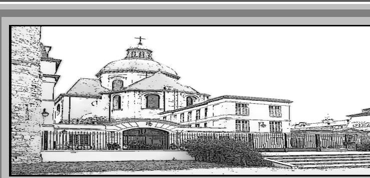
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 février
M.P.S.I.2



2024 2025

TD18

◁0▷ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

Première question.
De tels entiers doivent être pairs.
Mais pas multiples de 4 sinon le p.g.c.d. vaudrait 4 (dans 2020 il y a un 4).
Pour l'instant, en gros, un quart des entiers.
Mais il faut éliminer aussi les multiples de 5, sinon le p.g.c.d. vaudrait 10.
Et les multiples de 101.

Mais il ne faut pas pousser. Il ne faux pas par exemple décompter deux fois 1010 qui est multiple de 2, de 5 et de 101.

Et pour les flemmards :

```
def pgcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b a%b
....return a
#plus classique que ça, tu meurs...
```

```
C = 0
for k in range(1, 2021) :
....C += int(pgcd(k,2020)==2)
print(C)
```

Réponse : 400.

Et pour un p.g.c.d. de 10 : il y en a cent.

◁1▷ Pour combien d'entiers n plus petits que 2025 le nombre $p.p.c.m.(n,\ 9)$ est il un carré parfait ?

On peut y aller avec Python.

```
def pgcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

```
def ppcm(a, b) :
....return (a*b) // pgcd(a, b)
```

```
def carreparfait(n) :
....c = 0
....while c*c =< n :
........c += 1
....return c*c == n
```

Si vous me le faites avec des `int(sqrt(n))==sqrt(n)`, je vous coupe les deux oreilles.

```
compt = 0
for b in range(2026) :
....if carreparfait(ppcm(2025, b)) :
........compt += 1
```

Et j'ajoute un `print(k)` pour avoir la liste.

Et j'en trouve 93 dont voici la liste :
[0, 1, 3, 4, 5, 9, 12, 15, 16, 20, 25, 27, 36, 45, 48, 49, 60, 64, 75, 80, 81, 100, 108, 121, 135, 144, 147, 169, 180, 192, 196, 225, 240, 245, 256, 289, 300, 320, 324, 361, 363, 400, 405, 432, 441, 484, 507, 529, 540, 576, 588, 605, 625, 675, 676, 720, 729, 735, 768, 784, 841, 845, 867, 900, 960, 961, 980, 1024, 1083, 1089, 1156, 1200, 1225, 1280, 1296, 1323, 1369, 1444, 1445, 1452, 1521, 1587, 1600, 1620, 1681, 1728, 1764, 1805, 1815, 1849, 1875, 1936, 2025]

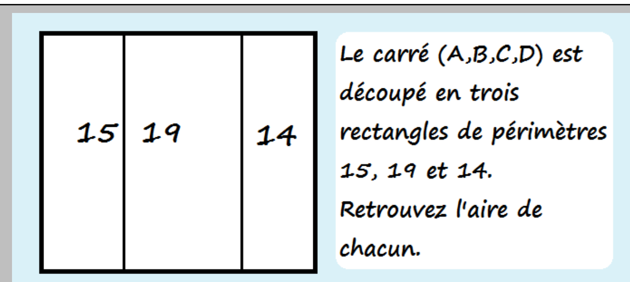
Et pour une approche mathématique sachant $2025 = 3^4.5^2$ (oh un carré ! parfait !) ?
On écrit n sous la forme $2^a.3^b.5^c.7^d \dots$ et même $3^b.5^c.N$ avec N ne contenant aucun facteur 3 ni facteur 5.
Le p.p.c.m. de n et $3^4.5^2$ est alors $3^{max(b,4)}.5^{max(c,2)}.N$.
Il doit en effet contenir le facteur N pour être multiple de n et 3 et 5 avec des exposants suffisants.
Ce nombre sera un carré parfait si et seulement si N est un carré parfait, et $max(b,4)$ est pair ainsi que $max(c,2)$.

b peut valoir 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10. Ah non ! On s'arrête à $3^6 = 729$.
c peut valoir 0, 1, 2, 4 (on s'arrête à 5^4).
Et N peut valoir 1, 4, 49, 121 et ainsi de suite, c'est assez lourd.

Finalement, on dit merci Python.

◁ 2 ▷

♡$_0$ Sachant $2^{3.a} = 9$, $3^{2.b} = 10$, $10^c = 11$ et $11^d = 12$, calculez $a.b.c.d$.



♦$_0$ Sachant que $A = \begin{pmatrix} 11 & \\ & -13 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, retrouvez $\det(A)$ et $Sp(A)$.

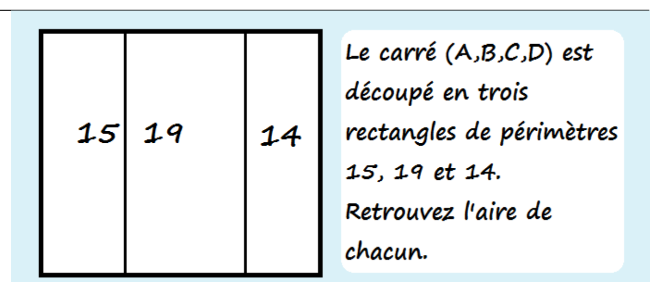
♦$_1$ Pour la matrice A plus haut, j'ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un de ses vecteurs propres. Trouvez alors la matrice A (deux possibilités) et diagonalisez la (choisissez une des deux possibilités).

L'équation $x^a = y$ d'inconnue a donne en passant au logarithme : $a.\ln(x) = \ln(y)$ soit $a = \dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}$ et c'est $\log_x(y)$.

$2^{3.a} = 9$	$3^{2.b} = 10$	$10^c = 11$	$11^d = 12$
$a = \dfrac{\ln(9)}{3.\ln(2)}$	$b = \dfrac{\ln(10)}{2.\ln(3)}$	$c = \dfrac{\ln(11)}{\ln(10)}$	$d = \dfrac{\ln(12)}{\ln(11)}$

$$a.b.c.d = \frac{2.\ln(3).\ln(10).\ln(11).\ln(12)}{3.\ln(2).2.\ln(3).\ln(10).\ln(11)} = \frac{\ln(12)}{3.\ln(2)} = \frac{\ln(12)}{\ln(8)}$$

Et on ne simplifie pas beaucoup plus.



Notons x le côté du carré *(oui, l'énoncé a parlé d'un carré, c'est important)*.
On note a, b et c les largeurs des trois rectangles (leur hauteur est x pour les trois).
On mesure les trois périmètres :

$2.(a+x) = 15$	$2.(b+x) = 19$	$2.(c+x) = 14$

mais on a aussi $a + b + c = x$ *(côté du carré)*.

Le système de quatre équations est linéaire, non dégénéré : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En combinant les premières lignes entre elle *(soustraction pour éliminer x)*, on a $2.(b-a) = 4$ et $2.(c-a) = 1$.
On remplace b et c par leur valeurs dan,s la dernière pour trouver une relation entre a et x : $a + (a+2) + \left(a + \dfrac{1}{2}\right) = x$.
On trouve $x = 3.a + \dfrac{5}{2}$.
On reporte dans la première : a vaut $\dfrac{3}{2}$.
On remonte dans toutes les équations :

$a = \dfrac{3}{2}$	$a = \dfrac{7}{2}$	$c = 1$	$x = 6$

Et comme seules les aires nous intéressent :

rectangle 1	rectangle 2	rectangle 3
$\dfrac{3}{2}$ sur 6	$\dfrac{7}{2}$ sur 6	1 sur 6
9	21	6

On pose donc $A = \begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix}$ puis on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 121 + a.b & \\ & 169 + a.b \end{pmatrix}$.

Sachant $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, on déduit $a.b = -135$ (mais on ne connaît ni a ni b).

On a néanmoins : $Tr(A) = -2$ puis $\det(A) = -143 + 135 = -8$.

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 + 2.X - 8$, de racines 2 et -4.

On pouvait aussi noter les deux valeurs propres λ_1 et λ_2.

Si A se diagonalise, elle est semblable à $\begin{pmatrix} (\lambda_1) & 0 \\ 0 & (\lambda_2) \end{pmatrix}$ et A^2 est semblable à $\begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 \end{pmatrix}$.

On a alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 11 - 13$ et $(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 = 34 - 14$. Ceci permet de retrouver λ_1 et λ_2.

Si on ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre (mais pour quelle valeur propre ?), on a $\begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$.

La première donne $a = -3$ et $b = 45$ (cohérent avec $a.b = -135$).

La seconde donne $a = -5$ et $b = 27$ (cohérent avec $a.b = -135$).

$\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ b & 45 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 27 & -13 \end{pmatrix}$	
2	-4	-4	2
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Les calculs allaient assez vite, on savait déjà que les deux valeurs propres étaient 2 et -4, et que l'un des vecteurs propres était $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

◁3▷ On sait $5^x + 5^y = 630$ et $\dfrac{x+y}{5} = 1$. Retrouvez x et y (pour information $630 = 625 + 5$, si si).

Si on nous dit $\dfrac{x+y}{5} = 1$, remplaçons y par $5 - x$ dans $5^x + 5^y = 630$. On obtient $5^x + \dfrac{5^5}{5^x} = 630$.

On va multiplier par 5^x et poser (naturellement $X = e^x$). Et hop, une équation de degré 2 comme quand on résout $ch(x) = a$.

Ici : $X^2 - 630.X + 5^5 = 0$. Le discriminant vaut $(630)^2 - 4.5^5$, ce qui fait $(5^4 + 5)^2 - 4.5^5$ soit finalement $(5^4 - 5)^2$.

Les deux racines sont $X_1 = 625$ et $X_2 = 5$.

On revient à x : $5^x = 625$ ou $5^x = 5$.

On trouve $x = 4$ et $y = 1$ comme première solution, puis $x = 1$ et $y = 5$ comme seconde solution (symétrique).

Et on se dit que c'étaient des solutions évidentes.

◁4▷ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$.

Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les deux premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les trois premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x, y, z) non nul tel que les trois derniers déterminants soient nuls ?

Facile d'annuler à la fois $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou un de ses multiples).

On peut même se convaincre que ce sont les seules solutions (deux équations, trois inconnues ; intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$).

Pour annuler les trois premiers, on devient plus exigeant. Si on se fie d'ailleurs à la question précédente, il faut déjà annuler les deux premiers et prendre un multiple de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dans ce cas, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2.a \\ -1 & 1 & 3.a \\ 0 & 2 & 1.a \end{vmatrix}$ n'est pas nul, sauf pour a nul.

Sinon, on peut aussi transcrire les trois nullités de déterminants en trois équations : $\left\{\begin{array}{cccccc} -5.x & +3.y & +z & = & 0 \\ x & +y & -5.z & = & 0 \\ 2.x & +2.y & -2.z & = & 0 \end{array}\right|$.

Or, le déterminant $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ est non nul [1]. Seul le vecteur nul valide, et nous on le refuse.

Si on ne voit rien pour les trois derniers déterminants, on écrit le système $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & -5.z & = & 0 \\ 2.x & +2.y & -2.z & = & 0 \\ x & +y & -3.z & = & 0 \end{array}\right|$.

Cette fois, le système est dégénéré : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (et $2.L_1 + L_2 = 4.L_3$).

En fait, ce système demande juste $x + y = 0$ et $z = 0$. Tout multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

◃5▹ Entre 1 et 1 105, il y a 221 multiples de 5 ; il y a 65 multiples de 17, et enfin 85 multiples de 13.
Dois je en déduire que entre 1 et 1 105, il y a $1105 - (221 + 65 + 85)$ nombres premiers avec 1105 ?

Un nombre n est premier avec 1005 si et seulement si il n'a aucun diviseur commun avec 1105. C'est la définition.
Or, qui sont les diviseurs de 1105 ? Justement :5, 17 et 13.
On doit donc éliminer les multiples de 5
les multiples de 17
et les multiples de 13.

Mais évidemment, il y a ceux qu'on a décompté deux fois : les multiples de 5×13
les multiples de 5×17
les multiples de 17×13

Il faut donc les ajouter.
Et se poser la question : 1105, on l'a compté et décompté combien de fois.

On voit venir la formule $Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$.

Finalement, en se disant que les nombres cités dans l'énoncé sont « il y a $\dfrac{1105}{5}$ multiples de 5 »
« il y a $\dfrac{1105}{13}$ multiples de 13 »
« il y a $\dfrac{1105}{17}$ multiples de 17 »

la formule va être $1105 - \dfrac{1105}{5} - \dfrac{1105}{13} - \dfrac{1105}{17} + \dfrac{1105}{13.17} + \dfrac{1105}{5.17} + \dfrac{1105}{5.13} - \dfrac{1105}{1105}$

On effectue le calcul : $\boxed{768}$

On peut même le compacter, pour qui connaît la belle idée : $1105.\Big(1 - \dfrac{1}{5}\Big).\Big(1 - \dfrac{1}{13}\Big).\Big(1 - \dfrac{1}{17}\Big)$

On peut aussi dresser la liste :

```
def pgcd(a, b) : #un classique, cherchez pas, c'est Euclide
....if b == 0 :
........return a
....return (pgcd(b, a%b))
(dernier reste non nul des divisons euclidiennes successives)
```

1. -64, pas loin du carré du déterminant des trois vecteurs initiaux, il y a un rapport

Le script proprement dit :

```
L = [ ]
for k in range(1, 1106) : #on les fait défiler
....if pgcd(k, 1105) == 1 :
........L.append(k)
print(len(L))
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 53, 54,
56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 101, 103,
106, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 118, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 137, 138, 139, 141, 142, 144,
146, 147, 148, 149, 151, 152, 154, 157, 158, 159, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 171, 172, 173, 174, 176, 177, 178, 179, 181, 183, 184,
186, 188, 189, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 198, 199, 201, 202, 203, 206, 207, 209, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 219, 222, 223, 224,
226, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 236, 237, 239, 241, 242, 243, 244, 246, 248, 249, 251, 252, 253, 254, 256, 257, 258, 259, 261, 262, 263,
264, 266, 267, 268, 269, 271, 274, 276, 277, 278, 279, 281, 282, 283, 284, 287, 288, 291, 292, 293, 294, 296, 297, 298, 301, 302, 303, 304,
307, 308, 309, 311, 313, 314, 316, 317, 318, 319, 321, 322, 324, 326, 327, 328, 329, 331, 332, 333, 334, 336, 337, 339, 341, 342, 343, 344,
346, 347, 348, 349, 352, 353, 354, 356, 358, 359, 361, 362, 363, 366, 367, 368, 369, 371, 372, 373, 376, 378, 379, 381, 382, 383, 384, 386,
387, 388, 389, 392, 393, 394, 396, 397, 398, 399, 401, 402, 404, 406, 407, 409, 411, 412, 413, 414, 417, 418, 419, 421, 422, 423, 424, 426,
427, 428, 431, 432, 433, 434, 436, 437, 438, 439, 441, 443, 444, 446, 447, 448, 449, 451, 452, 453, 454, 456, 457, 458, 461, 462, 463, 464,
466, 467, 469, 471, 472, 473, 474, 477, 478, 479, 482, 483, 484, 486, 487, 488, 489, 491, 492, 496, 497, 498, 499, 501, 502, 503, 504, 506,
508, 509, 511, 512, 513, 514, 516, 517, 518, 519, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 531, 532, 534, 536, 537, 538, 539, 541, 542, 543, 547,
548, 549, 551, 552, 553, 554, 556, 557, 558, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 571, 573, 574, 576, 577, 579, 581, 582, 583, 584, 586, 587,
588, 589, 591, 592, 593, 594, 596, 597, 599, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608, 609, 613, 614, 616, 617, 618, 619, 621, 622, 623, 626, 627,
628, 631, 632, 633, 634, 636, 638, 639, 641, 642, 643, 644, 647, 648, 649, 651, 652, 653, 654, 656, 657, 658, 659, 661, 662, 664, 666, 667,
668, 669, 671, 672, 673, 674, 677, 678, 679, 681, 682, 683, 684, 686, 687, 688, 691, 692, 693, 694, 696, 698, 699, 701, 703, 704, 706, 707,
708, 709, 711, 712, 713, 716, 717, 718, 719, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 729, 732, 733, 734, 736, 737, 738, 739, 742, 743, 744, 746, 747,
749, 751, 752, 753, 756, 757, 758, 759, 761, 762, 763, 764, 766, 768, 769, 771, 772, 773, 774, 776, 777, 778, 779, 781, 783, 784, 786, 787,
788, 789, 791, 792, 794, 796, 797, 798, 801, 802, 803, 804, 807, 808, 809, 811, 812, 813, 814, 817, 818, 821, 822, 823, 824, 826, 827, 828,
829, 831, 834, 836, 837, 838, 839, 841, 842, 843, 844, 846, 847, 848, 849, 851, 852, 853, 854, 856, 857, 859, 861, 862, 863, 864, 866, 868,
869, 872, 873, 874, 876, 877, 878, 879, 881, 882, 883, 886, 887, 888, 889, 891, 892, 893, 894, 896, 898, 899, 902, 903, 904, 906, 907, 908,
909, 911, 912, 913, 914, 916, 917, 919, 921, 922, 924, 926, 927, 928, 929, 931, 932, 933, 934, 937, 938, 939, 941, 942, 943, 944, 946, 947,
948, 951, 953, 954, 956, 957, 958, 959, 961, 963, 964, 966, 967, 968, 971, 972, 973, 974, 976, 977, 978, 979, 981, 982, 983, 984, 987, 989,
991, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1002, 1004, 1006, 1007, 1008, 1009, 1011, 1012, 1013, 1016, 1017, 1018, 1019, 1021, 1022, 1023, 1024,
1026, 1028, 1029, 1031, 1032, 1033, 1034, 1036, 1038, 1039, 1041, 1042, 1043, 1044, 1046, 1047, 1048, 1049, 1051, 1052, 1056, 1057, 1058,
1059, 1061, 1062, 1063, 1064, 1067, 1068, 1069, 1072, 1073, 1074, 1076, 1077, 1078, 1081, 1082, 1083, 1084, 1086, 1087, 1089, 1091, 1093,
1094, 1096, 1097, 1098, 1099, 1101, 1102, 1103, 1104]
```

On préférera nettement la liste de ceux qu'on a enlevés :

```
[5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 30, 34, 35, 39, 40, 45, 50, 51, 52, 55, 60, 65, 68, 70, 75, 78, 80, 85, 90,
91, 95, 100, 102, 104, 105, 110, 115, 117, 119, 120, 125, 130, 135, 136, 140, 143, 145, 150, 153, 155, 156,
160, 165, 169, 170, 175, 180, 182, 185, 187, 190, 195, 200, 204, 205, 208, 210, 215, 220, 221, 225, 230, 234,
235, 238, 240, 245, 247, 250, 255, 260, 265, 270, 272, 273, 275, 280, 285, 286, 289, 290, 295, 299, 300, 305,
306, 310, 312, 315, 320, 323, 325, 330, 335, 338, 340, 345, 350, 351, 355, 357, 360, 364, 365, 370, 374, 375,
377, 380, 385, 390, 391, 395, 400, 403, 405, 408, 410, 415, 416, 420, 425, 429, 430, 435, 440, 442, 445, 450,
455, 459, 460, 465, 468, 470, 475, 476, 480, 481, 485, 490, 493, 494, 495, 500, 505, 507, 510, 515, 520, 525,
527, 530, 533, 535, 540, 544, 545, 546, 550, 555, 559, 560, 561, 565, 570, 572, 575, 578, 580, 585, 590, 595,
598, 600, 605, 610, 611, 612, 615, 620, 624, 625, 629, 630, 635, 637, 640, 645, 646, 650, 655, 660, 663, 665,
670, 675, 676, 680, 685, 689, 690, 695, 697, 700, 702, 705, 710, 714, 715, 720, 725, 728, 730, 731, 735, 740,
741, 745, 748, 750, 754, 755, 760, 765, 767, 770, 775, 780, 782, 785, 790, 793, 795, 799, 800, 805, 806, 810,
815, 816, 819, 820, 825, 830, 832, 833, 835, 840, 845, 850, 855, 858, 860, 865, 867, 870, 871, 875, 880, 884,
885, 890, 895, 897, 900, 901, 905, 910, 915, 918, 920, 923, 925, 930, 935, 936, 940, 945, 949, 950, 952, 955,
960, 962, 965, 969, 970, 975, 980, 985, 986, 988, 990, 995, 1000, 1001, 1003, 1005, 1010, 1014, 1015, 1020,
1025, 1027, 1030, 1035, 1037, 1040, 1045, 1050, 1053, 1054, 1055, 1060, 1065, 1066, 1070, 1071, 1075, 1079,
1080, 1085, 1088, 1090, 1092, 1095, 1100, 1105]
```

◃6▹ ♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{lcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 7 & [9] \\ n & = & 1 & [4] \end{array}\right\|$ d'inconnue entière n.

Un système de congruences simultanées.

On commence par $\left\{\begin{array}{lcll} n & = & 0 & [5] \\ n & = & 0 & [9] \end{array}\right\|$: les multiples de 45.

puis $\left\{\begin{array}{lcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 7 & [9] \end{array}\right\|$: $S = \{43 + 45.k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (particulière plus homogènes).

On passe à $\left\{\begin{array}{lcll} n & = & 43 & [45] \\ n & = & 1 & [4] \end{array}\right\|$.

On teste $43 = 3\ [4]$, $43 + 45 = 0\ [4]$ et $43 + 45 + 45 = 1\ [4]$.

L'entier 133 est solution particulière.

Les solutions : $\boxed{\{133 + 180.p \mid p \in \mathbb{Z}\}}$

◁7▷ ♡ En appliquant l'algorithme d'Euclide, j'ai trouvé les quotients successifs
1, 34, 2, 2, 2, 1 et 2
et le dernier reste non nul valait 3. Qui étaient les deux nombres initiaux ?
Même question, avec le même dernier reste et pour quotients 0, 4, 1, 1, 30 et 11.

Appelons a et b les deux entiers. Puis c, d, e et ainsi de suite les restes.

$$\begin{array}{rclll} a & = & 1 & \times b & +c \\ b & = & 34 & \times c & +d \\ c & = & 2 & \times d & +e \\ d & = & 2 & \times e & +f \\ e & = & 2 & \times f & +g \\ f & = & 1 & \times g & +h \\ g & = & 2 & \times h & \end{array}$$ et le dernier reste est nul.

Comme on nous dit que le dernier reste non nul est 3 : $h = 3$ (et tous les nombres de l'étude sont multiples de 3).

On remonte pas à pas $$\begin{array}{rclll} a & = & 1 & \times b & +c \\ b & = & 34 & \times c & +d \\ c & = & 2 & \times d & +e \\ d & = & 2 & \times e & +f \\ e & = & 2 & \times f & +g \\ f & = & 1 & \times g & +3 \\ g & = & 2 & \times 3 & \end{array}$$ puis $$\begin{array}{rclll} a & = & 1 & \times b & +c \\ b & = & 34 & \times c & +d \\ c & = & 2 & \times d & +e \\ d & = & 2 & \times e & +f \\ e & = & 2 & \times f & +6 \\ f & = & 1 & \times 6 & +3 \\ 6 & = & 2 & \times 3 & \end{array}$$ et $$\begin{array}{rclll} a & = & 1 & \times b & +c \\ b & = & 34 & \times c & +d \\ c & = & 2 & \times d & +e \\ d & = & 2 & \times e & +9 \\ e & = & 2 & \times 9 & +6 \\ 9 & = & 1 & \times 6 & +3 \\ 6 & = & 2 & \times 3 & \end{array}$$

et $$\begin{array}{rclll} a & = & 1 & \times b & +c \\ b & = & 34 & \times c & +d \\ c & = & 2 & \times d & +24 \\ d & = & 2 & \times 24 & +9 \\ 24 & = & 2 & \times 9 & +6 \\ 9 & = & 1 & \times 6 & +3 \\ 6 & = & 2 & \times 3 & \end{array}$$ jusqu'à $$\begin{array}{rclll} 4887 & = & 1 & \times 4749 & +138 \\ 4749 & = & 34 & \times 138 & +57 \\ 138 & = & 2 & \times 57 & +24 \\ 57 & = & 2 & \times 24 & +9 \\ 24 & = & 2 & \times 9 & +6 \\ 9 & = & 1 & \times 6 & +3 \\ 6 & = & 2 & \times 3 & \end{array}$$

On confirme être partis de 4887 et 4749.

```
def pgcd(a,b) :
....while b>0 :
........k = a//b
........r = a%b
........print(a,k,b,r)
........a=b
........b=r
....return a
```

L'instruction `gcd=pgcd(4887,4749)` affiche

4887	1	4749	138
4749	34	138	57
138	2	57	24
57	2	24	9
24	2	9	6
9	1	6	3
6	2	3	0

et la valeur 3 est donne à gcd, mais pas affichée.

Pour $$\begin{array}{rclll} a & = & 0 & \times b & +c \\ b & = & 4 & \times c & +d \\ c & = & 1 & \times d & +e \\ d & = & 1 & \times e & +f \\ e & = & 30 & \times f & +g \\ f & = & 11 & \times g & \end{array}$$ et un reste gal à 3 : $$\begin{array}{rclll} a & = & 0 & \times b & +c \\ b & = & 4 & \times c & +d \\ c & = & 1 & \times d & +e \\ d & = & 1 & \times e & +f \\ e & = & 30 & \times f & +3 \\ f & = & 11 & \times 3 & \end{array}$$

On trouve $$\begin{array}{rclll} a & = & 0 & \times 9102 & +2019 \\ 9102 & = & 4 & \times 2019 & +1026 \\ 2019 & = & 1 & \times 1026 & +993 \\ 1026 & = & 1 & \times 993 & +33 \\ 993 & = & 30 & \times 33 & +3 \\ 33 & = & 11 & \times 3 & \end{array}$$

Les deux nombres initiaux sont 9102 et 2019, mais donnés dans le « mauvais ordre », ce qui explique le premier quotient nul.

Petite question : pourquoi un exercice aussi simple et clair que celui ci ne figure dans aucun manuel d'arithmétique ?

◁8▷ Exprimez le $p.g.c.d.$ de a^2 et b^2 à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $2.a$ et $2.b$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $a!$ et $b!$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b si nécessaire.

$p.g.c.d.(a^2,\ b^2) = \Big(p.g.c.d(a,b)\Big)^2$

$p.g.c.d.(2.a,\ 2.b) = 2.\Big(p.g.c.d(a,b)\Big)$

Supposons par symétrie des rôles $a \leqslant b$ alors $p.g.c.d.(a!,\ b!) = a!$ puisque $a!$ divise $b!$.

◃9▹ Peut on avoir $p.g.c.d.(a,\ b) = 2016$, $p.g.c.d.(b,\ c) = 2017$ et $p.g.c.d.(c,\ a) = 2018$?
Si oui, combien de solutions ?
Information : $2^5.3^2.7$, tandis que 2017 et 673 sont premiers.

◃10▹ On pose $A = \{a,\ b,\ c\}$ et $B = \{b,\ c,\ d\}$. Donnez un élément qui est dans $P(A \cup B)$ mais pas dans $P(A) \cup P(B)$.
Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \cup P(B)$? Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A \times B)$?Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \times P(B)$?

$P(A) = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}\Big\}$

$P(B) = \Big\{\emptyset,\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\},\ \{b,c,d\}\Big\}$

$P(A) \cup P(B) = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\},\ \{a,b,c\},\ \{b,c,d\}\Big\}$

En revanche $A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et $P(\{a,\ b,\ c,\ d\})$ contient $\{a,d\}$ et $\{a,b,c,d\}$.

Le cardinal de $P(A) \cup P(B)$ est $8 + 8 - 4$ (les parties $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$ et $\{b,c\}$ sont là deux fois).
La liste des douze parties est au dessus.
En revanche, $P(A \cup B)$ est de cardinal 2^4.

$A \times B$ est de cardinal 9 :

	a	b	c
b	(a,b)	(b,b)	(c,b)
c	(a,c)	(b,c)	(c,c)
d	(a,d)	(b,d)	(c,d)

(ce sont bien neuf couples distincts).

On a donc 2^9 éléments dans $P(A \times B)$. Ce qui fait 512.

$P(A)$ était de cardinal 8 et $P(B)$ aussi.$P(A) \times P(B)$ est de cardinal 64, je pourrais même en dresser une liste/tableau

	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,$
$\emptyset$	$(\emptyset,\emptyset)$	$(\{a\},\emptyset)$	$(\{b\},\emptyset)$	$(\{c\},\emptyset)$	$(\{a,b\},\emptyset)$	$(\{a,c\},\emptyset)$	$(\{b,c\},\emptyset)$	$(\{a,b,c$
$\{b\}$	$(\emptyset,\{b\})$	$(\{a\},\{b\})$	$(\{b\},\{b\})$	$(\{c\},\{b\})$	$(\{a,b\},\{b\})$	$(\{a,c\},\{b\})$	$(\{b,c\},\{b\})$	$(\{a,b,c\}$
$\vdots$								
$\{c,d\}$	$(\emptyset,\{c,d\})$	$(\{a\},\{c,d\})$	$(\{b\},\{c,d\})$					
$\{b,c,d\}$							$(\{b,c\},\{b,c,d\})$	$(\{a,b,c\},\{$

je vous laisse compléter.
Et je vous laisse prendre conscience que ce ne sont pas des objets simplistes comme ceux que vous avez manipulé en Terminale, au collège ou en calcul.
Mais ce sont quand même des couples formés de parties...

◃11▹ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a + n$ et $b + n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

Pour tester si deux entiers sont premiers entre eux, on calcule leur pgcd par algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes jusqu'à avoir un reste nul, et on retourne l'entier précédent, c'est a). Mais en fait, on regarde si le pgcd trouvé vaut 1 :

```
def pgcd(a, b) :
....while b > 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

```
def PremiersEntreEux(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return (a==1)
```

Ensuite, on exploite ce test, et tant que la longueur de la liste n'a pas atteint 100, on continue à chercher.
Faut il penser à vérifier au début si a et b sont distincts ?

```
def Liste(a, b) :
....L = [ ]
....n = 0
....while len(L)<100 :
........if PremiersEntreEux(a+n, b+n) :
............L.append(n)
............n += 1
....return L
```

Et maintenant, pour que le centième entier de la liste soit le plus grand possible ?

On va prendre tous les couples $(a,\ b)$	`for a in range(1, 1001) :` `....for b in range(1, 1001) :`
(avec a différent de b et en fait b plus petit que a)	`for a in range(1, 1001) :` `....for b in range(1, a) :`

On va créer un record à battre.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`

On va le comparer au denier test de Liste(a, b).	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`

Si le record n'est pas battu, on passe aucun couple suivant.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`
	`........if Candidat > Record :`

Si le record est battu, c'est lui qu'on mémorise.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`
	`........if Candidat > Record :`
	`............Record = Candidat`
	`............aRec, bRec = a, b`

Record : 443 atteint pour les couples [a, b] suivants :
[[2, 1], [3, 1], [4, 2], [7, 1], [8, 2], [31, 1], [32, 2], [50, 20], [211, 1], [212, 2], [258, 48], [284, 74]]

◁12▷ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a \wedge b = 12$ (p.g.c.d.), $b \vee c = 120$ (p.p.c.m.) et $c \wedge a = 5$?

◁13▷ ♡ Avez vous besoin de calculer $\begin{vmatrix} 150 & 235 & 195 \\ 164 & 23 & 3 \\ 246 & 41 & 27 \end{vmatrix}$ pour me prouver qu'il est multiple de 30 ?

Réponse : oui, car j'adore calculer et ce n'est pas un connard de prof de maths de merde qui m'empêchera de faire tout ce dont j'ai été frustré parce que j'ai eu Maths Sup au lieu de Paces, alors que toute ma vie, j'ai rêvé d'apprendre des trucs par cœur, de faire des calculs idiots dont on m'a garanti que plus tard j'en comprendrai la profondeur et le sens.
Alors, voilà, il vaut $-584\,580$ et foutez moi la paix.

Sinon, par multilinéarité, c'est $5.\begin{vmatrix} 30 & 47 & 39 \\ 164 & 23 & 3 \\ 246 & 41 & 27 \end{vmatrix}$

et c'est $3.\begin{vmatrix} 150 & 235 & 65 \\ 164 & 23 & 1 \\ 246 & 41 & 9 \end{vmatrix}$

et aussi $2.\begin{vmatrix} 75 & 235 & 195 \\ 82 & 23 & 3 \\ 123 & 41 & 27 \end{vmatrix}$

Et comme c'est un entier (oui, ça on le sait depuis le début), multiple à la fois de 2, de 3 et de 5, c'est un multiple de leur p.p.c.m.

◁ 14 ▷

Montrez que est A inversible (indication : calculez son déterminant modulo 2).
Justifiez $Com(A^2) = (Com(A))^2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

On note a_i^k le terme général de la matrice A. Par exemple $a_1^4 = 4$ (indexation non pythonienne).
On note α_i^k le terme général de la matrice A modulo 2. Par exemple $\alpha_1^4 = 0$ (indexation non pythonienne).
On rappelle : $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}.a_5^{\sigma(5)}$.
Et si on réduit modulo 2 ?
La réduction modulo 2 est compatible avec les sommes et les produits [2].
On a donc avec la notation pythonienne des modulo

$$\det(A)\%2 = \sum_{\sigma\in S_n} (Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}.a_5^{\sigma(5)})\%2 = \sum_{\sigma\in S_n} (Sgn(\sigma)\%2).(a_1^{\sigma(1)}\%2)\dots(a_5^{\sigma(5)}\%2)$$

Bref, avec la notation introduite : $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_1^{\sigma(1)}\dots\alpha_5^{\sigma(5)}$.

Le « déterminant modulo 2 » de la matrice est le déterminant de « la matrice modulo 2 ».

Et si on réduit A modulo 2, on a la matrice I_5 (les termes diagonaux sont impairs, et les termes hors diagonale sont pairs).
Mais $\det(I_5) = 1$.
On a donc $\boxed{\det(A) = 1 \ mod\ 2}$
Il est impair, et ne peut pas valoir 0.
La matrice A est inversible.

De plus, son inverse sera à coefficients rationnels.

Ce serait difficile de comparer $Com(A^2)$ et $(Com(A))^2$ en restant sur les définitions par cofacteurs.
Mais maintenant que A est inversible, on peut écrire $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.^t(ComA))$ puis $(A^{-1})^2 = \Big(\frac{1}{\det(A)}\Big)^2.\Big(^t(ComA))\Big)^2$ et même $(A^{-1})^2 = \frac{1}{(\det(A))^2}.^t\Big(ComA)\Big)^2$ par propriétés usuelles de la transposition et du déterminant.
Mais on a aussi $(A^2)^{-1} = \frac{1}{\det(A^2)}.^t(Com(A^2))$.
Enfin, la base du calcul algébrique nous donne $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$ (noté aussi A^{-2}).
On peut identifier et simplifier par $\det(A))^2$ et on a bien $^t\Big(Com(A^2)\Big) =^t \Big(\Big(Com(A)\Big)^2\Big)$. On efface les transpositions, et c'est fini.

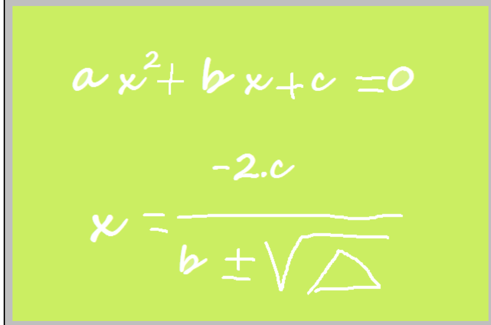
Le résultat n'est pas propre à cette matrice.
On prouve pour tout couple de matrices inversibles $Com(A.B) = Com(A).Com(B)$. Et c'est même valable pour des matrices

2. je veux dire $(a+b)\ mod\ 2 = (a\ mod\ 2) + (b\ mod\ 2)$ et $(a\times b)\ mod\ 2 = (a\ mod\ 2)\times(b\ mod\ 2)$

non inversibles, par « passage à la limite ».
En revanche, je ne vous conseille pas de tenter une preuve par récurrence sur n, même si le résultat est agréable en dimension 2.

◁15▷

Le colleur doit il sanctionner l'élève qui a écrit ces formules au tableau ?




```
def Samy(a) :
....return(sum(int(c) for c in str(a)))

def Vera(n) :
....return(Samy(n) > Samy(n*n))

n = 0
while not(Vera(n)) :
....n += 1
print(n)
```

La réponse est 39. Expliquez.

On résout $a.x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x. La réponse est $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$, on connaît bien.

Mais que penser de $\dfrac{-2.c}{b \pm \sqrt{\Delta}}$? Faisons appel à la quantité conjuguées (ε vaut 1 ou -1) :

$$\frac{-2.c}{b+\varepsilon.\sqrt{\Delta}} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-(\varepsilon.\sqrt{\Delta})^2} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-\Delta} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-(b^2-4.a.c)} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{4.a.c} = \frac{-(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{2.a}$$

On a donc bien $\dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2.a}$.
La formule de l'élève est la bonne !

Sauf dans le cas $c = 0$, mais on ne va pas ergoter, dans ce cas, une racine est nulle, et l'autre est facile à trouver.

Le script **Samy** prend un entier n, en fait une chaine de caractères (**str(n)**), dont il prend les éléments un par un. Il en refait des entiers et les additionne.
Bref, **Samy(a)** calcule la somme des chiffres de l'entier **a**.

Vera prend la relève et compare **Samy(n)** et **Samy(n*n)**. C'est à dire qu'elle regarde si la somme des chiffres de n^2 est plus petite que la somme des chiffers de **n**. Par exemple $Samy(13) = 4$ et $Samy(169) = 16$. C'est le carré qui gagne.
Par exemple $Samy(39) = 12$ et $Samy(39^2) = Samy(1521) = 9$. C'est 39 qui gagne face à son carré.

Vera retourne un test, donc un booléen.

On commence à $n = 0$. Et n augmente tant que $Samy(n)$ est plus petit que $Samy(n^2)$.

Bref, on cherche le premier entier n tel que la somme des chiffres de n soit strictement plus grande que la somme des chiffres de n^2. Et on trouve 39.

Le suivant sera 48 puisque $Samy(48) = 12$ et $Samy(48^2) = Samy(2034) = 9$.

On peut dresser un tableau pour confirmer nos dires.

1 -> 1	2 ->2	3->3	4->4	5->5	6->6	7->7	8->8	9->9	10->1	11->2	12->3	13->4	14->5	15
1->1	4->4	9->9	16->7	25->7	36->9	49->13	84->12	81-9	100->1	121->4	144->9	163->10	196->16	22

et ainsi de suite.

◁16▷

♡ On pose $a_0 = 5$ et $b_0 = 2$. Pour tout n, on pose $a_{n+1} = 3.a_n + 4.b_n$ et $b_{n+1} = 2.a_n + 3.b_n$. Montrez que pour tout n, $a_n$et b_n sont premiers entre eux.
Propagez la propriété ou essayez d'obtenir une identité de Bézout avec le déterminant de $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$.

5 et 2 sont premiers entre eux.

On se donne n et on suppose que $a_n$et b_n sont premiers entre eux.
Prenons alors un entier d qui divise à la fois a_{n+1} et b_{n+1}. (objectif : le seul diviseur comme d vaut 1).
Il divise alors $\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & 3.a_n & + & 4.b_n \\ & et & & & \\ b_{n+1} & = & 2.a_n & + & 3.b_n \end{array}$ et des combinaisons telles que $3.a_{n+1} - 4.b_{n+1}$.
Eh oui, d divise a_n !
Mais il divise aussi $-2.a_{n+1} + 3.b_{n+1}$. Et ça, c'est b_n.
Comme d divise $a_n$et b_n(premiers entre eux), il vaut 1.
a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

Variante de l'hérédité.
On se donne n et on suppose qu'on a une identité de Bézout entre $a_n$et b_n : $u.a_n + v.b_n = 1$.
Remarque : | Je devrais l'écrire $u_n.a_n + v_n.b_n = 1$ car u et v dépendent de n.
Mais on a $a_n = 3.a_{n+1} - 4.b_{n+1}$ et $b_n = -2.a_{n+1} + 3.b_{n+1}$.
On reporte : $u.(3.a_{n+1} - 4.b_{n+1}) + v.(-2.a_{n+1} + 3.b_{n+1}) = 1$.
On développe et regroupe : $(3.u - 2.v).a_{n+1} + (-4.u + 3.v).b_{n+1} = 1$.
C'est une identité de Bézout entre a_{n+1} et b_{n+1} qui prouve qu'ils sont premiers entre eux !

Ruse étrange (mais inachevée) : pour tout n, on a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Par récurrence évidente sur n : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ et aussi $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.
En collant côte à côte : $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$.
On passe au déterminant $\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \right)$

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \right) . \det \left(\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)^n . \det \left(\begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} = 1^n . \det \left(\begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \right) = 34$$

Sous la forme $a_n.b_{n+1} - b_n.a_{n+1} = 34$, c'est une identité de Bézout qui dit que le p.g.c.d. vaut... non, peut être pas forcément 34.
34 est un multiple du p.g.c.d.
Reste à montrer qu'il n'est pas pair, ce p.g.c.d. : $a_n$est toujours impair (récurrence).
Et qu'il ne vaut jamais 17. Tiens, oui, pourquoi ? Bon, il resterait du travail.

◁ 17 ▷ ♡ Résolvez $(n-1)$ divise $n^3 + 1$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

Raisonnons par équivalence, en ajoutant des informations toujours vraies, et en soustrayant des congruences

$$\left(\begin{array}{ccc} n-1 & | & n^3+1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} n-1 & | & n^3+1 \\ n-1 & | & n^3-1 \end{array} \right)$$

en effet, $n^3 - 1 = (n-1).(n^2 + n + 1)$

$$\left(\begin{array}{ccc} n-1 & | & n^3+1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} n-1 & | & n^3+1 \\ n-1 & | & 2 \end{array} \right)$$

(la différence). Les seuls diviseurs de 2 sont 1,2, -1 et -2.
Mais encore faut il qu'ils soient aussi solutions de la première équation (on garde un système) :

$n-1$	-2	-1	1	2
n	-1	0	2	3
n^3+1	0	1	9	28
	oui	oui	oui	oui

$\boxed{S = \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}}$

◁ 18 ▷ Quelles sont les deux plus petites valeurs que peut prendre $\left| \begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ a & b \end{vmatrix} \right|$ sachant que a et b sont des entiers relatifs ? *(oui, la notation est étrange pour la valeur absolue d'un déterminant !)*

Ce déterminant $2014.a - 2945.b$ est un élément de $2014.\mathbb{Z} + 2945.\mathbb{Z}$.

Il est donc dans $19.\mathbb{Z}$ (le p.g.c.d. des deux).

On atteint 0 par exemple avec $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 2014 & 2945 \end{vmatrix}$ ou même $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 106 & 155 \end{vmatrix}$.
Mais sinon, on atteint des multiples non nuls de 19, donc la plus petite valeur strictement positive est 19.

Et on l'atteint pour $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ -13 & -19 \end{vmatrix}$.

Mais si, une identité de Bézout !

◁ 19 ▷

2019 et 752 sont évidemment premiers entre eux. Pouvez vous donner une identité de Bézout qui les lie avec au moins un des entiers plus grands que 5000.

On applique l'algorithme d'Euclide : $\begin{array}{rclll} 2019 & = & 2 & \times 752 & +515 \\ 752 & = & 1 & \times 515 & +237 \\ 515 & = & 2 & \times 237 & +41 \\ 237 & = & 5 & \times 41 & +32 \\ 41 & = & 1 & \times 32 & +9 \\ 32 & = & 3 & \times 9 & +5 \\ 9 & = & 1 & \times 5 & +4 \\ 5 & = & 1 & \times 4 & +1 \end{array}$ et $\begin{array}{rcrcrr} 515 & = & 2019 & - & 2 & \times 752 \\ 237 & = & 752 & - & 1 & \times 515 \\ 41 & = & 515 & - & 2 & \times 237 \\ 32 & = & 237 & - & 5 & \times 41 \\ 9 & = & 41 & - & 1 & \times 32 \\ 5 & = & 32 & - & 3 & \times 9 \\ 4 & = & 9 & - & 1 & \times 5 \\ 1 & = & 5 & - & 1 & \times 4 \end{array}$ qui ne servira pas

Le p.g.c.d. vaut 1, et on remonte l'algorithme sous forme de déterminant en combinant les colonnes :

$$1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C2=C2+C1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{C1=C1+3.C2}{=} \begin{vmatrix} 32 & 9 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \underset{C2=C2+1.C1}{=} \begin{vmatrix} 32 & 41 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

et ensuite

$$\begin{vmatrix} 32 & 41 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \underset{C1=C1+5.C2}{=} \begin{vmatrix} 237 & 41 \\ 52 & 9 \end{vmatrix} \underset{C2=C2+2.C1}{=} \begin{vmatrix} 237 & 515 \\ 52 & 113 \end{vmatrix} \underset{C1=C1+1.C2}{=} \begin{vmatrix} 752 & 515 \\ 165 & 113 \end{vmatrix} \underset{C2=C2+2.C1}{=} \begin{vmatrix} 752 \\ 165 \end{vmatrix}$$

On peut vérifier à quelques étapes : $5 \times 2 - 9 \times 1 = 1$ ou $237 \times 9 - 52 \times 41 = 1$ et enfin $\boxed{752 \times 443 - 2019 \times 165 = 1}$
On a une identité de Bézout.
Mais ses coefficients sont trop petits.

Mais cette fois, avec $\begin{vmatrix} 752 & 2019 \\ 165 & 443 \end{vmatrix} = 1$, on peut ajouter des lignes sur d'autres : $\begin{vmatrix} 752 & 2019 \\ 917 & 2462 \end{vmatrix} = 1$ ($L2 = L2 + L1$)

Insuffisant ? On double ($L2 = L2 + 2.L1$) : $\boxed{\begin{vmatrix} 752 & 2019 \\ 2421 & 6500 \end{vmatrix} = 1}$

◁ 20 ▷

On veut calculer le p.g.c.d. de 151 et 42. Euclide dit : $\begin{array}{rclll} 151 & = & 3\times & 42 & +25 \\ 42 & = & 1\times & 25 & +17 \\ 25 & = & 1\times & 17 & +8 \\ 17 & = & 2\times & 8 & +1 \\ 8 & = & 8\times & 1 & \end{array}$

Regardez et commentez ce qui suit :

$$\frac{151}{42} = 3 + \frac{25}{42} = 3 + \frac{1}{\frac{42}{25}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{17}{25}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{25}{17}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{8}}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8}}}}$$

On oublie le dernier : $\frac{151}{42} \simeq 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}$.

Et maintenant, que vaut le résultat du produit en croix : $151 \times 5 - 42 \times 18$?
Testez sur d'autres exemples. Justifiez le résultat obtenu.

C'est l'algorithme d'Euclide, sous une autre forme.
Et ça cache bien des choses qu'on n'aura pas le temps de voir car le programme doit avancer.

◁ 21 ▷

♡ Trouvez tous les entiers qui sont à la fois congrus à 2 modulo 7, à 7 modulo 13 et à 13 modulo 2.

On veut les entiers qui soient à la fois congrus à 2 modulo 7, à 7 modulo 13 et à 13 modulo 2.

La dernière condition se réduit à $n \equiv 1\ [2]$. On traduit en introduisant des variables :

$$\exists(a,\ b,\ c),\ n = 2 + 7.a,\ n = 7 + 13.b,\ n = 1 + 2.c$$

c'est le théorème des « restes chinois » ou « congruences simultanées ».

Contentons nous des deux premières : $\left\{\begin{array}{ccll} n & = & 2 & +7.a \\ n & = & 7 & +13.b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} n & = & 2 & +7.a \\ 5 & = & 7.a & -13.b \end{array}\right\}$

On cherche une identité de Bézout entre 7 et 13 : $2.7 - 1.13 = 1$ (désolé Euclide et Bézout, je n'ai pas eu besoin de vous).

On multiplie par 5 et on remplace

$$\left\{\begin{array}{ccll} n & = & 2 & +7.a \\ n & = & 7 & +13.b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} n & = & 2 & +7.a \\ n & = & 7 & +13.b \\ 10.7 - 5.13 & = & 7.a & -13.b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} n & = & 2 & +7.a \\ n & = & 7 & +13.b \\ 7.(a-10) & = & 13.(b-5) & \end{array}\right\}$$

$a - 10$ est multiple de 13 et $b - 5$ est multiple de 7 (dans e même rapport).

On n'a plus qu'une variable : k vérifiant $a = 13.k + 7$ et $b = 7.k + 5$.

On reporte : $n = 2 + 7.(13.k + 10) = 7 + 13.(7.k + 5)$.

On trouve $n = 72 + 7.13.k$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$ (qui veut vérifier : $72 = 2\ [7]$ et $72 = 7\ [13]$).

Il reste à tenir compte de l'autre congruence : n doit être impair. Il faut et il suffit que k soit impair.

$\boxed{S_n = \{72 + 91.(2.p + 1) \mid p \in \mathbb{Z}\} \text{ (première solution positive : 163)}}$

◃22▹

♣ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus grand possible ?
♡ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus petit possible ?

Il faut prendre des facteurs différents de 1, mais il est rentable de les prendre égaux à 2 ou 3.

Par exemple, si il traîne dans le produit un facteur 7, remplacez le par 5 et 2 car 5×2 est meilleur que 7.
remplacez le par 4 et 3 car 4×3 est meilleur que 7.

Si vous avez un facteur a plus grand que 5, remplacez le par $a - 3$ et 3. En effet : $(a - 3).3 \geqslant a$ (c'est $2.a \geqslant 9$).
Si vous avez un facteur 4, gardez le, car 2.2 c'est pareil, et 3.1 c'est moins bien.
Si vous avez un facteur 3, gardez le.

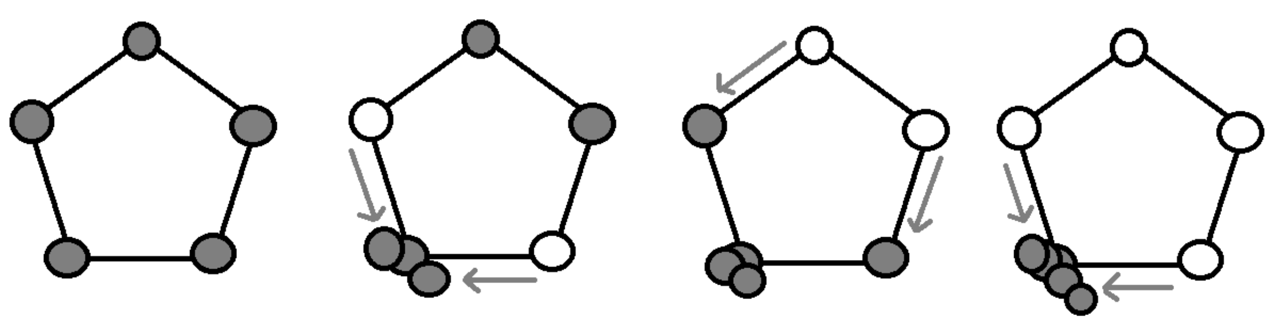
On va donc prendre $3 + 3 + \ldots + 3 + 2$ avec 672 termes égaux à 3.
Le produit est $3^{272}.2$.
Et c'est 844331840628942097442716551709264646570359882856660301642271023630200085989185262694710794350774486045558469417927324960954751737438088168637269166886446274857781852321087399410915728876269461091071193873208744559844495902020084498327298704221506961905543494633009714001305514881652358930506907253080223868246593936769282

Pour minimiser le produit, on prend des 1, et le produit vaut 1.

Ou même : $2018 = 2018 + 0$ et le produit vaut 0.

◃23▹

Il y a cinq arbres en rond dans la cour. Sur chaque arbre, un corbeau. Toutes les dix secondes, deux corbeaux passent de leur arbre à un arbre voisin (droite ou gauche). En combien de temps est il possible que tous les corbeaux soient rassemblés sur un même arbre ?
Cette fois, il y a dix arbres, un corbeau par arbre, et deux corbeaux qui bougent à chaque fois. Combien de temps pour (peut-être) les rassembler tous sur un même arbre.



La second cas avec dix arbres est impossible.
Décidons qu'un arbre sur deux est un chêne et les autres des platanes *(en soi, le type d'arbre n'a pas d'importance)*.
Il y a donc initialement 5 oiseaux sur des chênes
5 oiseaux sur des platanes

Que se passe-t-il à chaque mouvement ?
Deux oiseaux quittent un arbres d'un type, et passent sur deux arbres voisins, donc d'un autre type.
Par exemple, deux corbeaux quittent un platane *(chacun ?)* et partent sur les deux chênes voisins.
On peut donc passer de situations des types suivants

5 chênes	puis	3 chênes	puis	1 chêne	puis	3 chênes
5 platanes		7 platanes		9 platanes		7 platanes

Quand j'écris « 9 platanes », je veux dire « 9 oiseaux sur des platanes ».

Une chose ne changera pas : les deux nombres seront toujours impairs.
Et de fait, il devient impossible d'arriver à

10 chênes	ou	0 chêne
0 platane		10 platanes

Or, « tous les oiseaux sur le même arbre » se formule nécessairement sous une de ces formes.

On note qu'on a cherché ici un « invariant ».

◁24▷ Peut on dire que $\sum_{k=0}^{n} \pm k$ est égal à $\pm \sum_{k=0}^{n} k$ par linéarité ? Et si on considérait que cette somme est $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . k$ (quand $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ est choisi comme on veut dans $\{-1, 1\}^n$) ? Elle peut aller de $-\dfrac{n.(n+1)}{2}$ à $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ en ne prenant que des valeurs entières. Mais prend elle toutes les valeurs entières ?
Pour quelles valeurs de n existe-t-il un choix de signes $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ tel que la somme donne 0 ?

On aura tendance à estimer que $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ peut valoir -3, -1, 1 ou 3.
tandis que $\pm(1+1+1)$ vaut juste -3 ou 3.

• Pour n égal à 0, on a une somme (vide) qui atteint tout de -0 à 0.
• Pour n égal à 1, on a -1 et 1 (mais pas 0).sous-g
• Pour n égal à 2, on a

$1+2$	$-1+2$
$1-2$	$-1-2$

On rate au moins 0.
• Pour n égal à 3, il y a huit sommes

$1+2+3$	$1+2-3$	$1-2+3$	$-1+2+3$
$-1-2-3$	$-1-2+3$	$-1+2-3$	$1-2-3$

Certes 0 est atteint, mais il y a treize entiers de -6 à 6. On ne les aura pas tous.

Pour n égal à 4, voici en tout cas comment avoir 0 :

n	somme
3	$1+2-3$
4	$1-2-3+4$
5	impossible
6	impossible

Si on peut atteindre 0 pour n, alors on l'atteint aussi pour $n = 4$ avec
(la somme avec n termes)$+(n+1)-(n+2)-(n+3)+(n+4)$.
Comme on sait l'atteindre pour 3 et 4, on l'atteint pour

3	7	11	15	...	les $4.p+3$
4	8	12	16	...	les $4.p+4$

Peut on atteindre 0 pour n de la forme $4.p+1$? Non. Par un argument de parité.
La somme « avec que des signes + » est $\sum_{k=1}^{4.p+1} k = (4.p+1).(2.p+1)$, elle est impaire.
Changeons le signe devant un certains k. La somme évolue de $2.k$. Elle garde la même parité. Et même si on change le signe de plein de termes, elle reste impaire...
Impossible donc.

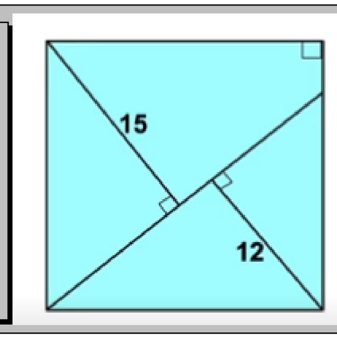
De même pour n de la forme $4.p+2$, on a la même impossibilité. Par exemple $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$ est impair.
Modulo 2, il vaut $1+0+1+0+1+0$. C'est donc raté, il ne pourra pas valoir 0.
Le même raisonnement tient pour tout autre entier congru à 2 modulo 4.

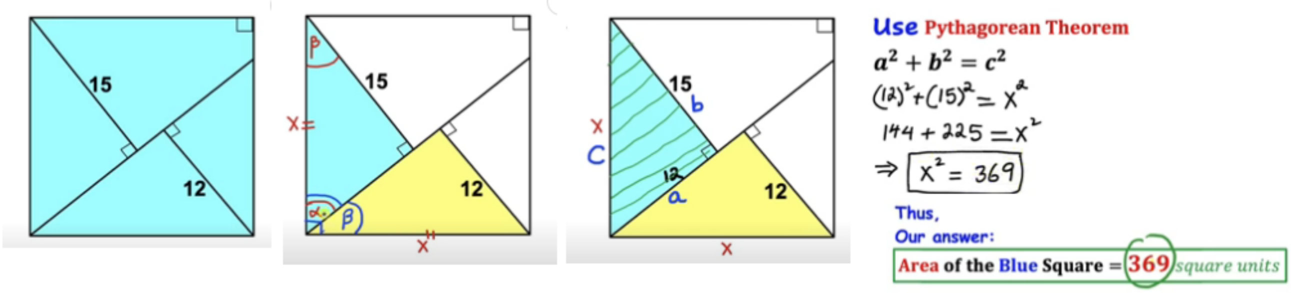
Bilan : on peut atteindre 0 avec des sommes bien choisies pour les entiers congrus à 0 ou 3 modulo 4.

◁25▷

```
def Scooby(n) :
....def gene(i, k) :
........if i+k < n :
............return(2)
........return(1)
....return([[gene(i, k) for k in range(n)] for i in range(n)])
```

Exprimez le déterminant de `Scooby(n)` en fonction de n.
Calculez l'aire du carré ci contre. (pas de rapport entre les deux exercices)





Notons x le côté du carré.
Avec le triangle du bas : $\sin(\beta)=\dfrac{12}{x}$.
Avec le triangle de gauche : $\sin(\alpha)=\dfrac{15}{x}$.
Or, α et β se complètent pour donner $\dfrac{\pi}{2}$.
On a donc $\sin(\alpha)=\cos(\beta)$.
La relation $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ donne donc $\dfrac{12^2}{x^2}+\dfrac{15^2}{x^2}=1$ et donc $x^2=12^2+15^2$.
Et x^2 est l'aire cherchée.

◁26▷

Un enchainement de questions préliminaires indépendantes les unes des autres[3] *vous permettra ensuite, en les emboitant, de démontrer des résultats d'arithmétique sur la piste des entiers friables*[4]. *Méfiez vous de la question piège.*

I∼0) f est une application continue, positive et décroissante sur $[n_0,\ +\infty[$ (*n_0 est un entier naturel non nul donné*). On pose $S_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n}f(k)$ et $\gamma_n=S_n-\int_{n_0}^{n}f(t).dt$. Montrez que la suite (γ_n) est positive, décroissante et convergente.

La positivité de $S_n-\int_{n_0}^{n}f(t).dt$ repose effectivement sur une comparaison série intégrale.

Mais on ne peut pas juste le dire. Il y a en effet un léger problème.
Dans S_n il y a $n-n_0+1$ termes, alors que l'intégrale de n_0 à n a juste n_0-n segments de longueur 1.

On remplace chaque $f(k)$ par $\int_{k}^{k+1}f(k).dt$ et on minore, par décroissance de f sur chaque $[k,\ k+1]$:

$$S_n=\sum_{k=n_0}^{n}f(k)=\sum_{k=n_0}^{n}\int_{k}^{k+1}f(k).dt\geqslant\sum_{k=n_0}^{n}\int_{k}^{k+1}f(t).dt=\int_{n_0}^{n+1}f(t).dt$$

On soustrait une intégrale qui s'arrête en n :

$$S_n-\int_{n_0}^{n}f(t).dt\geqslant\int_{n_0}^{n+1}f(t).dt-\int_{n_0}^{n}f(t).dt=\int_{n}^{n+1}f(t).dt$$

3. *l'espérance du produit de vos notes aux questions sera le produit des espérances des notes aux questions*
4. *un entier est dit friable si ses facteurs premiers sont nombreux et petits*

Comme f est positive *(et l'intervalle dans le bon sens)*, cette intégrale est positive.

Et comme indiqué, il reste un terme de trop.

Pour la décroissance, on se donne n et on compare γ_n et γ_{n+1} en calculant la différence par relation de Chasles et comparaison série-intégrale

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt - S_{n+1} + \int_{n_0}^{n+1} f(t).dt = \int_{n}^{n+1} f(t).dt - f(n+1)$$

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \int_{n}^{n+1} f(t).dt - \int_{n}^{n+1} f(n+1).dt = \int_{n}^{n+1} (f(t) - f(n+1)).dt$$

La fonction sous le signe somme est positive par décroissance de f sur $[n,\ n+1]$. La différence est positive.

La suite est décroissante, minorée par 0.
Elle converge vers son plus grand minorant.

I~1) Déduisez l'existence d'un réel C vérifiant $\sum_{2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

Prenons justement l'application $t \longmapsto \frac{1}{t.\ln(t)}$. Elle a pour dérivée $t \longmapsto -\frac{1+\ln(t)}{t^2.(\ln(t))^2}$.
Cette dérivée est négative sur l'intervalle $[2,\ +\infty[$.
On peut donc déduire que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \int_{2}^{n} \frac{dt}{t.\ln(t)}$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite qu'on va appeler C.
Mais l'intégrale se calcule *(forme en $\frac{u'}{u}$)* : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(2))$ converge vers une limite λ.
Par soustraction, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n))$ converge vers une limite C.
On écrit ceci $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) = C + o(1)_{n\to+\infty}$.
Et on fait passer de l'autre côté.

Attention, on est en sciences, on écrit $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) \longrightarrow_{n\to+\infty} C$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) - C \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) - C = o(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$

mais pas $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) + C$ *qui n'a strictement aucun sens.*

I~2) Calculez $\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ et déduisez que la série $\left(\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k.(\ln(k))^2}\right)$ converge quand N tend vers l'infini.

L'intégrale « à horizon fini » $\int_{2}^{n} \frac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ se calcule et vaut $\left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_{t=2}^{n}$. Elle converge vers $\frac{1}{\ln(2)}$ quand n tend vers l'infini.

On regarde la monotonie de $t \longmapsto \frac{1}{t.(\ln(t))^2}$. On dérive et on a $t \longmapsto -\frac{2+\ln(t)}{t^2.(\ln(t))^3}$. C'est bon.

Comment perdre des points aux concours :
appliquer la formule de la première question... sans vérifier que l'application est décroissante.
Juste parce qu'on a vu un résultat écrit, en oubliant que $p \Rightarrow q$ c'est si p alors q (et on ne sait rien si pas(p)).

La différence $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k.(\ln(k))^2}-\frac{1}{\ln(2)}+\frac{1}{\ln(n)}$ converge quand n tend vers l'infini.
Par addition, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k.(\ln(k))^2}$ converge quand n tend vers l'infini.

On pouvait aussi dire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k.(\ln(k))^2}$ *était croissante, et majorée par comparaison série intégrale.*

II∼0) Calculez $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt$. Prouvez l'existence de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ *(sa somme sera notée K, et ne me demandez pas à la fin du devoir « c'est qui K ? »).*

Pour l'intégrale, on commence à horizon fini A et on fera tendre A vers l'infini.
On intègre par parties, on décompose en éléments simples :

$$\int_2^A\frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}=\Big[\ln(t).\frac{1}{1-t}\Big]_2^{+A}+\int_2^A\frac{dt}{t.(1-t)}=\Big[\ln(t).\frac{1}{1-t}\Big]_2^{+A}+\int_2^A\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\Big).dt$$

$$\int_2^A\frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}=\Big[\ln(t).\frac{1}{1-t}+\ln(t-1)-\ln(t)\Big]_2^{+A}$$

La valeur en 2 ne pose pas de problème.
C'est la limite à l'infini qui va nous gêner. Déjà $\dfrac{\ln(A)}{1-A}$ tend vers 0 par comparaison des croissances.
Mais les deux logarithmes ensemble, ils font quoi ? $\ln(A-1)-\ln(A)$?
Sous cette forme, pas grand chose *(l'infini moins l'infini)*.
Mais sous la forme $\ln\Big(\dfrac{A-1}{A}\Big)$ *(et même* $\ln\Big(1-\dfrac{1}{A}\Big)$ *si vous y tenez)*, il tend vers 0.

Bref, finalement $\boxed{\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt=2.\ln(2)}$

On peut voir $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ comme une famille sommable.
Il suffit de la majorer par une famille sommable de référence.
Notre amie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ ne peut pas nous aider ici, de même que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k.(k-1)}$ qui a encore plus de raisons d'être notre amie.
De même, majorer $\ln(k)$ par k . Ceci nous livre une majoration par $\dfrac{1}{k-1}$ et la famille des $\dfrac{1}{k-1}$ n'est pas sommable *(harmonique)*.

Passons par une idée intermédiaire entre les deux, et majorons $\ln(k)$ par $\sqrt{k}$.
On a $0\leqslant\dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)}\leqslant\dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$.
Le terme général $\dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$ est équivalent à $\dfrac{1}{k^{3/2}}$. Comme $\dfrac{3}{2}$ est strictement plus grand que 1, la série de terme général $\dfrac{1}{k^{3/2}}$converge.

Par théorème sur les séries à termes positifs équivalents en $+\infty$, la série de terme général $\dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$ converge.

Par domination sur les séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ converge.

Pouvait on aussi comparer avec une intégrale. Tout en n'ayant pas de primitive explicite. Pas cool.

Mais une comparaison avec $\displaystyle\int\frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}$ pouvait valoir le coup.

D'ailleurs, c'est moi qui ai ajouté la question sur $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}$ *pour vous faciliter le travail.*
Ai-je réussi.

On rappelle $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt = 2.\ln(2)$

Maintenant, par comparaison série intégrale, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{(n-1)^2}$existe.

Par domination $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{(n-1).n}$ existe aussi.

III∼0) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n.\ln(n) - n + 1$.

On refait une majoration série intégrale pour $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$? Oui, surtout quand on voit $n.\ln(n) - n$ à droite.

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(k).dt \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t).dt = \int_{2-1}^{n} \ln(t).dt = [t.\ln(t) - t]_1^n = n.\ln(n) - n + 1$$

On a écrit au bon moment que le logarithme est une application croissante.

III∼1) Déduisez : $\ln(n!) = n.\ln(n) + O(n)$ quand n tend vers l'infini. C'est l'anniversaire de Sucri, venez au bureau, embrassez le sur son front vert et vous gagnez un point.

On a juste une minoration, et on veut passer à une formule asymptotique. Il faut un encadrement *(rappelons que $O(n)$ veut dire « suite bornée en valeur absolue par un multiple de n)*.

Dans la somme il y a $n-1$ termes, et le plus grand est le dernier. On peut donc majorer classiquement :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(n) = n.\ln(n)$$

On a maintenant $n.\ln(n) - n + 1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant n.\ln(n)$ et même$-n + 1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - n.\ln(n) \leqslant 1$

$$-1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - n.\ln(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Le terme du milieu est donc borné. On écrit que c'est un $O(1)$.

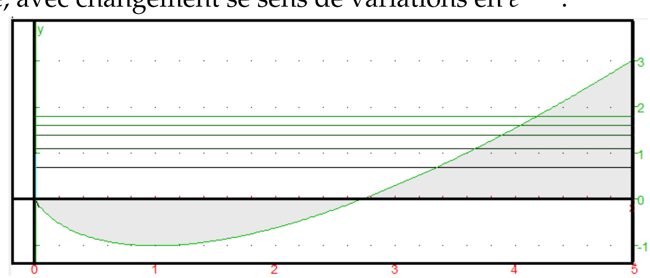
On multiplie par n et on passe l'autre terme là où on l'attend : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = n.\ln(n) + O(n)$.

IV∼0) Soit λ strictement positif. Justifiez que pour tout n il existe un unique réel x de $]0, +\infty[$ vérifiant $x.\ln(x) - \lambda.x = \ln(n)$ *(ce réel x sera noté r_n)*.

λ est fixé, et c'est x qui va varier.
On étudie donc $x \longmapsto x.\ln(x) - \lambda.x$ *(qu'on va appeler h)* et on la dérive : $x \longmapsto \ln(x) + 1 - \lambda$.
Cette application n'est pas monotone ! On ne va pas pouvoir utiliser le théorème de l'homéomorphisme ?

Disons quand même que h est décroissante puis croissante, avec changement se sens de variations en $e^{\lambda-1}$.

Certaines équations $h(x) = a$ auront plusieurs solutions.
Mais ici, c'est $h(x) = \ln(n)$ qui nous intéresse. Et $\ln(n)$ est positif.
Or, $h(x)$ est du signe de $\ln(x) - \lambda$.
Il faut donc chercher des solutions sur $]e^{\lambda}, +\infty[$, là où h est positive.
Et justement, sur cet intervalle, elle est croissante. Strictement.



x	$]0, e^{\lambda-1}]$	$]e^{\lambda-1}, e^{\lambda}]$	$]e^{\lambda-1}, +\infty[$
$h'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$ $\nearrow$
	pas de solution		une seule solution

$+\infty$
$\ln(n)$
0

En fait, pour rédiger, on citera • la continuité de h pour l'existence d'une solution
• la stricte croissance de h pour l'unicité de la solution.
Et pour que tout devienne clair, on étudie h de $[we^{\lambda},\ +\infty[$ dans $[0,\ +\infty[$ et on note alors h^{-1} sa réciproque.

On pose alors $r_n = h^{-1}(\ln(n))$.

IV∼1) Montrez que r_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, prouvez $r_n = o(\ln(n))$ et prouvez enfin $r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ quand n tend vers l'infini.

h est croissante, donc h^{-1} l'est aussi.
La suite $(h^{-1}(\ln(n)))$ l'est aussi.

De là à ce qu'elle diverge vers $+\infty$.

Mais comme elle est croissante, elle n'a que deux possibilités : converger ou tendre vers $+\infty$.

On va éliminer la possibilité (r_n) converge.
Si tel était le cas, elle tendrait vers un réel μ.
Mais alors $r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n$ convergerait vers $\mu.\ln(\mu) - \lambda.\mu$.
Dans le même temps, $r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n$ est égal à $\ln(n)$ et diverge vers $+\infty$.

Par élimination, (r_n) diverge vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

Partons de $r_n.(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(n)$ et divisons par $\ln(n)$: $\dfrac{r_n.(\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(n)} = 1$ et même $\dfrac{r_n}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln(r_n) - \lambda}$.
Comme $r_n$tend vers l'infini, $\ln(r_n)$ tend aussi vers l'infini, le quotient tend vers 0.
On a donc $\dfrac{r_n}{\ln(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. C'est la définition de $r_n = o(\ln(n))$.

On veut montrer que r_n est équivalent à $\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ passons par la définition : $\dfrac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ tend il vers 1. On calcule :

$$\frac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(r_n) - \lambda} = \frac{\ln(r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n)}{\ln(r_n) - \lambda}$$

Oh il fallait y penser : remettre la définition de $r_n$dans elle même en remplaçant un $\ln(n)$ par $r_n.(\ln(r_n) - \lambda)$. On a maintenant

$$\frac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(r_n) + \ln(.\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(r_n) - \lambda} = \frac{1 + \dfrac{\ln(\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(r_n)}}{1 - \dfrac{\lambda}{\ln(r_n)}}$$

Au dénominateur, $\dfrac{\lambda}{\ln(r_n)}$ tend vers 0 car $r_n$tend vers l'infini.
Au numérateur, en posant $u_n = \ln(r_n)$ on a $\dfrac{\ln(u_n - \lambda)}{u_n}$.Par croissances comparées, ceci tend vers 0.
Numérateur et dénominateur tendent vers 1.
Le quotient tend vers 1. C'est ce que l'on voulait !

Je dois reconnaître qu'il faut avoir fait plusieurs raisonnements de ce genre pour en mener un spontanément tout seul.

V∼0) Si E est un de partie de $\mathbb{N}^*$, on pose $E_n = E \cap [1,\ n]$ et $d_n(E) = \dfrac{Card(E_n)}{n}$. Si cette suite $d_n(E)$ converge, on dit que E a une densité *(et cette densité sera la limite de cette suite $(d_n(E))$)*. Prouvez que toute partie finie a une densité *(valeur de la densité ?)*. a est un entier naturel donné, montrez que l'ensemble des multiples de a a une densité *(valeur ?)*. L'ensemble $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ des carrés parfaits a-t-il une densité *(si oui, quelle valeur ?)*.

Soit F une partie finie de cardinal p.
Le cardinal de $F \cap [1,\ n]$ est donc entre 0 et p.

Et dès que n a dépassé le dernier élément de F, on a $Card(F \cap [1,\ n]) = p$.

On divise par n : $d_n(F)$ est entre 0 et $\frac{p}{n}$.
On fait tendre n vers l'infini.
Par encadrement, $d_n(F)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Toute partie finie a pour densité 0.

On prend l'ensemble des multiples de a *(par exemple, pour $a = 1$ c'est $\mathbb{N}$ et pour $a = 2$ c'est l'ensemble des nombres pairs)*.
Pour n donné, on se demande : combien de multiples de a entre 1 et n.
Ce sont des nombres de la forme $k.a$ avec $1 \leqslant k.a \leqslant n$.
Il y a en a un pour chaque k et k peut prendre des valeurs entières entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{n}{a}$.
Bref, il y a $\left[\frac{k}{a}\right]$ *(on refuse 0)*.
On a donc $d_n(a.\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}.\left[\frac{n}{a}\right]$.

Vers quoi tend ce réel quand n tend vers l'infini.

On a envie de le faire à la physicienne et de virer les parties entières.
Il reste juste $\frac{1}{a}$ (réel ne dépendant plus de n).

Et c'est la bonne réponse. Mais il faut un argument de matheuse.
On encadre la partie entière : $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$ *(on part de x et on descend jusqu'à trouver un entier, donc on descend au plus de 1)*.

On applique en $x = \frac{n}{a}$ puis on multiplie par n :

$$\frac{1}{n}.\Big(\frac{n}{a} - 1\Big) \leqslant \frac{1}{n}.\left[\frac{n}{a}\right] = d_n(A) \leqslant \frac{1}{n}.\frac{n}{a} = a$$

Par encadrement, $d_n(a.\mathbb{N})$ converge vers $\frac{1}{a}$ quand n tend vers l'infini.

On s'en serait douté, en moyenne un nombre sur a est un multiplie de a.

Les carrés parfaits sont trop peu nombreux et se raréfient avec n. On va leur trouver une densité nulle.
On se donne n et on compte le nombre de k^2 entre 1 et n.
La condition donne $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$.
On interprète : il y a $[\sqrt{n}]$ carrés parfaits entre 1 et n.

On a donc $d_n(C) = \frac{[\sqrt{n}]}{n}$. On sent que ceci va tendre vers 0 quand n va tendre vers l'infini.
Il suffit comme toujours dans ces cas d'encadrer : $0 \leqslant d_n(C) = \frac{[\sqrt{n}]}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n}$.

L'ensemble des carrés a une densité nulle.

V∼1) Montrez que si deux parties disjointes A et B ont une densité, alors A^c et $A \cup B$ ont une densité et donnez leur valeur.

Si A est une partie, alors par définition même, on a $Card(A \cap [1,\ n]) + Card(\overline{A} \cap [1,\ n]) = Card([1,\ n])$.
On passe aux cardinaux, et on divise par n : $d_n(A) + d_n(\overline{A})1$ et même $d_n(\overline{A}) = 1 - d_n(A)$.
Le second membre a une limite, donc le premier aussi.

Le complémentaire de A a une densité, et c'est1 moins la densité de A.

Le cours donne la formule $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$.
Pour des ensembles $A \cap [1,\ n]$ et $B \cap [1,\ n]$, disjoints *(car A et B le sont)*, on a

$$Card((A \cup B) \cap [1,\ n]) = Card((A \cap [1,\ n]) \cup (B \cap [1,\ n])) = Card(A \cap [1,\ n]) + Card(B \cap [1,\ n]) - 0$$

On divise par n, on fait tendre vers l'infini.
Le membre de droite a une limite *(somme des densités)*, le membre de gauche en a une aussi.

La densité de $A \cup B$ existe, et est la somme des densités *(si A et B sont disjoints en tout cas)*.

On a toutes les presque propriétés voulues pour parler d'une probabilité sur $\mathbb{N}$.
La densité de $\mathbb{N}$ vaut 1 (cas $a = 1$), la mesure des densités est additive pour un nombre fini d'ensembles.
Mais elle est perdue avec les ensembles infinis.
Chaque singleton a une densité nulle (ensemble fini). La réunion (infinie) de tous les singletons donne $\mathbb{N}$ de masse 1 tandis que la somme des densités donne 0.

VI∼0) Montrez pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $2.\binom{2.m+1}{m} \leqslant 2^{2.m+1}$.

On peut se lancer dans la preuve de $2.\binom{2.m+1}{m} \leqslant 2^{2.m+1}$ par récurrence sur n.

Je suis presque sûr que vous saurez le faire. Et j'ai même vu un corrigé qui le faisait.

Mais c'est bien plus simple. Regardons le membre de droite. C'est la célèbre somme de tous les binomiaux sur une ligne.

$$2^{2.m+1} = (1+1)^{2.m+1} = \sum_{k=0}^{2.m+1} \binom{2.m+1}{k}$$

On isole les deux termes du milieu *(égaux par symétrie de la ligne)*. Et les autres sont positifs.

$$2.\binom{2.m+1}{m} = \sum_{k=m}^{m+1} \binom{2.m+1}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2.m+1} \binom{2.m+1}{k} = (1+1)^{2.m+1} = 2^{2.m+1}$$

VI∼1) Montrez que l'entier $\Big(\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p\Big)$ divise $\binom{2.r+1}{r}$ *(P est l'ensemble des nombres premiers)*.

Regardons à présent $\binom{2.r+1}{r}$ c'est à dire $\frac{(2.r+1)!}{r!.(r+1)!}$.
Non, pas sous cette forme ! On n'est plus en Terminable.
On se souvient d'où vient de nombre : $\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}$ avec k termes en haut comme en bas.

$$\binom{2.r+1}{r} = \frac{(2.r+1).(2.r).(2.r-1)\dots(r+2)}{1.2.3\dots r} = \frac{\textit{les entiers de } r+2 \textit{ a } 2.r+1}{\textit{les entiers de } 1 \textit{ a } r}$$

D'autre part, on a $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$. C'est le produit des entiers premiers de $r+2$ à $2.r+1$. Si on n'y voit pas une ressemblance avec le binomial.

Chacun des nombres premiers p de ce produit est présent une fois au numérateur.
Et jamais au dénominateur.
Chacun des entiers p de $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ est présent dans le quotient.

Plus proprement, on écrit $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise $\prod_{r+1<k\leqslant 2.r+1} k$.

$\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise donc $\binom{2.r+1}{r}.r!$.

Mais $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ est premier avec $r!$ *(aucun facteur premier en commun)*.

Par lemme de Gauss, $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise donc $\binom{2.r+1}{r}$.

Pour comprendre, parce que c'est joli et classique en arithmétique :
• 11.13.17.19 *est un diviseur de* 11.12.13.14.15.16.17.18.19.20
• 11.13.17.19 *n'a aucun facteur caché dans* 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10
• 11.13.17.19 *divise donc* $\frac{11.12.13.14.15.16.17.18.19.20}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ *(c'est à dire* $\binom{20}{10}$*)*

VI∼2) Montrez par récurrence forte sur n supérieur ou égal à 2 : $\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ *(on distinguera suivant que $n+1$ est ou non un nombre premier, de la forme $2.r+1$ et on coupera alors $\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}$ en $\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}$ et $\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}$)*. Déduisez : $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

Allons y pour l'initialisation de $\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ avec n égal à 2 : $\prod_{\substack{p\leqslant 2\\ p\in P}} p = 2$ et $4^2 = 16$

On se donne n quelconque et on suppose $\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$.

On veut alors majorer $\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p$.

Il y a un facteur de plus dans ce produit. Et encore.
Si $n+1$ est composé *(non premier)*, alors $\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p$. On majore par 4^n et donc par 4^{n+1} à plus forte raison.

Si $n+1$ est premier, alors $\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = (n+1).\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p$ et on voit mal comment utiliser l'hypothèse de récurrence : $\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = (n+1).\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant (n+1).4^n$ et ce n'est pas 4^{n+1}.

L'idée va être de dire que n est impair *(il est premier, et 2 a déjà été traité)*.
On l'écrit $2.r+1$ et coupe le produit $\prod_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p = \prod_{\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}} p. \prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$.

Par hypothèse de récurrence forte : $\prod_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}. \prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$.

Ensuite, on sait que le produit $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise $\binom{2.r+1}{r}$, donc il est majoré par $\binom{2.r+1}{r}$.

Par hypothèse de récurrence forte : $\prod_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}. \prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\binom{2.r+1}{r}$.

Mais la majoration par formule du binôme a donné $\binom{2.r+1}{r} \leqslant 2^{2.r}$.

$$\prod_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p = \prod_{\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}} p. \prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}. \prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\binom{2.r+1}{r} \leqslant 4^{r+1}.2^{2.r} = 4^{2.r+1} = 4^{n+1}$$

Une démonstration diantrement astucieuse, due sauf erreur à Pavel Erdös.

On passe ensuite au logarithme pour un demi point : $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

VII∼0) $(0a_n)$ et (ε_n) sont deux suites réelles. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Montrez $\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ pour tout n.

La formule $\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ est la transformation d'Abel. Elle figure dans le cours de seconde année, et dans les exercices de Sup.
Et c'est une intégration par parties, si on écrit $a_n = A_n - A_{n-1}$ on peut écrire abusivement $a = A'$.

On doit alors prouver $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A'_k.\varepsilon_k = -\sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon'_k + \varepsilon_n.A_n$

Mais allons y classiquement, en partant du membre de gauche, avec la convention $A_0 = 0$ qui permet d'écrire $a_k = A_k - A_{k-1}$ dans tous les cas.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1}).\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}.\varepsilon_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = A_n.\varepsilon_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1} = A_n.\varepsilon_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

VIII∼0) Pour tout entier naturel n et tout nombre premier p, on note $v_p(n)$ la « valuation $p-$adique de n, c'est à dire l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 !
2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	18
3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	8
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2

On note pour tout entier naturel k non nul α_k (respectivement β_k) le nombre d'entiers d de N_n tels que p^k divise d (respectivement tels que $v_p(d) = k$). Montrez : $\alpha_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. La II-1 est un piège, Sucri n'est jamais né en février ! Exprimez les β_k à l'aide de α_i et vice versa.

Combien d'entiers entre 1 et n sont divisibles par p^k ? Tous les nombres de la forme $p^k.q$ avec $1 \leqslant p^k.q \leqslant n$.

On a juste sur q la condition $\dfrac{1}{p^k} \leqslant q \leqslant \dfrac{n}{p^k}$ *(et q est entier)*.

Mais combien d'entiers entre 0 *(non inclus)* et $\dfrac{n}{p^k}$? Exactement $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ justement !

Pour α et β il suffit de bien lire la définition.
La relation $v_p(n) = k$ signifie que p^k divise n mais pas p^{k+1}.
La relation p^k divise n signifie $v_p(n) \geqslant k$ *(on peut avoir $n = p^k.q$ avec encore des facteurs p dans l'entier naturel q)*.

On a donc $\boxed{\alpha_k = \sum_{k\leqslant i} \beta_i \text{ et } \beta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}}$

Dans la formule $\alpha_k = \sum_{k\leqslant i} \beta_i$, l'entier naturel i va de k à l'infini, mais en fait, les β_i sont nuls dès que i est trop grand.
Il ne s'agit donc ni de série ni de famille sommable mais juste de somme.

VIII∼1) Justifiez : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k.\beta_k$. Déduisez : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

$n!$ est le produit de tous les entiers i de 1 à n.
On imagine que chaque entier est écrit comme produit de facteurs premiers.
Comme les exposants s'additionnent quand on effectue des produits, on a $v_p(a.b) = v_p(a) + v_p(b)$ pour tout couple d'entiers, et en généralisant :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i)$$

Dans cette somme, on réunit les $v_p(i)$ en fonction de leur valeur *(groupement de termes dans une somme ici finie)*.
Ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 1, ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 2, ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 3 et ainsi de suite.
Comme on ne sait as à quel moment on s'arrête, on va regrouper « jusqu'à l'infini », même si à partir d'un certain k, $v_p(i)$ n'atteindra jamais k.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_p(i)=k}} v_p(i)\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_p(i)=k}} k\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k.k$$

Ça devait très bien sa raconter avec juste des mots si on tournait bien ses phrases.

On repart de la formule précédente, mais on remplace β_k par $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ et on décale les indices *(ce sont des sommes nulles à partir d'un certain rang, on peut ré-indexer, regrouper...)*.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k.k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k+1}.k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k.(k-1)$$

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k.k + \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$$

Il ne reste qu'à remplacer les α_k par leur formule en partie entière et on a $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

Toutes les sommes s'arrêtaient à un certain rang, mais ce rang est trop lourd à écrire à l'aide de n.
Sinon, on avait déjà croisé cette formule quand il s'était agi de savoir « quel est l'exposant de 2 et de 5 dans 2022!, et par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 2022!.

VIII∼2) Déduisez : $\frac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p.(p-1)}$.

On va encadrer simplement : $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$ *(on commence à la connaître celle là, et sinon, on passe son chemin)*.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = n.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{n}{p-1}$$

On a calculé la somme de la série géométrique de raison $\frac{1}{p}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{p^k} = \lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{K+1}}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p-1}$$

De l'autre côté il n'est pas pertinent d'écrire $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{p^k} - 1\right)$. On a une somme (infinie ?) de -1.

Non, il suffit de regarder un terme : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.
Toutes les parties entières sont positives. On a donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \geqslant \left[\frac{n}{p}\right] \geqslant \frac{n}{p} - 1$$

Pour voir l'exposant de p dans $n!$, on se contente de dire « combien de termes de $1.2.3\dots n$ sont des multiples de p ? »

Ensuite, je donne combien de points à qui sait passer de $\frac{n}{p-1}$ à $\frac{n}{p} + \frac{n}{p.(p-1)}$? Il suffit de partir du membre de droite.
Ou même, de partir d'une décomposition en éléments simples où on fait passer un terme de l'autre côté.

Finis les préliminaires, on passe au problème.

IX∼0) Montrez pour tout n : $\ln(n!) = \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Tout entier naturel se décompose en produit de facteurs premiers, avec justement comme exposant les valuations :

$$N = \prod_{p\in P} p^{v_p(N)}$$

avec la grande majorité des exposants égaux à 0.
On peut appliquer ceci à $N = n!$ et on exactement $\ln(n!) = \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Déduisez l'encadrement $\dfrac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$.

On a encadré en préliminaires $v_p(n)$ pour tout p *(majorant* $\dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p.(m-1)}$*)*. On multiplie par $\ln(p)$, on divise par n et on somme :

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p.(p-1)}$$

Mais la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p.(p-1)}$ se majore par $\displaystyle\sum_{2\leqslant k} \frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ en prenant tous les entiers et pas juste les entiers premiers.
C'est ce majorant qui s'appelle K *(question préliminaire où je vous disais justement « ne venez pas me demander qui est K ensuite)*.

De l'autre côté, c'est encore plus direct en utilisant $v_p(n) \geqslant \dfrac{n}{p} - 1$:

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \left(\frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(p)}{n}\right) = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{n}.\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} 1$$

et justement, la question avec des binomiaux nous a donné $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \left(\frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(p)}{n}\right) = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{n}.n.\ln(4)$$

On fait passer de l'autre côté dans chaque inégalité et on a ce qui est demandé

$$\frac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

IX∼1) Déduisez $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$.

Mais on a prouvé au tout début que la suite $(\ln(n!) - n.\ln(n))$ est un $O(n)$.
Ou si vous préférez : $\dfrac{\ln(n!)}{n} - \ln(n)$ est bornée.
Comme déjà ci dessus $\dfrac{\ln(n!)}{n} - \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p}$ est bornée, on déduit que $\ln(n) - \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p}$ est bornée.

Ceci s'écrit $\ln(n) - \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} = 0(1)$.

X∼0) On définit l'application χ *(fonction indicatrice de P)* : $\chi(k) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & k \quad premier \\ 0 & sinon & \end{array}\right|$.
On pose $a_k = \chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ et $A_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$. Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$.

Il faut assimiler la fonction χ puis la fonction a puis la série A. Mais la formule

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \frac{A_k}{\ln(n)}$$

n'est autre que la transformation d'Abel établie en préliminaire :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$$

avec $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ et $A_1 = 0$. On a en effet

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(k).\ln(k+1)} = \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}$$

X∼1) Montrez : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \dfrac{1}{k.\ln(k)} + O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$.

Ensuite, on constate qu'on a montré juste avant $A_n = \ln(n) + 0(1)$ puisque $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ dans laquelle on ne garde finalement que les k premiers.

On écrit ensuite $\ln(k+1) = \ln(k) + \ln\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big) = \ln(k) + O(1)$ puisque le terme $\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)$ tend vers 0 *(il est donc borné)*.

Chaque $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k$ s'écrit donc

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^2} + O\Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^3}\Big)\Big).\Big(\ln(k) + 0(1)\Big) = \frac{1}{k.\ln(k)} + O\Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$$

X∼2) Déduisez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$.

On somme et la somme des $O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$ donne une série convergente. Donc un $O(1)$ *(ce que vous appelez un « nombre fini » dans votre jargon)*.

En tant que série convergente, elle reste bornée. On a donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} + 0(1)$$

Enfin on utilise à nouveau ce qu'on a montré en début de devoir par comparaison série intégrale : $\sum\limits_{2}^{n} \dfrac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \ln(\ln(n)) + 0(1)$$

On reporte dans la transformée d'Abel

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \frac{A_k}{\ln(n)} = \ln(\ln(n)) + 0(1) + \frac{A_k}{\ln(n)}$$

Mais $\dfrac{A_n}{\ln(n)}$ est bornée.

Il reste $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + 0(1)$.

> *A titre indicatif, il y a* 9592 *nombres premiers entre* 2 *et* 10^5, *et la somme de leurs inverses vaut* 2.7052.
> *Et* $\ln(\ln(10^5)) = 2,4434$.
> *La série des inverses des nombres premiers diverge quand même.*

XI∼0) Pour tout entier naturel n, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts qui divisent n.
Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne $\omega(n)$.

On doit juste compter parmi les entiers de 2 à n lesquels sont premiers et divisent n.
Pour ce qui est de diviser n, le test est $n\%d == 0$.
Pour ce qui est de savoir si un entier est premier, on va imaginer plusieurs choses :

Vous disposez d'une fonction efficace teste si un entier est premier.

```
def omega(n) : #int -> int
....c = 0
....for d in range(2, n+1) :
........if n%d == 0 and EstPremier(d) :
............c += 1
....return(c)
```

On crée soi même une fonction qui teste la primilaité (pas forcément la plus efficace)

```
def EstPremier(p) : #int -> boolean
....for k in range(2, p) :
........if p%k == 0 :
............return(False)
....return(False)
```

On dispose d'une liste triée des entiers premiers, a priori « illimitée ».

```
def omega(n) :
....c, i = 0, 0
....while Premier[i] =< n :
........if n%Premier[i] == 0 :
............c += 1
........i += 1
....return(c)
```

On fabrique cette liste des nombres premiers

```
Premier = [2]
p = 3
while len(Premier) < 500 :
....EstPremier = True
....for d in Premier :
........if p%d == 0 :
............EstPremier = False
....if EstPremier :
........Premier.append(p)
....p += 2
```

❏ ❏

Un bisou de Sucri à qui en fait une version récursive.

XI∼1) L'une de ces données est erronée : laquelle ?

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

L'erreur dans

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

viendrait de qui ?

Ceux qui ont juste 1 sont des nombres premiers. Pourquoi pas.

2020 aurait juste trois facteurs ? On lui connaît déjà le 2 et le 5 : $\dfrac{2020}{2.2.4} = 101$ qui est premier. Trois facteurs premiers présents, c'est bon.

2025 est multiple de 5 et de 9 *(final en 25, et somme des chiffres)*. on divise : $\dfrac{2025}{9.25} = 9$.
Finalement, 2025 n'a que deux facteurs premiers : 3 et 5.
C'est bien lui le fautif.

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1
	$2^2.5^1.101^1$	$43^1.47^1$	$2^1.3^1.337^1$	$7^1.17^2$	$2^3.11^1.23^1$	$3^4.5^2$	$2^1.1013^1$	2027^1	$2^2.3^1.13^2$	2029^1

XI∼2) Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = \prod_{k=1}^{r}(p_k)^{\alpha_k}$ avec les p_k distincts et les α_k strictement positifs. Montrez : $\omega(n) = r \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

Dans la formule $n = \prod_{k=1}^{r}(p_k)^{\alpha_k}$, les $p_k$sont distincts, et ont un « vrai » exposant strictement positif. ce sont donc les facteurs premiers de n, chacun compté une seule fois.
Le nombre de termes est bien $\omega(n)$.
Chacun des p_k,est supérieur ou égal à 2, et chaque exposant est supérieur ou égal à 1 :

$$n = \prod_{k=1}^{r}(p_k)^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r}(2)^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r}(2)^1 = 2^r$$

On passe au logarithme *(croissant)* : $\ln(n) \geqslant r.\ln(2)$. On fait passer $\ln(2)$ de l'autre côté.

XI∼3) Montrez : $n \geqslant 2.\prod_{k=1}^{r-1}(2.k+1) \geqslant 2^r.(r-1)!$ et prouvez l'inégalité $\ln(n) \geqslant (r-1).\ln(r-1)-(r-1)$. Déduisez la domination $\omega(n) = O\Big(\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\Big)$.

Sans perte de généralité, on suppose les p_k triés par ordre croissant.
p_1 vaut donc au moins 2.
Les suivants sont impairs, de la forme $2.j+1$. Et le j^{ieme} nombre premier impair est au moins le j^{ieme} nombre impair : $p_j \geqslant (2.j+1)$.
On peut donc minorer

$$n = (p_1)^{\alpha_1}.\prod_{k=1}^{r-1}(p_{k+1})^{\alpha_{k+1}} \geqslant (2)^{\alpha_1}.\prod_{k=1}^{r-1}(2.k+1)^{\alpha_{k+1}} \geqslant 2^1.\prod_{k=1}^{r-1}(2.k+1)^1 \geqslant 2.\prod_{k=1}^{r-1}(2.k) = 2^r.\prod_{k=1}^{r-1}k = 2^r.(r-1)!$$

XI∼4) N est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et on met sur range(1, N+1) *(noté E_N)* la probabilité uniforme *(« chacun des N entiers est pris avec la probabilité $\dfrac{1}{N}$ »)*. On définit alors la variable aléatoire *(fonction de E_N dans $\mathbb{R}$)* $X_{N,r}(d) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & si \quad r\ divise\ d \\ 0 & sinon \end{array}\right.$ et $X_N = \sum_{p\in E_n\cap P} X_{N,p}$. Justifiez $\forall n \in E_N,\ X_N(n) = \omega(n)$.

XI∼5) Montrez : $E(X_{N,r}) = \dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{r}\Big]$ *(voyez l'espérance comme une valeur moyenne de la fonction, c'est tout)*.

XI∼6) Prouvez $E((X_N)^2) = E(X_N) + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N \\ (p,q)\in P^2,\ p\neq q}} \dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{p.q}\Big]$. Déduisez : $Var(X_N) = O(\ln(\ln(N)))$.

XI∼7) Montrez : $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N}.Card\Big\{n \in E_N \mid |\omega(n) - \ln(\ln(N))| \geqslant (\ln(\ln(N))^{2/3}\Big\} = 0$.

Interprétation avec $N = 10^{99}$: le plus souvent, un entier à cent chiffres maximum aura entre 3 et 8 diviseurs premiers distincts.

Rappel : $a_n = o(b_n)$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
$a_n \sim b_n$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini *(et donc $a_n - b_n = o(a_n)$)*.
$a_n = O(b_n)$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ est borné quand n décrit $\mathbb{N}$.

Théorème — La fonction π qui à un réel x associe $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est équivalente lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient $\dfrac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans *(selon ses propres affirmations ultérieures)* et par Adrien-Marie Legendre *(ébauche en l'An VI du calendrier républicain, soit 1797-1798, conjecture précise en 1808)*.

Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1851 que si x est assez grand, $\pi(x)$ est compris entre $0,92129.\frac{x}{\ln(x)}$ et $1,10556.\frac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe, utilisant en particulier la fonction ζ de Riemann.

Source : concours BECEAS.
Concours pour cinq écoles d'actuariat et statistiques (ISFA Lyon, Dauphine, Strasbourg, ISUP-Paris Sorbonne (là où deux ex-MPSI2 sont partis l'an dernier)).

L'actuariat, c'est la branche dans laquelle les ingénieurs continuent à faire des maths de haut niveau *(plutôtdes statistiques, c'est vrai, mais pas comme au lycée)*.

Un actuaire est un professionnel spécialiste de l'application du calcul des probabilités et de la statistique aux questions d'assurances, de prévention, de comptabilité et analyse financière associée, et de prévoyance sociale. À ce titre, il analyse l'impact financier du risque et estime les flux futurs qui y sont associés. L'actuaire utilise des techniques issues principalement de la théorie des probabilités et de la statistique, pour décrire et modéliser de façon prédictive certains événements futurs tels que, par exemple, la durée de la vie humaine, la fréquence des sinistres ou l'ampleur des pertes pécuniaires associées.

Salaire de 35.000 euros à l'embauche, jusqu'à 150.000 ensuite pour les actuaires passés par Poytechnique.

◃27▹

Montrez $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.
Montrez $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{N}=\mathbb{Z}$.
Montrez que tous les entiers à partir de 42 sont dans $7.\mathbb{N}+8.\mathbb{N}$.

Les inclusions $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$ et $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ sont des évidences. On combien des entiers, on obtenir des entiers. Ce sont les autres sens qui importent. Mais comme 7 et 8 sont premiers entre eux, une identité de Bézout donne $(-1).7+8=1$ puis $(-n).7+n.8=n$ pour tout entier n.

Maintenant, il faut prouver que tout relatif n s'écrit $a.7+b.8$ avec a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}$.
n positif s'écrit $(-n).7+n.8$, c'est gagné.
Tout entier négatif n avec p positif s'écrit $(-n).7+n.8$ mais le coefficient de 8 est négatif.
Mais on a aussi $n=(-n+8.n).7+(n-7.n).8$ et cette fois $n-7.n$ est positif.
Il suffit de jouer sur le fait qu'il y a à chaque fois plusieurs décompositions de Bézout possibles.

---

42 s'écrit par exemple $6\times 7+0\times 8$. Il est combinaison de 6 et 7 à coefficients tous deux positifs.

On en décompose quelques uns en plus pour avancer :

$42=6\times 7+0\times 8$
$43=5\times 7+1\times 8$
$44=4\times 7+2\times 8$
$45=3\times 7+3\times 8$
$46=2\times 7+4\times 8$
$47=1\times 7+5\times 8$
$48=0\times 7+6\times 8$

Et 49 ? On ne peut pas l'écrire $(-1).7+7.8$.
Mais on l'écrit 7.7. Et on recommence.

On peut montrer que 41 n'est pas de la forme indiquée. On teste $0.7+q.8$, $1.7+q.8$, $2.7+q.8$, $3.7+q.8$, $4.7+q.8$ et $5.7+q.8$ avec les premières valeurs de q (ou avec un argument de parité).

Comment montrer qu'ensuite si n plus grand que 48 s'écrit $a.7+b.8$ avec a et b positif, alors $n+1$ s'écrit $a'.7+b'.8$ avec a et b positifs ?
On se donne n, on suppose qu'on peut l'écrire $a.7+b.8$. On a alors

$$n+1=(a.7+b.8)+((-1).7+8)=(a-1).7+b.8$$

Si a valait au moins 1, la nouvelle écrite est bien à coefficients dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, et c'est gagné.
Mais si a était nul ? On avait alors $n=0.7+b.8$ avec b valant au moins 6.
On écrit alors $n+1=7.7+(b-6).8$. Et les coefficients sont positif.
Et la récurrence valide les deux cas d'hérédité.

◃28▹

Les suites a et b sont définies par $a_0=5$ et $b_0=2$ et $a_{n+1}=2.a_n+3.b_n$ et enfin $b_{n+1}=5.a_n+8.b_n$ pour tout n. Montrez que $a_n$et b_n sont toujours entiers. Trouvez α_0 et β_0 vérifiant det $\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}=1$. Trouvez M *(carrée de taille* 2*)* vérifiant $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez en regardant le déterminant de $M^n.\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ que a_n et $b_n$sont toujours premiers entre eux.

Par récurrence, on démontre la propriété P_n pour tout n : ($a_n\in\mathbb{Z}$ et $b_n\in\mathbb{Z}$).
C'est initialisé, et si pour un n quelconque donné, a_n et b_n sont entiers, alors $2.a_n+3.b_n$ et $5.a_n+8.b_n$ le sont aussi.

La formule $\begin{vmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{vmatrix}=1$ est une identité de Bézout : $\beta_0.a_0-\alpha_0.b_0=1$.
On propose donc $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$ ou même $\begin{vmatrix} 5 & 27 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=1$.

On a sans effort non plus $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Par récurrence sur n, on obtient $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Ou en parlant de suite géométrique de raison à gauche M.

C'est vrai au rang 0 et au rang 1. n donné.

Si on a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M. \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M.(M^n. \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}) = M^{n+1}. \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

par associativité.

La matrice $M^n. \begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ est par récurrence sur n une matrice à coefficients entiers.

Par récurrence sur n aussi, elle est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & \alpha_n \\ b_n & \beta_n \end{pmatrix}$ avec α_n et β_n entiers, vérifiant d'ailleurs $\alpha_{n+1} = 2.\alpha_n + 3.\beta_n$ et $\beta_{n+1} = 5.\alpha_n + 8.\beta_n$.

Passons au déterminant $\det(\begin{pmatrix} a_n & \alpha_n \\ b_n & \beta_n \end{pmatrix}) = \det(M^n).\det(\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}) = 1^n.1$ en ayant itéré la formule $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

On obtient $\beta_n.a_n - \alpha_n.b_n = 1$. C'est une identité de Bézout qui nous dit que a_n et b_n sont premiers entre eux.

◃ 29 ▹ On donne $\dfrac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2+1}}}}}$ et $\dfrac{u}{v} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$. Calculez $\dfrac{a}{b} - \dfrac{u}{v}$.

On peut calculer $\dfrac{a}{b}$ explicitement, en partant du bas :

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\frac{10}{3}}}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \frac{3}{10}}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{53}{10}}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{10}{53}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{116}{53}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \frac{53}{116}} = 3 + \cfrac{1}{\frac{401}{116}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{116}{401} = \frac{1319}{401}$$

On fait de même avec $\dfrac{c}{d} = \dfrac{921}{280}$.

On effectue la différence : $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{1319.280 - 921.401}{401.280} = \dfrac{-1}{401.280}$.

Oui, bon, et alors ?

Alors, c'est un exercice sur les fractions continuées, sur l'agorithme d'Euclide et les meilleures approximations d'irrationnels par des rationnels.

Mais ça ne se voit pas. Et ça donne un exercice de pur calcul...

◃30▹ ♡ $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour solution $(1,\ 1,\ 1)$. De combien augmente x pour le système $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 5 \end{array}\right.$?

C'est vrai : $\left\{\begin{array}{rrrcl} 1 & +1 & +1 & = & 3 \\ 1 & +2.1 & -1 & = & 2 \\ 2.1 & -5.1 & +3.1 & = & 0 \end{array}\right.$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On écrit même $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le nouveau système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On compare : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (en factorisant $A^{-1}.U - A^{-1}.V = A^{-1}.(U-V)$).

La différence qui nous intéresse $x-1$ est donc le premier terme du produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

C'est donc 5 fois le coefficient de ligne 1 colonne 3 de la matrice inverse.

On sait le calculer : $\dfrac{1}{\det(M)}.cofacteur$.

Finalement $\boxed{x \text{ a augmenté de } 5.\dfrac{3}{13}}$

◃31▹ ♡ Montrez que dans $range(83)$ il y a 82 entiers premiers avec 83 (qui est premier).
Montrez que dans $range(83^2)$ il y a 82×83 entiers premiers avec 83^2 (qui n'est plus premier, lui !).
Montrez que dans $range(1411)$ il y a 1312 entiers premiers avec 1411 (qui contient un facteur 83).

Comme 83 est premier, tous les entiers de 1 à 82 sont premiers avec 83.
Et il y en a bien 82.

Question : 0 est il premier avec 83 ? Qui sont les diviseurs de 0 ? Tous les entiers (0 est un multiple de tout le monde). Qui est le plus grand diviseur commun de 0 et 83 ? Simplement 83 lui même.
Peut-on trouver une identité de Bézout entre 0 et 83 ? Une formule $u.0 + v.83 = 1$? Moi j'ai pas.[5]

Entre 1 et 83^2 il y a 83^2 nombres.
Qui parmi eux a un diviseur commun avec 83 autre que 1 (sachant que le seul diviseur propres de 83^2 sont 83).
La réponse est donc : les multiples de 83 : 83×1, 83×2 jusqu'à 83×83.
Il y en a donc 83.

Bilan : $83^2 - 83$ nombres sont premiers avec 83^2.

On divise : $1411 = 83 \times 17$. Cette fois, on doit éliminer les entiers qui ont un diviseur égal à 17 ou (inclusif) un diviseur égal à 83.
On enlève 17×1, 17×2 jusqu'à 17×83 (il y en a 83).
On enlève 83×1, 83×2 jusqu'à 83×16 (et pas 83×17 car on l'a déjà enlevé).
On a donc $83 \times 17 - 83 - (17-1)$ nombres.
On reformule en $83.17 - 83.1 - 17.1 + 1$ ce qui fait 82.17.

---

5. au final, il n'y a que 1 qui soit premier avec 0

Cet exercice travaille autour de l'indicateur d'Euler : $\varphi(n)$ compte combien d'entiers de range(n) sont premiers avec n.
On a des formules explicites dès lors qu'on connaît la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

◁32▷ a et b sont deux entiers naturels. On suppose : $\exists(u,\ v) \in \mathbb{N}^2,\ a.u + b.v = 1$. Montrez que a divise b ou b divise a.
A et B sont deux entiers relatifs de somme non nulle. Montrez : $\exists(u,\ v) \in \mathbb{R}^2,\ A.u + B.v = 1$.

C'est quoi ces trucs avec le théorème de Bézout amoché car mal quantifié.

Si a et b sont des entiers naturels, et si u et v le sont aussi, $a.u + b.v$ est aussi un entier naturel. Mais comment cette somme $a.u + b.v$ peut elle valoir 1 ? Uniquement avec un des termes qui vaut 1 et l'autre qui vaut 0.
Par symétrie des rôles, on va dire $a.u = 1$ et $b.v = 0$.
C'est donc que a vaut 1 (et u aussi).
Dès lors, a divise b. (au fait, pour b, on a $v = 0$).

La seconde affirmation est fausse si on autorise $a = b = 0$. Mais j'ai imposé « de somme non nulle », comme ça on évite en particulier le cas $a = b = 0$.

Mais sinon, si au moins un des deux est non nul, il suffit de prendre $a.\dfrac{1}{a} + b.0$ si c'est a qui est non nul...

◁33▷ Si on vous donne une idéntité de Bézout entre a et b ($a.u + b.v = 1$), trouvez une identité de Bézout entre a^2 et b^2.

On élève au cube

$$1 = (a.u + b.v)^3 = (a + 3.b).a^2 + (3.a + b).b^2$$

◁34▷ On définit $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & \exists(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a + b.\sqrt{2} \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?
Montrez que f est périodique de période 1.
Montrez que f n'est pas périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

On se donne x. S'il est de la forme $a + b.\sqrt{2}$, alors $a + 1$ s'écrit $(a + 1) + b.\sqrt{2}$.
On calcule les deux images : $f(a + b.\sqrt{2}) = 1$ et $f(a + 1 + b.\sqrt{2}) = 1$.

S'il n'est pas de la forme $a + b.\sqrt{2}$, il en est de même de $a + 1$ (raisonnement par l'absurde).

Pourrait elle être périodique de période $\dfrac{1}{2}$?

On aurait alors $1 = f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ceci signifierait que $\dfrac{1}{2}$ s'écrirait $a + b.\sqrt{2}$ avec a et b entiers.
Et ça c'est impossible.

Mais pourquoi ? Après tout, en choisissant bien a et b, peut être. Comme avec Bézout.
Mais on aurait alors $1 = 2.a + 2.b.\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} = \dfrac{1 - 2.a}{2.b}$. Et $\sqrt{2}$ serait rationnel.
Ou alors b serait nul, mais il y a une contradiction de parité.

◁35▷ ♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q + b.p = \sqrt{n}$.
Concluez.

La fraction $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ étant supposée irréductible, on peut écrire une identité de Bézout entre p et q :
$\exists(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a.p + b.q = 1$
On la multiplie par $\sqrt{n}$ à droite, par $\dfrac{p}{q}$ à gauche, ce qui ne change rien : $a.p.\dfrac{p}{q} + b.p = \sqrt{n}$.

Mais si on a posé $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, on a immédiatement $n = \dfrac{p^2}{q^2}$ puis $n.q = \dfrac{p^2}{q}$.
Notre formule devient donc $a.n.q + b.p = \sqrt{n}$.

Le réel $\sqrt{n}$ est donc une combinaison d'entiers, c'est un entier ($(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau).

On a donc prouvé $\forall n,\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z})$

C'est aussi $\forall n,\ \overline{(n \in \mathbb{Q})}\ ou\ \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$.
On reconnaît la formulation « soit entier, soit irrationnel ».

◃36▹ On rappelle : $U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$. Montrez : $U_p \cap U_q = U_{p \wedge q}$.

Dans la pratique : $U_n = \{e^{i.k.\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{i.k.\pi/n} \mid k \in range(n)\}$.

On va raisonner par double inclusion, pour p et q donnés.
Pour se simplifier la vie, on note d leur $p.g.c.d.$ et on écrit que p et q sont deux multiples de d : $p = d.p'$ et $q = d.q'$ avec p' et q' entiers.
Et comme on sait ce qu'il va se passer, on écrit une identité de Bézout : $d = a.p + b.q$.

Première inclusion. On prend z dans $U_p \cap U_q$. Il vérifie à la fois $z^p = 1$ et $z^q = 1$.
On écrit alors $z^d = z^{a.p+b.q} = (z^p)^a.(z^q)^b = 1^a.1^b = 1$. On reconnaît : $z \in U_d$.

Seconde inclusion. On prend z dans U_d. Il vérifie $z^d = 1$.
Mais on a alors $z^p = z^{d.p'} = (z^d)^{p'} = 1^{p'} = 1$ et aussi $z^q = z^{d.q'} = (z^d)^{q'} = 1^{q'} = 1$.
z est dans $U_p \cap U_q$.

◃37▹ Vrai ou faux : si $((u_n)^{15})$ et $((u_n)^{77})$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^{15})$ ou $((u_n)^{77})$ diverge alors (u_n) diverge ?

Si $((u_n)^{15})$ converge (vers α) alors $((u_n)^{75})$ converge (vers α^5).

Par quotient, $\left(\dfrac{(u_n)^{77}}{(u_n)^{75}}\right)$ converge (vers un truc en $\dfrac{\beta}{\alpha^5}$ mais qu'importe).

Maintenant que $((u_n)^2)$ converge, on a aussi la convergence de $((u_n)^{14})$ (produit ou même puissance).
Et derechef par quotient, $\left(\dfrac{(u_n)^{15}}{(u_n)^{14}}\right)$ converge.

Les élèves ayant compris l'idée passeront tout de suite par $u = (u^{15})^{36}.(u^{77})^{(-7)}$ en brûlant un cierge à Bézout.[6]

La seconde question est équivalente à $(u_n)\ converge \Rightarrow ((u_n)^{15}\ et\ ((u_n)^{77})\ convergent)$.
Elle est donc vraie.

◃38▹ ♡ Dérivez $x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ x & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

On trouve $x \longmapsto \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ & & \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ puisque la fonction de x est affine.

◃39▹ Il parait que le critère de divisibilité par 7 est de la forme
si on part de $\overline{abc\ def\ ghi}$ par exemple, on calcule $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$
si on part de $\overline{ab\ cde\ fgh\ ijk}$ par exemple, on calcule $\overline{ab} - \overline{cde} + \overline{fgh} - \overline{ijk}$
et on regarde si le nombre est multiple de 7.
Cette démonstration est elle aussi valable pour la divisibilité par 13 ?

Par exemple, prenons 345 234 764. *Ce nombre est un multiple de* 7 *(c'est* 7×49319252*).*
On calcule alors $345 - 234 + 764$, *c'est* 875.
Et là, il est facile de poser la division : $875 = 125$.
On confirme.

6. Bézout dans tous les traits

Mais un exemple favorable ne prouve rien.

Il s'agit de voir si $\overline{abc\ def\ ghi}$ est congru à 0 modulo 7 ou pas.
Mais qui est ce nombre ? C'est $\overline{abc}.10^6 + \overline{def}.10^3 + \overline{ghi}$.
Or, $10^3 = 142 \times 7 + 6 \equiv -1$ [7]
$10^6 = (10^3)^2 \equiv (-1)^2$ [7]
et ainsi de suite si on veut...
On a donc $\overline{abc\ def\ ghi} = \overline{abc}.10^6 + \overline{def}.10^3 + \overline{ghi} \equiv \overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$ [7].
L'entier $\overline{abc\ def\ ghi}$ est congru à 0 modulo 7 si et seulement si $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$ est congru à 0 modulo 7.

La propriété est donc prouvée.

On a aussi $10^3 = 76 \times 13 + 12 \equiv -1$ [13]
Le critère est donc le même.

Rappelons le critère de divisibilité par 9 :
un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

La clef : modulo 9, un entier est congru à la somme de ses chiffres.
En effet, si un entier s'écrit avec des chiffres de a_0 à a_p, c'est qu'il vaut $\sum_k 10^k.a_k$.
Mais comme 10 est congru à 1 modulo 9, il en est de même de tous les 10^k.

$$N = \sum_k 10^k.a_k \equiv \sum_k 1.a_k \ [9]$$

De même, le critère de divisibilité par 11 fait intervenir la somme alternée de ses chiffres

$$N = \sum_k 10^k.a_k \equiv \sum_k (-1)^k.a_k \ [11]$$

Et pour savoir si un entier est multiple de 17, il suffit de calculer la somme de ses chiffres en base 18. Non, je plaisante.

◃40▹ Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Montrez qu'il y a exactement 6 nombres sur divisibles ayant justement 70 diviseurs.
Montrez que tout nombre sur-divisible impair est congru à 1 modulo 8.
Montrez qu'un nombre sur-divisible ne peut pas valoir 6 modulo 8.

Rappel arithmétique sur le nombre de diviseurs.
Combien $2^3.3.5^3.7$ a-t-il de diviseurs ?
Ce sont des nombres qui ne s'écrivent qu'avec les facteurs 2, 3, m5 et 7. Et encore avec des exposants limités.
Ce sont les $2^a.3^b.5^c.7^d$ avec $0 \leqslant a \leqslant 3$, $0 \leqslant b \leqslant 1$, $0 \leqslant c \leqslant 3$ et $0 \leqslant d \leqslant 1$ (exemple : $2^2.3^1.5^0.7^0$ divise $2^3.3.5^3.7$).
On a quatre choix pour a, (de 0 à 3 tous deux inclus), deux pour b, quatre pour c et deux pour d.
On multiplie et on a le nombre de diviseurs.

On généralise : $2^\alpha.3^\beta \dots p^\mu$ a $(1+\alpha).(1+\beta)\dots(1+\mu)$ diviseurs.

Bonus : Ces ma**c**aques font malo**tr**us. Il bou**cl**e l'**é**d**i**to. Il n'est pas **u**tile au p**os**te. Ote ta lam**p**e que je puisse **gu**etter. Elle aime les b**oi**tes de Hongr**ie**. S**able** min**us**. La pinède sent la b**r**aise. Oh le **s**ot **greff**ier.

Les nombres sur-divisibles ayant 70 diviseurs sont forcément des multiples de 70, par définition de la sur-divisibilité.
Comme $70 = 2 \times 5 \times 7$, on les écrit $2^a.5^b.7^c.autres$ avec a, b et c valant au moins 1.
Le nombre de diviseurs est alors $(1+a).(1+b).(1+c).\prod_i (1+\alpha_i)$.
Mais il faut qu'il vaille 70. Et 70 n'est que le produit de trois termes plus grands que 1.
Il ne reste plus tant de possibilités :
- $\prod_i (1+\alpha_i)$ vaut 1
- et donc *autres* vaut 1
- $1+a$, $1+b$ et $1 = c$ se répartissent les trois facteurs 2, 5 et 7

On peut donc dresser la liste

$1+a$	$1+b$	$1+c$	$2^a.5^b.7^c$	vérification
2	5	7	$2^1.5^4.7^6$	147 061 250
2	7	5	$2^1.5^6.7^4$	
5	2	7	$2^4.5^1.7^6$	
5	7	2	$2^4.5^6.7^1$	
7	2	5	$2^7.5^1.7^4$	
7	5	2	$2^6.5^4.7^1$	280 000

Le programme Python doit être optimisé si on les cherche sans avoir fait cette étude.

Bonus :
Admirez les **p**arts des **d**îneurs. Treize à **t**able et pleins de **f**ric. Elle bou**d**e le **ph**are. Ce **m**alus **f**ou mérite-t-il une **t**elle pu**b** ? Ils aiment les c**r**ûs coûteux. Ils **d**înent avec des ra**p**aces. **Cu**vées de **prix**. C'est un expert en **g**affes avec **p**rojet. Ils aiment les **m**enus **c**achés. Des **s**inistres **m**astiquent.

Prenons un nombre pair sur-divisible. Pourrait il être congru à 6 modulo 8 ?
Dans ce cas, il s'écrirait $2.(4.k+3)$.
L'entier $4.k+3$ est impair.
On rappelle qu'on a prouvé n impair est sur-divisible si et seulement si $2.n$ est sur-divisible.
On utilise le bon sens : $4.k+3$ est sur divisible.
Mais $4.k+3$ est soit de la forme $4.(2.p)+3$ ou $4.(2.p+1)+3$.
Et on a alors un nombre impair, sur divisible, congru à 3 ou à 7 modulo 8.
Et on vient de montrer que c'est interdit.

Bonus :
Ce gant est assou**PL**i. Il est **PR**émuni face aux **D**outes. Sans **P**èze, il manque de **B**ouffe. Les vieux **M**asques évitent la **FL**otte. Pas de **B**ouffe, pas de **T**abac. On manque de **CH**aises pour attirer les cor**B**eaux. Ne faites pas cra**M**er votre **CH**ambre. Ces **SP**oliés sont pleins de **G**ermes. J'ai **CHI**né un gros **CALI**bre. Les **B**ars s'en**D**ettente.

◁ 41 ▷ On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 : notés de p_1 à p_N. On définit alors $4.p_1 \dots p_N - 1$ *(noté Q)*. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4. Montrez que ce diviseur ne peut pas être l'un des p_i.
Déduisez : il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Il se peut que Q soit premier, auquel cas, Q est lui même undiviseur premier de Q.
Mais de toutes façons, tout entier (à part 1) admet au moins un diviseur premier.

C'est une question idiote, sans aucune difficulté. Mais elle est là pour définir des objets pour la suite.

Pour montrer qu'ua moins un diviseur premier de Q est congru à 3 modulo 4, on raisonne par l'absurde.
On supposoe qu'aucun diviseur premier q de Q n''est congru à 3 modulo 4.
C'est donc qu'ils sont tous congrus à 1, 2 ou 4.
Mais un nombre premier congru à 4, je n'ai pas ça en magasin.
De même, il n'y a qu'un nombre premier qui soit congru à 2 modulo 4, c'est 2. Or, Q est impair. 2 n'est donc pas un de ses diviseurs.
On a donc éliminé, il ne reste que « les diviseurs premiers de Q sont tous congrus à 1 modulo 4 ».

Mais alors, leur produit est aussi congru à 1 modulo 4.

> *Par récurrence immédiate, le produit de deux entiers congrus à 1 modulo 4 est congru à 1 modulo 4.*
> *Et maintenant qu'on parle de congruences, il suffit de dire qu'il y a compatibilité avec la multiplication.*
> *S'il vous plait, contentez vous de dire $q = 1[4]$ et $r = 1[4] \Rightarrow (q \times r) = 1[4]$ », c'est directe.*
> *Et ne m'alourdissez pas votre copie avec des $q = 4.k+1$ et $r = 4.i+1$ et autres indigestions de ce type. On n'est plus au collège !*

Or, Q est congru à -1 modulo 4 et non à 1.

Ainsi, par élimination, au moins un des facteurs premiers de Q est congru à 3 modulo 4. Nommons le q.

Se pourrait il que q soit déjà l'un des p_i ?
On aurait alors q divise Q et q divise $4 \times p_1 \times p_2 \dots \times p_N$ (puisque c'est l'un d'eux).
q divise donc la différence des deux. Et cette différence vaut 1. Ce qui n'est pas possible pour un nombre premier q.

On a donc trouvé un nouveau nombre premier congru à 3 modulo 4.

Ceci contredit qu'il n'y en ait eu que N.

C'est donc que l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est infini.

Un exemple pour saisir.
On a trouvé les nombres premiers suivants, tous congrus à 3 *modulo* 4 *: 3, 7, 23 et 67, et on dit que c'est tout (faut il variment être con, et n'avoir pas vu* 11 *ou* 31*, mais tant pis).*
On construit alors $Q = 4.3.7.23.67 - 1 = 129443$.
On le décompose en produit de facteurs premiers : il est premier.
Et congru à 3 *modulo* 4 *(vous avez vu* 129443*).*

Celui qui serait parti de 3, 7, 11 *et* 23 *trouvait* $Q = 21251$. *Et cette fois, la factorisation donnait* $21251 = 79 \times 269$. *Et c'est* 79 *qui est congru à* 3 *modulo* 4.

On notera qu'on recommence alors avec $Q = 4.3.7.11.23.79 - 1$ *qui va nous donner* 193×8699. *Devinez lequel est congru à* 3 *modulo* 4.

◁ 42 ▷ Résolvez les deux systèmes suivants : $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 2 & [3] \\ x & \equiv & 1 & [7] \\ x & \equiv & 4 & [10] \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 1 & [3] \\ 2.x & \equiv & 1 & [7] \\ 3.x & \equiv & 1 & [10] \end{array}\right|$.

$\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 2 & [3] \\ x & \equiv & 1 & [7] \\ x & \equiv & 4 & [10] \end{array}\right|$ équivaut à $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 8 & [3] \\ x & \equiv & 8 & [7] \\ x & \equiv & 4 & [10] \end{array}\right|$ puis à $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 8 & [21] \\ x & \equiv & 4 & [10] \end{array}\right|$

puis $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 134 & [21] \\ x & \equiv & 134 & [10] \end{array}\right|$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\{134 + k.210 \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

On exploite des inverses : $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 1 & [3] \\ 2.x & \equiv & 1 & [7] \\ 3.x & \equiv & 1 & [10] \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 1 & [3] \\ 8.x & \equiv & 4 & [7] \\ 21.x & \equiv & 7 & [10] \end{array}\right|$

On simplifie en $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 1 & [3] \\ x & \equiv & 4 & [7] \\ x & \equiv & 7 & [10] \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 4 & [3] \\ x & \equiv & 4 & [7] \\ x & \equiv & 7 & [10] \end{array}\right|$ c'est à dire $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 4 & [21] \\ x & \equiv & 7 & [10] \end{array}\right|$.

On cherche dans la liste des « multiples de 21 plus 4 » qui est congru à 7 modulo 10 : $3 \times 21 + 4$.

On a donc la solution élémentaire 67. $\boxed{\{67 + k.210 \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

◁ 43 ▷ Appliquez l'algorithme d'Euclide et trouvez une identité de Bézout pour
les entiers 2022 et 143
les polynômes $X^4 + X^3 + 1$ et $X^3 - X + 1$.

Non pas avec des divisions euclidiennes entre entiers. Mais avec des divisions euclidiennes entre polynômes.

Exemple avec des entiers 2022 et 143 :

a	$=$	q	$\times b$	$+r$
2022	$=$	$14\times$	143	$+20$
143	$=$	$7\times$	20	$+3$
20	$=$	$6\times$	3	$+2$
3	$=$	$1\times$	2	$+1$
2	$=$	$2\times$	1	

et

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ (1 & 4 & 3) & & - & - & - \\ - & - & - & & 1 & 4 & \\ & 5 & 9 & 2 & & & \\ & (5 & 7 & 2) & & & \\ & - & - & - & & & \\ & & 2 & 0 & & & \end{array}$$

Avec des polynômes :

A	$=$	q	$\times B$	$+R$
$X^4 + X^3 + 1$	$=$	$(X+1)\times$	$(X^3 - X + 1)$	$+(X^2)$
$X^3 - X + 1$	$=$	$X\times$	X^2	$+(-X+1)$
X^2	$=$	$(-X-1)\times$	$(-X+1)$	$+1$
$(-X+1)$	$=$	$(-X+1)\times$	1	

On s'arrête au dernier reste non nul.
Les deux polynômes sont bien premiers entre eux.

Il n reste qu'à remonter :

1	$=$	X^2	$+$	$(X+1).(-X+1)$
1	$=$	X^2	$+$	$(X+1).\Big((X^3-X+1)-X.X^2\Big)$
1	$=$	$(-X^2-X+1).X^2$	$+$	$(X+1).(X^3-X+1)$
1	$=$	$(-X^2-X+1).\Big((X^4+X^3+1)-(X+1).(X^3-X+1)\Big)$	$+$	$(X+1).(X^3-X+1)$
1	$=$	$(-X^2-X+1).(X^4+X^3+1)$	$+$	$(X+1).(X^3+2.X^2+X)$

Et la dernière ligne est bien celle obtenue plus haut.

---

44 Montrez que pour résoudre $\left|\begin{array}{lll} n & = & \alpha \quad [7] \\ n & = & \beta \quad [12] \end{array}\right|$ il suffit de savoir résoudre $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 0 \quad [12] \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{lll} n & = & 0 \quad [7] \\ n & = & 1 \quad [12] \end{array}\right|$.

Trouvez l'inverse de 12 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 0 \quad [12] \end{array}\right|$.

Trouvez l'inverse de 7 dans $\mathbb{Z}_{12.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left|\begin{array}{lll} n & = & 0 \quad [7] \\ n & = & 1 \quad [12] \end{array}\right|$.

Montrez que pour résoudre $\left|\begin{array}{lll} n & = & \alpha \quad [7] \\ n & = & \beta \quad [15] \\ n & = & \gamma \quad [16] \end{array}\right|$ il suffit de savoir résoudre $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 0 \quad [15] \\ n & = & 0 \quad [16] \end{array}\right|$ et deux autres systèmes similaires.

Trouvez l'inverse de 15, de 16 et de 15.16 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 0 \quad [15] \\ n & = & 0 \quad [16] \end{array}\right|$.

Résolvez $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 2 \quad [15] \\ n & = & 4 \quad [16] \end{array}\right|$.

Si l'on a trouvé n_1 et n_2 vérifiant $\left|\begin{array}{lll} n_1 & = & 1 \quad [7] \\ n_1 & = & 0 \quad [12] \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{lll} n_2 & = & 0 \quad [7] \\ n_2 & = & 1 \quad [12] \end{array}\right|$ alors l'entier $p=\alpha.n_1+\beta.n_2$ vérifie

$$\left|\begin{array}{lll} p & = & 1.\alpha+0.\beta \quad [7] \\ p & = & 0.\alpha+1.\beta \quad [12] \end{array}\right|$$

et c'est une solution particulière cherchée.

Dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ l'inverse de 12 est 3 (car $3.12=36=35+1=1$)
on déduit $3.12=1$ *mod* 7 puis $\left|\begin{array}{lll} 36 & = & 1 \quad [7] \\ 36 & = & 0 \quad [12] \end{array}\right|$.
Dans $\mathbb{Z}_{12.\mathbb{Z}}$, l'inverse de 7 est -5 (c'est à dire 7)
on déduit $7.7=1[12]$ on a une solution particulière $\left|\begin{array}{lll} 49 & = & 0 \quad [7] \\ 49 & = & 1 \quad [12] \end{array}\right|$.

Résumé : on a une solution particulière de

$$\left|\begin{array}{lll} n & = & \alpha \quad [7] \\ n & = & \beta \quad [12] \end{array}\right| \ :\ 36.\alpha+49.\beta$$

Résolvons $\left|\begin{array}{lll} n & = & 1 \quad [7] \\ n & = & 0 \quad [15] \\ n & = & 0 \quad [16] \end{array}\right|$ en cherchant un nombre nul modulo 15 et 16 (multiple de 15.16) et égal à 1 modulo 7.

15 est son propre inverse modulo7.	L'inverse de 7 modulo 15 est 13.	L'inverse de 7 modulo 16 est 7.
L'inverse de 16 modulo 7 est 4.	L'inverse de 16 modulo 15 est 16.	L'inverse de 15 modulo 16 est 15.
L'inverse de 15.16 modulo 7 est 4.	L'inverse de 7.16 modulo 15 est 13.	L'inverse de 7.15 modulo 7 est 105.
$\begin{array}{lll} 4.(15.16) & = & 1 \quad [7] \\ 4.(15.46) & = & 0 \quad [15] \\ 4.(15.16) & = & 0 \quad [16] \end{array}$	$\begin{array}{lll} 13.(7.16) & = & 0 \quad [7] \\ 13.(7.16) & = & 1 \quad [15] \\ 13.(7.16) & = & 0 \quad [16] \end{array}$	$\begin{array}{lll} 105.(7.15) & = & 1 \quad [7] \\ 105.(7.15) & = & 0 \quad [15] \\ 105.(7.15) & = & 0 \quad [16] \end{array}$

Par combinaison une solution de $\left|\begin{array}{lll} n & = & \alpha \quad [7] \\ n & = & \beta \quad [15] \\ n & = & \gamma \quad [16] \end{array}\right|$ est

$$\alpha.(4.(15.16))+\beta.(13.(7.16))+\gamma.(105.(7.15))$$

Et on a toutes les solutions en ajoutant les solutions homogènes : $\left| \begin{array}{ccc} h & = & 0 \quad [7] \\ h & = & 0 \quad [15] \\ h & = & 0 \quad [16] \end{array} \right|$: $H = (7.15.16).\mathbb{Z}$.

◁45▷ Un nombre dernier est un nombre qui a beaucoup de diviseurs ; c'est à dire qui a plus de diviseurs que tous les entiers plus petits que lui. Écrivez un programme qui liste des quarante premiers entiers derniers *(et pas des quarante derniers nombres premiers)*.

On va avoir besoin d'une procédure qui compte le nombre de diviseurs d'un entier `n` :

```
def NbDiv(n) :
....Nb = 0
....for k in range(1, n+1) :
........if n%k == 0 :
............Nb += 1
....return Nb
```

Ensuite, on met en boucle avec un `NbMax` qui monte dès qu'on a un nouveau record, et une liste `L` qu'on agrandit peu à peu :

```
L = []
NbMax = 0
for n in range(1, beaucoup) :
....if NbDiv(n) > NbMax :
........L.append(n)
........NbMax = NbDiv(n)
print(L)
```

Reste la question du beaucoup. Combien pour avoir 40 nombres derniers ?
On va remplacer la boucle for par une boucle while :

```
L = []
NbMax = 0
n = 1
while len(L) < 40 :
....if NbDiv(n) > NbMax :
........L.append(n)
........NbMax = NbDiv(n)
....n += 1
print(L)
```

Et plus proprement, pour ne pas calculer deux fois la même quantité :

```
L = []
NbMax = 0
n = 1
while len(L) < 40 :
....NbDivn = NbDiv(n)
....if NbDivn > NbMax :
........L.append(n)
........NbMax = NbDivn
....n += 1
print(L)
```

Liste des vingt premiers avec leur nombre de diviseurs :

```
[1, 1], [2, 2], [4, 3], [6, 4], [12, 6], [24, 8], [36, 9], [48, 10], [60, 12],
[120, 16], [180, 18], [240, 20], [360, 24], [720, 30], [840, 32], [1260, 36],
[1680, 40], [2520, 48], [5040, 60], [7560, 64]]
```

Au fait, pourquoi est on sûr qu'on aura bien 40 nombres derniers ?
Simplement parce que tout record finit par être dépassé. Si il y avait un dernier nombre dernier, il s'appellerait G et aurait D diviseurs. mais alors le nombre 2^D aurait $D+1$ diviseurs. Fermez le ban, fin du raisonnement par l'absurde.

◁46▷ Sachant qu'il y a 168 nombres premiers entre 1 et 1000, lequel de ces quatre nombres est leur somme :

11 569	76 127	57 298	81 744

Déjà, la liste commence par 2, mais ensuite ils sont tous impairs.
Il y a donc modulo 2 un nombre pair et 167 impairs.
La somme vaut $0 \times 1 + 167 \times 1$ mdoulo 2. Nombre impair.

On en élimine deux :

11 569	76 127	57 298	81 744
		non	non

Le premier semble un peu petit, mais il doit y avoir un autre argument pour l'éliminer.

Ensuite, l'informaticien brutal vérifie.

```
def est-premier(n) : #int -> boolean
....for k in range(2, n) : #la liste des entiers de 1 à n-1
.......if n%k == 0 : #il y a un diviseur propre
...........return False #le nombre n'est pas premier
....return True #aucun diviseur propre, il est premier
```

Et maintenant, la procédure.

```
def les_premiers(N) :
....s, c = 0, 0 #somme et compteur
....for n in range(N+1) :#ne pas essayer 1, et aller jusqueà n inclus
.......if est_premier(n) : #le test précédent
...........c += 1 #compteur
...........s+= n #somme
....return s, c #la somme et le compteur
```

L'informaticien plus rusé optimise son test en créant au fur et à mesure une liste desnombres premiers.
Et pour tester si un nouveau nombre n est premier, il suffit de voir si il est divisible par un des nombres déjà croisés.

```
def les_premiers(N) : #int -> int, int, list of int
....prem = [ ] #liste des nombres premiers
....s, c = 0, 0 #somme et compteur
....for n in range(N+1) :#ne pas essayer 1, et aller jusqueà n inclus
.......test =
.......for p in prem :
...........test *= n%p #n est il divisible par au moins un des nombres premiers de la liste
.......if test != 0 :
...........prem.append(n) #oui, un nouveau nombre premier
...........c += 1 #compteur
...........s+= n #somme
....return s, c, prem #la somme, le compteur et la liste
```

On notera qu'avec `len(prem)` on peut se passer du compteur `c`.

◁ 47 ▷

Calculez $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}$ et $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$ à 10^{-7} près.

Qui sont $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$, $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$ et $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\dots}}}}}$?

Donnez le dévelmoppement en fraction continuée de $\sqrt{5}$.

Le premier vaut $\frac{355}{113}$ et vaut 3.1415929 à 10^{-7} près.

Le second vaut $\frac{333}{106}$ et donne 3.1415094 à 10^{-7} près.

Ca doit vous arppeler π. D'ailleurs, si j'avais coupé plus tôt, vous aviez $3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ qu'on vous a peut être donné dans les petits classes comme approximation de π.

Pour les fractions suivantes, sans chercher à justifier leur existence,on leur donne un nom et on trouve une relation vérifiée par le nombre.

$a = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$	$a = 1 + \frac{1}{a}$	et $a > 0$
	$a^2 - a - 1 = 0$	$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$b = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$	$b = 2 + \frac{1}{b}$	et $b > 0$
	$b^2 - 2.b - 1 = 0$	$b = 1+\sqrt{2}$
$c = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\dots}}}}}$	$c = 2 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{c}}$	
	$c^2 - 2.c - 2 = 0$ et $c+1 \neq 0$	$c = 1+\sqrt{3}$

Pour $\sqrt{5}$, on pose $x = \sqrt{5}$ et on cherche une mise en boucle similaire :

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5}-2) = 2 + \frac{5-4}{2+\sqrt{5}} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{(5-4)}{2+\sqrt{5}}}$$

Le nombre intéressant est donc $2+\sqrt{5}$ qui vérifie $x = 4 + \frac{1}{x}$ et se met en boucle ;

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\dots}}}}}$$

◃48▹ Un nombre second est un nombre produit de deux nombres premiers distincts. Écrivez un script qui pour `N` donné calcule combien entre `0` et `N` il y a de nombres seconds *(en supposant que vous avez un programme* `prem` *qui teste si un nombre est premier).*
L'ensemble des nombres seconds est il stable par addition ? Par multiplication ?

```
def EstPremier(n) :
....for k in range(2, n) :
........if n%k == 0 :
............return False
....return True
```

on suppose N déjà donné, on fait de l'info, pas du dialogue avec l'ordinateur

```
Prem = [] #liste des nombres premiers, vide pour l'instant
for k in range(2,N+1) : #on va chercher parmi les entiers avant N
....if EstPremier(k) :
........Prem.append(k) #on mémorise les entiers premiers
Second = [ ]
for k in range(len(Prem)) : #pour un produit de deux nombres premiers, il en faut déjà un
....for i in range(k) : #et un autre, qui sera plus petit que le premier
........Sec = Prem[k]*Prem[i] #on calcule leur produit
.........if Sec<N+1 : #mais on ne le garde que si il est plus petit que N
............Second.append(Sec)
```

D'autres scripts sont possibles.

```
def TestSecond(n) :
....for k in range(2,n) :
........if n%k == 0 : #déjà k est un diviseur de n
............if EstPremier(k) : #et il est premier
................if EstPremier(n//k) : #et l'autre facteur est premier
....................if n !=k*k : #et ce n'est pas deux fois le même facteur premier
........................return True #on a gagne, n est second
....return False #aucun k n'a convenu, n n'est pas second
```

On a crée un test, reste à l'utiliser.

```
Seconds = []
for n in range(N+1) :
....if TestSecond(n) :
........Seconds.append(n)
```

Aucune stabilité additive, ni multiplicative, par les deux contre-exemples que voici :
6 et 10 sont des nombres seconds.
Leur somme 16 ne l'est pas, de même que leur produit.

◃ 49 ▹ ♣ Montrez que $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ n'est pas un carré parfait.
Pouvez vous effacez un des termes du produit pour en faire un carré parfait.

On peut tenter de regrouper les termes deux à deux.
On peut regarder les facteurs premiers.
Par exemple, 97 est premier.
Et il est présent dans 97!, dans 98!, dans 99! et dans 100!. Il aura donc un exposant pair.
De même, 89 est un nombre premier, présent dans chaque factorielle de 89! à 100!.
Son exposant sera pair.
Ce n'est donc pas lui qui va empêcher 100! d'être un carré parfait.

Il ne faudra d'ailleurs pas enlever par exemple 90! dans le produit, sinon on perd un des facteurs 89 du produit et on a

$$\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 110\\ k\neq 90}}(k!) = 2^{\cdots}.3^{\cdots}\ldots 89^{11}.97^{4}$$

et ce n'est pas un carré parfait.
Et même

$$\prod_{0\leqslant k\leqslant 110}(k!) = 2^{\cdots}.3^{\cdots}\ldots 47^{\cdots}.53^{48}.59^{42}.61^{40}.67^{34}.71^{30}.73^{28}.79^{22}.83^{18}.89^{12}.97^{4}$$

et toute la fin est un carré parfait.

Un tableau nous permet de comprendre

2										
2	3									
2	3	4								
2	3	4	5							
2	3	4	5	6						
2	3	4	5	6	7					
2	3	4	5	6	7	8				
2	3	4	5	6	7	8	9			
2	3	4	5	6	7	8		47		
2	3	4	5	6	7	8		47	48	
2	3	4	5	6	7	8		47	48	49

Tous les facteurs premiers de 53 à la fin sont sur un nombre pair de lignes. Leur exposant est pair.

Plus subtil est l'exposant de 47.
On a 47 tout court dans 47!, 48!, 49! jusqu'à 100!. Pour l'instant 47^{54} (un peu comme pour les suivants).
Mais on a aussi un 47 en plus dans $94! = 1.2\ldots 46.47.48\ldots 93.94$ (eh oui : $94 = 2.47$).
Il en va de même de 95! jusquà 100!.

Bref, l'exposant de 47 est $(100-46)+(100-93)$.
Bref, on a 47^{73} et le nombre indiqué n'est pas un carré parfait.

Et si vous aimez

$$2^{4731}*3^{2328}*5^{1124}*7^{734}*11^{414}*13^{343}*17^{250}*19^{220}*23^{174}*29^{129}*31^{117}*37^{91}*41^{79}*43^{73}*47^{61}$$
$$*53^{48}*59^{42}*61^{40}*67^{34}*71^{30}*73^{28}*79^{22}*83^{18}*89^{12}*97^{4}$$

Solution Python, sans calculer comme une brute $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ qu'on irait ensuite décomposer en produit de facteure premiers.
On nous donne n. On va avancer d pas à pas et créer avec son aide la liste des nombres premiers P, et leurs exposants dans un dictionnaire des diviseurs D.
La structure de la réponse sera donc un dictionnaire où les clefs seront les nombres premiers et les champs leurs exposants.
Par exemple, pour $n=12$, la réponse est

$$\{2:56,\ 3:26,\ 5:11,\ 7:6,\ 11:2\}\ car\ \prod_{k=0}^{12}(k!)=2^{56}.3^{26}.5^{11}.7^{6}.11^{2}$$

1 !						
2 !		2^1				
3 !		2^1	3^1			
4 !		2^3	3^1			
5 !		2^3	3^1	5^1		
6 !		2^4	3^2	5^1		
7 !		2^4	3^2	5^1	7^1	
8 !		2^7	3^2	5^1	7^1	
9 !		2^7	3^4	5^1	7^1	
10 !		2^8	3^4	5^2	7^1	
11 !		2^8	3^4	5^2	7^1	11^1
12 !		2^{10}	3^5	5^2	7^1	11^1
produit		2^{56}	3^{26}	5^{11}	7^6	11^2

```
def decomp(n) : #int -> dict (int->int)
....P = [ ] #liste des nombres premiers
....D = { } #création du dictionnaire
....for d in range(2,n+1) : #chaque entier de 2 à n inclus
........est_premier = True #on le suppose premier a priori, puis on eliminera
........for div in P : #on vérifie quand même
............if d% div == 0 : #est il divisible par un nombre premier déjà croisé
................est_premier = False #il n'est donc pas premier
................break #inutile de tesre d'autres diviseurs
........if est_premier : #si finalement d est un nombre premier
............P.append(d) #on le met dans la liste
............D[d] = 0 #on créer un nouveau champ de clef d
........for k in range(2, d+1) : #on va regarder d !
............i = 2 #on va chercher les diviseurs de k plus petit que d
............while k != 1 : #tant qu'il lui reste des diviseurs à trouver
................while k%i == 0 : #dans d combien de fois i
....................k //= i #on simplifie
....................D[i] += 1 #on augmente l'exposant de i (assurément premier)
................i += 1 #on cherche un nouveau diviseur
....return D #c'est bon on a le dictionnaire
```

Si on efface 50!, le tour est joué.

$$2^{4684}*3^{2306}*5^{1112}*7^{726}*11^{410}*13^{340}*17^{248}*19^{218}*23^{172}*29^{128}*31^{116}*37^{90}*41^{78}*43^{72}*47^{60}$$
$$*53^{48}*59^{42}*61^{40}*67^{34}*71^{30}*73^{28}*79^{22}*83^{18}*89^{12}*97^{4}$$

Une idée qui se généralise ? $\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 40\\ k\neq 20}} (k!)$ est aussi un carré parfait.

Petit retour en arriré : pourqoi 50! ?

Pouvait on effacer 36! par exemple ?
On va regarder l'exposant de 37.

Quel était l'exposant de 37 dans $\prod_{k=0}^{100} (k)!$?
Dans 74! et les suivants, 37 est à un exposant pair (car on a $1.2.3\dots 36.37.38\dots 73.74.75\dots k$).
On a donc $\prod_{k=74}^{100}(k!) = \dots 37^{54}\dots$.

De 37! à 73!, 37 est à un exposant 1 et dans le produit $\prod_{k=0}^{73}(k!)$, 37 est finalement à la puissance 37.

Dans $\prod_{k=0}^{100}(k!)$, 37 est à une puissance impaire. Il faut éliminer en 37.
Il faut donc effacer un nombre impair de facteurs 37. La factorielle à effacer est plus grande que 37!.

Et même 47.

◃50▹

Pour tout n, on appelle "suite de Farey d'indice n" la liste triée des rationnels de $[0, 1]$ de la forme irréductible $\frac{p}{q}$ avec $q \leqslant n$ et on la note F_n.
Déterminez F_5.
Montrez : $Card(F_p) - Card(F_{p-1}) = p - 1$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p^2}) - Card(F_{p^2-1}) = p^2 - p$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p.q}) - Card(F_{p.q-1}) = p.q - p - q + 1$ (p et q sont deux nombres premiers distincts).
Montrez que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs de F_n alors on a $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+d} < \frac{c}{d}$ et $a.d - b.c = 1$.

Dans F_5 il y a 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ jusqu'à $\frac{4}{5}$, mais à trier dans l'ordre.
$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}; \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right]$
Pour passer à F_6, il faudra juste glisser $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$. Les rationnels comme $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$ sont déjà là.
Pour passer à F_7, il faut insérer six termes car 7 est premier : tous les $\frac{k}{7}$.

$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}; \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right]$
et des méthodes simples permettent de savoir qui introduite et où.

Quoi qu'il en soit, qu'est ce qui change quand on passe de F_{p-1} à F_p ?
Il faut ajouter des rationnels de la forme $\frac{a}{p}$.
Compris entre 0 et 1.
Et pas déjà pris (par exemple avec $\frac{a}{12}$, pas la peine de prendre $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$...).
Mais comme p est premier, a peut aller de 1 à $p - 1$. D'où $p - 1$ nouveaux éléments...

On veut passer de F_{p^2-1} à F_{p^2}.
Il ne manque que les $\frac{a}{p^2}$ avec a entre 1 et p^2, et premier avec p^2.
Comme p est premier, les seules fractions réductibles sont celles où le numérateur est un multiple de p. Il y a a p.
D'où $p^2 - p$.

Maintenant, qui sont les termes pour passer de $F_{p.q-1}$ à $F_{p.q}$?
Ce sont des $\frac{a}{p.q}$.
Avec a entre 1 et $p.q$.
Mais encore faut il ne pas prendre les fractions réductibles.
Mais les seules éléments à éviter sont les a qui sont multiples de p ou multiples de q.

Or, entre 1 et $p.q$ il y a q multiples de p
p multiples de q
et 1 nombre à la fois multiple de p et q qu'on a eu la mauvaise idée de décompter deux fois.
D'où $p.q - p - q + 1$ qu'on écrira aussi $(p-1).(q-1)$.
Exemple : les fractions en $\frac{a}{21}$.
Prenez tous les a de 1 à 21. Mais effacez 3, 6, 9, 12, 15, 18 et 21
7,14 et 21 ah non, déjà fait...
Qu'est ce qu'il reste, combien ça fait ?

Le passage de $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ à $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+d} < \frac{c}{d}$ est un classique des exercices du collège.
Il suffit de supposer $a.d - b.c < 0$ et de calculer $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{d+d}$ puis $\frac{a+c}{d+d} - \frac{a}{b}$. Le dénominateur est positif, et le numérateur est... $c.b - a.d$!

Exemples : entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ on va glisser $\frac{3}{7}$! Génial.
entre $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{1}$ on va glisser $\frac{5}{6}$ quand on arrivera à F_6
entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$ on va glisser $\frac{7}{9}$ quand on arrivera à F_9.
Le fait que $c.b - a.d$ soit égal à 1 repose sur « consécutifs ».
déjà, c'est un entier. Et il est non nul.
Mais s'il est trop grand alors il y a un autre élément de la suite de Farey par exemple entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$ il y avait $\frac{2}{4}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.
A approfondir.

◃51▹ ♣ Soit p un nombre premier. On note $(F_p,\ +,\ .)$ le corps des entiers de 0 à $p-1$ pour l'addition et la multiplication modulo p. Montrez que les polynômes $\prod_{k=1}^{p-1}(X-k)$ et $X^{p-1}-1$ ont le même degré, le même coefficient dominant et les mêmes racines. Déduisez qu'ils sont égaux. Que donnent les formules de Viète pour la somme et pour le produit des racines *(théorème de Wilson)* ? Que donnent elles pour la somme des inverses des racines. Montrez que le numérateur de $\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}$ (série harmonique) est un multiple de p *(théorème de Wolstenholme)*.

A faire.

◃52▹ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Calculez F_1à F_4. Vérifiez qu'ils sont premiers.
Montrez que F_5 est divisible par 641.
Montrez : $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_n - 2$.
Montrez que si un entier p divise F_n et F_N $(n < N)$ alors p divise 2.
Déduisez que $F_n$et F_N sont premiers entre eux.
Pour tout n, on note p_n le plus petit nombre premier qui divise F_n.
Montrez que la suite des (p_n) est une suite contenant une infinité de termes.
Écrivez tant qu'on y est un script Python qui détermine p_n pour n donné.

◃53▹ ♡ Pour tout entier naturel n, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers entre 0 et 1 qui sont ptemiers avec n $(p.g.c.d.(n,k=1)$.
Montrez : $\varphi(p) = p-1$ si p est premier.
Montrez : $\varphi(p^2) = p^2 - p$ et plus généralement $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ pour p premier et k entier.
p et q sont deux entiers premiers distincts. Justifiez : $\varphi(p.q) = p.q - p - q + 1$.
Démontrez : $\varphi(2022) = 2022.\left(1-\frac{1}{1}\right).\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{337}\right)$, $\varphi(2023) = 2023.\left(1-\frac{1}{7}\right).\left(1-\frac{1}{17}\right)$ et $\varphi(2024) = 2024.\left(1-\frac{1}{2}\right).\left(1-\frac{1}{11}\right).\left(1-\frac{1}{23}\right)$.

Pour p premier, tous les entiers de 1 à $p-1$ inclus sont premiers avec p (quel diviseur commun pourraient ils

avoir ?).
On en a $p-1$ (pour l'informaticien, le décompte se fait : c'est $range(1,\ p)$, et donc on a $p-1$ éléments).

Qui sont les entiers de 1 à p^2 qui sont premiers avec p ?
Qui sont les entiers de 1 à p^2 qui ne sont pas premiers avec p ?
Qui sont les entiers de 1 à p^2 qui ont un diviseur commun avec p ?
Qui sont les entiers de 1 à p^2 qui sont multiples de p ? Ce sont les $k.p$ avec $k \in range(1,\ p)$.
Il faut donc éliminer p entiers parmi les p^2. Il en reste p^2-p.

Pour p^k, on doit juste prendre p^k entiers et éliminer les multiples de p. Ce sont les $j.p$ avec j pouvant aller de 1 à p^{k-1}.
Il y en a p^{k-1}.
On a donc bien $p^k - p^{k-1}$ entiers premiers avec p.

Exemple : $p=3$ et $k=3$. Ecrivez les entiers de 1 à 27 et enlevez les 9 multiples de 3.

Cette fois, on a deux entiers premiers, comme 5 et 7.
On va de 1 à $p\times q$ (de 1 à 35).
Qui faut il élminer (on raosnne comme souvent en proababilités par événement complémentaire).
On doit élimner ceux qui ont un facteur commun avec $p\times q$.
C'est à dire ceux qui ont un facteur p et aussi ceux qui ont un facteur q.
On doit éliminer les multiples de p et les multiples de q.

> *Mais attention,* $Card(M_p \cup M_q) = Card(M_p) + Card(M_q) - Card(M_p \cap M_q)$.

Il y a q nombres de la forme $k\times p$ (k de 1 à q) et p nombres de la forme $j.q$ (j de 1 à p).
Mais il y en a un (et un seul) qu'on a décompté deux fois : $p\times q$.

On a donc $p\times q - p - q + 1$ nombres à compter.

Sur notre exemple :

il y a 35 nombre sde 1 à 35							
5	10	15	20	25	30	35	on en enlève 7
7	14	21	28	35			on en enlève 5
							il faut remettre 35

$2022 = 2\times 3\times 337$.
On a donc 2022 nombres.
Il faut enlever
- les multiples de 2 : il y en 1011
- les multiples de 3 : il y en a 674
- les mutiples de 337 : il y en a 6

Mais attention aux multiples de 6. On les a enlevés deux fois. Il faut les recompter.
Allez, proprement, on note M_2 les multiples de k.
On doit trouver le cardinal de $M_2 \cup M_3 \cup M_{337}$.
C'est $Card(M_2) + Card(M_3) + Card(M_{337}) - Card(M_2\cap M_3) - Card(M_2 \cap M_{337}) - Card(M_3\cap M_{337}) + Card(M_2 \cap M_3 \cap M_{337})$.

> *Cette formule vient de* $1_{A\cup B\cup C} = 1_{A\cup B\cup C} - 1_{A\cup B} - 1_{A\cup C} - 1_{B\cup C} + 1_{A\cap B\cap C}$
> *qui elle même vient par formule de de Morgan de* $(1-1_{A\cup B\cup C}) = (1-1_A).(1-1_B).(1-1_C)$.

Or, chaque M_k a pour cardinal $\dfrac{2022}{k}$.

Bref, on doit soustraire à 2022 la somme alternée $\dfrac{2022}{2}+\dfrac{2022}{3}+\dfrac{2022}{337}-\left(\dfrac{2022}{2.3}+\dfrac{2022}{2.337}+\dfrac{2022}{3.337}\right)+\dfrac{2022}{2.3.337}$.

On a donc une formule du type $N-\dfrac{N}{a}-\dfrac{N}{b}-\dfrac{N}{c}+\dfrac{N}{a.b}+\dfrac{N}{a.c}+\dfrac{N}{b.c}-\dfrac{N}{a.b.c}$.

C'est bien $\varphi(2022) = 2022.\left(1-\dfrac{1}{1}\right).\left(1-\dfrac{1}{3}\right).\left(1-\dfrac{1}{337}\right)$.

On fait visiblement de même avec $2023 = 7.17^2$.
On enlève les $\dfrac{2023}{7}$ multiple de 7 et les $\dfrac{223}{17}$ mutiples de 17, et on remet les $\dfrac{2023}{7\times 17}$ multiples de 7×17.

On peut même raconter la formule générale.
Elle tient compte des facteurs premiers de N, mais finalement pas de leur exposant.

◁ 54 ▷

Vous avez les entiers de 1 à 200 *(inclus)*. Vous en tirez cinq. Combien de tirages possibles ?
Combien de tirages contiennent exactement deux nombres pairs et exactement deux nombres premiers.
pour information, le 46^{ieme} nombre premier est 199.
Les raisonnements qui suivent sont faux,, pourquoi ?

$\bullet_1$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100}+\binom{200}{46}$.

$\bullet_2$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2}+\binom{46}{2}$.

$\bullet_3$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on multiplie $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2}\times\binom{46}{2}$.

$\bullet_4$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100}.\binom{100}{46}$.

$\bullet_5$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste, et il faut prendre un dernier élément dans ce qu'il reste encore : $\binom{100}{2}.\binom{46}{2}.\binom{54}{1}$ *(il y a bien* 54 *nombres impairs, non premiers)*.

Trouvez la vraie réponse.