montrez que est A inversible (indication : calculez son déterminant modulo 2).
Justifiez $Com(A^2) = (Com(A))^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

◁15▷

Le colleur doit il sanctionner l'élève qui a écrit ces formules au tableau ?


```
def Samy(a) :
....return(sum(int(c) for c in str(a)))

def Vera(n) :
....return(Samy(n) > Samy(n*n))

n = 0
while not(Vera(n)) :
....n += 1
print(n)
```

La réponse est 39. Expliquez.

◁16▷ ♡ On pose $a_0 = 5$ et $b_0 = 2$. Pour tout n, on pose $a_{n+1} = 3.a_n + 4.b_n$ et $b_{n+1} = 2.a_n + 3.b_n$. Montrez que pour tout n, $a_n$et b_n sont premiers entre eux.
Propagez la propriété ou essayez d'obtenir une identité de Bézout avec le déterminant de $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$.

◁17▷ ♡ Résolvez $(n-1)$ divise n^3+1 d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

◁18▷ Quelles sont les deux plus petites valeurs que peut prendre $\left| \begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ a & b \end{vmatrix} \right|$ sachant que a et b sont des entiers relatifs ? *(oui, la notation est étrange pour la valeur absolue d'un déterminant !)*

◁19▷ 2019 et 752 sont évidemment premiers entre eux. Pouvez vous donner une identité de Bézout qui les lie avec au moins un des entiers plus grands que 5000.

◁20▷ On veut calculer le p.g.c.d. de 151 et 42. Euclide dit :

$$\begin{array}{rcrrr} 151 & = & 3\times & 42 & +25 \\ 42 & = & 1\times & 25 & +17 \\ 25 & = & 1\times & 17 & +8 \\ 17 & = & 2\times & 8 & +1 \\ 8 & = & 8\times & 1 & \end{array}$$

Regardez et commentez ce qui suit :

$$\frac{151}{42} = 3 + \frac{25}{42} = 3 + \frac{1}{\frac{42}{25}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{17}{25}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{25}{17}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{8}}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8}}}}$$

On oublie le dernier : $\dfrac{151}{42} \simeq 3 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = 3 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{18}{5}$.
Et maintenant, que vaut le résultat du produit en croix : $151 \times 5 - 42 \times 18$?
Testez sur d'autres exemples. Justifiez le résultat obtenu.

◃21▹ ♡ Trouvez tous les entiers qui sont à la fois congrus à 2 modulo 7, à 7 modulo 13 et à 13 modulo 2.

◃22▹ ♣ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus grand possible ?
♡ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus petit possible ?

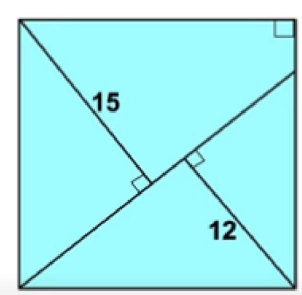
◃23▹ Il y a cinq arbres en rond dans la cour. Sur chaque arbre, un corbeau. Toutes les dix secondes, deux corbeaux passent de leur arbre à un arbre voisin (droite ou gauche). En combien de temps est il possible que tous les corbeaux soient rassemblés sur un même arbre ?
Cette fois, il y a dix arbres, un corbeau par arbre, et deux corbeaux qui bougent à chaque fois. Combien de temps pour (peut-être) les rassembler tous sur un même arbre ?

◃24▹ Peut on dire que $\sum_{k=0}^{n} \pm k$ est égal à $\pm \sum_{k=0}^{n} k$ par linéarité ? Et si on considérait que cette somme est $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.k$ (quand $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ est choisi comme on veut dans $\{-1,1\}^n)$? Elle peut aller de $-\dfrac{n.(n+1)}{2}$ à $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ en ne prenant que des valeurs entières. Mais prend elle toutes les valeurs entières ?
Pour quelles valeurs de n existe-t-il un choix de signes $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ tel que la somme donne 0 ?

◃25▹

```
def Scooby(n) :
....def gene(i, k) :
........if i+k < n :
............return(2)
........return(1)
....return([[gene(i, k) for k in range(n)] for i in range(n)])
```

Exprimez le déterminant de `Scooby(n)` en fonction de n.
Calculez l'aire du carré ci contre. (pas de rapport entre les deux exercices)



◃26▹

Un enchainement de questions préliminaires indépendantes les unes des autres[1] vous permettra ensuite, en les emboitant, de démontrer des résultats d'arithmétique sur la piste des entiers friables[2]. Méfiez vous de la question piège.

I∼0) f est une application continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ (*n_0 est un entier naturel non nul donné*). On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt$. Montrez que la suite (γ_n) est positive, décroissante et convergente.

I∼1) Déduisez l'existence d'un réel C vérifiant $\sum_{2}^{n} \dfrac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

I∼2) Calculez $\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ et déduisez que la série $\left(\sum_{k=2}^{N} \dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\right)$ converge quand N tend vers l'infini.

II∼0) Calculez $\int_2^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt$. Prouvez l'existence de $\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ *(sa somme sera notée K, et ne me demandez pas à la fin du devoir « c'est qui K ? »).*

III∼0) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n.\ln(n) - n + 1$.

1. *l'espérance du produit de vos notes aux questions sera le produit des espérances des notes aux questions*
2. *un entier est dit friable si ses facteurs premiers sont nombreux et petits*

III$\sim$1) Déduisez : $\ln(n!) = n.\ln(n) + O(n)$ quand n tend vers l'infini. C'est l'anniversaire de Sucri, venez au bureau, embrassez le sur son front vert et vous gagnez un point.

IV$\sim$0) Soit λ strictement positif. Justifiez que pour tout n il existe un unique réel x de $]0, +\infty[$ vérifiant $x.\ln(x) - \lambda.x = \ln(n)$ *(ce réel x sera noté r_n)*.

IV$\sim$1) Montrez que r_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, prouvez $r_n = o(\ln(n))$ et prouvez enfin $r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ quand n tend vers l'infini.

V$\sim$0) Si E est un de partie de $\mathbb{N}^*$, on pose $E_n = E \cap [1, n]$ et $d_n(E) = \dfrac{Card(E_n)}{n}$. Si cette suite $d_n(E)$ converge, on dit que E a une densité *(et cette densité sera la limite de cette suite $(d_n(E))$)*. Prouvez que toute partie finie a une densité *(valeur de la densité ?)*. a est un entier naturel donné, montrez que l'ensemble des multiples de a a une densité *(valeur ?)*. L'ensemble $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ des carrés parfaits a-t-il une densité *(si oui, quelle valeur ?)*.
V$\sim$1) Montrez que si deux parties disjointes A et B ont une densité, alors A^c et $A \cup B$ ont une densité et donnez leur valeur.

VI$\sim$0) Montrez pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $2.\dbinom{2.m+1}{m} \leqslant 2^{2.m+1}$.

VI$\sim$1) Montrez que l'entier $\left(\displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p\right)$ divise $\dbinom{2.r+1}{r}$ *(P est l'ensemble des nombres premiers)*.

VI$\sim$2) Montrez par récurrence forte sur n supérieur ou égal à 2 : $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ *(on distinguera suivant que $n+1$ est ou non un nombre premier, de la forme $2.r+1$ et on coupera alors $\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}$ en $\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}$ et $\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}$)*. Déduisez : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

VII$\sim$0) (a_n) et (ε_n) sont deux suites réelles. On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Montrez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ pour tout n.

VIII$\sim$0) Pour tout entier naturel n et tout nombre premier p, on note $v_p(n)$ la « valuation $p-$adique de n, c'est à dire l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 !
2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	18
3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	8
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2

On note pour tout entier naturel k non nul α_k (respectivement β_k) le nombre d'entiers d de N_n tels que p^k divise d (respectivement tels que $v_p(d) = k$). Montrez : $\alpha_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. La II-1 est un piège, Sucri n'est jamais né en février !
Exprimez les β_k à l'aide de α_i et vice versa.
VIII$\sim$1) Justifiez : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k.\beta_k$. Déduisez : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.
VIII$\sim$2) Déduisez : $\dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1} = \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p.(p-1)}$.

Finis les préliminaires, on passe au problème.

IX$\sim$0) Montrez pour tout n : $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Déduisez l'encadrement $\dfrac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$.

IX$\sim$1) Déduisez $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$.

X$\sim$0) On définit l'application χ *(fonction indicatrice de P)* : $\chi(k) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & si \quad k \quad premier \\ 0 & sinon \end{array}\right|$.

On pose $a_k=\chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ et $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$. Montrez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}}\dfrac{1}{p}=\sum\limits_{k=2}^{n-1}\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k+\dfrac{A_n}{\ln(n)}$.

X∼1) Montrez : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k=\dfrac{1}{k.\ln(k)}+O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$.

X∼2) Déduisez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}}\dfrac{1}{p}=\ln(\ln(n))+O(1)$.

XI∼0) Pour tout entier naturel n, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts qui divisent n.
Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne $\omega(n)$.

XI∼1) L'une de ces données est erronée : laquelle ?

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

XI∼2) Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n=\prod\limits_{k=1}^{r}(p_k)^{\alpha_k}$ avec les p_k distincts et les α_k strictement positifs. Montrez : $\omega(n)=r\leqslant\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

XI∼3) Montrez : $n\geqslant 2.\prod\limits_{k=1}^{r-1}(2.k+1)\geqslant 2^r.(r-1)!$ et prouvez l'inégalité $\ln(n)\geqslant(r-1).\ln(r-1)-(r-1)$. Déduisez la domination $\omega(n)=O\Big(\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\Big)$.

XI∼4) N est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et on met sur range(1, N+1) *(noté E_N)* la probabilité uniforme *(« chacun des N entiers est pris avec la probabilité $\frac{1}{N}$ »)*. On définit alors la variable aléatoire *(fonction de E_N dans $\mathbb{R}$)* $X_{N,r}(d)=\left\{\begin{array}{lll}1 & si & r\ divise\ d\\ 0 & sinon & \end{array}\right|$ et $X_N=\sum\limits_{p\in E_n\cap P}X_{N,p}$. Justifiez $\forall n\in E_N,\ X_N(n)=\omega(n)$.

XI∼5) Montrez : $E(X_{N,r})=\dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{r}\Big]$ *(voyez l'espérance comme une valeur moyenne de la fonction, c'est tout)*.

XI∼6) Prouvez $E((X_N)^2)=E(X_N)+\sum\limits_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in P^2,\ p\neq q}}\dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{p.q}\Big]$. Déduisez : $Var(X_N)=O(\ln(\ln(N)))$.

XI∼7) Montrez : $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{N}.Card\Big\{n\in E_N\mid|\omega(n)-\ln(\ln(N))|\geqslant(\ln(\ln(N))^{2/3}\Big\}=0$.

Théorème — La fonction π qui à un réel x associe $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est équivalente lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient $\dfrac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans *(selon ses propres affirmations ultérieures)* et par Adrien-Marie Legendre *(ébauche en l'An VI du calendrier républicain, soit 1797-1798, conjecture précise en 1808)*.

Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1851 que si x est assez grand, $\pi(x)$ est compris entre $0,92129.\frac{x}{\ln(x)}$ et $1,10556.\frac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe, utilisant en particulier la fonction ζ de Riemann.

Source : concours BECEAS.
Concours pour cinq écoles d'actuariat et statistiques (ISFA Lyon, Dauphine, Strasbourg, ISUP-Paris Sorbonne (là où deux ex-MPSI2 sont partis l'an dernier)).

L'actuariat, c'est la branche dans laquelle les ingénieurs continuent à faire des maths de haut niveau *(plutôtdes statistiques, c'est vrai, mais pas comme au lycée)*.

> Un actuaire est un professionnel spécialiste de l'application du calcul des probabilités et de la statistique aux questions d'assurances, de prévention, de comptabilité et analyse financière associée, et de prévoyance sociale. À ce titre, il analyse l'impact financier du risque et estime les flux futurs qui y

sont associés. L'actuaire utilise des techniques issues principalement de la théorie des probabilités et de la statistique, pour décrire et modéliser de façon prédictive certains événements futurs tels que, par exemple, la durée de la vie humaine, la fréquence des sinistres ou l'ampleur des pertes pécuniaires associées.

Salaire de 35.000 euros à l'embauche, jusqu'à 150.000 ensuite pour les actuaires passés par Poytechnique.

◁ 27 ▷ Montrez $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.
Montrez $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{N}=\mathbb{Z}$.
Montrez que tous les entiers à partir de 42 sont dans $7.\mathbb{N}+8.\mathbb{N}$.

◁ 28 ▷ Les suites a et b sont définies par $a_0=5$ et $b_0=2$ et $a_{n+1}=2.a_n+3.b_n$ et enfin $b_{n+1}=5.a_n+8.b_n$ pour tout n. Montrez que $a_n$et b_n sont toujours entiers. Trouvez α_0 et β_0 vérifiant det $\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}=1$. Trouvez M *(carrée de taille 2)* vérifiant $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez en regardant le déterminant de $M^n.\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ que a_n et $b_n$sont toujours premiers entre eux.

◁ 29 ▷ On donne $\dfrac{a}{b}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+1}}}}}$ et $\dfrac{u}{v}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$. Calculez $\dfrac{a}{b}-\dfrac{u}{v}$.

◁ 30 ▷ ♡ $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour solution $(1,\ 1,\ 1)$. De combien augmente x pour le système $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 5 \end{array}\right.$?

Bonus : Ces ma**c**aques font malo**tr**us. Il bou**cl**e l'**éd**ito. Il n'est pas **u**tile au p**os**te. Ote ta lam**p**e que je puisse **gu**etter. Elle aime les b**oi**tes de Hongr**ie**. S**able** min**us**. La pinède sent la b**r**aise. Oh le **s**ot **g**re**ff**ier.

◁ 31 ▷ ♡ Montrez que dans $range(83)$ il y a 82 entiers premiers avec 83 (qui est premier).
Montrez que dans $range(83^2)$ il y a 82×83 entiers premiers avec 83^2 (qui n'est plus premier, lui !).
Montrez que dans $range(1411)$ il y a 1312 entiers premiers avec 1411 (qui contient un facteur 83).

◁ 32 ▷ a et b sont deux entiers naturels. On suppose : $\exists(u,\ v)\in\mathbb{N}^2,\ a.u+b.v=1$. Montrez que a divise b ou b divise a.
A et B sont deux entiers relatifs de somme non nulle. Montrez : $\exists(u,\ v)\in\mathbb{R}^2,\ A.u+B.v=1$.

◁ 33 ▷ Si on vous donne une idéntité de Bézout entre a et b ($a.u+b.v=1$), trouvez une identité de Bézout entre a^2 et b^2.

◁ 34 ▷ On définit $f=x\longmapsto\left\{\begin{array}{lll} 1 & si & \exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad x=a+b.\sqrt{2} \\ 0 & sinon & \end{array}\right|$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?
Montrez que f est périodique de période 1.
Montrez que f n'est pas périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

◁ 35 ▷ ♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q+b.p=\sqrt{n}$.
Concluez.

◁ 36 ▷ On rappelle : $U_p=\{z\in\mathbb{C}\mid z^p=1\}$. Montrez : $U_p\cap U_q=U_{p\wedge q}$.

◁ 37 ▷ (u_n) est une suite réelle. Vrai ou faux : si $((u_n)^{15})$ et $((u_n)^{77})$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^{15})$ ou $((u_n)^{77})$ diverge alors (u_n) diverge ?

◁ 38 ▷ ♡ Dérivez $x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ x & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Bonus :
Admirez les **p**arts des **d**îneurs. Treize à **t**able et pleins de **f**ric. Elle bou**d**e le **ph**are. Ce **m**alus **f**ou mérite-t-il une **t**elle pu**b** ? Ils aiment les **c**rûs coûteux. Ils **d**înent avec des ra**p**aces. **Cu**vées de **prix**. C'est un expert en **g**affes avec **p**rojet. Ils aiment les **m**enus **c**achés. Des **s**inistres **m**astiquent.

◁ 39 ▷ Il parait que le critère de divisibilité par 7 est de la forme
si on part de $\overline{abc\,def\,ghi}$ par exemple, on calcule $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$
si on part de $\overline{ab\,cde\,fgh\,ijk}$ par exemple, on calcule $\overline{ab} - \overline{cde} + \overline{fgh} - \overline{ijk}$
et on regarde si le nombre est multiple de 7.
Cette démonstration est elle aussi valable pour la divisibilité par 13 ?

◁ 40 ▷ Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Montrez qu'il y a exactement 6 nombres sur divisibles ayant justement 70 diviseurs.
Montrez que tout nombre sur-divisible impair est congru à 1 modulo 8.
Montrez qu'un nombre sur-divisible ne peut pas valoir 6 modulo 8.

Bonus :
Ce gant est assoup**Li**. Il est **PR**émuni face aux **D**outes. Sans **P**èze, il manque de **B**ouffe. Les vieux **M**asques évitent la **FL**otte. Pas de **B**ouffe, pas de **T**abac. On manque de **CH**aises pour attirer les cor**B**eaux. Ne faites pas cra**M**er votre **CH**ambre. Ces **SP**oliés sont pleins de **G**ermes. J'ai **CHI**né un gros **CALI**bre. Les **B**ars s'en**D**ettente.

◁ 41 ▷ On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 : notés de p_1 à p_N. On définit alors $4.p_1 \dots p_N - 1$ *(noté Q)*. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4. Montrez que ce diviseur ne peut pas être l'un des p_i.
Déduisez : il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

◁ 42 ▷ Résolvez les deux systèmes suivants : $\left\{\begin{array}{ccc|} x & \equiv & 2 \quad [3] \\ x & \equiv & 1 \quad [7] \\ x & \equiv & 4 \quad [10] \end{array}\right.$ puis $\left\{\begin{array}{ccc|} x & \equiv & 1 \quad [3] \\ 2.x & \equiv & 1 \quad [7] \\ 3.x & \equiv & 1 \quad [10] \end{array}\right.$.

◁ 43 ▷ ♡ Appliquez l'algorithme d'Euclide et trouvez une identité de Bézout pour
les entiers 2022 et 143
les polynômes $X^4 + X^3 + 1$ et $X^3 - X + 1$.

◁ 44 ▷ Montrez que pour résoudre $\begin{vmatrix} n & = & \alpha & [7] \\ n & = & \beta & [12] \end{vmatrix}$ il suffit de savoir résoudre $\begin{vmatrix} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 0 & [12] \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} n & = & 0 & [7] \\ n & = & 1 & [12] \end{vmatrix}$.

Trouvez l'inverse de 12 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\begin{vmatrix} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 0 & [12] \end{vmatrix}$.

Trouvez l'inverse de 7 dans $\mathbb{Z}_{12.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\begin{vmatrix} n & = & 0 & [7] \\ n & = & 1 & [12] \end{vmatrix}$.

Montrez que pour résoudre $\begin{vmatrix} n & = & \alpha & [7] \\ n & = & \beta & [15] \\ n & = & \gamma & [16] \end{vmatrix}$ il suffit de savoir résoudre $\begin{vmatrix} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 0 & [15] \\ n & = & 0 & [16] \end{vmatrix}$ et deux autres systèmes similaires.

Trouvez l'inverse de 15, de 16 et de 15.16 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\begin{vmatrix} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 0 & [15] \\ n & = & 0 & [16] \end{vmatrix}$.

Résolvez $\begin{vmatrix} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 2 & [15] \\ n & = & 4 & [16] \end{vmatrix}$.

◁ 45 ▷ Un nombre dernier est un nombre qui a beaucoup de diviseurs ; c'est à dire qui a plus de diviseurs que tous les entiers plus petits que lui. Écrivez un programme qui liste des quarante premiers entiers derniers *(et pas des quarante derniers nombres premiers)*.

◁ 46 ▷ Sachant qu'il y a 168 nombres premiers entre 1 et 1000, lequel de ces quatre nombres est leur somme :

11 569	76 127	57 298	81 744

◁47▷ Calculez $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\dfrac{1}{1}}}$ et $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15}}$ à 10^{-7} près.

Qui sont $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}$, $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dots}}}$ et $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\dots}}}}}$?

Donnez le dévelmoppement en fraction continuée de $\sqrt{5}$.

◁48▷ Un nombre second est un nombre produit de deux nombres premiers distincts. Écrivez un script qui pour `N` donné calcule combien entre `0` et `N` il y a de nombres seconds *(en supposant que vous avez un programme* **`prem`** *qui teste si un nombre est premier)*.
L'ensemble des nombres seconds est il stable par addition ? Par multiplication ?

◁49▷ ♣ Montrez que $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ n'est pas un carré parfait.
Pouvez vous effacez un des termes du produit pour en faire un carré parfait.

◁50▷ Pour tout n, on appelle "suite de Farey d'indice n" la liste triée des rationnels de $[0,\ 1]$ de la forme irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec $q \leqslant n$ et on la note F_n.
Déterminez F_5.
Montrez : $Card(F_p) - Card(F_{p-1}) = p-1$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p^2}) - Card(F_{p^2-1}) = p^2 - p$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p.q}) - Card(F_{p.q-1}) = p.q - p - q + 1$ (p et q sont deux nombres premiers distincts).
Montrez que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs de F_n alors on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{d+d} < \dfrac{c}{d}$ et $a.d - b.c = 1$.

◁51▷ ♣ Soit p un nombre premier. On note $(F_p,\ +,\ .)$ le corps des entiers de 0 à $p-1$ pour l'addition et la multiplication modulo p. Montrez que les polynômes $\prod_{k=1}^{p-1}(X-k)$ et $X^{p-1}-1$ ont le même degré, le même coefficient dominant et les mêmes racines. Déduisez qu'ils sont égaux. Que donnent les formules de Viète pour la somme et pour le produit des racines *(théorème de Wilson)* ? Que donnent elles pour la somme des inverses des racines. Montrez que le numérateur de $\sum_{k=1}^{p-1}\dfrac{1}{k}$ (série harmonique) est un multiple de p *(théorème de Wolstenholme)*.

◁52▷ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{(2^n)}+1$. Calculez F_1à F_4. Vérifiez qu'ils sont premiers.
Montrez que F_5 est divisible par 641.
Montrez : $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_n - 2$.
Montrez que si un entier p divise F_n et F_N ($n < N$) alors p divise 2.
Déduisez que $F_n$et F_N sont premiers entre eux.
Pour tout n, on note p_n le plus petit nombre premier qui divise F_n.
Montrez que la suite des (p_n) est une suite contenant une infinité de termes.
Écrivez tant qu'on y est un script Python qui détermine p_n pour n donné.

◁53▷ ♡ Pour tout entier naturel n, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers entre 0 et 1 qui sont ptemiers avec n ($p.g.c.d.(n, k = 1)$.
Montrez : $\varphi(p) = p-1$ si p est premier.
Montrez : $\varphi(p^2) = p^2 - p$ et plus généralement $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ pour p premier et k entier.
p et q sont deux entiers premiers distincts. Justifiez : $\varphi(p.q) = p.q - p - q + 1$.
Démontrez : $\varphi(2022) = 2022.\Big(1-\dfrac{1}{1}\Big).\Big(1-\dfrac{1}{3}\Big).\Big(1-\dfrac{1}{337}\Big)$, $\varphi(2023) = 2023.\Big(1-\dfrac{1}{7}\Big).\Big(1-\dfrac{1}{17}\Big)$ et $\varphi(2024) = 2024.\Big(1-\dfrac{1}{2}\Big).\Big(1-\dfrac{1}{11}\Big).\Big(1-\dfrac{1}{23}\Big)$.

◁54▷ Vous avez les entiers de 1 à 200 *(inclus)*. Vous en tirez cinq. Combien de tirages possibles ?
Combien de tirages contiennent exactement deux nombres pairs et exactement deux nombres premiers.
pour information, le 46^{ieme} nombre premier est 199.
Les raisonnements qui suivent sont faux,, pourquoi ?

$\bullet_1$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100}+\binom{200}{46}$.

$\bullet_2$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2}+\binom{46}{2}$.

$\bullet_3$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on multiplie $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2}\times\binom{46}{2}$.

$\bullet_4$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100}.\binom{100}{46}$.

$\bullet_5$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste, et il faut prendre un dernier élément dans ce qu'il reste encore : $\binom{100}{2}.\binom{46}{2}.\binom{54}{1}$ *(il y a bien* 54 *nombres impairs, non premiers)*.

Trouvez la vraie réponse.