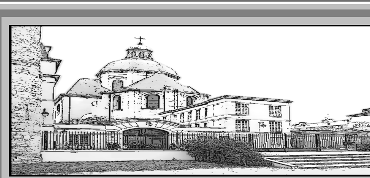
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 3 mars
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD19

◁ 0 ▷ Montrez que pour tout x réel, les deux suites $\left(\dfrac{[10^n.x]}{10^n}\right)$ et $\left(\dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ encadrent x et convergent vers x.
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$. Montrez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

On rappelle : $[t] \leqslant t \leqslant [t] + 1$ pour tout réel t (je sais, à droite c'est strict).
On reformule avec une inégalité de plus qui ne dit rien de plus : $t - 1 \leqslant [t] \leqslant t \leqslant [t] + 1$
En particulier : $10^n.x - 1 \leqslant [10^n.x] \leqslant 10^n.x$ puis $\dfrac{10^n.x-1}{10^n} \leqslant \dfrac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant \dfrac{10^n.x}{10^n}$.
On a donc $x - \dfrac{-1}{10^n} \leqslant \dfrac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant x$.
Les deux membres tendent vers x quand n tend vers l'infini.
Le théorème d'encadrement donne donc $\dfrac{[10^n.x]}{10^n}$converge vers x quand n tend vers $+\infty$.

Et pour ceux qui ne l'auraient pas saisi, $\dfrac{[10^n.x]}{10^n}$ est l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près.
Prenons en effet un réel x.
On le multiplie par 10^n : la virgule se déplace de n places vers la droite.
Prenons la partie entière : ce qu'il y avait derrière la virgule s'en va.
Divisions par 10^n : la virgule revient à sa position initiale.
Une fois compris cet enchaînement, vous n'avez même plus besoin d'apprendre la formule par cœur, vous l'avez comprise donc apprise.
Un exemple : $x = \pi = 3,141592653\ldots.$
$10^5.x = 314159,2653\ldots$
$[10^5.x] = 314159$
$\frac{[10^5.x]}{10^5} = 3,14159$

Pour $\left(\dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$, on a juste 10^{-n}de différence. La convergence vers x se fait aussi vite.

Encadrons : $[10^n.x] \leqslant 10^n.x \leqslant [10^n.x] + 1$ et divisions par 10^n (positif). On retrouve l'idée de l'approximation par défaut et de l'approximation par excès.

---

f vérifie $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$ *(donc juste pour les rationnels)*.

Elle pourrait vérifier $f(x) = 0$ pour tous les irrationnels x (mais serait difficile à tracer, j'en conviens).
Mais on ajoute que f est croissante.

On se donne un réel x quelconque *(rationnel ou non, on s'en moque)*.
On encadre : $\dfrac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}$.
On passe à f croissante : $f\left(\dfrac{[10^n.x]}{10^n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ *(le mot clef est ici « croissante »)*.
Mais les deux décimaux sont des rationnels particuliers.
On a donc $\dfrac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}$.
Maintenant, les deux côtés de l'encadrement convergent vers x. On peut donc passer à la limite *(les trois termes ont une limite, puisque celui du milieu ne dépend pas de n)*.
On a maintenant $x \leqslant f(x) \leqslant x$. Par antisymétrie : $f(x) = x$.

En fait, si on a $f(x) = x$ pour tout x d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors on a $f(x)x =$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

◁ 1 ▷ **Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dense dans $\mathbb{R}$.** On admet que π est irrationnel.
1- Montrez que $\{a + 2.b.\pi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ *(noté G)* est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Purement technique.

0 s'obtient en prenant $0 + 2.0.\pi$.

Remarque : *Notons que si π avait été le rationnel $\dfrac{22}{7}$ on aurait pû obtenir aussi 0 sous la forme $(-44) + 2.7.\pi$.*

La somme de deux éléments tels que $a + 2.b.\pi$ et $a' + 2.b'.\pi$ est $(a + a') + 2.(b + b').\pi$ avec $a + a'$ et $b + b'$ entiers.

L'opposé de $a = 2.b.\pi$ est $(-a) + 2.(-b).\pi$ avec $(-a)$ et $(-b)$ entiers.

En revanche, on se dit que G ne doit pas être stable par multiplication *(à cause des π^2 non remplaçables en $a + 2.b.\pi$)*. Ce ne sera pas un anneau.

2- On pose $H = G \cap]-\infty,\ 0[$. Montrez que c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On suppose que H a un plus grand élément, qu'on va noter α. Montrez par récurrence que pour tout n, $-n.\alpha$ est dans G.

H est formé des éléments strictement négatifs de G.

H est non vide, on y trouve $-1 + 2.0.\pi$.
Et H est majoré par 0.

Remarque : *Dans H on trouve aussi $411557987 - 131002976.\pi$ qui vaut quelquechose comme $-0.00000002535671\ldots$*
dont le physicien dira que ça vaut 0.
Mais pas le mathématicien, sinon π serait rationnel !

Il y a plusieurs possibilités :
H se termine sur un élément non nul, comme $\mathbb{Z} \cap]-\infty,\ 0[$ qui se termine sur -1.
H se termine en intervalle ouvert, comme $]-\infty,\ -2[$ par exemple.
H se termine ouvert aussi, mais sur 0 comme $\mathbb{Q} \cap]-\infty,\ 0[$ qui monte aussi près qu'on veut de 0.

On va voir qu'on est dans le dernier cas.

On va commencer par éliminer *(par l'absurde)* le premier cas.

Remarque : *Pourtant, si on avait eu $\pi = \dfrac{22}{7}$, les éléments de G se seraient écrits $\dfrac{7.a + 44.b}{7}$ avec a et b entiers. Le plus grand élément de H aurait été $-\dfrac{1}{7}$ atteint par $\dfrac{(-25).7 + 2.4.22}{7}$.*

H aurait un plus grand élément *(le dernier élément de G strictement négatif)*.
En tant que plus grand élément, il est dans H donc dans G.
Son opposé est dans G *(sous-groupe)*.
Et 0 est dans G.
Par stabilité additive, $0 - \alpha - \alpha \ldots - \alpha$ est dans G.
Proprement, on fait une récurrence.

A ce stade, G contient tous les multiples négatifs de α (rappelons que α lui même est négatif). Par passage au symétrique, il contient tous les multiples de α.
On a donc $\alpha.\mathbb{Z} \subset G$.
On va montrer l'inclusion dans l'autre sens, et aboutir à une contradiction.

3- Montrez alors que $G \cap]0, -\alpha[$ est vide. Montrez par récurrence sur n que chaque $]-n.\alpha, -(n+1).\alpha[\cap G$ est vide. Déduisez que 1 et $2.\pi$ sont tous deux de la forme $p.\alpha$ et $q.\alpha$ pour p et q entiers convenables. Concluez que π est rationnel. (? !)

Par l'absurde, si il y avait un élément x de G dans $]0,\ -\alpha[$, alors par passage à l'opposé, $-x$ serait dans G.
Mais $-x$ serait strictement négatif. Il serait donc dans $G \cap]-\infty,\ 0[$ qu'on a noté H.
Mais $-x$ serait plus grand que le plus grand élément de H.
Ceci s'appelle une contradiction.

Entre 0 et $-\alpha$, aucun élément de G.

On peut recommencer entre $-\alpha$ et $-2.\alpha$.

Plus généralement, il n'y a aucun élément de G entre $-n.\alpha$ et $-(n+1).\alpha$.
Si il y avait un tel x dans $]-n.\alpha, -(n+1).\alpha[\cap G$, alors $x + (n+1).\alpha$ serait aussi dans G *(stabilité : x est dans G et tout multiple de α aussi)*.
Mais il serait dans $]-\alpha,\ 0[$ (parti de $-n.\alpha < x < -(n+1).\alpha$ et ajouter $(n+1).\alpha$).
Ce réel serait dans $G \cap]-\infty,\ 0[$ et serait plus grand que son plus grand élément. Contradiction.

Finalement, dans G il y a les multiples de α et rien qu'eux (double inclusion).

C'est cette égalité qui va nous conduire à une belle contradiction.
En effet, 1 est dans G *(écrire $1 = 1 + 2.0.\pi$)*.
Il est donc multiple de α *(de la forme $-p.\alpha$ avec p bien choisi dans $\mathbb{N}^*$)*.

$2.\pi$ est aussi dans G *($0 + 2.1.\pi$)*. On l'écrit donc $-q.\alpha$ pour un q bien choisi aussi (et non nul).

Entre $1 = -p.\alpha$ et $2.\pi = -q.\alpha$, on élimine α : $2.\pi = \dfrac{q}{p}$.
π serait rationnel. Impossible.

Bilan : | *H n'a pas de plus grand élément.*
H ne se termine pas comme $]-\infty,\ -1]$ inclus dans $\mathbb{R}^-$.

4- Déduisez que la borne supérieure de H n'est pas atteinte. Déduisez qu'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'éléments de G qui converge vers α. Que fait la suite $(a_n - a_{n+1})$? Est-elle dans G ?

En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée H a une borne supérieure, c'est à dire « le plus petit de ses majorants ».

Cette borne supérieure ne peut pas être dans H sinon, ce serait son plus grand élément, ce qui a été réfuté à la question précédente.

H se termine donc par une borne supérieure non atteinte, comme $]-\infty,\ -1[$ ou l'ensemble des 2^{-n} qui a pour borne supérieur 0.

Si la borne supérieure n'est pas atteinte il existe une suite d'éléments de l'ensemble qui tend vers celle ci.
C'est du cours.

Cours : | *Si l'ensemble H a une borne supérieure α non atteinte alors il existe une suite d'éléments de H qui converge en croissant vers α.*
Le réel $\alpha - 1$ est strictement plus petit que α. Ce n'est donc plus un majorant de H (α était le plus petit majorant).
Il existe donc un élément a_0 de H strictement plus grand que $\alpha - 1$.
Mais comme α est un majorant de H, on fusionne $\alpha - 1 < a_0 < \alpha$.

On recommence en coupant en deux en $\dfrac{a_0 + \alpha}{2}$ (strictement entre a_0 et α.
C'est un réel plus petit que α, donc ce n'est plus un majorant de α.
Il existe donc un élément de H entre $\dfrac{a_0 + \alpha}{2}$ et α.
On le note a_1. On a donc $a_0 < \dfrac{a_0 + \alpha}{2} < a_1 < \alpha$.

Supposons qu'on en est au rang n avec $a_n < \alpha$.
On considère le milieu $\dfrac{a_n + \alpha}{2}$.
Ce n'est plus un majorant de H, il existe donc un élément de H plus grand que lui (et plus petit que α).
On décide d'en appeler un a_{n+1}. Et il ne peut être égal à α puisque α n'est pas dans H.

Par construction, (a_n) est une suite d'éléments de$H$.
Elle est croissante : $a_n < \dfrac{a_n + \alpha}{2} < a_{n+1}$.
Elle converge vers α car à chaque étape on divise par 2 et garde un intervalle encore plus petit.
Pratiquement : $\alpha - \dfrac{1}{2^n} < a_{n+1} < \alpha$ et le théorème d'encadrement permet de conclure.

Mais alors, une astuce nous invite à regarder $(a_n - a_{n+1})$.
Chacune de ces différences d'éléments de H est dans G.
Mais par croissance, ces différences sont strictement négatives.

On a donc une suite d'éléments de H.
Mais elle converge vers $0 - 0$, c'est à dire 0.

On notera qu'il y a un risque étrange.
Pour n assez grand $a_n - a_{n+1}$ sera entre α et 0. Ce qui est refusé car il n'y a personne de H entre α et 0.

Mais ce n'est pas si étrange, α est en fait nul.
Et G se termine « contre 0 », comme $\mathbb{Q} \cap]-\infty,\ 0[$.
0 est sa borne supérieure non atteinte.

5- Déduisez que pour tout ε strictement positif il existe au moins un élément dans $]0,\ \varepsilon[\cap G$. Combien y en a-t-il en fait ?

Pour ε non nul *(strictement positif)*, il existera un $a_{n+1} - a_n$ pour n assez grand qui sera plus petit que ε *(puisque $a_{n+1} - a_n$tend vers 0)*.
Il y a donc au moins un élément de G entre 0 et ε.

Il y en a même une infinité.
En effet, ce qui a été fait pour ε peut être fait aussi pour $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$ et ainsi de suite.

Bilan : *A ce stade, on a tout un nuage d'élément de G autour de 0.*
Comme les rationnels.
Ou même les $\dfrac{1}{n+1}$.
Il va de soi que les $a_n + 2.b_n.\pi$proches de 0 doivent avoir a_n et b_n de signes opposés, très bien choisis, et très grands.

On va généraliser à tout $\mathbb{R}$.C'est partout que les éléments de G sont « en nuages ».

6- On se donne un intervalle $[a,\ b]$ non réduit à un point. Montrez qu'il existe un élément γ de G dans $]0,\ b-a[$.
Montrez alors que $\left[\dfrac{b}{\gamma}\right].\gamma$ est dans G et aussi dans $[a,\ b]$.

En donnant à $b-a$ strictement positif le rôle du εde la question précédente, on a un γ de G entre 0 et $b-a$.

Le réel $\dfrac{b}{\gamma}$ existe, et a une partie entière qui vérifie $\dfrac{b}{\gamma} - 1 < \left[\dfrac{b}{\gamma}\right] \leqslant \dfrac{b}{\gamma}$.

On multiplie par γ strictement positif : $b-(b-a) < b-\gamma = \dfrac{b}{\gamma}.\gamma - \gamma < \left[\dfrac{b}{\gamma}\right].\gamma \leqslant \dfrac{b}{\gamma}.\gamma = b$ *(on exploite $\gamma < b-a$ et on renverse avec un signe moins)*.

Comme γ est dans G *(stable par additions successives et par passage à l'opposé)*, tous ses multiples sont dans G.

On a inséré l'élément $\left[\dfrac{b}{\gamma}\right].\gamma$ de G entre a et b. Victoire.

7- Combien y a-t-il de points de G dans $[a,\ b]$?

En fait, une infinité.

Ce qui a été fait en insérant un x de G dans $]a,\ b[$ peut être refait avec $]a,\ x[$ et $]x,\ b[$.
On a alors trois éléments de G dans $]a,\ b[$.
On recommence avec chaque sous intervalle obtenu.

On a autant d'éléments de G qu'on veut entre a et b.
Et autant qu'on veut, c'est ce qu'on appelle l'infini.

Bilan : *G est dense dans $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ et $R - \mathbb{Q}$.*

On notera qu'en revanche, $\mathbb{Z}$ ne l'est pas,
ni $\{a + 2.b.\dfrac{22}{7} \mid (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$ qui se limite aux $\dfrac{p}{7}$ avec p décrivant $\mathbb{Z}$.

8- On se donne λ dans $]-1,\ 1[$. On se donne ε strictement positif. On pose $I = [Arcsin(\lambda-\varepsilon),\ Arcsin(\lambda+\varepsilon)]$. Montrez qu'il existe au moins un élément g de G dans I. Déduisez $|\sin(g) - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Déduisez qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n) - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Montrez qu'il existe aussi n' dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n') - \lambda| \leqslant \varepsilon/2$.

$\lambda - \varepsilon$ est plus petit que $\lambda + \varepsilon$, et $Arcsin$ est une fonction strictement croissante.
Les deux réels $Arcsin(\lambda-\varepsilon)$ et $Arcsin(\lambda-\varepsilon)$ sont bien distincts et classés dans cet ordre.

Attention : *L'énoncé devrait préciser une chose.*
Pour que ces deux arcsinus existent, il faut quand même que $\lambda-\varepsilon$ et $\lambda+\varepsilon$ soient entre -1 et 1.
Certes, λ est dans $]-1,\ 1[$, mais si ε est trop gros, la somme ou la différence peut sortir.
Il importe donc que ε soit assez petit pour garantir $\lambda-\varepsilon \geqslant -1$ et $\lambda+\varepsilon \leqslant 1$.
On imposera donc ε « petit » comme il dit le physicien ?
Mais petit comment ?
$\varepsilon \leqslant 1-\lambda$ et $\varepsilon \leqslant \lambda+1$ (quantités strictement positives, car λ ne vaut ni -1 ni 1.

D'après le lot de questions précédent, il y a une infinité d'éléments de G entre $Arcsin(\lambda-\varepsilon)$ et $Arcsin(\lambda+\varepsilon)$ *(aussi petit que soit cet intervalle)*.
On en note un $a+2.b.\pi$.
On écrit l'encadrement $Arcsin(\lambda-\varepsilon)\leqslant a+2.b.\pi\leqslant Arcsin(\lambda+\varepsilon)$.
On passe au sinus.
Mais est ce qu'on conserve les encadrements ?
Pas si le sinus n'est pas une application croissante.

Et justement, le sinus est une application dont le sens de variations change sans arrêt.
C'est dommage.

Mais coup de chance : $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant Arcsin(\lambda-\varepsilon)\leqslant a+2.b.\pi\leqslant Arcsin(\lambda+\varepsilon)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, par construction de la fonction Arcsinus.
Et là, entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ le sinus est croissant.
On peut donc déduire : $-1\leqslant\sin(Arcsin(\lambda-\varepsilon))\leqslant\sin(a+2.b.\pi)\leqslant\sin(Arcsin(\lambda+\varepsilon))\leqslant 1$.
C'est le sens qui se simplifie bien : $\sin(Arcsin(t))=t$ si t est une longueur entre -1 et 1.
On a donc : $-1\leqslant\lambda-\varepsilon\leqslant\sin(a+2.b.\pi)\leqslant\lambda+\varepsilon\leqslant 1$.

On soustrait : $-\varepsilon\leqslant\sin(a+2.b.\pi)-\lambda\leqslant\varepsilon$.

Un réel entre $-\varepsilon$ et ε, c'est un réel « plus petit que ε en valeur absolue ».
On a bien $|\sin(a+2.b.\pi)-\lambda|\leqslant\varepsilon$.

Mais il est temps de dire que le sinus est $2.\pi$-périodique, et que justement b est entier.
On a fini par arriver à $|\sin(a)-\lambda|\leqslant\varepsilon$.

Il existe un entier dont le sinus est proche de λ (à ε près).

Exemple : *Par exemple, je vise* $\lambda=\dfrac{1}{2}$.
Il n'existe aucun entier n vérifiant $\sin(n)=\dfrac{1}{2}$ *(il faudrait des irrationnels du type* $\dfrac{\pi}{6}+2.k.\pi$*).*
Mais on peut avoir $\sin(n)\simeq\dfrac{1}{2}$ *à* 10^{-3} *près* : $\sin(3783)\simeq 0.4990005359424875\ldots$
On peut avoir aussi $\sin(n)\simeq\dfrac{1}{2}$ *à* 10^{-6} *près* : $\sin(191068)\simeq 0.49999991516126\ldots$.
On peut avoir aussi $\sin(n)\simeq\dfrac{1}{2}$ *à* 10^{-8} *près* : $\sin(69496223)\simeq 0.4999999941200154\ldots$.
Et ainsi de suite.
Mais seule la théorie sur le sous-groupe G a garanti cette existence.

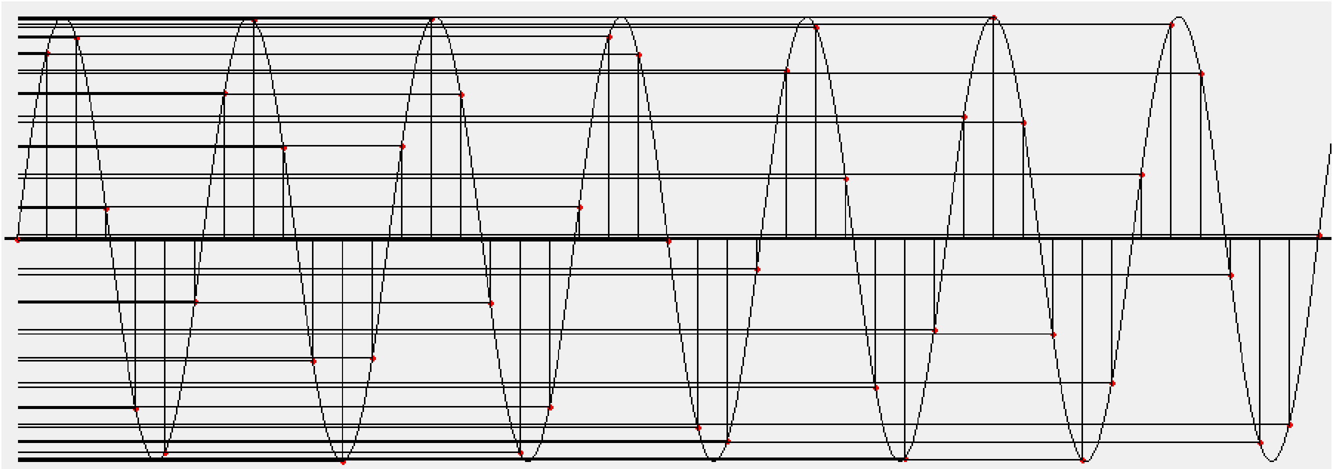
Bon, ce qu'on a fait pour ε, on aurait pu le faire pour $\varepsilon/2$, pourquoi pas.

9- Déduisez qu'il existe une sous-suite de la suite $(\sin(k))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers λ.

On le fait pour des ε de plus en plus petit (des 2^{-p}). On a à chaque fois un nouvel entier n *(dépendant de εdonc de p)* satisfaisant $\sin(n)\simeq\lambda$ à 2^{-p} près.

Ces n nous donnent une suite d'entiers.
On l'ordonne par ordre croissant.
On a une suite d'entiers (n_p) vérifiant $|\sin(n_p)-\lambda|\leqslant 2^{-p}$ pour tout p.
La suite $(\sin(n_p))$ converge vers λ par encadrement.
Et elle est extraite de la suite initiale $(\sin(k))$.

10- Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\sin(k))$?



Tout réel λ de $[-1,\ 1]$ est limite d'une suite extraite de $(\sin(k))$.

Remarque :

La suite $(\sin(k))$ est une vraie horreur.
Elle ne converge pas.
C'est déjà quand même un exemple intéressant pour que vous arrêtiez de dire « soit (u_n) une suite, je note μ sa limite ».
Mais pourquoi une suite serait elle obligée d'avoir une limite.
Tout ça parce qu'en TERMINABLE toutes les suites étudiées ont une limite.
Il existe en fait une grosse majorité de suites qui ne convergent pas.
Et « ne pas converger », ce n'est pas « partir vers l'infini », c'est « ne pas avoir de limite du tout, finie ou infinie ».
Il y a bien sûr l'exemple de $((1)^n)$ qui ne converge pas.
Mais elle a deux sous-suites qui convergent (limite 1 et limite -1).
Mais ici, la notre fait largement pire.
Elle se promène partout entre -1 et 1.
Et tout réel de $[-1,\ 1]$ peut être limite d'une sous-suite...

◃2▹

♡ -a- Déterminez $Sup\{\cos(x)+\sin(y) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-b- Déterminez $Sup\{\cos(x)+\sin(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.
-c- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+\sin^2(y) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-d- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+\sin^2(x) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-e- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+2.\sin^2(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

a	2	atteinte pour $x=0$ et $y=\dfrac{\pi}{2}$
b	$\sqrt{2}$	atteinte en $\dfrac{\pi}{4}$(écrire $\sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$)
c	2	atteinte pour $x=0$ et $y=\dfrac{\pi}{2}$
d	1	atteinte quoi qu'on fasse !
e	2	$1+\sin^2(x)$, donc en $\dfrac{\pi}{2}$: 2

◃3▹

A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, vérifiant $\forall a\in A,\ \forall b\in B,\ a\leqslant b$.
Montrez que A admet une borne supérieure α et B une borne inférieure β.
Montrez $\alpha\leqslant\beta$.
Montrez que si $A\cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\alpha=\beta$.

A faire.

◁ 4 ▷ Une loi $*$ est compatible à droite avec une relation $\blacktriangleleft$ sur un ensemble E si $\forall(a,b,c) \in E^3,\ (a \blacktriangleleft b) \Rightarrow (a*c) \blacktriangleleft (b*c)$.
Parmi ces couples, lesquels sont compatibles, et vérifiez au passage si ce sont des relations d'ordre, d'équivalence :

ensemble	loi	relation	réflexive	symétrique/anti	transitive
$\mathbb{N}^*$	$+$	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	$\subset$			
$P(E)$	Δ	le cardinal de leur intersection est pair			
$\mathbb{N}^*$	$\times$	« a au moins un diviseur commun avec »			
$\mathbb{R}^+$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{N}$	puissance	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	« rencontre »			
$\mathbb{Z}^*$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{C}[X]$	$\times$	a une racine commune avec			

ensemble	relation	réflexive	symétrique/anti	transitive
$\mathbb{N}^*$	« est premier avec »	oh non !	symétrique	non (1)
$P(E)$	$\subset$	oui	antisymétrique (2)	oui
$P(E)$	le cardinal de leur intersection est pair	oui	symétrique	oui
$\mathbb{N}^*$	« a au moins un diviseur commun avec »	oui	symétrique	oui (3)
$\mathbb{R}^+$	$\leqslant$	oui	antisymétrique	oui
$\mathbb{N}$	« est premier avec »	non		
$P(E)$	« rencontre »	oui quoique (4)	symétrique	non
$\mathbb{Z}^*$	$\leqslant$	oui	symétrique	oui
$\mathbb{C}[X]$	a une racine commune avec	non		

(1) : contre-exemple : 2 est premier avec 3
3 est premier avec 4
2 n'est pas premier avec 4 (diviseur commun non trivial : 2)

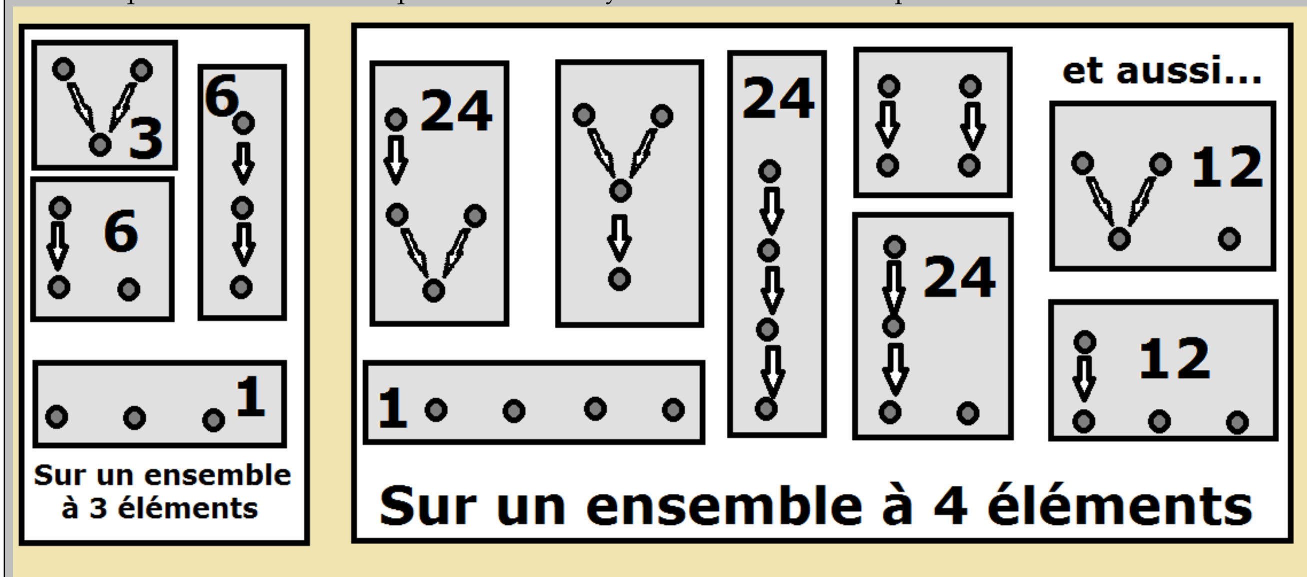
(2) : l'implication $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B$ est peut être la définition de $A = B$, non ?
En tout cas, c'est en montrant $A \subset B$ et $B \subset A$ qu'on montre en général $A = B$.

(3) : deux entiers ont toujours au moins un diviseur commun, et c'est 1.

(4) : j'avais envie de dire que tout ensemble se rencontre lui même. mais comment le vide se rencontre-t-il ? $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, non ?

◁5▷ Montrez que sur un ensemble de cardinal n il y a $n!$ relations d'ordres totaux.
Sur un ensemble à deux éléments a et b il y a trois relations d'ordre :
- un ordre partiel (l'égalité) a et b ne sont pas en relation
- deux ordres totaux : $\boxed{a \lhd b}$ $\boxed{a \lhd b}$

Montrez que sur un ensemble à trois éléments il y a dix neuf relations d'ordre possibles.
Montrez que sur un ensemble à quatre éléments il y a 219 relations d'ordre possibles.



Ne cherchez pas à expliciter des relations d'ordre par des formules, on fait des maths, pas de la physique qui prétend décrire un monde réel. Ces relations sont caractérisées par leur graphe, et tant pis si vous trouvez absurde ou abscons de dire « a ◄ b ◄ d et c est à côté sans relation avec eux ».

Normalement, tout est à peu près dit dans l'énoncé avec les dessins.

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

CCP 2009 MP 3 heures

I∼0) p et q sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0),\ldots,(X^{p-1},0),\ (0,1),\ (0,X),\ldots(0,X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté E).

Comme on ne connaît pas a priori la dimension de l'espace vectoriel (sauf à dire que la famille proposée est déjà une base), on va montrer que touté élément se décompose suivant cette famille, d'une façon unique.

Un élément $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ est de la forme $(P,\ Q)$ avec $P=\sum\limits_{i=0}^{p-1}\lambda_i.X^i$ et $Q=\sum\limits_{j=0}^{q-1}\mu_j.X^j$.

On écrit alors $(P,\ Q)=(P,\ 0)+(0,\ Q)$

$$(P,\ Q)=\Big(\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i.X^i,\ 0\Big)+\Big(0,\ \sum_{j=0}^{q-1}\mu_j.X^j\Big)$$
$$(P,\ Q)=\sum_{i=0}^{q-1}\lambda_i.\Big(X^p,\ 0\Big)+\sum_{j=0}^{q-1}\mu_j.\Big(0,\ .X^j\Big)$$

Le caractère générateur est obtenu.
On se donne ensuite $p+q$ complexes (de λ_0 à λ_{p-1} et de μ_0 à μ_{q-1}).

On suppose $\sum\limits_{i=0}^{p-1}\lambda_i.\Big(X^i,\ 0\Big)+\sum\limits_{j=0}^{q-1}\mu_j.\Big(0,\ .X^j\Big)=(0,\ 0)$.

On refait le calcul précédent en sens inverse, jusqu'à aboutir à $\Big(\sum\limits_{i=0}^{p-1}\lambda_i.X^i,\ \sum\limits_{j=0}^{q-1}\mu_j..X^j\Big)=(0,\ 0)$.

On identifie (couple) : $\sum\limits_{i=0}^{p-1}\lambda_i.X^i=0$ et $\sum\limits_{j=0}^{q-1}\mu_j..X^j=0$.
On identifie (bases de $(\mathbb{C}_{truc}[X],+,.)$) : tous les λ_i et tous les μ_j sont nuls.

Il s'ensuit que E est de dimension $p+q$.
C'est bon signe pour le mettre en bijection avec $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$.

I∼1) A et B sont deux polynômes, de degrés respectifs q et p, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X) = \lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X-\alpha_j)$ et $B(X) = \lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X-\beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k.X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k.X^k$. On définit f sur E par $f((P,Q)) = A.P + B.Q$. Montrez que f est linaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

f prend un couple de polynômes et associe un nouveau polynôme *(il faut parler de polynôme avant de parler de degré, non ?)*..

Regardons le degré :

A	P	B	Q
degré $= q$	degré $\leqslant p-1$	degré $= p$	degré $\leqslant q-1$
$A.P$		$B.Q$	
degré $\leqslant q+p-1$		degré $\leqslant q+p-1$	
$A.P+B.Q$			
degré $\leqslant p+q-1$			

Rappel : $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\deg(P.Q) \leqslant Max(\deg(P),\ \deg(Q))$.

Pour la linéarité de f, il faut se souvenir qu'au départ on a des couples.
On prend donc deux couples : $(P_1,\ Q_1)$ et $(P_2,\ Q_2)$.
On calcule la somme : $(P_1,\ Q_1) + (P_2,\ Q_2) = (P_1+P_2,\ Q_1+Q_2)$
puis l'image de la somme : $f((P_1+P_2,\ Q_1+Q_2)) = A.(P_1+P_2) + B.(Q_1+Q_2)$.
On distribue et regroupe, et c'est un jeu d'enfant de retrouver $f((P_1,\ Q_1)) + f((P_2,\ Q_2))$.

On se donne ensuite un réel (un seul !) : α. On multiplie le couple par α : $\alpha.(P_1,\ Q_1) = (\alpha.P_1,\ \alpha.Q_1)$.
On calcule son image : $A.(\alpha.P_1) + B.(\alpha.Q_1)$ et on peut mettre α en facteur : $\alpha.(A.P_1 + B.Q_1)$.

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f) = \{(P,Q) \in E \mid f((P,Q)) = 0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

On définit le noyau de f linéaire. Il faut montrer que c'est un espace vectoriel. De fait, un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
On va dire que c'est un résultat général, et même du cours bientôt...
On prend f linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$.
Le vecteur nul de E est dans le noyau : $f(\overrightarrow{0}) = f(0.\overrightarrow{0}) = 0.f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
On prend deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le noyau ($f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$). On se donne deux complexes α et β.
Par linéarité $f(\alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}) = \alpha.f(\overrightarrow{u}) + \beta.f(\overrightarrow{v}) = \alpha.\overrightarrow{0} + \beta.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}$ est dans le noyau.

I∼3) Montrez que f est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$.

C'est du cours aussi que de dire que f est injective si et seulement si son noyau est réduit au seul vecteur nul.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f injective.
Le vecteur nul est dans le noyau ($f(\backslash vo) = \overrightarrow{0}$ déjà vu) : $\{\overrightarrow{0}\} \subset Ker(f)$.
Prenons un (autre ?) vecteur du noyau : $\overrightarrow{u}$. On traduit : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{0})$.
Par injectivité de f : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Le vecteur nul est donc tout seul dans le noyau.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que le noyau est réduit au vecteur nul.
On veut montrer que f est injective. On prend $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ayant la même image.
On traduit : $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v})$. On transforme en $f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ puis $f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ (par linéarité).
Le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est dans le noyau. Il est donc nul (seul vecteur du noyau). Ayant $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a bien $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

I∼4) Montrez que si A et B ont une racine commune r si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$.

Passons à la partie qui n'est pas du cours.
On suppose que A et B ont une racine commune r. Sans perdre la généralité (quitte à ré-indexer l'ordre des racines), on peut dire : $r = \alpha_1 = \beta_1$.
On veut trouver P et Q vérifiant $A.P + B.Q = 0$.
Facile, il suffit de prendre $P = B$ et $Q = -A$: $A.B + B.(-A) = A.B - B.A = 0$ (ce sont des polynômes, pas des matrices).

Mais voilà, B est de degré p et dans la forme $A.P + B.Q$, P doit être de degré $p-1$.
Pareil pour Q.
Mais si on se passait du terme commun ? Pour ne pas l'avoir en double.de ligen

On a $A(X) = \lambda_A.(X-r).\prod_{j=2}^{q}(X-\alpha_j)$ et $B(X) = \lambda_B.(X-r).\prod_{j=2}^{p}(X-\beta_j)$.

Posons $P(X) = \lambda_B.\prod_{j=2}^{p}(X-\beta_j)$ et $Q(X) = -\lambda_A.\prod_{j=2}^{q}(X-\alpha_j)$ (toutes les racines, sauf r).

Cette fois, P est de degré$p-1$ et Q est de degré $q-1$.

On calcule : $A(X).P(X) = \lambda_A.(X-r).\prod_{j=2}^{q}(X-\alpha_j).\lambda_B.\prod_{j=2}^{p}(X-\beta_j)$

et $B(X).Q(X) = -\lambda_B.(X-r).\prod_{j=2}^{p}(X-\beta_j).\lambda_A.\prod_{j=2}^{q}(X-\alpha_j)$.

ce sont les mêmes polynômes, au signe près. La somme est bien nulle.

Le couple $\left(\lambda_B.\prod_{j=2}^{p}(X-\beta_j),\ -\lambda_A.\prod_{j=2}^{q}(X-\alpha_j)\right)$ est bien dans le noyau.

En toute généralité, si la racine commune était $\alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$on aurait pris $\left(\lambda_B.\prod_{i\neq i_0}(X-\beta_j),\ -\lambda_A.\prod_{j\neq j_0}(X-\alpha_j)\right)$

On va prouver la réciproque. On suppose que A et B n'ont aucune racine commune.
Il faut alors prouver que le noyau est réduit à 0.
Il faut alors prouver que le noyau est réduit à $\overrightarrow{0}$. Parlons vecteurs !
Il faut alors prouver que le noyau est réduit à $(0,\ 0)$. Mais les vecteurs sont des couples de polynômes.
Prenons un couple $(P,\ Q)$ dans le noyau. On a alors $A.P + B.Q = 0$.
On fait passer de l'autre côté : $-A.P = B.Q$.
A divise le premier membre.
Il divise donc le second.
Mais que dit le lemme de Gauss : si A divise $B.Q$ mais est premier avec B alors A divise Q.

Le lemme de Gauss est connu pour les entiers : si a divise b.q et que a est premier avec b alors il divise q.
Mais ici, c'est quoi des polynômes premiers entre eux dans $\mathbb{C}$?
C'est des polynômes sans racines commune ?
Oui. Et c'est donc le cas pour A et B.
Mais sinon, prenons une à une les racine α_i de A.
On a $A(\alpha_i) = 0$. On reporte : $0 = -A(\alpha_i).P(\alpha_i) = B(\alpha_i).Q(\alpha_i)$.
Comme $B(\alpha_i)$ est non nul (pas de racine commune), on a forcément $Q(\alpha_i)$.
Le polynôme Q a les mêmes racines que A, il est divisible par A.
Même si il y a des racines multiples...

Que fait on maintenant que A divise Q ? on regarde les degrés.
A est de degré q et Q est de degré inférieur ou égal à $q-1$.
Il y a une contradiction dont on ne se tire qu'en ayant $Q = 0$ (polynôme nul).

On reporte ce $Q = 0$ dans $A.P + B.Q = 0$.
On trouve $A.P = 0$. Et par intégrité dans l'espace des polynômes : P est nul à son tour.

On a bien « A et B n'ont pas de racine commune implique $Ker(f) = \{[0,\ 0)\}$ ».

		f injective avec $f = (P, Q) \longmapsto A.P + B.Q$
A ce stade	$\Leftrightarrow$	$Ker(f) = 0$
	$\Leftrightarrow$	A et B n'ont pas de racine commune

On va compléter avec la bijectivité (car les deux espaces ont la même dimension) et le théorème de Bézout : $\exists(P, Q) \in E,\ A.P + B.Q = 1$.

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand C décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

C'est un résultat du cours que l'image d'une famille génératrice du départ est une famille génératrice de d'image.
Ou que l'image d'une base du départ est une famille génératrice de l'image.

Prenons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de l'image de f. Il s'écrit $f(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de E.

On décompose ce $\overrightarrow{a}$ sous la forme $\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i.X^i,\ \sum_{j=0}^{q-1} \mu_j..X^j\Big)$.

Par définition : $\overrightarrow{u} = f\Big(\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i.X^i,\ \sum_{j=0}^{q-1} \mu_j..X^j\Big)\Big)$

par linéarité $\overrightarrow{u} = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i.f((X^i,\ 0)) + \sum_{j=0}^{q-1} \mu_j.f((0,\ .X^j))$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire des $f(C)$ lorsque C décrit la liste double des $f((X^i,\ 0))$ et des$f((0,\ X^j))$.
Il est combinaison des vecteurs de la famille image de la base.

La lourdeur vient ici de ce que la base est lourde d'écriture avec des couples.
Reprenons le cas général.
On prend $\overrightarrow{u}$ dans l'ensemble image. Il s'écrit $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a})$ pour au moins un vecteur $\overrightarrow{a}$ de E.

Ce $\overrightarrow{a}$ se décompose en $\sum_{i=1}^{d} x_i.\overrightarrow{e_i}$.

Par linéarité : $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a}) = f\Big(\sum_{i=1}^{d} x_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \sum_{i=1}^{d} x_i.f(\overrightarrow{e_i})$.
On reconnaît $\overrightarrow{u} \in Vect(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_d}))$.

I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

Ayant une famille génératrice de $Im(f)$, elle sera une base de $Im(f))$ si et seulement si elle est libre.
Sa liberté va être liée à l'injectivité de f et au noyau. C'est du cours là encore.
Je garde l'idée d'appeler $\overrightarrow{e_1}$ à $\overrightarrow{e_{p+q}}$ les vecteurs de la base de E, de $(1,\ 0)$ jusqu'à $(0,\ X^{q-1})$ en passant par $(X^{p-1},\ 0)$ et $(0,\ 1)$ à la « mi-parcours ».

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que le noyau de f est réduit à $\overrightarrow{0}$, on va montrer que la famille des images $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_{p+q}}))$ est libre.

On suppose donc qu'on a une combinaison $\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i.f(\overrightarrow{e_i})$ qui est nulle.

On écrit alors par linéarité : $f\Big(\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \overrightarrow{0}$.

On reconnaît : $\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i.\overrightarrow{e_i} \in Ker(f)$.

Mais comme le noyau est réduit à $\overrightarrow{0}$ (en fait ici le couple de polynôme $(0,\ 0)$), on a $\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i.\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$.

Il est temps d'utiliser que les $\overrightarrow{e_i}$ forment une base de E (donc une famille libre) : les λ_i sont tous nuls.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que que la famille des images $f(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{p+q}})$ est libre et génératrice de $Im(f)$, on va que le noyau de f est réduit à $\overrightarrow{0}$.
Déjà, le vecteur $\overrightarrow{0}$ est dans le noyau.
Prenons un (autre ?) vecteur du noyau. Est il forcément nul ?
C'est un $\overrightarrow{a}$ de $(E, +, .)$ vérifiant $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ *(vecteur nul à l'arrivée)*.
On décompose $\overrightarrow{a}$ sur la base de départ : $\overrightarrow{a} = \sum_i \lambda_i.\overrightarrow{e_i}$ *(on n'en est pas encore à « il est nul », je le concède...)*.

Par définition et par linéarité $\overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{a}) = f\Big(\sum_i \lambda_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \sum_i \lambda_i.f(\overrightarrow{e_i})$.

Mais la famille des $f(\overrightarrow{e_i})$ est supposée libre.
On en déduit que les λ_i sont nuls *(on approche)*.
On reporte : $\overrightarrow{a} = \sum_i 0.\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$.

I∼7) Montrez que f est bijective de E dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X], +, .)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

La famille des images a pour cardinal $p + q$.

On a donc prouvé que $Im(f)$ est de dimension $p+q$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$.

Mais $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ qui est lui même de dimension $p+q$.
Un de nos théorèmes pour flemmards dit « un espace vectoriel F inclus dans G est égal à G si et seulement F et G ont la même dimension ».

Ici, on a donc finalement

	A et B n'ont pas de racine commune	f est bijective de E dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$
$\Leftrightarrow$	$Ker(f) = 0$	
$\Leftrightarrow$	f est injective	
$\Leftrightarrow$	$(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_{p+q}}))$ est libre	
$\Leftrightarrow$	$(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_{p+q}}))$ est une base de $Im(f)$	
$\Leftrightarrow$	$Im(f) = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$	
$\Leftrightarrow$	f est bijective de E dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$	

On va compléter ensuite avec $\det(M_{A,B}) \neq 0$.

$II \sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

Elle est de format $p+q$ sur $p+q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A = 1 + 2.X + 3.X^2$
et $B = 4 + 5.X + 6.X^2 + 7.X^3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$ par combinaison $L_2 = L_2 - 2.L_1$ et $L_3 = l_3 - 3.L_1$.

On développe par rapport à la première colonne et on recommence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -6 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 16 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 16 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

On ajoute cette fois le triple de la première colonne sur la dernière $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 16 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 \\ 3 & 0 & 16 \end{vmatrix}$.

Le résultat cherché vaut $\boxed{256}$ (ou même 2^8 si vous préférez).

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A = X^2 - 3.X + 2$ et $B = X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$.
La question est ensuite « êtes vous capables de comprendre une consigne de remplissage » et de l'appliquer :
$A = X^2 - 3.X + 2$ et $B = X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$ sont donnés dans le mauvais sens pour la base « canonique ».

Avec $A = 2 - 3.X + X^2$ et $B = 6 - 5.X - 2.X^2 + X^3$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice est de taille 5. On agit en colonnes pour développer par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -5 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On continue en colonnes : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -5 & -7 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

On termine avec Sarrus ou en nettoyant encore : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Tout ça pour arriver à « déterminant nul ».

II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes.

On doit d'abord mesurer la longueur de chaque liste A et B, et en déduire la taille de la matrice.
Attention, si A est de degré q, sa liste a $q+1$ coefficients.
Ensuite, on remplit a priori une matrice avec des 0 partout, puisque ce sont eux qui sont majoritaires.
Exemple : $A = 1 + 2.X + 3.X^2$ et $B = 4 + 5.X + 6.X^2 + 7.X^3$:
A=[1, 2, 3] et B=[4, 5, 6, 7]

```
q = len(A)-1 et p= len(B)-1
M = [[0 for k in range(p+q)] for i in range(p+q)]
```

On vient de créer $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On prend un par un les coefficients de A :

```
for i in range(len(A)) : c = A[i]
```

On les place dans les q premières colonnes en décalant peu à peu :

```
for k in range(q) : M[i+k][k] = c
```

	c	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$i=0$	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$i=1$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$i=2$	3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On recommence avec les coefficients de B.

```
for i in range(len(B)) :
...c = B[i]
...for k in range(p) :
......M[i+k][q+k] = c
```

De $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $i=0$ et $k=0$ à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ pour $i=3$ et $k=1$.

```
def Mat(A,B) :
....q, p = len(A)-1, len(B)-1
....M = [[0 for k in range(p+q)] for i in range(p+q)]
....for i in range(len(A)) :
........c = A[i]
........for k in range(p) :
............M[i+k][k] = c
....for i in range(len(B)) :
........c = B[i]
........for k in range(q) :
............M[i+k][p+k] = c
....return M
```

II∼2) On appelle résultant de A et B le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de A et A ? Le résultant est il un opérateur commutatif ?

Quand B est égale à A, les colonnes sont égales deux à deux.
Le résultant de A et A est nul.
Et c'est vrai que A et A ont au moins une racine commune !

Si on permute A et B, on passe de

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix} \text{ à } \begin{pmatrix} b_0 & & & a_0 & & & & b_0 & & \\ b_1 & \ddots & & a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & b_0 & \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ \vdots & & b_1 & a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ b_p & & \vdots & & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & b_q & & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

On a appliqué une permutation sur les colonnes. Un cycle.
Au mieux, les deux déterminants sont égaux. Au pire, il y a un changement de signes.

Sur un exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

On a appliqué trois fois un cycle $\overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5)}$ de signature 1.

Sur un autre exemple : $X^2 - 3$ et $X^2 - 2.X - 7$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

avec cette fois deux quadricycles ayant chacun pour signature -1.

Globalement, le grand cycle de taille $(p+q)$ a pour signature $(-1)^{p+q-1}$.
On l'applique p fois. Le signe est $(-1)^{p.(p+q-1)}$.

II∼3) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $a.X^2 + b.X + c$.

Pour $A = c + b.X + a.X^2$ (et $A' = b + 2.a.X$) , la matrice est de taille 3 :

$$\begin{pmatrix} c & b & 0 \\ b & 2.a & b \\ a & 0 & 2.a \end{pmatrix} \text{ a pour déterminant } \boxed{a.(4.a.c - b^2)}$$

II∼4) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $X^3 + a.X + b$.

Pour $A = b + a.X + X^3$ (et $A' = a + 3.X^2$) , la matrice est de taille 5 :

$\begin{pmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\boxed{4.a^3 + 27.b^2}$ *(jouer sur les colonnes pour que les* 1 *en bas effacent les* 3*).*

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base E le vecteur U, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B,}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X], +, .)$.

On se donne deux polynômes P et Q qu'on écrit respectivement $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i.X^i$ et $\sum\limits_{j=0}^{q-1} \mu_j.X^j$.

Le couple $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base canonique le grand vecteurs fait des λ_i et des μ_j, de taille $p+q$.
On va calculer son image $A.P + B.Q$ et la décomposer sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X], +, .)$:

$$\Big(\sum_{k=0}^{q} a_k.X^k\Big).\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i.X^i\Big) + \Big(\sum_{m=0}^{p} b_m.X^m\Big).\Big(\sum_{j=0}^{q-1} \mu_j.X^j\Big).$$

On développe et o,n cherche le terme en X^n pour chaque n de 0 à $p+q-1$ (degré maximal de $A.P + B.Q$).

Formellement mais sans détailler les variables : $A.P + B.Q = \sum a_k.\lambda_i.X^{k+i} + \sum b_m.\mu_j.X^{m+j}$.
Chaque X^nsera présent avec coefficient $\sum\limits_{k+i=n} a_k.\lambda_i + \sum\limits_{m+j=n} b_m.\mu_j$.
Et c'est ce qu'on croise quand on effectue le produit

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p-1} \\ \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{q-1} \end{pmatrix}$$

et qu'on cherche le coefficient de ligne i.

Allez, prenons p et q pas trop grands pour saisir :
$A = a_0 + a_1.X + a_2.X^2$ et $B = b_0 + b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3$.

On se donne un couple $(\lambda_0 + \lambda_1.X + \lambda_2.X^2,\ \mu_0 + \mu_1.X)$ de composantes $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$.

Le produit matriciel est alors

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & b_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0.\lambda_0 & & & +b_0.\mu_0 & \\ a_1.\lambda_0 & a_0 & 0 & +b_1.\mu_0 & +b_0.\mu_1 \\ a_2.\lambda_0 & a_1.\lambda_1 & +a_0.\lambda_2 & b_2.\mu_0 & +b_1.\mu_1 \\ & a_2.\lambda_1 & +a_1.\lambda_2 & b_3.\mu_0 & +b_2.\mu_1 \\ & & a_2.\lambda_2 & & +b_3.\mu_1 \end{pmatrix}$$

Et ceci représente le polynôme
$$\begin{array}{c} (a_0.\lambda_0 + b_0.\mu_0).1 \\ +(a_1.\lambda_0 + a_0.\lambda_1 + b_1.\mu_0 + b_0.\mu_1).X \\ +(a_2.\lambda_0 + a_1.\lambda_1 + a_0.\lambda_2 + b_2.\mu_0 + b_1.\mu_1).X^2 \\ +(a_2.\lambda_1 + a_1.\lambda_2 + b_3.\mu_0 + b_1.\mu_2).X^3 \\ +(a_2.\lambda_2 + b_3.\mu_1).X^5 \end{array}$$

Et c'est bien le résultat réordonné du produit
$(a_0 + a_1.X + a_2.X^2).(\lambda_0 + \lambda_1.X + \lambda_2.X^2) + (b_0 + b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3).(\mu_0 + \mu_1.X)$
que je vous recommande de développer par un tableau :

	a_0	$+a_1.X$	$+a_2.X^2$
λ_0			
$+\lambda_1.X$			
$+\lambda_2.X^2$			

et

	b_0	$+b_1.X$	$+b_2.X^2$	$+b_3.X^3$
μ_0				
$+\mu_1.X$				

Pouvait on mener une narration sans trop de points de suspension ?
La solution pour ne pas trainer des sommes partout consistait à ne pas montrer la propriété

« l'image du tout vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \mu_{q-1} \end{pmatrix}$ sur la base C est le vecteur $M_{A,B}.U$ sur la base canonique »

mais à montrer

« l'image du tout vecteur de la base C (composantes $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) est le vecteur $M_{A,B}.U$ sur la base canonique ».

Si la propriété est prouvée pour chaque vecteur de la base C, par linéarité, il s'étend à tout vecteur de E.
On a donc juste à regarder l'image de chaque couple $(X^i,\ 0)$ et de chaque couple $(0,\ X^j)$.
Chacune de ces images devra coïncider avec une colonne de la matrice $M_{A,B}$.
Et c'est le cas. $(X^i,\ 0)$ a pour image $X^i.A + 0.B$.

Et c'est donc le vecteur $\sum_{k=0}^{q-1} a_k.X^{i+k}$.

Maintenant que f est bien associée à la matrice $M_{A,B}$, la suite d'équivalences s'agrandit :

	A et B n'ont pas de racine commune
$\Leftrightarrow$	$Ker(f) = 0$
$\Leftrightarrow$	f est injective
$\Leftrightarrow$	$(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_{p+q}}))$ est libre
$\Leftrightarrow$	$(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_{p+q}}))$ est une base de $Im(f)$
$\Leftrightarrow$	$Im(f) = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$
$\Leftrightarrow$	f est bijective de E dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$
$\Leftrightarrow$	$M_{A,B}$ est inversible
$\Leftrightarrow$	$\det(M_{A,B})$ est non nul

Le calcul (automatisé) de $\det(M_{A,B})$ permet de détecter si les deux polynômes ont une racine commune. Sans même calculer les racines, sans dire laquelle est la racine commune quand le déterminant est nul.

Un programme sur ordinateur permet de trouver tout de suite si deux polynômes ont une racine commune. Sans aucun calcul approché.

IV∼0) Montrez que $X^2 - s.X + p$ et $X^2 - s'.X + p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2 + p.s'^2 + p'.s^2 + p'^2$ est égal à $2.p.p' + (p + p').s.s'$.

Profitions de ce qu'on a montré pour dire que $X^2 - s.X + p$ et $X^2 - s'.X + p'$ ont une racine commune si et seulement si l'application appelée f n'est pas injective.
On annule le déterminant de la matrice associée, de taille 4 sur 4 :

$$\begin{vmatrix} p & 0 & p' & 0 \\ -s & p & -s' & p' \\ 1 & -s & 1 & -s' \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & p' & 0 \\ -s & p-p' & -s' & p' \\ 1 & -s+s' & 1 & -s' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & p' \\ -s & p-p' & -s' \\ 1 & -s+s' & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne $p.\begin{vmatrix} p-p' & -s' \\ -s+s' & 1 \end{vmatrix} + p'.\begin{vmatrix} -s & p-p' \\ 1 & -s+s' \end{vmatrix}$.
Après simplifications, on trouve exactement $p^2 + p.s'^2 + p'.s^2 + p'^2 - 2.p.p' - (p + p').s.s'$.

Pouvait on trouver ce résultat autrement ?
Oui, on pouvait calculer les deux racines du premier polynôme : α_1 et α_2, calculer les racines du second : β_1 et β_2,
puis calculer un produit de différences astucieuses :

$(\alpha_1 - \beta_1)$	$\times(\alpha_2 - \beta_1)$
$\times(\alpha_1 - \beta_2)$	$\times(\alpha_2 - \beta_2)$

Ce produit est nul si et seulement si un des α_i est égal à un des β_j.

On développe des formules en $\dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 4.p}}{2} - \dfrac{s' \pm \sqrt{s'^2 - 4.p'}}{2}$
et on espère tomber sur le terme $p^2 + p.s'^2 + p'.s^2 + p'^2 - 2.p.p' - (p + p').s.s'$.

Plus astucieux : on note α_1 et α_2 les deux racines du premier polynôme. On sait $\alpha_1 + \alpha_2 = s$ et $\alpha_1.\alpha_2$.
On dit que α_1 est une racine du second polynôme si et seulement si $P_2(\alpha_1)$ est nul.
α_2 est une racine du second polynôme si et seulement si $P_2(\alpha_2)$ est nul
α_1 ou α_2 est une racine du second polynôme si et seulement si $P_2(\alpha_1).P_2(\alpha_1)$ est nul.
On va donc calculer $((\alpha_1)^2 - s'.\alpha_1 + p').((\alpha_2)^2 - s'.\alpha_2 + p')$.
On développe : $(\alpha_1.\alpha_2)^2 - s'.\alpha_1.\alpha_2.(\alpha_1 + \alpha_2) - s'.p'.(\alpha_1 + \alpha_2) + (s')^2.(\alpha_1 + \alpha_2) + +p'.((\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2) + (p')^2$.
On remplace $\alpha_1 + \alpha_2$ par s, $\alpha_1.\alpha_2$ par p et $(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2$ par $s^2 - 2.p$.
On retrouve le critère indiqué.

V∼0) Dans cette partie : $A = X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^3 - X + 1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. Montrez que A et B n'ont pas de racine commune.

Pour $A = X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^3 - X + 1$, on trouve une matrice de taille 7 !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est du calcul par combinaisons *(sauf si vous aimez la règle de Sarrus avec* $7!$ *termes)*, le déterminant vaut 1.

Concours : *Notice du concours CCINP :*
Les calculatrices sont autorisées.
Il n'est pas demandé le détail des calculs sur la copie lorsque le candidat aura besoin de calculer un déterminant, un produit de matrices, l'inverse d'une matrice ou tout autre calcul.
Par exemple, pour un déterminant, il pourra se contenter d'écrire le déterminant à calculer et de donner sa réponse.
Trop de chance ! Mais pas pour vous...

Pour $A = X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^3 - X + 1$, on trouve une matrice de taille 7 !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est du calcul par combinaisons *(sauf si vous aimez la règle de Sarrus avec* $7!$ *termes)*, le déterminant vaut 1.

Concours : *Notice du concours CCINP :*
Les calculatrices sont autorisées.
Il n'est pas demandé le détail des calculs sur la copie lorsque le candidat aura besoin de calculer un déterminant, un produit de matrices, l'inverse d'une matrice ou tout autre calcul.
Par exemple, pour un déterminant, il pourra se contenter d'écrire le déterminant à calculer et de donner sa réponse.
Trop de chance ! Mais pas pour vous...

Le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
C'est donc que A et B n'ont pas de racine commune.
Le tout sans même connaître les six racines.

Raccourci : *Mais il y a plus court :* $A(X) = (X+1).B(X) + X^2$ *(vérifier :* $(X+1).(X^3 - X + 1) + X^2$*).*
On passe à une éventuelle racine commune a *:* $A(a) = (X+1).B(a) + a^2$*, il reste* $0 = 0 + a^2$*.*
La seule racine commune serait 0*, et* 0 *n'est pas racine.*

V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0 + B.Q_0 = 1$. D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez.

L'application $f = (P,\ Q) \longmapsto P.A + Q.B$ est donc bijective de $\mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ dans $\mathbb{C}_6[X]$ *(dimension* 7 *de part et d'autre)*.
Le polynôme 1 a donc un unique antécédent $(P_0,\ Q_0)$.
L'équation de Bézout $A.P + B.Q = 1$ a une solution *(et une seule)* dans $\mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$.

Histoire : *Si Étienne Bézout a laissé son nom à une identité, ce n'est pas à celle en* $a.p + b.q = 1$ *pour* a *et* b *entiers premiers entre eux.*
rappelons qu'elle porte le nom de Bachet de Méziriac.
Bézout a donné son nom à cette identité sur les polynômes.

Pour trouver cette solution, on doit trouver l'antécédent de 1 par f.

Ceci revient à résoudre $M.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve $U = M^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

A-t-on vraiment besoin de calculer $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(oui, j'ai un ordinateur quand je tape le corrigé).
On a juste besoin de la première colonne puisqu'on multiplie par le vecteur fait d'un 1 et plein de 0.
D'ailleurs on pouvait aussi trouver la solution par les formules de Cramer.

Bref, on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Il s'agit des composantes sur la base canonique de notre solution
(et la base canonique, c'est $((1,0),\ (X,0),\ (X^2,0),\ (0,1),\ (0,X),\ (0,X^2),\ (0,X^3)$
On a donc $P = 1 - X - X^2$ et $Q = X + 2.X^2 + X^3$.

On vérifie : $\boxed{(X^4 + X^3 + 1).(-X^2 - X + 1) + (X^3 - X + 1).(X^3 + 2.X^2 + X) = 1}$

Mais c'est peut être un peu lourd.
Après tout, on pouvait poser neuf inconnues et résoudre un système après avoir développé et identifié.
$(1 + X^3 + X^4).(a + b.X + c.X^2) + (1 - X + X^3).(\alpha + \beta.X + \gamma.X^2 + \delta.X^3) = 1$

En soi, ce n'est pas très différent de l'inversion de la matrice, car en développant et identifiant, on a le système

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & & +\alpha & & & & = & 1 \\ & b & & -\alpha & +\beta & & & = & 0 \\ & & c & & -\beta & +\gamma & & = & 0 \\ a & & & +\alpha & & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ a & +b & & & +\beta & & & = & 0 \\ & b & +c & & & +\gamma & & = & 0 \\ & & c & & & & +\delta & = & 0 \end{array}$$

En fait, c'est exactement la même chose !

Sinon, on peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide et remonter.
Non pas avec des divisions euclidiennes entre entiers. Mais avec des divisions euclidiennes entre polynômes.

Exemple avec des entiers 2022 et 143 :

a	=	q	$\times b$	$+r$
2022	=	14×	143	+20
143	=	7×	20	+3
20	=	6×	3	+2
3	=	1×	2	+1
2	=	2×	1	

et

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ (1 & 4 & 3) & & - & - & - \\ - & - & - & & 1 & 4 & \\ & 5 & 9 & 2 & & & \\ & (5 & 7 & 2) & & & \\ & - & - & - & & & \\ & & 2 & 0 & & & \end{array}$$

Avec des polynômes :

A	=	q	$\times B$	$+R$
$X^4 + X^3 + 1$	=	$(X+1)\times$	$(X^3 - X + 1)$	$+(X^2)$
$X^3 - X + 1$	=	$X\times$	X^2	$+(-X+1)$
X^2	=	$(-X-1)\times$	$(-X+1)$	$+1$
$(-X+1)$	=	$(-X+1)\times$	1	

On s'arrête au dernier reste non nul.
Les deux polynômes sont bien premiers entre eux.

Il n reste qu'à remonter :

1	=	X^2	+	$(X+1).(-X+1)$
1	=	X^2	+	$(X+1).\Big((X^3 - X + 1) - X.X^2\Big)$
1	=	$(-X^2 - X + 1).X^2$	+	$(X+1).(X^3 - X + 1)$
1	=	$(-X^2 - X + 1).\Big((X^4 + X^3 + 1) - (X+1).(X^3 - X + 1)\Big)$	+	$(X+1).(X^3 - X + 1)$
1	=	$(-X^2 - X + 1).(X^4 + X^3 + 1)$	+	$(X+1).(X^3 + 2.X^2 + X)$

Et la dernière ligne est bien celle obtenue plus haut.

V∼2) **Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P + B.Q = 1$** *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P - P_0).A = (Q_0 - Q).B$).*

Même sans avoir trouvé la solution $(P_0,\ Q_0)$, on peut se contenter de la nommer.

On cherche alors les autres solutions en résolvant $A.P + B.Q = 1$.
Comme on a une solution particulière, l'équation devient $A.P + B.Q = 1 = A.P_0 + B.Q_0$.
On réunit d'un côté et de l'autre : $A.(P_0 - P) = B.(Q - Q_0)$.
Comme A divise le premier membre, il divise aussi le second.
Mais comme il est premier avec B, il divise $Q - Q_0$ (c'est Gauss !).
On écrit alors $Q - Q_0 = A.K$ avec K polynôme quelconque.
On reporte et simplifie : $P - P_0 = -B.K$.

On a nos solutions : $\boxed{A.(P_0 - B.K) + B.(Q_0 + A.K) = 1 \text{ avec } K \text{ décrivant } (\mathbb{C}[X], +, .)}$ comme pour l'équation de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

VI∼0) En utilisant les polynômes $A = X^2 - 3$ et $B = (y - X)^2 - 7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

Une approche possible ? On se dit que si on a une racine, on doit avoir ses conjugués sur $\mathbb{Z}$, comme $x - i.y$ est le conjugué de $x + i.y$ sur $\mathbb{R}$.
On pense donc au polynôme dont les quatre racines sont $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ mais aussi $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ car on se dit qu'il y a plusieurs formes de conjugaison.

On va développer étape par étape

$(X - \sqrt{3} - \sqrt{7})$.	$(X - \sqrt{3} - \sqrt{7})$.	$(X - \sqrt{3} - \sqrt{7})$.	$(X - \sqrt{3} - \sqrt{7})$
$((X - \sqrt{3})^2 - 7)$.		$((X + \sqrt{3})^2 - 7)$	
$(X^2 - 4 - 2.\sqrt{3}.X)$.		$(X^2 - 4 + 2.\sqrt{3}.X)$.	
$(X^2 - 4)^2 - (2.\sqrt{3}.X)^2$			

Le polynôme $(X^2 - 4)^2 - 12.X^2$ convient. C'est $\boxed{X^4 - 20.X^2 + 16}$

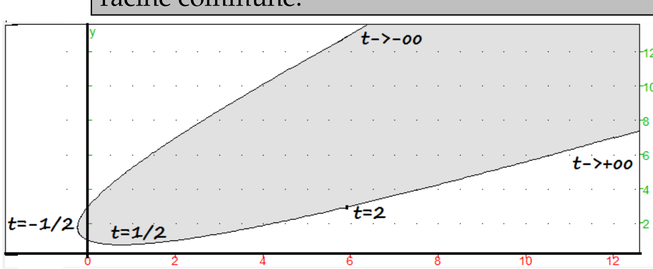
On peut aussi poser $a = \sqrt{3} + \sqrt{7}$, élever au carré : $a^2 = 10 + 2.\sqrt{21}$, isoler$(a^2 - 10) = 2.\sqrt{21}$ et élever à nouveau au carré : $(a^2 - 10)^2 = 21^2$.

Et dans l'esprit du sujet ?
On note $a = \sqrt{3}$. a est racine commune des deux polynômes $X^2 - 3$ et $(X - \sqrt{3} + \sqrt{7})^2 - 7$.
On note $b = \sqrt{3} + \sqrt{7}$. Les deux polynômes $X^2 - 3$ et $(X - y)^2 - 7$ ont une racine commune.
Leur résultant est nul.

On écrit la matrice pour $-3 + X^2$ et $y^2 - 7 - 2.y.X + X^2$: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & y^2 - 7 & 0 \\ 0 & -3 & -2.y & y^2 - 7 \\ 1 & 0 & 1 & -2.y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice vaut $\begin{vmatrix} -3 & 0 & y^2 - 7 & 0 \\ 0 & 4 - y^2 & -2.y & y^2 - 7 \\ 1 & 2.y & 1 & -2.y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et on aboutit à $y^4 - 20.y^2 + 16$.

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré Γ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{ \begin{array}{rcll} x(t) & = & t^2 & +t \\ y(t) & = & t^2 & -t \quad +1 \end{array} \right|$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet (x, y, t) de $\mathbb{R}^3$: $A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établissez que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array} \right|$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune.



Un point (x, y) est sur la courbe $x(t) = P(t)$, $y(t) = Q(t)$ si et seulement si il existe t_0 vérifiant $P(t_0) = x$ et $Q(t_0 = y$.
On remplace : $A(t_0) + x = x$ et $B(t_0) + y = y$.
Ceci revient à dire que A et B ont une racine commune.

On demande donc que $-x + t + t^2$ et $-y + 1 - t + t^2$ aient une racine commune.

On construit a matrice $\begin{pmatrix} -x & 0 & -y+1 & 0 \\ 1 & -x & -1 & -y+1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On calcule son déterminant : $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3$.
La critère est donc là.

Ouf, j'ai compris le rapport avec nos résultants ! Et vous ?

VII∼1) Déduisez qu'un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe Γ vérifie $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$. Mettez l'équation $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$ où S est une matrice symétrique. Donnez le polynôme caractéristique de S et son nombre de valeurs propres réelles..

Sinon, pourquoi ne pas se contenter de reporter :
$x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=(t^2+t)^2+(t^2-t+1)-2.(t^2+t).(t^2-t+1)-4.(t^2-t+1)+3$.
Vous savez quoi, on trouve 0.
Et on a gagné un point en allant lire la fin de l'énoncé, sans même avoir cherché à comprendre un truc avec des variables partout...

Gagnons des points même sans avoir fait ce qui précède.
Peut on mettre $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ c & f & g \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$?

Oui : $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut interpréter les coefficients :

$\begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$ pour x^2	$\begin{pmatrix} o & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$ pour y^2	$\begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & 3 \end{pmatrix}$ pour 3
$\begin{pmatrix} o & -1 & o \\ -1 & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$ pour $-2.x.y$	$\begin{pmatrix} o & o & 0 \\ o & o & o \\ 0 & o & o \end{pmatrix}$ pour $0.x$	$\begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & -2 \\ o & -2 & o \end{pmatrix}$ pour $-4.y$

Son polynôme caractéristique est $\boxed{X^3-5.X^2+2.X+4}$

Il a trois racines réelles. On le sait en traçant un tableau de variations. Extrema en $\dfrac{5-\sqrt{19}}{2}$ et $\dfrac{5+\sqrt{19}}{2}$ avec des changements de signes.
En revanche, il n'y a pas de racine évidente...

◃6▹ Existe-t-il M vérifiant $Com(M)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Même question avec $Com(M)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◃7▹ $\dfrac{4}{3.5}+\dfrac{9}{8.10}+\dfrac{25}{24.26}+\dfrac{64}{63.65}+\ldots=\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(F_n)^2}{((F_n)^2-1).((F_n)^2+1)}$ =?.
Et si vous ne trouvez pas, écrivez au moins le programme qui calcule cette somme de 2 à N donné.

◃8▹ ♣ Devant vous n pièces, toutes orientées côté pile. A chaque fois, vous avez le droit de retourner toutes les pièces sauf une. Le but est qu'en un certain nombre d'opérations, toutes les pièces affichent leur côté face. Avec n égal à 2, c'est évidemment facile $(P-P)\to(P-F)\to(F-F)$. Donnez une solution en quatre coups pour n égal à 4. Donnez une solution en six coups pour n égal à 6. Montrez qu'il n'y a pas de solution pour n égal à 5. Finalement, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il y a une solution *(et pour vous, $n=0$ est solution ?)*.
♯ Et si vous écriviez le programme Python qui pour n donné dans la liste des possibles affiche les étapes successives *(programme récursif ?)*.

retourner toutes sauf...	P	P	P	P
1	P	F	F	F
2	F	F	P	P
3	P	P	P	F
4	F	F	F	F

En 4 coups.

Il n'y a pas de solution pour n impair.
On note 0 et 1 les états des pièces.
Au départ une liste de 0 et normalement à la fin, une liste de 1.
Considérons la somme des valeurs des états. On doit passer de 0 à n.
A chaque fois, on retourne $n-1$ pièces.
Il y a donc $n-1$ pièces qui passent de 0 à 1 ou de 1 à 0.
Chacune augmente ou diminue de 1.
La parité de chacune change.
Mais il y a $n-1$ changements de parité.
Globalement, la parité de la somme ne change pas.
Elle ne pourra donc pas passer de 0 à n si n est impair.

On peut aussi regarder la parité de « nombre de piles moins nombre de face ».

Remarque : *Mais notre argument ne prouve pas qu'il y a une solution pour chaque n pair. Il montre jusque que c'est impossible pour n impair.*
Et que l'argument « somme des états » ne donne pas d'incohérence pour n pair.
Mais « pas d'incohérence de ce côté » ne dit pas « existence d'une solution » !

Mais on a une méthode pour passer de n à $n+2$. On agit en deux coups sur les deux premières, et ensuite, on connaît la méthode pour les n dernières. Et cette méthode se fait en n coups, donc un nombre pair. les deux premières clignotent mais reviennent à leur état F F.

retourner toutes sauf...	P	P	P	P	...	P
1	P	F	F	F	...	F
2	F	F	P	P	...	P
nombre pair d'étapes						
n	F	F	F			F

En fait, l'algorithme est
pour i de début à fin :
retourner tout L[i]
et en fait : retourner tout, puis retourner L[i] une nouvelle fois.

```
def piece(n) :
....if n%2 !=0 :
........return('impossible à calculer')
....L=n*[False]
....p=0
....print(L)
....for i in range(n) :
........for k in range(n) :
............if L[k]==False :
................L[k]=True
............else :
................L[k]=False
........if L[p]==False :
............L[p]=True
........else :
............L[p]=False
........p+=1
....print(L)
```

```
def piece (n) :
    if (n%2) != 0 :
        return (False)
    L=['P' for k in range (n)]
    print(L)
    for i in range (n) :
        S=L[i]
        L=L[:i]+L[i+1:]
        for k in range (n-1) :
            if L[k]=='P':
                L[k]='F'
            else :
                L[k]='P'
        L=L[:i]+[S]+L[i:]
        print (L)
```

◁ 9 ▷ Montrez qu'il ne faut pas lancer le script de la case de droite :

```
def f(a) :
....return(a*a*a*a+4)
```

```
def prime(N) :
....for k in range(2,
int(sqrt(N))+1) :
........if N%k == 0 :
............return False
....return True
```

```
n = 2
while not(prime(f(n))) :
....n += 1
print(n)
```

prime est un test basique de primalité.
Si n a un diviseur k, on sort brutalement dès qu'on l'a détecté. Sinon, c'est que n est premier.

f calcule $4+a^4$ quand on lui donne a.

On étudie finalement la suite $(4+n^4)$.
Et on en calcule les termes successifs tant qu'on n'a pas un nombre premier.

Et comme tous les termes de la suite sont des nombres composés, il vaut mieux s'abstenir de lancer le programme.
Oui, n^4+4 n'est jamais premier.
Pour n pair, c'est un multiple de 2.
Mais de toutes façons, $n^4+4 = n^4+4.n^2+4-4.n^2$

$$n^4+4 = (n^2+2)^2-4.n^2$$
$$n^4+4 = (n^2+2)^2-(2.n)^2$$
$$n^4+4 = (n^2+2+2.n).(n^2+2-2.n)$$

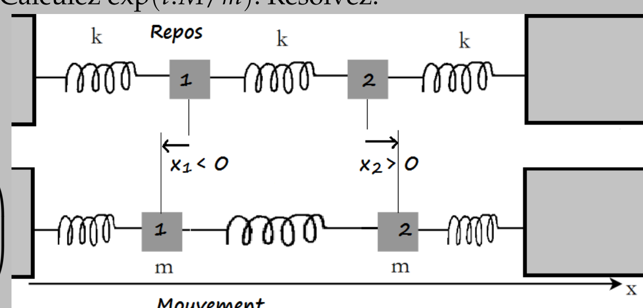
C'est le produit de deux entiers, ce ne peut être un nombre premier.
Joli, non ?

◁ 10 ▷ On dispose trois ressorts (même constante de raideur k) et deux masses (identiques $m_1 = m_2$) sur une tige entre deux points fixes A et B (sur une tige dont la réaction compense le poids). Les mesures algébriques x_1 et x_2 sont mesurées par rapport aux positions au repos. Justifiez $U' = M.U$. (avec $a = \sqrt{k/m}$). Montrez que M a pour spectre $\{i.a,\ -i.a,\ i.\sqrt{3}.a,\ -i.\sqrt{3}.a\}$. Diagonalisez M. Calculez $\exp(t.M/m)$. Résolvez.

$U = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $3^5 = 243$

avec $a = \sqrt{k/m}$, $P = \begin{pmatrix} i.a & & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & \\ 1 & 1 & & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$5^6 = 15625$



Comme les mesures algébriques sont données par rapport aux positions à l'équilibre, on peut mesurer les forces de rappel.
Prenons le cas de la première masse, les rôles étant symétriques. Le ressort 1 d'allongement x_1 donne $-k.x_1$.
Le ressort 2 d'allongement $x_2 - x_1$ donne $k.(x_2 - x_1)$.
On somme : $k.x_2 - 2.k.x_1$.
Le principe fondamental de la dynamique se traduit par $k.x_2 - 2.k.x_1 = m.x_1''$ (*masse* $\times$ *acceleration*).
C'est la première ligne du produit matriciel après division par m et en posant $k/m = a^2$.
Pour la seconde masse, on a $m.x_2'' = k.x_1 - 2.k.x_2$. C'est la seconde ligne de la matrice.

Les deux lignes suivantes s'écrivent $x'_1 = x'_1$ et $x'_2 = x'_2$ ce qui est assez logique dans les deux cas.

On a $U' = M.U$ avec U le vecteur colonne « vitesses puis positions » (de dérivée accélérations puis vitesses). On peut résoudre formellement en $U_t = e^{t.M}.U_0$.

Mais il faut diagonaliser M. On va calculer

$$\det(\lambda.I_4 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2.a^2 & -a^2 \\ 0 & \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda.\begin{vmatrix} \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2.a^2 & -a^2 \\ \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \lambda^4 + 4.a^2.\lambda^2 + 3.a^4$$

On nous propose le spectre, autant vérifier les quatre imaginaires purs : $i.a$ et $\sqrt{3}.i.a$ et leurs opposés. Sinon, on pouvait résoudre en posant $X = \lambda^2$ et trouver $X_1 = -a^2$ et $X_2 = -3.a^2$.

On a le spectre, on tient la matrice D avec ses quatre valeurs propres distinctes.
On cherche P (on complète) en résolvant $M.U_0 = i.a.U_0$ puis $M.U_1 = -i.a.U_1$ et enfin $M.U_2 = i.\sqrt{3}.a.U_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i.a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i.a.\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i.a.\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a complété la matrice. D'ailleurs, quitte à inverser les questions, avec P, on trouve vecteurs propres et les valeurs propres qui vont avec.

Avec $M = P.D.P^{-1}$ on a $t.M = P.t.D.P^{-1}$ et $(t.M)^n = P.(t.D)^n.P^{-1}$ avec $t^n.D^n$ de termes diagonaux $(t.\lambda_k)^n$.

On somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t.M)^n}{n!} = P.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n.D^n}{n!}.P^{-1} = P.\Delta_t.P^{-1}$ avec Δ_t de termes diagonaux $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_k.t)^n}{n!}$ c'est à dire $e^{\lambda_k.t}$.
On a donc

$$\exp(t.M) = \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{i.a.t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i.a.t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i.a.\sqrt{3}.t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i.a.\sqrt{3}.t} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Les coefficients seront des combinaisons (réelles à la fin) des exponentielles complexes.

On trouve que nos oscillations sont des combinaisons de

$t \longmapsto \cos(a.t)$	$t \longmapsto \cos(a.\sqrt{3}.t)$
$t \longmapsto \sin(a.t)$	$t \longmapsto \sin(a.\sqrt{3}.t)$

Tiens, mais la locution « modes propres » de la physique serait elle associée à nos valeurs propres et vecteurs propres ?

◁11▷ Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?
• L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?
• Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens [A ; B] et [E ; D] (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C. On donne : ABC = 40, CED = 60. Que vaut BCE ?
• L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?
• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

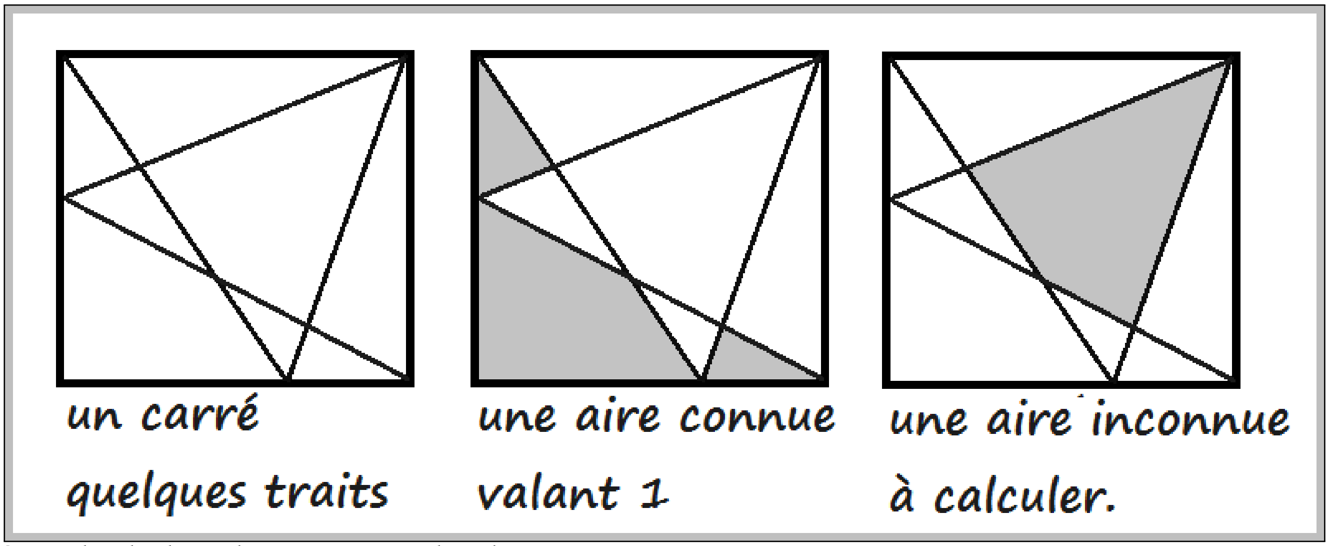
Trois chemises au prix moyen de 8 euros, donc coût total 24 euros. La troisième coutait 9 euros (dont un pour la personne qui l'a cousue au Bangladesh).

On écrit $1260 = N.\Big(1 + \dfrac{5}{100}\Big)$ et on trouve $N = 1\,200$.

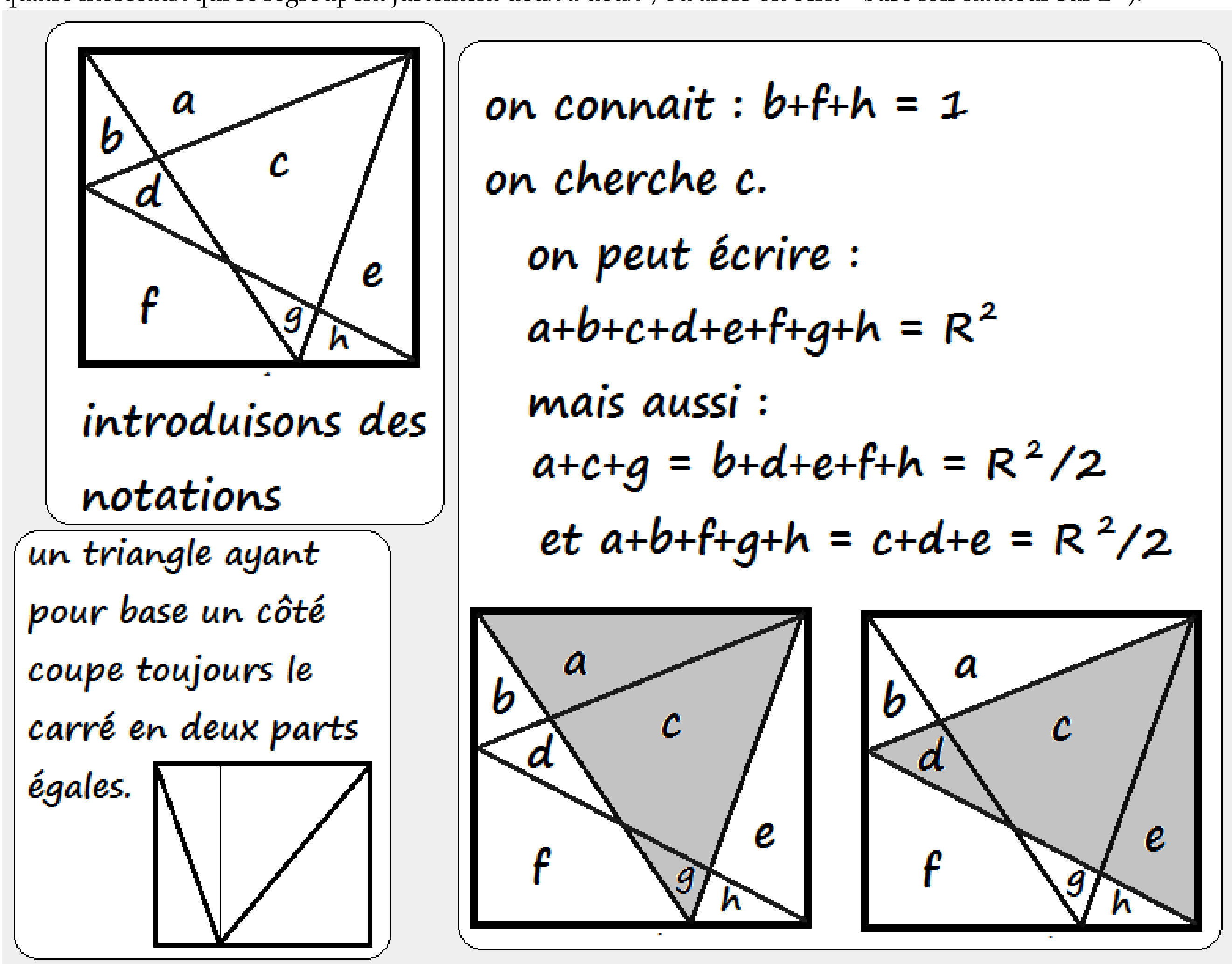
Les diviseurs de 5.2^a sont les 5.2^bavec b entre 0 et a
les 2^bavec b entre 0 et a.
Il y a donc $2 \times (a+1)$ diviseurs. C'est donc que a vaut 3.
On vérifie : 5×8 a pour diviseurs $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 5,\ 10,\ 20,\ 40\}$.

J'ai un doute sur la dernière question.

◁ 12 ▷



On traduit les hypothèses et on introduit des notations.
On rappelle ensuite que le découpage d'un carré par un triangle donne deux morceaux de même aire R^2 (en fait, quatre morceaux qui se regroupent justement deux à deux ; ou alors on écrit « base fois hauteur sur 2 »).



En combinant alors les informations $a+b+c+d+e+f+h = R^2$

$$\begin{aligned} a+c+g &= b+d+e+f+h = R^2/2 \\ a+b+f+g+h &= c+d+e = R^2/2 \end{aligned}$$

et l'hypothèse $b+f+h = 1$
on arrive à $c = b+f+h$ et donc $c = 1$.

Je me demande si on ne peut pas utiliser directement le « carpet theorem » (voir You-Tube).
Mais justement, si il faut le prouver, il faut exactement suivre le raisonnement ci dessus avec

$$a+c+g \;=\; b+d+e+f+h$$
$$a+b+f+g+h \;=\; c+d+e.$$

Sujet extrait de « Mind your decisions ».

◁13▷ ♡ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

On prend (z_n) périodique de période p.
Pour tout n, on a $z_{n+p} = z_n$ et en passant aux parties réelles et imaginaires $\forall n,\ \Re e(z_n) = \Re e(z_{n+p})$ puis $\forall n,\ \Im m(z_n) = \Im m(z_{n+p})$.
Les deux suites réelles sont périodiques (de période p et peut être de période plus petite).

Si (x_n) et (y_n) sont périodiques de périodes p et q, alors la combinaisons $(x_n + i.y_n)$ est périodique de période $p \vee q$ (p.p.c.m.).

◁14▷ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.
Rappel : $\chi_M(X) = \det(M - X.I_n)$. Et pour $\chi_{M^{-1}}$ aurez vous besoin de calculer M^{-1} ? Ça dépend de « je suis matheux ou pas ».

Avec trace, déterminant et trace de la comatrice, on trouve $X^3 - 4.X^2 - X + 4$.

On peut calculer son inverse *(déterminant non nul)*, trouver sa trace, son déterminant [1] et retrouver même $X^3 - \dfrac{1}{4}.X^2 + X - \dfrac{1}{4}$.

Mais on peut l'avoir sans se fatiguer.
La définition est $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda.I_3 - A)$.
Et on veut $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ c'est à dire $\det(\lambda.I_3 - A^{-1})$.
Et là, on ruse : $\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det(\lambda.A.A^{-1} - A^{-1})$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det((\lambda.A - I_3).A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det(\lambda.A - I_3).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det\left(\lambda.(A - \frac{1}{\lambda}.I_3)\right).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \lambda^3.\det\left(A - \frac{1}{\lambda}.I_3\right).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = -\lambda^3.\det\left(\frac{1}{\lambda}.I_3 - A\right).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = -\lambda^3.\det(A^{-1}).\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

On vérifie ici :
$$-\lambda^3.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{\lambda^3} - 4.\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} - 4\right)$$

Tout ça pour ça.

On peut aussi dire que les racines de $\chi_{A^{-1}}$ sont les inverses des racines de χ_A.
En effet, les termes de la diagonale de D^{-1} sont les inverses des termes de la diagonale de D *(en ayant posé $AP.D.P^{-1}$ et donc $A^{-1} = P.D^{-1}.P$).*

◁15▷ Montrez que l'ensemble des matrices de spectre rationnel (les valeurs propres sont dans $\mathbb{Q}$) n'est stable ni par addition, ni par multiplication.

Il suffit de contre-exemples. Ce qu'on sait déjà, c'est que si les valeurs propres sont rationnelles, la trace et le déterminant (somme et produit des-dites valeurs propres) sont rationnels. Mais on n'a pas de réciproque (tout va dépendre du discriminant).
Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont toutes deux un spectre rationnel (et même entier) : $\{1,\ -1\}$ pour chacune.
Leur somme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$.

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, la trace de A^{-1} est celle de $\dfrac{1}{\det(A)}.Com(A)$, on la connait déjà

D'autres exemples sont possibles. Il suffit d'essayer un peu au hasard.

De même, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elles ont pour spectres $\{-1,\ 1\}$ pour l'une et l'autre.

Leur produit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{i,\ -i\}$, même pas réel. On reconnaît une rotation d'angle $\pi/2$.

◃16▹ ♡ Donnez toutes les matrices admettant $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres, de déterminant 10 et de trace 7.
(si vous commencez en posant quatre coefficients, c'est que vous n'êtes pas matheux, et si vous vous en tirez quand même, c'est que vous êtes...)

On peut évidement poser la matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, imposer la trace : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 7-a \end{pmatrix}$ et le déterminant : $A = \begin{pmatrix} a & (7.a-a^2-10)/c \\ c & 7-a \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à dire que $A.\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A.\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Mais c'est évidemment la pire des approches [2].

On regarde le polynôme caractéristique de la matrice : $X^2 - 7.X + 10$ *(degré 2, c'est gentil)*. On le factorise : $(X-2).(X-5)$.

Le spectre est formé de deux valeurs propres réelles distinctes en dimension 2, la matrice est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *(et aussi à* $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*)*.

Mais la donnée de vecteurs propres nous donne aussi une matrice de passage pour diagonaliser : $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Ce n'est évidemment pas la seule, il y a aussi* $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *ou même* $\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$ *ou encore* $\begin{pmatrix} 5.\sqrt{3} & \pi \\ 2.\sqrt{3} & 3.\pi/7 \end{pmatrix}$. *Mais ça ne changera rien au résultat.*

On "dé-diagonalise" :

$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$

Il n'y a que deux matrices possibles, avec les bons couples *(vecteur propre, valeur propre)* :

$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu = 5$
$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 5$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu = 2$

◃17▹ ♡ Sachant que M a pour polynôme caractéristique $X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$, donnez le polynôme caractéristique de $M + I_4$, $2.M$ et M^2.

Par définition : $\det(M - X.I_4) = X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$ (car on n'a pas le choix sur le format).

On a alors

$$\det((M+I_4) - X.I_4) = \det(M - (X-1).I_4) = (X-1)^4 - 5.(X-1)^3 + 2.(X-1)^2 - (X-1) + 1$$

On trouve $X^4 - 9.X^3 + 23.X^2 624.X + 10$.
Et on constate que la trace est passée de 5 à 9.

On a aussi

$$\det(2.M - X.I_4) = \det\left(2.\left(M - \frac{X}{2}.I_4\right)\right) = 16.\det\left(M - \frac{X}{2}.I_4\right) = 16.\left(\left(\frac{X}{2}\right)^4 - 5.\left(\frac{X}{2}\right)^3 + 2.\left(\frac{X}{2}\right)^2 - \left(\frac{X}{2}\right) + 1\right)$$

2. après celle de l'élève qui ne traite même pas l'exercice ou se demande déjà quelle peut être la taille de la matrice et ce qu'est sa trace dans le sable ou la boue

On a cette fois $X^4 - 10.X^3 + 8.X^2 - 8.X + 16$.
Et on constate que la trace est passée de 5 à 10 et le déterminant de 1 à 16.

On termine avec $\det(M^2 - X.I_4) = \det((M - \sqrt{X}.I_4).(M + \sqrt{X}.I_4)) = \det(M - \sqrt{X}.I_4).\det(M + \sqrt{X}.I_4)$.
Cette fois, en calcul assez formel : $(X^2 - 5.\sqrt{X}^3 + 2.X - \sqrt{X} + 1).(X^2 + 5.\sqrt{X}^3 + 2.X + \sqrt{X} + 1)$
On a une forme en $(A + B).(A - B)$ et les racines s'en vont à la fin : $X^4 - 21.X^3 - 4.X^2 + 3.X + 1$.
Le déterminant de M^2 est bien le carré du déterminant de M.

◃18▹

♡ Déterminez $Sup\{x - [x] \mid x \in [0,\ 5/2]\}$.
La borne supérieure est le plus petit majorant, par forcément dans l'ensemble.

La différence $x - [x]$ est toujours plus petite que 1. 1 est un majorant.
Elle n'est jamais atteinte.

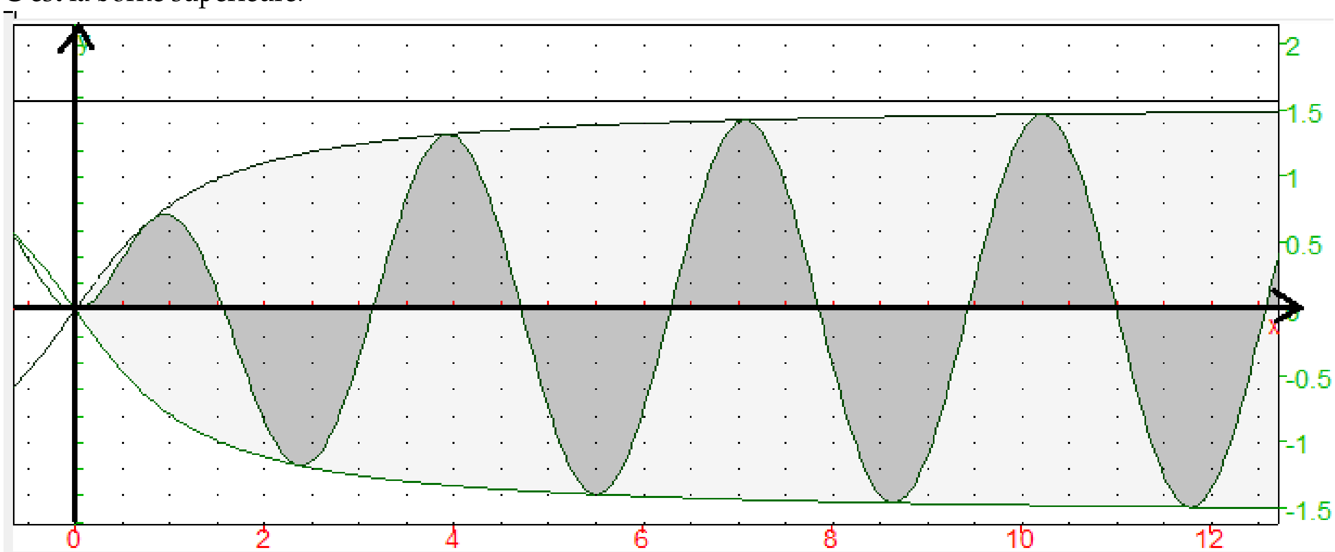
Mais ce majorant est peut être la borne supérieure.
En effet, il existe des suites qui tendent vers 1. La suite des $\left(1 - \frac{1}{n} - \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right)$ vaut $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et tend vers 1.

La borne supérieure vaut 1.

◃19▹

Déterminez $Inf\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ et $Sup\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$.

$Arctan(t)$ reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
$\sin(t)$ reste entre -1 et 1.
Le produit reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
mais il ne les atteint pas.
$\frac{\pi}{2}$ est un majorant.
Mais en prenant pour t les $\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$ on a la suite des $Arctan\left(\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right)$ qui convergent vers $\frac{\pi}{2}$.
Un majorant vers lequel tend une suite de points de l'ensemble.
C'est la borne supérieure.

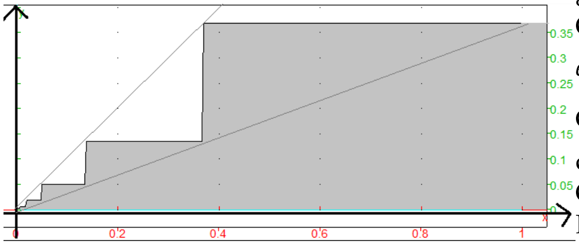


Et avec $-\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$, on prouve que la borne inférieure vaut $-\frac{\pi}{2}$.

◃20▹

♡ On définit $f = x \longmapsto \exp([\ln(x)])$. Prolongez la par continuité en 0 (encadrement, pas d'epsilon). Est elle alors dérivable ?
Calculez $\int_0^1 f(t).dt$.

f n'est pas définie en 0, mais largement à droite de 0 : sur $]0,\ +\infty[$, on va donc regarder si $\lim_{x \to 0^+} e^{[\ln(x)]}$ existe. Et si elle existe, on verra sa valeur.



On utilise la formule $t-1 \leqslant [t] \leqslant t$ pour tout t (stricte à gauche, et alors ?).
On a donc $\ln(x)-1 \leqslant [\ln(x)] \leqslant \ln(x)$ puis $e^{\ln(x)-1} \leqslant e^{[\ln(x)]} \leqslant e^{\ln(x)}$ et donc $\dfrac{x}{e} \leqslant f(x) \leqslant x$.
Comme $\dfrac{x}{e}$ et x tendent vers 0 quand x tend vers 0, par encadrement, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
On posera donc $f(0)=0$. Prolongée par continuité.
En revanche, f est discontinue en chaque e^{-n} pour n dans $\mathbb{N}$.

Pour ce qui est de la dérivabilité, le réflexe est de revenir à la définition *(pas au calcul, il n'y en a pas de possible ici)*.
On regarde si les taux d'accroissement ont une limite en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{[\ln(x)]}}{x}$$

L'astuce consiste à écrire que ceci vaut $e^{[\ln(x)]-\ln(x)}$.
Que fait cette différence quand x tend vers 0 ? Elle passe son temps à se promener entre 0 et -1. Elle n'aura pas de limite.
Proprement, on prend des x dont le logarithme est entier : $x_n = e^{-n}$: $\dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = e^0$. Un tel taux tend vers 1.
Puis on prend des x dont le logarithme est « demi-entier » : $y_n = e^{-n-0,5}$: $\dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = e^{-0,5}$. Un tel taux tend vers $1/\sqrt{e}$.
Le critère séquentiel assure que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0. f n'est pas dérivable en 0 *(à droite, parce qu'à gauche, la question ne se pose même pas)*.

Et pour le calcul de l'intégrale ? Il faut appliquer la relation de Chasles, et pas qu'un peu.
On découpe tout $[0,\ 1]$ et même $]0,\ 1]$ en fait, avec les points de discontinuité e^{-n}.

$$]0,\ 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]e^{-n-1},\ e^{-n}]$$

Sur chaque intervalle $]e^{-n-1},\ e^{-n}]$, f est constante, égale à e^{-n-1}.
Et chaque intervalle est de longueur $e^{-n}-e^{-n-1}$.
On a un rectangle d'aire $(e^{-n}-e^{-n-1}).e^{-n-1}$.
On somme cette infinité de rectangles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n-1}.(e^{-n}-e^{-n-1})$$

(je n'aime pas la notation $\sum_{n=0}^{+\infty}$, mais je crains qu'avec la vraie notation $\sum_{n\geqslant 0}$ ne vous permette pas d'y voir une infinité de termes).
On simplifie en $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}$. On a une série géométrique de raison e^{-2} différente de 1 :

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n-1} = \left(1-\frac{1}{e}\right).\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{(2.n+2)}}}{1-\frac{1}{e^2}}$$

L'intégrale vaut $\dfrac{1}{1+e}$.

La traitresse aime se faire mousser. Le Var est damné. Le facteur secoue sa botte au milieu de la piste. On manque de plus pour votre cas. L'urgentiste connait bien les thème des dures luttes.

◁21▷ ♡ Montrez en explicitant N_ε que la suite $\left(\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right)$ converge vers 0.
Montrez en explicitant N_ε que la suite $\left(\ln\left(\dfrac{2.n+1}{n+3}\right)\right)$ converge vers $\ln(2)$.
$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n-\lambda|\leqslant\varepsilon)$.

$$\begin{array}{ll} & \left[\dfrac{3-e^{\varepsilon}}{2.e^{\varepsilon}-2}\right]+1 \leqslant n \\ \Rightarrow & \dfrac{3-e^{\varepsilon}}{2.e^{\varepsilon}-2} \leqslant n \\ \Rightarrow & 3-e^{\varepsilon} \leqslant (2.e^{\varepsilon}-2).n \\ \Rightarrow & 2.n+3 \leqslant e^{\varepsilon}.(2.n+1) \\ \Rightarrow & \dfrac{2.n+3}{2.n+1} \leqslant e^{\varepsilon} \\ \Rightarrow & \ln\left(\dfrac{2.n+3}{2.n+1}\right) \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow & 0 \leqslant -\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+3}\right) \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow & \left|\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \left[\dfrac{6-e^{\varepsilon}}{2.(e^{\varepsilon}-1)}\right]+1 \leqslant n \\ \Rightarrow & 6-e^{\varepsilon} \leqslant 2.(e^{\varepsilon}-1).n \\ \Rightarrow & 2.n+6 \leqslant e^{\varepsilon}.(2.n+1) \\ \Rightarrow & \dfrac{2.n+6}{2.n+1} \leqslant e^{\varepsilon} \\ \Rightarrow & \ln\left(\dfrac{2.n+6}{2.n+1}\right) \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow & 0 \leqslant -\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+6}\right) \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow & \left|\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+6}\right)\right| \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow & \left|\ln\left(\dfrac{2.n+1}{n+3}\right)-\ln(2)\right| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

◃22▹ Il parait que l'application $x \longmapsto |2.x-2.[x]-1|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, prouvez le. Prouvez aussi qu'elle est périodique. Calculez son intégrale de 0 à 3.

L'application $x \longmapsto |2.x-2.[x]-1|$ est définie partout. Tant que l'on se place en un point a non entier, l'application est localement affine, donc continue.
Plus précisément, si a est dans un intervalle ouvert $]n,\ n+1[$, alors l'application est localement de la forme $x \longmapsto |2.x-2.n-1|$, elle est continue.

Rappelons que l'application valeur absolue est continue. C'est un défaut de dérivabilité qu'elle a.

Il reste le problème de la continuité en un point a entier.

	à gauche	en a	à droite
remarque	$[x]=a-1$	$[a]=a$	$[x]=a$
fonction	$\lvert 2.x-2.(a-1)-1\rvert = \lvert 2.x-2.a+1\rvert$	1	$\lvert 2.x-2.a-1[$
limite	1	1	1

f est continue en tout point ma entier aussi.

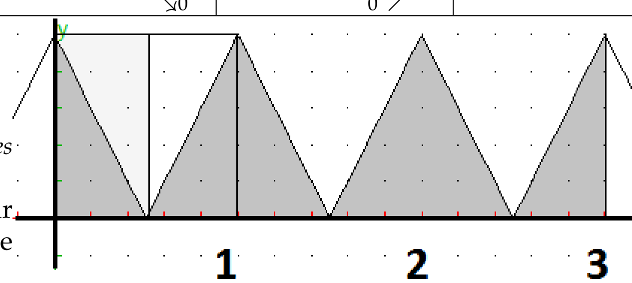
Pour la périodicité, pas de prise de tête sur le domaine. On se donne x et $x+1$. On a immédiatement $[x+1]=[x]+1$. On reporte :

$$f(x+1) = |2.x+2-2.([x]+1)-1| = |2.x-2.[x]-1| = f(x)$$

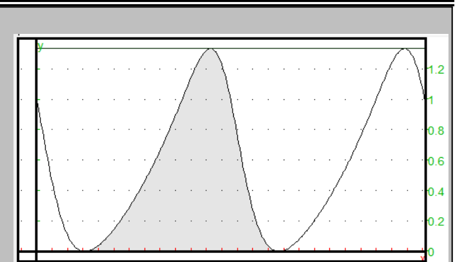
C'est la définition de la périodicité.
Disposant de la périodicité, il suffit de la représenter sur $[0,\ 1]$ pour la connaître sur tout $\mathbb{R}$.
Sa forme est alors $x \longmapsto |2.x-1|$ (même en 1, je sais). On découpe en $\dfrac{1}{2}$.

intervalle	$\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$	$\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$	$\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right]$	$\left[\dfrac{3}{2},\ 2\right]$	$\left[2,\ \dfrac{5}{2}\right]$
formule	$1-2.x$	$2.x-1$	$3-2.x$	$2.x-3$	$5-2.x$
allure	$1 \searrow 0$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$

On a une fonction périodique « en triangle » *(le signal des instruments à bois si je me souviens bien).*
Pour ce qui est de calculer son intégrale de 0 à 3, par périodicité, c'est trois fois son intégrale de 0 à 1 qui se calcule géométriquement et donne 3/2.



◃23▹ Déterminez maximum et minimum de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}$.
Question plus facile : Montrez $Min\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}\ \mid\ ,x \in \mathbb{R}\right\} = 0$ et $Max\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}\ \mid\ ,x \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{4}{3}$ (cours sur $a.\cos(t)+b.\sin(t)$ après soustraction).
Calculez l'aire de la partie en gris.



Si nul ne nous donne la valeur du maximum et du minimum (dont l'existence est assurée par un argument de continuité et périodicité), le mieux est de dériver et de tracer un tableau de variations.
En utilisant la formule en $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$, on constate que la dérivée est du signe du numérateur, c'est à dire de

$$\cos(x).(\cos(x) - 1) - (-\sin(x).(\sin(x) - 1)$$

On simplifie et on trouve $1 - 2.\cos(x) - \sin(x)$.

Deux possibilités.
• On écrit $2.\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $\sqrt{5}.\cos(x - \varphi)$ avec φ bien choisi ($\cos(\varphi) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$).
On doit alors étudier le signe de $1 - \sqrt{5}.\cos(x - \varphi)$ qui va s'annuler et changer de signe pour $\cos(x - \varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
On reconnaît d'ailleurs que ceci nous amène à résoudre $\cos(x - \varphi) = \sin(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.
On trouve les deux solutions (modulo $2.\pi$) : $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = 2.\varphi$. Il ne reste qu'à calculer f en ces deux points.

• On passe en arc moitié et on étudie le signe de $1 - 2.\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} - \dfrac{2.t}{1 + t^2}$.
On a un trinôme du second degré au numérateur (c'est lui qui dicte le signe) : $3.t^2 - 2.t - 1$.
Il s'annule et change de signe pour $t = 1$ et $t = -1/3$.
On en profite pour exprimer $f(x) = \dfrac{\dfrac{2.t}{1 + t^2} - 1}{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} - 2} = \dfrac{t^2 - 2.t + 1}{3.t^2 + 2.t + 1}$

On calcule notre fonction pour chacune de ces deux valeurs :

x	0		$2.Arctan(1)$		$\pi - 2.Arcta$
t	0		1		$-1/3$
signe de $f'(x)$	$-$	$\ominus$		$\oplus$	$4/7$
		$\searrow$	0	$\nearrow$	

et on répond donc à la question posée.

Maintenant, si on nous donne les valeurs du minimum et du maximum, c'est tout de suite plus facile.
Pour tout x, $1 - \sin(x)$ est positif et $2 - \cos(x)$ est positif (strictement).
Le quotient est donc positif.
Et il nul quand le sinus vaut 1.
Le minimum vaut donc0 (atteint en $\pi/2$).

Pour le maximum, montrer $\dfrac{1 - \sin(x)}{2 - \cos(x)} \leqslant \dfrac{4}{3}$ revient à montrer : $3 - 3.\sin(x) \leqslant 8 - 4.\cos(x)$ (positivité des multiplicateurs pour le produit en croix). On va donc prouver

$$4.\cos(x) - 3.\sin(x) \leqslant 5$$

pour tout x. Mais le cours nous assure que $4.\cos(x) - 3.\sin(x)$ se met sous la forme $\sqrt{4^2 + 3^2}.\cos(x + \varphi)$ pour φ bien choisi.
On a donc une majoration par 5 et on sait même que la valeur 5 est atteinte.

> *Comme quoi il plus facile de montrer qu'une solution est valide (en un temps polynomial) que de trouver la solution (en un temps polynomial).*
> *Vous vous en souviendrez quand en option informatique on vous parlera de P et NP et de la conjecture $P = NP$.*

L'aire de la partie en gris, c'est l'intégrale de f entre deux minima, c'est à dire entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5.\pi}{2}$.
Reste à trouver une primitive de f.
Bioche vous dit qu'il faut passer par l'arc moitié : $t = \tan(\theta/2)$. Mais sur quel intervalle ?
Ce serait bête de prendre $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5.\pi}{2}\right]$ car on a un problème en π.

Une solution va consister à couper en deux par relation de Chasles :

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx+\int_{\pi}^{5.\pi/2}\frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx=\int_{t=1}^{+\infty}\frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}+\int_{t=-\infty}^{1}\frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$$

L'autre solution, plus géométrique, consiste à dire que comme la fonction est $2.\pi$ périodique, il suffit de l'intégrer sur une période

$$\int_{\pi/2}^{5.\pi/2}\frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$$

Dans tous les cas, on va croiser $\dfrac{2.t^2-4.t+2}{(1+t^2).((3.t^2+1)}$ qu'on décomposera en $\dfrac{a.t+b}{1+t^2}+\dfrac{c.t+d}{3.t^2+1}$ puis $\dfrac{2.t}{1+t^2}+\dfrac{2-6.t}{3.t^2+1}$ (d'accord, pas de ruse, j'ai réduit au dénominateur commun et résolu[3]). On termine en intégrant en

$$\ln\left(\frac{t^2+1}{3.t^2+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan(\sqrt{3}.t)$$

Avec les bornes, on trouve $\dfrac{2.\pi}{\sqrt{3}}$.

◁24▷ On sait que l'application $M\longmapsto Tr(M)$ est une forme linéaire sur $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ vérifiant $Tr(A.B)=Tr(B.A)$.
En existe-t-il d'autres ?
Soit f linéaire de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(A.B)=f(B.A)$.
Trouvez A et B vérifiant $A.B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
Trouvez A et B vérifiant $A.B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.
Déduisez $f(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=(a+d).f(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})$.
Généralisez en dimension n.

◁25▷ ♡ Explicitez un N_ϵ pour la convergence de $\dfrac{e^n+1}{e^n+5}$ vers 1 quand n tend vers l'infini.

◁26▷ On donne u_0 et on pose $u_{n+1}=(u_n)^3$ pour tout n. Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n.
On donne v_0 et on pose $v_{n+1}=(v_n)^n$ pour tout n. Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n.

$u_n=(u_0)^{3^n}$ pour tout n par récurrence sur n.
La suite n'est pas géométrique. C'est une faute d'élève vraiment buté que de qualifier de suite géométrique toute suite vérifiant $u_{n+1}=\lambda_n.u_n$, avec un λ_n qui dépend de n...

$v_n=1$ dès que n a dépasse 1. En effet, $v_1=(v_0)^0=1$ et après on y reste.

◁27▷ Complétez : $\forall x\in\mathbb{R},\ (|x-3|\leqslant 4\ et\ |x+2|\leqslant 3)\Leftrightarrow|x-\ldots|\leqslant\ldots$.
$\forall x\in\mathbb{R},\ (|x-3|\leqslant 4\ ou\ |x+2|\leqslant 3)\Rightarrow|x-4|\leqslant\ldots$
$\forall x\in\mathbb{R},\ (|x-3|\leqslant 4\ ou\ |x+2|\leqslant 3)\Rightarrow|x-\ldots|\leqslant 6$
$\forall x\in\mathbb{R},\ (|x-3|\leqslant 4\Rightarrow|x+2|\leqslant\ldots)\ et\ (|x+2|\leqslant\ldots\Rightarrow|x-3|\leqslant 4)$.

◁28▷ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme $x\longmapsto\dfrac{a.x+b}{c.x+d}$)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

La condition est juste $\dfrac{2.a+b}{2.c+d}=2$ et $\dfrac{3.a+b}{3.c+d}=3$.
Ce système d'inconnues a, b, c et d a des solutions.

3. en fait, non, j'ai fait confiance à Xcas

Par exemple $x \longmapsto \dfrac{5.x-6}{x+0}$.

Dans la suite de l'exercice, on anjoute des conditions.

◁29▷ Montrez que $x \longmapsto x^3 + x$ *(notée f)* est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculez $\displaystyle\int_0^{10} f^{-1}(t).dt$ *(raisonnez, ne tentez pas d'exprimer f^{-1}, même si c'est faisable).*

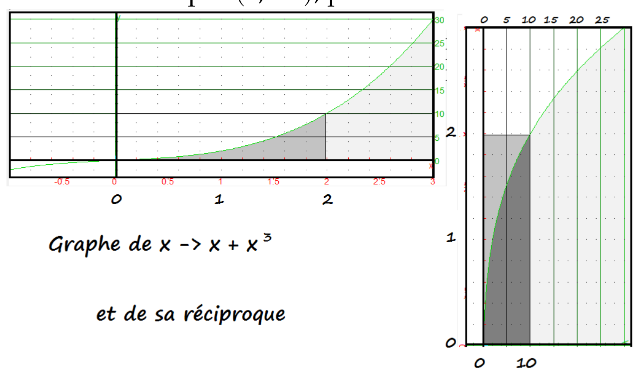
L'application est continue *(elle ne va sauter aucune valeur, par théorème des valeurs intermédiaires)*, strictement croissante à cause de sa dérivée positive *(elle ne passera donc pas deux fois au même endroit)*.
L'application réalise une bijection continue, de réciproque continue, entre son intervalle de départ $]-\infty,\ +\infty[$ vers son intervalle image qui est aussi $]-\infty,\ +\infty[$ *(limites aux bornes)*.

Pour la croissance, on peut passer par $x \leqslant y \Rightarrow x^3 + x \leqslant y^3 + y$.

On calcule en effet la différence $(y^3+y)-(x^3+x) = (y-x).(y^2+x.y+x^2+1) = (y-x).\Big((y+\dfrac{x}{2})^2 + \dfrac{3.x^2}{4} + 1\Big)$.
Le signe est bien celui de $y-x$.

Le graphe de f passe par $(0,\ 0)$ et file vers l'infini. Il passera à un moment par $(a,\ 10)$, pour un a convenable.

On le trace, et on trace celui et f^{-1} par symétrie.
L'aire du rectangle de sommets $(0,0)$ et $(a,9)$ est égale à la somme de $\displaystyle\int_0^a f(x).dx$ (sous le graphe de f) et $\displaystyle\int_0^{10} f^{-1}(t).dt$ *(au dessus du graphe de f)*.



Par soustraction : $\displaystyle\int_0^{10} f^{-1}(t).dt = 10.a - \int_0^a (x^3+x).dx$.

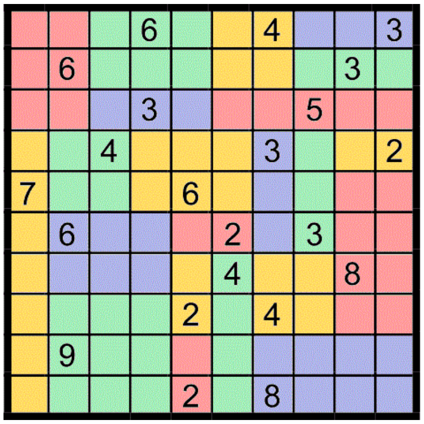
On calcule donc $10.a - \dfrac{a^4}{4} - \dfrac{a^2}{2}$. Il ne reste qu'à constater que a vaut 2.

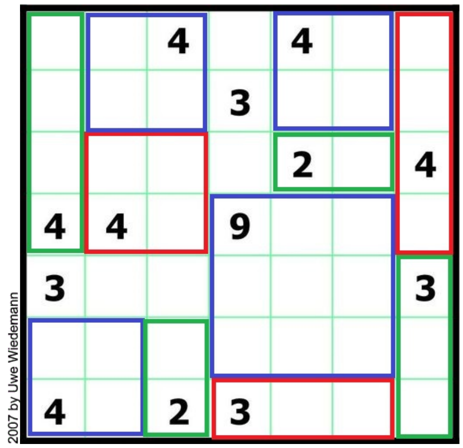
◁30▷ Un shikaku est une grille à découper en rectangles de côtés parallèles aux axes. Dans chacun de ces rectangles, il doit y a voir un nombre et un seul. Et ce nombre indique le nombre de cases du rectangle. Voilà, il n'y a pas plus à savoir.

			6			4			3
	6							3	
			3				5		
		4				3			2
7				6					
	6				2		3		
					4			8	
				2		4			
	9								
				2		8			

2007 by Uwe Wiedemann

		4		4		
			3			
				2		4
4	4		9			
3						3
4		2	3			





◁31▷ Complétez : $\forall x \in \mathbb{R}$, (☻ $\leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x -$ ☺$| \leqslant 4)$ / $\forall x \in \mathbb{R}$, $(|x-6| \leqslant$ ♪$) \Rightarrow (8 \geqslant x \geqslant$ ♫$)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (-3 \leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x-1| \leqslant 4)$ car $1-4=-3$ et $1+4=5$ | $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-6| \leqslant 2) \Leftrightarrow (8 \geqslant x \geqslant 4)$ car $6+2=8$ et $6+-2=4$

Mais en fait, c'est purement visuel, avec « milieu » et « rayon ».

◁32▷ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2.u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrez que la suite (u_n) existe et prouvez $u_n \geqslant 2^n$ pour tout n.
On pose $v_n = 2^{-n}.u_n$. Calculez $v_{n+1} - v_n$. Montrez que (v_n) est croissante, majorée. Déduisez l'existence d'un réel λ vérifiant $u_n \sim_{n\to+\infty} \lambda.2^n$.
Écrivez un script Python qui détermine λ à 10^{-3} près.

Par récurrence sur n, chaque terme de la suite existe, et est positif.

Par positivité : $u_{n+1} = 2.u_n + \dfrac{1}{u_n} \geqslant 2.u_n$.

Par récurrence sur n : $\forall n,\ u_n \geqslant 2^n.u_0 = 2^n$.

On a posé $v_n = 2^{-n}.u_n$donc

$$v_{n+1} = 2^{-n-1}.u_{n+1} = 2^{-n-1}.\left(2.u_n + \frac{1}{u_n}\right) = 2_n^{-n}.u_n + \frac{1}{2^{n+1}.u_n} = v_n + \frac{1}{2^{n+1}.u_n}$$

On a immédiatement $v_{n+} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}.u_n} > 0$. La suite (v_n) est croissante.

On majore ensuite : $v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}.2^n}$ puisque $u_n > 2^n$. On somme de 0 à $N-1$:

$$v_N - v_0 = \sum_{n=0}^{N-1}(v_{n+1} - v_n) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2.4^n} = \frac{1}{2}.\frac{1 - \frac{1}{4^{N+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \leqslant \frac{2}{3}$$

La suite (v_n) est majorée. Elle converge vers son plus petit majorant.

En notant λ la limite de v , on a $2^{-n}.u_n$ qui converge vers λ et donc $u_n$qui est équivalent à $\lambda.2^n$.

Pour le calcul de λ on peut le jouer à la physicienne : calculer $u_n/2^n$ pour n grand.

```
u, d = 1, 1
for n in range(1000) :
....u = 2*u+1/u
....d = 2*d
print(u/d)
```

et même `print(round(u/d, 4))` pour n'avoir que quatre chiffres significatifs.

Sinon, on peut calculer $u_n/2^n$ et s'arrêter quand la valeur ne bouge presque plus.

```
a, d, old = 1, 1, 0
```

```
while abs(a/d-old) > 10**(-4) :
....old = a/d
....a = 2*a+1/a
....d = d*2
```

◁ 33 ▷ ♣ Voici des définitions *(ratées)* de “suite de Cauchon”. Que pouvez vous déduire de chacune :

a	$\exists K \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\vert u_p - u_q\vert \leqslant \varepsilon)$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \exists K \in \mathbb{N},\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\vert u_p - u_q\vert \leqslant \varepsilon)$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\vert u_p - u_q\vert \leqslant \varepsilon)$
d	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\vert u_p + u_q\vert \leqslant \varepsilon)$
e	$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall K \in \mathbb{N},\ (K \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\vert u_p - u_q\vert \leqslant \varepsilon)$
f	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p + q) \Rightarrow (\vert u_p - u_q\vert \leqslant \varepsilon)$

◁ 34 ▷ On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez, en minorant $H_{2.n} - H_n$ que H n'est pas une suite de Cauchy.

Soit φ injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2}$. En minorant aussi $\phi_{2.n} - \phi_n$ montrez que ϕ n'est pas une suite de Cauchy (on pourra dire qu'une somme de n entiers distincts vaut au moins $0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1$.

$$H_{2.n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2.n} \frac{1}{k}$$

On a n termes, tous les grands que $\frac{1}{2.n}$.

On a donc $H_{2.n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

On a donc

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall G,\ \exists (p,q),\ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \geqslant K \text{ et } |H_p - H_q| > \varepsilon_0$$

Remarque : C'est la négation de $\forall \varepsilon > 0,\ \exists G_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \geqslant K_\varepsilon \Rightarrow |H_p - H_q| \leqslant \varepsilon$.

Dans cette quantification de « de Cauchy »,εest quelconque, son nom est « quelconque »
K dépend de ε, ion l'appelle K_ε
p et q sont quelconques, on les appelle p et q.

Dans $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall G,\ \exists (p,q),\ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \geqslant K \text{ et } |H_p - H_q| > \varepsilon_0$
ε est à trouver, particulier, on l'appelle ε_0
K est quelconque, on l'appelle K (et pas K_ε, on raisonne au lieu d'apprendre par cœur, et surtout, on voit des variables qui dépendent les unes des autres)
p et q sont à trouver, il faudrait les appeler p_0 et q_0 ou même p_K et q_K car ils ont le droit de dépendre de K.

On va prendre $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ (on s'attendait à $\frac{1}{2}$, mais on veut des inégalités strictes).

K est quelconque donné, on prend alors $p_K = K$ et $q_K = 2.K$ et on a $|H_{2.K} - H_K| \geqslant \frac{1}{4}$.

La suite n'est pas de Cauchy. Elle ne peut pas non plus converger.

◁ 35 ▷ Un élève a trouvé $N_\epsilon = \frac{1 - 2.e^\epsilon}{1 - e^\epsilon}$ dans la quantification $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant N_\epsilon \rightarrow |u_n - a| \leqslant \varepsilon$. Donnez une suite dont il a pu partir.

Une solution naturelle consiste à remonter la formule : $n \geqslant \frac{1 - 2.e^\epsilon}{1 - e^\epsilon} \Leftrightarrow (e^\varepsilon - 1).n \geqslant (2.e^\varepsilon - 1)$ (attention aux signes, $1 - e^\varepsilon$ est négatif...).

Ceci est équivalent à $e^\varepsilon.(n-2) \geqslant n - 1$ puis $e^\varepsilon \geqslant \frac{n-1}{n-2}$ et même $\varepsilon \geqslant \ln\left(\frac{n-1}{n-2}\right)$. Prenons le cas d'égalité !

La suite $\left(\ln\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\right)$ converge vers 0, et ce N_ε convient....

Une solution de facilité c'est : « la suite (u_n) est constante égale à a ».
Certes, pour tout ε, on pourrait prendre $N_\varepsilon = 0$ et tout irait bien. mais pourquoi alors ne pas prendre $N_\varepsilon = \frac{1-2.e^\epsilon}{1-e^\epsilon}$?
ça marche aussi !

◁36▷ Montrez que deux et seulement deux des trois affirmations ci-contre sont vraie :

A	toute suite réelle convergente a un plus grand élément et un plus petit élément
B	toute suite réelle convergente a un plus grand élément ou un plus petit élément
C	toute suite réelle divergente vers $+\infty$ a un plus grand élément ou un plus petit élément

Rappel : l'une de ces définitions est « admet un plus grand élément » :

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_p$	$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_p$	(laquelle ?).

Sans hésitation : $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_p$
Et si vous hésitez, c'est qu'on va avoir du mal avec vous en Sup et en Spé... En tout cas en maths...

$\boxed{A}$ La suite (2^{-n}) a un plus grand élément (1 atteint pour $n = 0$) mais pas de plus petit élément. 0 est sa limite, borne inférieure non atteinte.

$\boxed{B}$ Si elle converge, alors elle est bornée. la partie $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (notée A) est bornée.
Elle a une borne inférieure ν et une borne supérieure μ.

Si la borne supérieure n'est pas atteinte, alors il existe une suite de points de A converge vers μ (prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dans la quantification de « borne supérieure »).
Mais alors on a une sous suite de (a_n) qui converge vers μ. C'est donc que μ est la limite de la suite.
De même, si la borne inférieure ν n'est pas atteinte, alors il existe une suite de points de A converge vers ν.
Mais alors on a une sous suite de (a_n) qui converge vers ν. C'est donc que ν est la limite de la suite.
Mais alors par unicité de la limite, on a $\mu = \nu = la\ limite$. Et la suite est constante...

Donc, la borne supérieure ou la borne inférieure est atteinte. Ce sont un plus grand élément ou un plus petit élément.

$\boxed{C}$ Si la suite diverge vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang R, tous ses termes sont plus grands que 10.
Prenons les termes qui précèdent ce rang, ils sont en nombre fini. On en prend le plus petit.
Il est minimum de $\{u_n \mid n \leqslant R\}$. Et il minore tous les $\{u_n \mid n > R\}$ (en intercalant 10).
C'est donc le plus petit élément de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ce raisonnement est presque parfait. Sauf si $\{u_n \mid n \leqslant R\}$ est vide.
Il faut donc remplacer 10 par $u_0 + 10$ pour être sûr qu'il y ait des éléments avant l'indice R.

◁37▷ ♡ Montrez que la suite $(\cos(\pi.n!.r))_n$ converge si r est un rationnel donné.

Le sens est ici « si r est rationnel, alors la suite converge ».
On prend donc r de la forme $\frac{p}{q}$. On a alors $n!.\pi.r = \frac{n!}{q}.p.\pi$.
Dès que n a dépassé q (et sans doutes même avant), $\frac{n!}{q}$ est un entier.
On a donc un multiple de π ! C'est bien parti.
Et même, dans $\frac{n!}{q}$ il y aura même (en tout cas pour n plus grand que $q+1$ pour qu'il reste aussi au moins un entier pair au numérateur) un facteur 2.
L'entier $\frac{n!.p}{q}$ est pair, et $\cos(\pi.n!.r)$ vaut 1.
La suite est stationnaire.
Dit autrement :e elle est constante (égale à 1) à partir d'un certain rang.
Elle converge donc vers 1.Dans la quantification $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant N_\varepsilon) \Rightarrow |\cos(n!.r.\pi) - 1| \leqslant \varepsilon$ il suffit de pendre $N_\varepsilon = q + 1$, et la condition $|\cos(n!.r.\pi) - 1| \leqslant \varepsilon$ devient $|1 - 1| \leqslant \varepsilon$, c'est vrai !

◁ 38 ▷ On demandait de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, un élève a mal recopié et a calculé $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Son déterminant est il plus grand que le déterminant demandé ? Quelle est la valeur de la différence $|eleve - demande|$. *Si vous calculez réellement les deux déterminants de taille 4, vous n'aurez pas tort, mais vous ne serez pas digne de rester en MPSI2.*

Quelle est la différence entre les deux formules ?

Dans l'une : $+5.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ et dans l'autre $-5.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

La différence vaut $10.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Après, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10.$

◁ 39 ▷ Un élève n'a pas bien recopié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a. Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon\ et\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	On a le droite de prendre $\varepsilon = 0$! A partir du rang N_0 la suite est constante égale à a. Ce qui correspond à ce que les plus mauvais croient être la convergence vers a...

b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Toute suite vérifie ça. Qu'elle converge ou non ! Un $\exists$ suivi d'une implication, c'est si facile à avoir ! Par exemple $\exists n\ (n \geqslant 7 \Rightarrow n = 43)$ est totalement vrai. Il suffit de prendre $n = 2$ et on a faux implique on s'en fout.... je sais, c'est toujours contraire à ce que les élèves pensent car ils lisent trop vite les assertions mathématiques, en oubliant que l'essentiel, c'est... les variables (tiens, je l'ai déjà dit). Pour tout N il suffit donc de prendre $n = N - 1$ et l'implication est vraie.

c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon\ et\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Ceci est faux. A cause du et. Cette affirmation semble prétendre qu'une fois N_ε connu, eh bien, tous les entiers sont plus grands que N_ε et en plus on a l'inégalité. Mais ! Si tous les entiers sont plus grands que N_ε, c'est donc que N_ε vaut 0 ! C'est la quantification qui le dit. Mais maintenant que l'assertion vient de forcer la main ainsi, on $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$ pour tout n. Et pour tout ε. Vous savez quoi ? L'élève a écrit que la suite était constante égale à a. Il ne s'en doutait pas. Pour juste un mot...

Vous comprenez pourquoi un correcteur s'arrache les cheveux quand il lit vos quantifications qui ressemble aux vraies mais contiennent souvent un truc de travers...

d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	A partir du rang N qui ne dépend que de lui même, on a $\|u_n - a\|$ qui est plus petit n'importe quel ε. La suite est constante égale à a à partir du rang N. Et ce rang N est donné par la quantification.

e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Même chose qu'au dessus.

Et malgré tout, après cet exercice, qui va quantifier correctement, sans oublier un symbole ici ou là, et sans transformer un $\Rightarrow$ en « du coup » ?

◃40▹ ♡ Pouvez vous trouver une partie A de $\mathbb{R}$ vérifiant

a	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 2$
b	$Sup\{x \mid x \in A\} = 2$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 1$
c	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{\sin(x) \mid x \in A\} = 1$
d	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x - y \mid x \in A,\ y \in A\} = 5$

Pour a, une possibilité est $[-\sqrt{2},\ 1]$

Si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers 2, la suite des carrés va converger vers 4. Et $Sup\{x^2 \mid x \in A\}$ ne sera plus majoré par 1 (mais « au mieux par 4).
b est impossible.

Pour le c, prenons $\left[-\dfrac{3.\pi}{2},\ 1\right]$.

Pour le d je propose $[-4,\ 1]$.
La borne supérieure est 1 (atteinte pour $x = 1$).
On encadre $-4 \leqslant x \leqslant 1$
$-4 \leqslant y \leqslant 1$
$-1 \leqslant -y \leqslant 4$
$-5 \leqslant x - y \leqslant 5$
L'ensemble $\{x - y \mid x \in A,\ y \in A\}$ est majoré par 5 (et le majorant 5 est atteint).

En fait, avec $Sup\{b - a \mid b \in A$ et $a \in A\}$, on mesure la longueur d'un ensemble A. On dit aussi « son diamètre » (plus grande distance entre deux points de A).

◃41▹ Déterminez la borne supérieure de $\left\{\dfrac{n}{n.m+1}\ \middle|\ (n,\ m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ après avoir prouvé que cet ensemble est majoré et minoré.
Pouvez vous déterminer la borne supérieure de $\left\{\dfrac{n}{n.m+1}\ \middle|\ (n,\ m) \in \mathbb{N}^2\right\}$?

Le premier est majoré par 1 *(et minoré par 0)* et sa borne supérieure est 1 vers laquelle on tend pour $m = 1$ et n qui tend vers l'infini.
La borne inférieure est 0, avec n égal à 1 et m qui tend vers l'infini.

Le second est minoré par 0 *(borne inférieure atteinte d'ailleurs)*.
Mais il n'est pas majoré ! Prenez $m = 0$ et laissez filer n.

◃42▹ Pourquoi est ce que si on pose $A \times B = \{a \times b \mid a \in A,\ b \in B\}$ on n'a pas forcément $Sup(A \times B) = Sup(A) \times Sup(B)$.

Déjà, $A \times B$ n'est peut être même plus majoré.
Prenons $A =]-\infty,\ 0]$ et $B = \{-1\}$.
L'ensemble $A \times B$ est alors $[0,\ +\infty[$. Plus de borne supérieure.

Sinon, même avec A et B bornés.
$A = [-3,\ 1]$ et $B = [-4,\ 1]$. Chacun a pour borne supérieure 1 *(atteinte)*, et $A \times B$ a pour borne supérieure 12 *(atteinte aussi)*.

◃43▹ Déterminez $Inf\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ et $Sup\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (si ils existent).

On détermine des éléments de l'ensemble, suivant la parité de n :

$1+1$		$1+\frac{1}{4}$		$1+\frac{1}{16}$		$1+\frac{1}{64}$
	$-1+\frac{1}{2}$		$-1+\frac{1}{8}$		$-1+\frac{1}{32}$	

La borne supérieure est 2. Atteinte pour $n = 0$.
Chaque $(-1)^n + 2^{-n}$ se majore bien par $1 + 1$.

La borne inférieure est -1. Non atteinte, mais limite d'une suite d'éléments de l'ensemble..
Quoi qu'il en soit $(-1)^n \geqslant -1$ et $2^{-n} \geqslant 0$, donc en sommant $(-1)^n + 2^{-n} \geqslant -1$. .
la suite $(-1)^{2.p+1} + 2^{-2.p-1}$ converge vers -1

◁44▷ Montrez : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n,\ \left(\left(n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\right) \Rightarrow \left(\left|a_n - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)\right)$ sachant $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-3}$.

On doit passer (pour n et ε quelconques) de $\left(n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\right)$ et $\left(\left|a_n - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)$.

Regardons notre objectif : $\left|a_n - 1\right| = \left|\frac{n^2+1}{n^2-3} - 1\right| = \frac{4}{|n^2-3|}$.

Supposons n plus grand que $n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\big)$, on a alors $n \geqslant \sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}$ puis $n^2 \geqslant 3 + \frac{4}{\varepsilon}$.

On a alors $n^2 - 3 \geqslant \dfrac{4}{\varepsilon}$ (lui même positif). On peut donc passer aux inverses : $\left|\dfrac{1}{n^2-3}\right| = \dfrac{1}{n^2-3} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

◁45▷ Déterminez $Inf\left\{Sup\{(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ (commencez, pour a fixé par déterminer $Sup\{(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ par exemple par variation de fonction si vous n'êtes ni matheux ni physicien, sinon,pensez à $A.\cos(t+\varphi)$).

Pour a donné, on étudie $Sup\{(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
On écrit en fait $(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) = \sqrt{(1+2.a)^2 + (2+a)^2}.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi (amplitude et déphasage).

La borne supérieure est $\sqrt{(1+2.a)^2 + (2+a)^2}$, atteinte pour $t = \varphi$ (et c'est un truc en $Arctan\left(\dfrac{2+a}{1+2.a}\right)$.

On cherche la borne inférieure de ce trinôme du second degré (celui sous la racine).
On l'atteint en $\dfrac{-4}{5}$ et il vaut $\dfrac{9}{5}$.
La borne inférieure est donc $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

A chaque fois, borne supérieure et borne inférieure sont atteintes.

◁46▷ Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \cup B$ a une borne supérieure à exprimer à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

Si A est majorée par M et B par K, alors $A \cup B$ est majoré par $Max(M,\ K)$.
Proprement : pour x dans $A \cup B$, on a soit $x \in A$ et alors $x \leqslant M \leqslant Max(M, K)$
soit $x \in B$ et alors $x \leqslant K \leqslant Max(M, K)$
De plus $A \cup B$ est non vide.
On note $\alpha = Sup(A)$ et $\beta = Sup(B)$.

Sans restreindre la généralité, on va supposer $\alpha \leqslant \beta$. Et on va montrer que β est la borne supérieure de $A \cup B$.
C'est un majorant de $A \cup B$, comme indiqué au dessus.

Par caractérisation, il existe une suite d'éléments de B qui tend vers β : (b_n).
Les b_n sont dans B donc dans $A \cup B$.
Il existe donc une suite d'éléments de $A \cup B$ qui tend vers ce majorant de $A \cup B$.
Cette fois, par l'autre sens de la caractérisation de la borne supérieure, on reconnaît $\beta = Sup(A \cup B)$.

Sinon, on pouvait aussi passer par « tout autre majorant H de $A \cup B$ est forcément plus grand que β ».
En effet, un tel majorant H majore tous les éléments de $A \cup B$. Il majore donc en particulier tous les éléments de B.
Il est donc plus grand que β.