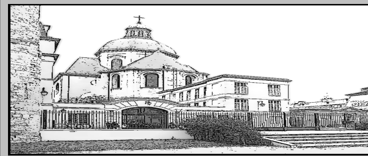
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 3 mars
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD19

◁0▷ Montrez que pour tout x réel, les deux suites $\left(\frac{[10^n.x]}{10^n}\right)$ et $\left(\frac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ encadrent x et convergent vers x.
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$. Montrez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

◁1▷ **Un sous-groupe de** $(\mathbb{R}, +)$ **dense dans** $\mathbb{R}$. On admet que π est irrationnel.
1- Montrez que $\{a + 2.b.\pi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ *(noté G)* est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2- On pose $H = G \cap]-\infty, 0[$. Montrez que c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On suppose que H a un plus grand élément, qu'on va noter α. Montrez par récurrence que pour tout n, $-n.\alpha$ est dans G.

3- Montrez alors que $G \cap]0, -\alpha[$ est vide. Montrez par récurrence sur n que chaque $]-n.\alpha, -(n+1).\alpha[\cap G$ est vide. Déduisez que 1 et $2.\pi$ sont tous deux de la forme $p.\alpha$ et $q.\alpha$ pour p et q entiers convenables. Concluez que π est rationnel. (? !)

4- Déduisez que la borne supérieure de H n'est pas atteinte. Déduisez qu'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'éléments de G qui converge vers α. Que fait la suite $(a_n - a_{n+1})$? Est-elle dans G ?

5- Déduisez que pour tout ε strictement positif il existe au moins un élément dans $]0, \varepsilon[\cap G$. Combien y en a-t-il en fait ?

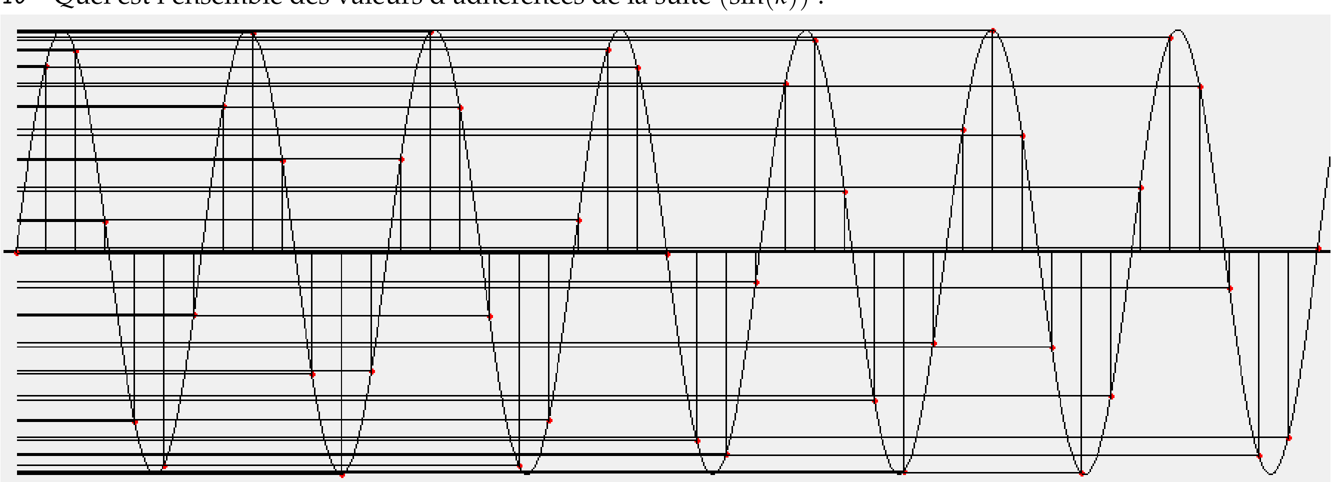
6- On se donne un intervalle $[a, b]$ non réduit à un point. Montrez qu'il existe un élément γ de G dans $]0, b-a[$.
Montrez alors que $\left[\frac{b}{\gamma}\right].\gamma$ est dans G et aussi dans $[a, b]$.

7- Combien y a-t-il de points de G dans $[a, b]$?

8- On se donne λ dans $]-1, 1[$. On se donne ε strictement positif. On pose $I = [Arcsin(\lambda - \varepsilon),\ Arcsin(\lambda + \varepsilon)]$. Montrez qu'il existe au moins un élément g de G dans I. Déduisez $|\sin(g) - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Déduisez qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n) - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Montrez qu'il existe aussi n' dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n') - \lambda| \leqslant \varepsilon/2$.

9- Déduisez qu'il existe une sous-suite de la suite $(\sin(k))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers λ.

10- Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\sin(k))$?



◁2▷ ♡ **-a-** Déterminez $Sup\{\cos(x) + \sin(y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
-b- Déterminez $Sup\{\cos(x) + \sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
-c- Déterminez $Sup\{\cos^2(x) + \sin^2(y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
-d- Déterminez $Sup\{\cos^2(x) + \sin^2(x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

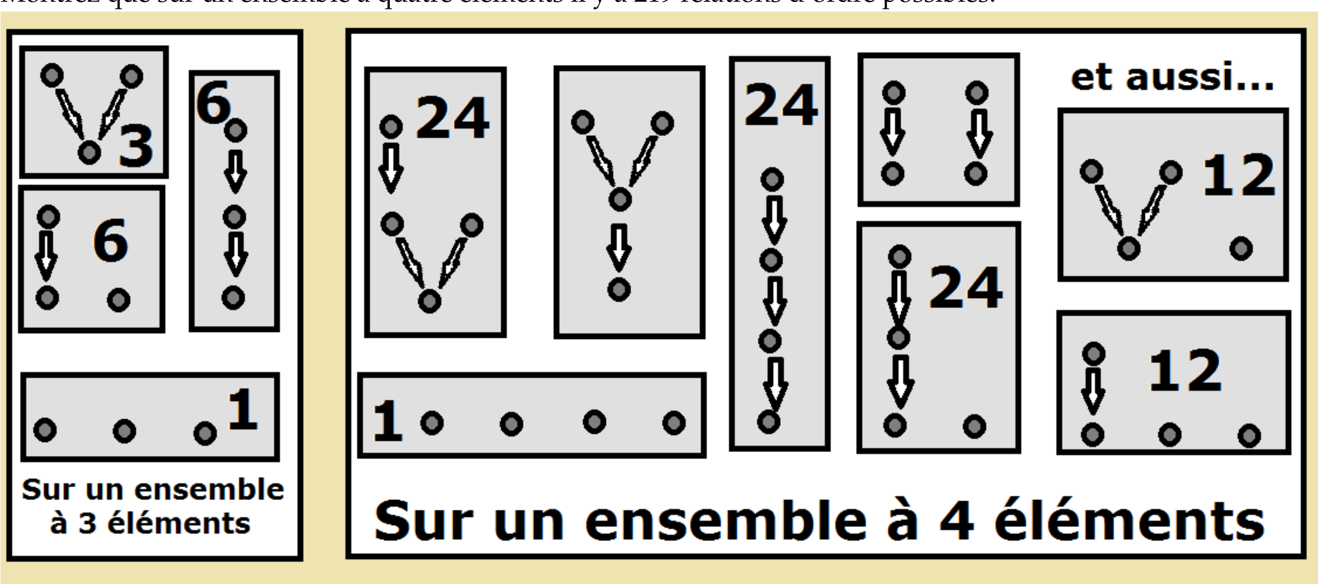
-e- Déterminez $Sup\{\cos^2(x) + 2.\sin^2(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

◁3▷ A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, vérifiant $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$.
Montrez que A admet une borne supérieure α et B une borne inférieure β.
Montrez $\alpha \leqslant \beta$.
Montrez que si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\alpha = \beta$.

◁4▷ Une loi $*$ est compatible à droite avec une relation $\blacktriangleleft$ sur un ensemble E si $\forall (a, b, c) \in E^3,\ (a \blacktriangleleft b) \Rightarrow (a * c) \blacktriangleleft (b * c)$.
Parmi ces couples, lesquels sont compatibles, et vérifiez au passage si ce sont des relations d'ordre, d'équivalence :

ensemble	loi	relation	réflexive	symétrique/anti	transitive
$\mathbb{N}^*$	$+$	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	$\subset$			
$P(E)$	Δ	le cardinal de leur intersection est pair			
$\mathbb{N}^*$	$\times$	« a au moins un diviseur commun avec »			
$\mathbb{R}^+$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{N}$	puissance	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	« rencontre »			
$\mathbb{Z}^*$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{C}[X]$	$\times$	a une racine commune avec			

◁5▷ Montrez que sur un ensemble de cardinal n il y a $n!$ relations d'ordres totaux.
Sur un ensemble à deux éléments a et b il y a trois relations d'ordre :
• un ordre partiel (l'égalité) a et b ne sont pas en relation
• deux ordres totaux : $a \triangleleft b$ | $a \triangleleft b$
Montrez que sur un ensemble à trois éléments il y a dix neuf relations d'ordre possibles.
Montrez que sur un ensemble à quatre éléments il y a 219 relations d'ordre possibles.



Ne cherchez pas à expliciter des relations d'ordre par des formules, on fait des maths, pas de la physique qui prétend décrire un monde réel. Ces relations sont caractérisées par leur graphe, et tant pis si vous trouvez absurde ou abscons de dire « a ◀ b ◀ d et c est à côté sans relation avec eux ».

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

CCP 2009 MP 3 heures

Le résultat de deux polynômes P et Q se calcule à l'aide de leurs coefficients (sous la forme d'un déterminant) et permet de savoir si les deux polynômes ont une racine commune (sans chercher ces racines).
Le discriminant d'un polynôme P (qeul que soit son degré) est le résultat de P et P'. Il se calcule à l'aide des coefficients de P et permet de savoir si l'une des racines de P est aussi racine de P' (c'est à dire « il permet de savoir s le polynômea une racine double »).

I∼0) p et q sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0),\dots,(X^{p-1},0),\ (0,1),\ (0,X),\dots(0,X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté E).

I∼1) A et B sont deux polynômes, de degrés respectifs q et p, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X)=\lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X-\alpha_j)$ et $B(X)=\lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X-\beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X)=\sum_{k=0}^{q}a_k.X^k$ et $B(X)=\sum_{k=0}^{p}b_k.X^k$. On définit f sur E par $f((P,Q))=A.P+B.Q$. Montrez que f est linaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f)=\{(P,Q)\in E\mid f((P,Q))=0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

I∼3) Montrez que f est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$.

I∼4) Montrez que si A et B ont une racine commune r si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$.

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand C décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

I∼7) Montrez que f est bijective de E dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

$II\sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

Elle est de format $p+q$ sur $p+q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A=1+2.X+3.X^2$
et $B=4+5.X+6.X^2+7.X^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite.

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A=X^2-3.X+2$ et $B=X^3-2.X^2-5.X+6$.

II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes.

II∼2) On appelle résultant de A et B le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de A et A ? Le résultant est il un opérateur commutatif ?

II∼3) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $a.X^2+b.X+c$.

II∼4) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $X^3+a.X+b$.

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base E le vecteur U, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$.

IV∼0) Montrez que $X^2-s.X+p$ et $X^2-s'.X+p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2+p.s'^2+p'.s^2+p'^2$ est égal à $2.p.p'+(p+p').s.s'$.

V∼0) Dans cette partie : $A=X^4+X^3+1$ et $B=X^3-X+1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. Montrez que A et B n'ont pas de racine commune.

V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0+B.Q_0=1$. D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez.

V∼2) Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P + B.Q = 1$ *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P - P_0).A = (Q_0 - Q).B$).*

VI∼0) En utilisant les polynômes $A = X^2 - 3$ et $B = (y - X)^2 - 7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré Γ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{ \begin{array}{lcll} x(t) & = & t^2 & +t \\ y(t) & = & t^2 & -t \quad +1 \end{array} \right|$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet $(x,\ y,\ t)$ de $\mathbb{R}^3$:$A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établissez que si un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array} \right|$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune.

VII∼1) Déduisez qu'un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe Γ vérifie $x^2 + y^2 - 2.x.y - 4.y + 3 = 0$. Mettez l'équation $x^2 + y^2 - 2.x.y - 4.y + 3 = 0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ où S est une matrice symétrique. Donnez le polynôme caractéristique de S et son nombre de valeurs propres réelles..

◃6▹ Existe-t-il M vérifiant $Com(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Même question avec $Com(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◃7▹ $\dfrac{4}{3.5} + \dfrac{9}{8.10} + \dfrac{25}{24.26} + \dfrac{64}{63.65} + \ldots = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(F_n)^2}{((F_n)^2 - 1).((F_n)^2 + 1)}$ =?.
Et si vous ne trouvez pas, écrivez au moins le programme qui calcule cette somme de 2 à N donné.

◃8▹ ♣ Devant vous n pièces, toutes orientées côté pile. A chaque fois, vous avez le droit de retourner toutes les pièces sauf une. Le but est qu'en un certain nombre d'opérations, toutes les pièces affichent leur côté face.
Avec n égal à 2, c'est évidemment facile $(P - P) \to (P - F) \to (F - F)$.
Donnez une solution en quatre coups pour n égal à 4.
Donnez une solution en six coups pour n égal à 6. Montrez qu'il n'y a pas de solution pour n égal à 5.
Finalement, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il y a une solution *(et pour vous, $n = 0$ est solution ?)*.

♯ Et si vous écriviez le programme Python qui pour n donné dans la liste des possibles affiche les étapes successives *(programme récursif ?)*.

◃9▹ Montrez qu'il ne faut pas lancer le script de la case de droite :

```
def f(a) :
....return(a*a*a*a+4)
```

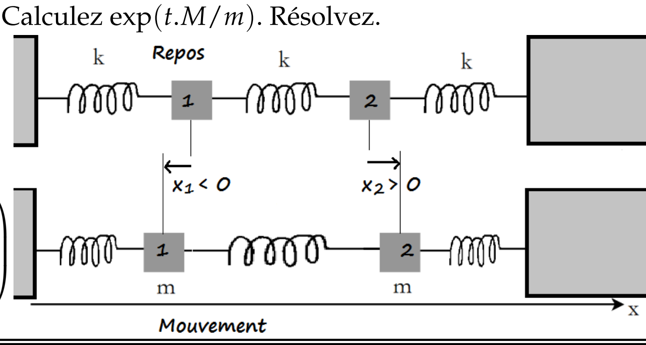
```
def prime(N) :
....for k in range(2,
int(sqrt(N))+1) :
........if N%k == 0 :
............return False
....return True
```

```
n = 2
while not(prime(f(n))) :
....n += 1
print(n)
```

◃10▹ On dispose trois ressorts (même constante de raideur k) et deux masses (identiques $m_1 = m_2$) sur une tige entre deux points fixes A et B (sur une tige dont la réaction compense le poids). Les mesures algébriques x_1 et x_2 sont mesurées par rapport aux positions au repos. Justifiez $U' = M.U$. (avec $a = \sqrt{k/m}$). Montrez que M a pour spectre $\{i.a,\ -i.a,\ i.\sqrt{3}.a,\ -i.\sqrt{3}.a\}$. Diagonalisez M. Calculez $\exp(t.M/m)$. Résolvez.

$U = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $3^5 = 243$

avec $a = \sqrt{k/m}$, $P = \begin{pmatrix} i.a & & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & \\ 1 & 1 & & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



$5^6 = 15625$

◃11▹ Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement

sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?

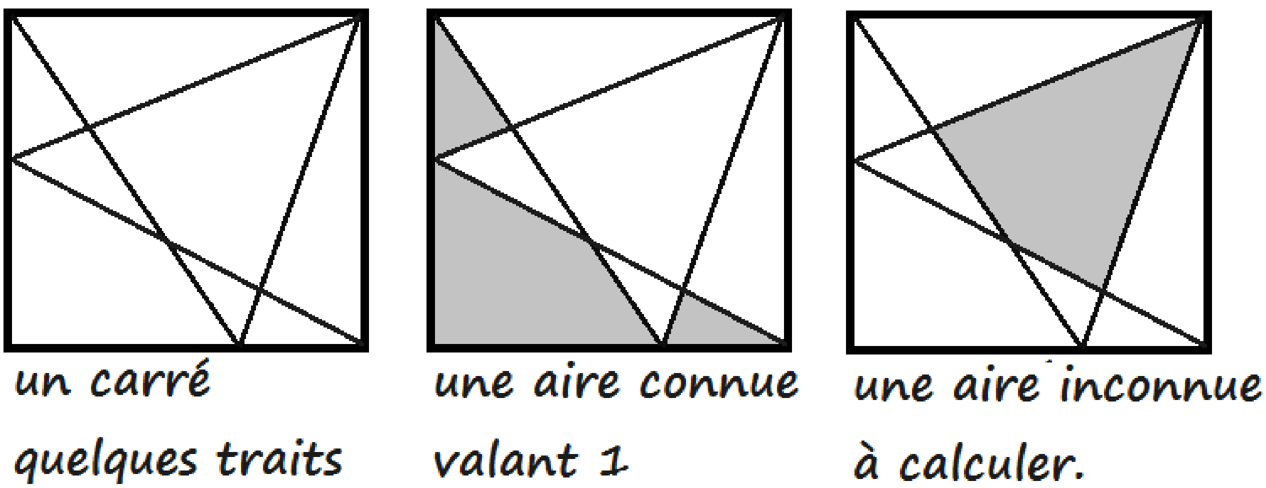
• L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?

• Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens [A ; B] et [E ; D] (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C. On donne : ABC = 40, CED = 60. Que vaut BCE ?

• L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?

• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

◁12▷



◁13▷ ♡ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

◁14▷ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.

Rappel : $\chi_M(X) = \det(M - X.I_n)$. Et pour $\chi_{M^{-1}}$ aurez vous besoin de calculer M^{-1} ? Ça dépend de « je suis matheux ou pas ».

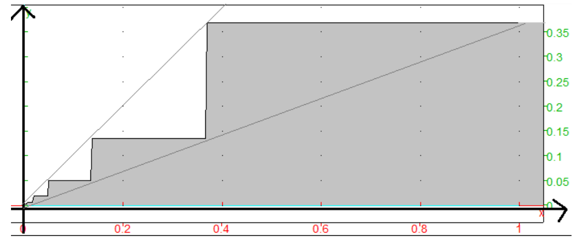
◁15▷ Montrez que l'ensemble des matrices de spectre rationnel (les valeurs propres sont dans $\mathbb{Q}$) n'est stable ni par addition, ni par multiplication.

◁16▷ ♡ Donnez toutes les matrices admettant $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres, de déterminant 10 et de trace 7.
(si vous commencez en posant quatre coefficients, c'est que vous n'êtes pas matheux, et si vous vous en tirez quand même, c'est que vous êtes...)

◁17▷ ♡ Sachant que M a pour polynôme caractéristique $X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$, donnez le polynôme caractéristique de $M + I_4$, $2.M$ et M^2.

◁18▷ ♡ Déterminez $Sup\{x - [x] \mid x \in [0,\ 5/2]\}$.
La borne supérieure est le plus petit majorant, par forcément dans l'ensemble.

◁19▷ Déterminez $Inf\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ et $Sup\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$.



♡ On définit $f = x \longmapsto \exp([\ln(x)])$. Prolongez la par continuité en 0 (encadrement, pas d'epsilon). Est elle alors dérivable ?

◁ 20 ▷ Calculez $\int_0^1 f(t).dt$.

La traitresse aime se faire mousser. Le Var est damné. Le facteur secoue sa botte au milieu de la piste. On manque de plus pour votre cas. L'urgentiste connait bien les thème des dures luttes.

◁ 21 ▷ ♡ Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right)$ converge vers 0.

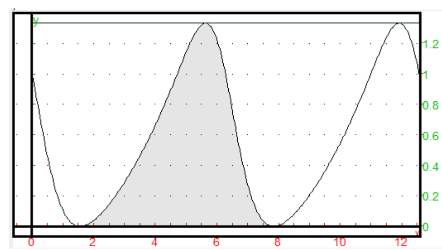
Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\frac{2.n+1}{n+3}\right)\right)$ converge vers $\ln(2)$.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$.

◁ 22 ▷ Il parait que l'application $x \longmapsto |2.x - 2.[x] - 1|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, prouvez le (juste par limite à droite, à gauche, sans en revenir aux η_ε).
Prouvez aussi qu'elle est périodique. Calculez son intégrale de 0 à 3.

Déterminez maximum et minimum de $x \longmapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}$.

Question plus facile : Montrez $Min\left\{\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2} \mid, x \in \mathbb{R}\right\} = 0$ et $Max\left\{\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2} \mid, x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{4}{3}$ (cours sur $a.\cos(t) + b.\sin(t)$ après soustraction).

◁ 23 ▷ Calculez l'aire de la partie en gris.



◁ 24 ▷ On sait que l'application $M \longmapsto Tr(M)$ est une forme linéaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ vérifiant $Tr(A.B) = Tr(B.A)$.
En existe-t-il d'autres ?
Soit f linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(A.B) = f(B.A)$.
Trouvez A et B vérifiant $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouvez A et B vérifiant $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déduisez $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+d).f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$.
Généralisez en dimension n.

◁ 25 ▷ ♡ Explicitez un N_ϵ pour la convergence de $\frac{e^n+1}{e^n+5}$ vers 1 quand n tend vers l'infini.

◁ 26 ▷ On donne u_0 et on pose $u_{n+1} = (u_n)^3$ pour tout n. Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n.
On donne v_0 et on pose $v_{n+1} = (v_n)^n$ pour tout n. Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n.

◁ 27 ▷ Complétez : $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-3| \leqslant 4\ et\ |x+2| \leqslant 3) \Leftrightarrow |x - \ldots| \leqslant \ldots$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-3| \leqslant 4\ ou\ |x+2| \leqslant 3) \Rightarrow |x-4| \leqslant \ldots$
$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-3| \leqslant 4\ ou\ |x+2| \leqslant 3) \Rightarrow |x - \ldots| \leqslant 6$
$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-3| \leqslant 4 \Rightarrow |x+2| \leqslant \ldots)\ et\ (|x+2| \leqslant \ldots \Rightarrow |x-3| \leqslant 4)$.

◁ 28 ▷ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme* $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$*)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

◁ 29 ▷ Montrez que $x \longmapsto x^3 + x$ *(notée f)* est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculez $\int_0^{10} f^{-1}(t).dt$ *(raisonnez, ne tentez pas d'exprimer*

f^{-1}, même si c'est faisable).

◁30▷ Un shikaku est une grille à découper en rectangles de côtés parallèles aux axes. Dans chacun de ces rectangles, il doit y a voir un nombre et un seul. Et ce nombre indique le nombre de cases du rectangle. Voilà, il n'y a pas plus à savoir.

			6			4			3
	6							3	
			3				5		
		4				3			2
7				6					
	6				2		3		
					4			8	
				2		4			
	9								
				2		8			

2007 by Uwe Wiedemann

		4		4		
			3			
				2		4
4	4		9			
3						3
4		2	3			

◁31▷ Complétez : $\forall x \in \mathbb{R}$, (☻ $\leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x -$ ☺$| \leqslant 4)$ / $\forall x \in \mathbb{R}$, $(|x-6| \leqslant$ ♪$) \Rightarrow (8 \geqslant x \geqslant$ ♫$)$.

◁32▷ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2.u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrez que la suite (u_n) existe et prouvez $u_n \geqslant 2^n$ pour tout n.
On pose $v_n = 2^{-n}.u_n$. Calculez $v_{n+1} - v_n$. Montrez que (v_n) est croissante, majorée. Déduisez l'existence d'un réel λ vérifiant $u_n \sim_{n\to+\infty} \lambda.2^n$.
Écrivez un script Python qui détermine λ à 10^{-3} près.

◁33▷ ♣ Voici des définitions *(ratées)* de "suite de Cauchon". Que pouvez vous déduire de chacune :

a	$\exists K \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \exists K \in \mathbb{N},\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$
d	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p + u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$
e	$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall K \in \mathbb{N},\ (K \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$
f	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p + q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \varepsilon)$

◁34▷ On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrez, en minorant $H_{2.n} - H_n$ que H n'est pas une suite de Cauchy.

Soit φ injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varphi(k)}{k^2}$. En minorant aussi $\phi_{2.n} - \phi_n$ montrez que ϕ n'est pas une suite de Cauchy (on pourra dire qu'une somme de n entiers distincts vaut au moins $0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1$.

◁35▷ Un élève a trouvé $N_\epsilon = \dfrac{1 - 2.e^\epsilon}{1 - e^\epsilon}$ dans la quantification $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant N_\epsilon \to |u_n - a| \leqslant \varepsilon$. Donnez une suite dont il a pu partir.

◁36▷ Montrez que deux et seulement deux des trois affirmations ci-contre sont vraie :

A	toute suite réelle convergente a un plus grand élément et un plus petit élément
B	toute suite réelle convergente a un plus grand élément ou un plus petit élément
C	toute suite réelle divergente vers $+\infty$ a un plus grand élément ou un plus petit élément

Rappel : l'une de ces définitions est « admet un plus grand élément » :

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_p$	$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_p$

(laquelle ?).

◁37▷ ♡ Montrez que la suite $(\cos(\pi.n!.r))_n$ converge si r est un rationnel donné.

◁38▷ On demandait de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, un élève a mal recopié et a calculé $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Son déterminant est il plus grand que le déterminant demandé ? Quelle est la valeur de la différence $|eleve - demande|$.

Si vous calculez réellement les deux déterminants de taille 4, vous n'aurez pas tort, mais vous ne serez pas digne de rester en MPSI2.

◁39▷ Un élève n'a pas bien recopié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a. Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon \ et\ \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$

◁40▷ ♡ Pouvez vous trouver une partie A de $\mathbb{R}$ vérifiant

a	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 2$
b	$Sup\{x \mid x \in A\} = 2$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 1$
c	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{\sin(x) \mid x \in A\} = 1$
d	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x - y \mid x \in A,\ y \in A\} = 5$

◁41▷ Déterminez la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1} \;\middle|\; (n,\ m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ après avoir prouvé que cet ensemble est majoré et minoré.
Pouvez vous déterminer la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1} \;\middle|\; (n,\ m) \in \mathbb{N}^2\right\}$?

◁42▷ Pourquoi est ce que si on pose $A \times B = \{a \times b \mid a \in A,\ b \in B\}$ on n'a pas forcément $Sup(A \times B) = Sup(A) \times Sup(B)$.

◁43▷ Déterminez $Inf\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ et $Sup\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (si ils existent).

◁44▷ Montrez : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n,\ \left(\left(n \geqslant \left[\sqrt{3 + \frac{4}{\varepsilon}}\right] + 1\right) \Rightarrow \left(\left|a_n - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)\right)$ sachant $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-3}$.

◁45▷ Déterminez $Inf\left\{Sup\{(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ (commencez, pour a fixé par déterminer $Sup\{(1+2.a).\cos(t) + (2+a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ par exemple par variation de fonction si vous n'êtes ni matheux ni physicien, sinon,pensez à $A.\cos(t+\varphi)$).

◁46▷ Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \cup B$ a une borne supérieure à exprimer à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.