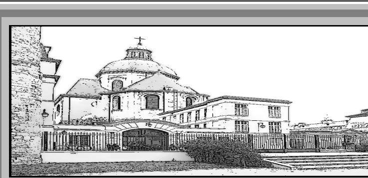
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 12 février
$\mathcal{M.P.S.I.}2$



2024 2025

IS18

♡ 0 ♡ Montrez pour tout n : $(3.n^2 + 2.n) \wedge (n+1) = 1$. 2 pt.

$\heartsuit_1$ Trouvez des entiers u, v et w pour chacune des identités ci dessous : 5 pt.
$85.u_1 + 39.v_1 = 1$
$85.u_2 + 39.v_2 + 15.w_2 = 1$
$85.u_3 + 15.v_3 + 51.w_3 = 1$

♯ Justifiez que l'un des deux nombres retournés par `scooby(2025)` vaut $(1+3+9+27+81).(1+5+25)$.
Que vaut l'autre ? 4 pt.

```
def scooby(n) :
....s1, s2 = 0, 0
....for k in range(1, n+1) :
........if n%k == 0 :
............s1 += k
............s2 += n
.....return s1, s2
```

◇ 0 ◇ Résolvez dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} 2.x = 13 & [7] \\ 13.x = 7 & [2] \\ 7.x = 2 & [13] \end{cases}$ 3 pt.

♠ 0 ♠ Trouvez des polynômes de degré 3, sous forme factorisée, répondant aux quatre premiers problèmes, puis tous les polynômes répondant au dernier problème. 3 pt.

$A(1)=1$	$B(1)=0$	$C(1)=0$	$D(1)=0$	$H(1)=0$
$A(2)=0$	$B(2)=1$	$C(2)=0$	$D(2)=0$	$H(2)=0$
$A(4)=0$	$B(4)=0$	$C(4)=1$	$D(4)=0$	$H(4)=0$
$A(8)=0$	$B(8)=0$	$C(8)=0$	$D(8)=1$	$H(8)=0$

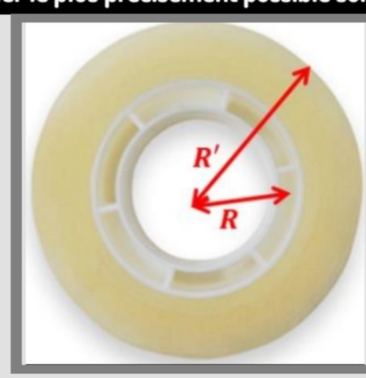
Trouvez tous les polynômes $P(X)$ vérifiant $P(1)=1$, $P(2)=-2$, $P(4)=4$ et $P(8)=-8$. 3 pt.

♣ a, b et c vérifient $a+b+c=2025$ et $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2025}$.
Montrez $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}=2025^{2025}$.
Conseil : factorisez le polynôme de racines a, b et c. 2 pt.

☺ Le cours (de seconde année) dit qu'une solution particulière de $y''_t + y_t = |\sin(t)|$ est
$t \longmapsto \int_0^t \sin(t-u).|\sin(u)|.du$ (notée F).
Justifiez
$F(x) = \int_0^x \sin(u).|\sin(x-u)|.du$
$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_x^{x+2.\pi} \sin(u).|\sin(x-u)|.du.$
$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_0^{2.\pi} \sin(\theta+x).|\sin(\theta)|.du.$
F est $2.\pi$périodique. 4 pt.

Mon rouleau de scotch a pour petit rayon R= 1,8 cm et pour grand rayon R'=2,5 cm.

Sachant que le rouleau mesure 25m, déterminer le plus précisément possible son épaisseur



- 3 pt -

♠ 1 ♠ Pour chacun des cardinaux k ci dessous, combien $(S_4, \circ)$ a-t-il de sous-groupes de cardinal k ? Complétez ce que vous pouvez en expliquant. 4 pt.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 12 février
M.P.S.I.2

2024 2025
IS18
CORRECTION

IS18 Un pgcd.

Certes, on peut vérifier pour les premières valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
$n+1$	1	2	3	4	5	6
$3.n^2+2.n$	0	5	16	33	56	85

Mais ceci ne prouve rien. Et surtout, ce serait une très mauvaise idée de partir sur une récurrence !
Comment voulez vous passer de « $n+1$ et $3.n^2+2.n$ n'ont pas de diviseur commun à il n'y en a pas entre $n+2$ et $3.n^2+8.n+5$ » sachant qu'il n'y a aucun lien entre les diviseurs de $n+1$ et ceux de $n+2$.

L'outil à tenter ici : une identité de Bézout entre nos deux entiers.

Et finalement, c'est une division euclidienne qui va nous aider

$$\begin{array}{rrr|rr} 3.n^2 & +2.n & & n & +1 \\ -(3.n^2 & +3.n) & & & \\ & -n & & 3.n & -1 \\ & -(-n & -1) & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

On peut donc écrire $(1).(3.n^2+2.n)+(-3.n+1).(n+1)=1$ et conclure que les deux entiers de l'énoncé sont premiers entre eux.

IS18 Identités de Bézout.

On a des entiers premiers entre eux deux à deux ou dans leur ensemble.
$85.u+39.u=1$
$85=5.17$ et $39=3.13$. On applique l'algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{rcrrr} 85 & = & 2. & 39 & +7 \\ 39 & = & 5. & 7 & +4 \\ 7 & = & 1. & 4 & +3 \\ 4 & = & 1. & 3 & +1 \\ 3 & = & 3. & 1 & \end{array}$$

et on remonte
$$\begin{array}{rrcrrl} 24. & 39 & - & 11. & 85 & =1 \\ 2. & 39 & - & 11. & 7 & =1 \\ 2. & 4 & - & 1. & 7 & =1 \\ 1. & 4 & - & 1. & 3 & =1 \end{array}$$

$85.u+39.v+15.w=1$
On profite de ce qu'on vient de faire : $85.(-11)+39.24+15.0=1$
Même si il y a d'autres solutions.

$85.u+15.v+51.w=1$

Là, pas moyen de jouer sur deux entiers premiers entre eux.

$85=5.17$	$15=5.3$	$51=17.3$	$85=5.17$
pgcd = 5		pgcd = 17	
	pgcd = 3		
pgcd = 1			

La seule identité qu'on puisse obtenir avec 85 et 15 c'est un 5 (leur pgcd) : $85.(-1)+6.15=5$.

On a pu écrire $(-1).17+6.3=1$ (car $17\wedge 3=1$) et multiplier par 5.

Et maintenant, 5 et 51 sont premier entre eux : $5.(-1)+51.1=1$ (Bézout facile).
On peut remplacer $\big(85.(-1)+6.15\big).(-1)+51.1=1$.

On pouvait aussi écrire une formule entre 15 et 51 (de pgcd 3) : $5.7-17.2=1$ puis $15.7-51.2=3$, puis combiner 83 et 3 premiers entre eux.

IS18 What's up Scooby-Doo ?

Que fait `scooby` après avoir initialisé deux accumulateurs à `0` ?
Elle fait défiler les entiers de `1` à `n` (`n` inclus) et teste lesquels sont des diviseurs de `n`.
Pour chaque diviseur k de `n`, la somme `s1` augmente de `k`.
C'est donc la somme des diviseurs de `n`.
Pour l'autre, comme la somme augmente de `n` à chaque fois, elle se contente de compter les `k`. Et on a `n` fois le nombre de diviseurs de `n`.

Comme on voit que le résultat $(1+3+9+27+81).(1+5+15)$ n'est pas un multiple de 2025, on se dit qu'il dot représenter la somme de tous les diviseurs.

En effet, on sait : $2025 = 3^4.5^2$. Les diviseurs de 2025 sont donc des nombres de la forme $3^a.5^b$avec a dans range(5) et b dans range(3).

La somme cherchée est une somme double $\sum_{a=0}^{4}\sum_{b=0}^{2} 3^a.5^b$et elle se sépare en

$$\Big(\sum_{a=0}^{4} 3^a\Big).\Big(\sum_{a=0}^{2} 5^b\Big)$$

Il nous faut ensuite juste le nombre de diviseurs.
Cette fois, il y en a autant que de termes dans le produit $(1+3+9+27+81).(1+5+25)$.
Et on en a 5×3 .
Le second nombre sera donc $5\times 3\times 2025$.

IS18 Congruences simultanées.

Mettons $\begin{array}{rcll} 2.x & = & 13 & [7] \\ 13.x & = & 7 & [2] \\ 7.x & = & 2 & [13] \end{array}$ sous la forme habituelle en multipliant par les inverses de 2 modulo 7, puis de 13 modulo 2 (oui, inutile) et de 7 modulo 13.

$$\begin{array}{rcll} 2.4.x & = & 13.4 & [7] \\ x & = & 7 & [2] \\ 2.7.x & = & 2.2 & [13] \end{array} \quad c'est\ à\ dire \quad \begin{array}{rcll} x & = & 3 & [7] \\ x & = & 1 & [2] \\ x & = & 4 & [13] \end{array}$$

Pour l'instant, on a raisonné par équivalences (multiplication par 4 dans un sens, par 2 dans l'autre).

On résout alors trois petits systèmes

$a=1\ [7]$, $a=0\ [2]$, $a=0\ [13]$	$b=0\ [7]$, $b=1\ [2]$, $b=0\ [13]$	$c=0\ [7]$, $c=0\ [2]$, $c=1\ [13]$	$x=0\ [7]$, $x=0\ [2]$, $x=0\ [13]$
$7.u+1=26.v$	$2.u+1=91.v$	$14.u+1=13.v$	$h\in 182.\mathbb{Z}$
$a=78$	$b=91$	$c=14$	
$particuliere = 3.78+91+4.14 = 381$			

On a nos solutions sous deux formes possibles $\{381+182.k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ou $17+182.\mathbb{Z}$

IS18 Trois nombres et le millésime de l'année.

On va utiliser les formules de Viète et supposant donc $a+b+c = 2025$ et $\dfrac{b.c+a.c+a.b}{a.b.c} = \dfrac{1}{2025}$ (qui donne $P = 2025.D$ avec nos notations).
Le polynôme se développe puis se factorise

$$(X-a).(X-b).(X-c) = X^3 - 2025.X^2 + D.X - 2025.D = (X-2025).(X^2+D)$$

On en déduit qu'une des trois racines vaut 2025. Sans perte de généralité, on va dire $a = 2025$.

On reporte dans la première équation : $b+c=0$ (et $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ qui ne nous apporte rien de plus).

Mais alors on calcule

$$a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} = (2025)^{2025} + b^{2025} + (-b)^{2025} = 2025^{2025}$$

même sans connaître la valeur de b (et de c) qui d'ailleurs est libre.

IS18 Des polynômes.

Regardons le premier problème : $A(1) = 1$
$A(2) = 0$
$A(4) = 0$
$A(8) = 0$

Le polynôme P doit être nul en 2, 4 et 8.
On nous dit qu'il doit être de degré 3.
On a donc ses trois racines et sa forme factorisée : $A(X) = (X-2).(X-4).(X-8)$.
Mais il ne vérifie pas $A(1) = 1$!
Oui, car on a oublié qu'on pouvait choisir aussi $A(X) = \lambda.(X-2).(X-4).(X-8)$. Ce polynôme a toujours les bonnes racines.

On ajuste λ pour avoir $A(1) = 1$: $A(X) = \dfrac{(X-2).(X-4).(X-8)}{-21}$.

On fait de même pour chacun des trois problèmes :

$A(1) = 1$ $A(2) = 0$ $A(4) = 0$ $A(8) = 0$	$B(1) = 0$ $B(2) = 1$ $B(4) = 0$ $B(8) = 0$	$C(1) = 0$ $C(2) = 0$ $C(4) = 1$ $C(8) = 0$	$D(1) = 0$ $D(2) = 0$ $D(4) = 0$ $D(8) = 1$
$A(X) = \dfrac{(X-1).(X-2).(X-4).(X-8)}{-21}$	$B(X) = \dfrac{(X-1).(X-4).(X-8)}{12}$	$C(X) = \dfrac{(X-1).(X-2).(X-8)}{-24}$	$D(X) = \dfrac{(X-1).(X-2).(X-4)}{168}$

Pour le dernier problème (« homogène »), il n'y a plus de contrainte de degré, mais le polynôme doit admettre pour racines 1, 2, 4 et 8.
On trouve $(X-1).(X-2).(X-4).(X-8)$.
Et même tous les $\lambda.(X-1).(X-2).(X-4).(X-8)$.
Et même $(X-1).(X-2).(X-4).(X-8).Q(X)$ pour tout polynôme $Q(X)$.

Comme ensuite on combine linéairement les contraintes, on va demander

$P(1) =$	1	$+0$	$+0$	$+0$	$+0$
$P(2) =$	0	-2	$+0$	$+0$	$+0$
$P(4) =$	0	$+0$	$+4$	$+0$	$+0$
$P(8) =$	0	$+0$	$+0$	-8	$+0$

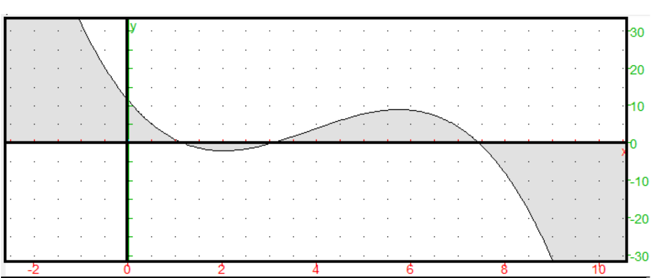
Il suffit de développer

$$P(X) = A(B) - 2.B(X) + 4.C(X) - 8.D(X) + H(X)$$

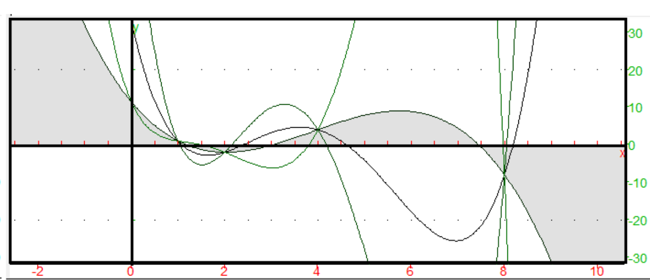
$$P(X) = \frac{(X-2).(X-4).(X-8)}{-21} - 2.\frac{(X-1).(X-4).(X-8)}{12} + 4.\frac{(X-1).(X-2).(X-8)}{-24} - 8.\frac{(X-1).(X-2).(X-4)}{168}$$

Si on le souhaite (mais on ne le souhaite pas si on est matheux), on développe cette solution particulière et on ajuste les homogènes

$$\frac{-3.X^3 + 35.X^2 - 105.X + 80}{7} + (X-1).(X-2).(X-4).(X-8).Q(X)$$



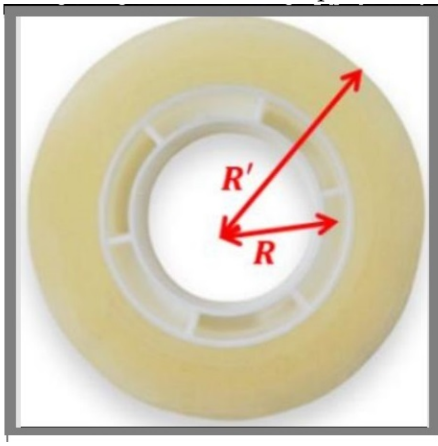
Notre particulière

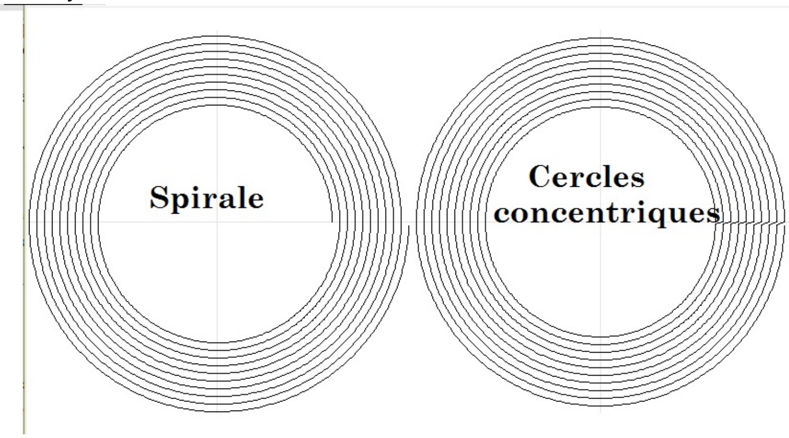


Particulière plus homogènes

IS18 Rouleau de scotch.

Le rouleau est enroulé en spirale autour du moyeu central.





Approximons cette spirale d'ailleurs imparfaite par des cercles successifs.
On passe d'un cercle de rayon R (longueur $2.\pi.R$) à un cercle de longueur R'.
Et le deuxième cercle avait pour rayon $R+e$ où e est l'épaisseur cherchée.
Si il y a N cercles (commencer à nommer les objets est un pas vers la solution), la différence $R'-R$ est égale à $N.e$.

Le k^{ieme} cercle a pour rayon $R+k.e$ et pour périmètre $2.\pi.(R+k.e)$.
La somme de tous les périmètres est alors $\sum_{k=0}^{N-1} 2.\pi.(R+k.e)$.
On effectue et on trouve $2.\pi.N.R+\pi.N.(N-1).e$.

Mais cette longueur totale est égale à L (ici 25 mètres).
On a donc une équation liant nos données. Deux équations en fait

$$2.\pi.N.R+\pi.N.(N-1).e = L \text{ et } N.e = R'-R$$

En remplaçant on a une équation du premier degré en N $2\times\pi\times 0,018\times N+\pi.0.007 = 25$.

J'applique et trouve 185 tours.

Remarque : pouvais-je avoir un ordre de grandeur du nombre de tours ?
Si tous les cercles avaient le même rayon initial R : $2.\pi.R = L$: 221 tours
Si tous les cercles avaient le même rayon final R' : $2.\pi.R' = L$: 159 tours

Je remonte et trouve $e = 4.4\times 10^{-5}$ mètres.

Mais peut on être plus simple ?
On introduit la largeur λ du rouleur, dont on sait bien qu'elle ne sert à rien, et on calcule le volume total de scotch.

Rouleau déroulé : $L\times\lambda\times e$ (parallélépipède très étiré)
Rouleur enroulé : $\pi.(R'^2-R^2)\times\lambda$ (surface latérale fois largeur).

On égalise et on simplifie par λ :

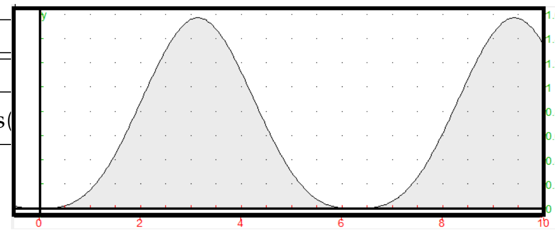
$$e = \frac{\pi.(R'^2-R^2)}{L}$$

On notera que si dans la formule $2.\pi.N.R+\pi.N.(N-1).e = L$ *on remplace* $N-1$ *par* N *pour ne pas se prendre la tête, on trouve* $2.\pi.N.R+\pi.N.N.e = L$ *puis* $N = \dfrac{L}{\pi.(R+R')}$ *puis finalement* $e = \dfrac{\pi.(R'-R).(R'+R)}{L}$ *et c'est bien la même formule.*

IS18 Intégrale et équation différentielle.

Certes, pour résoudre $y''_t + y_t = |\sin(t)|$, on peut raisonner par intervalle

t	$[0,\ \pi]$	π	
équation	$y''_t + y_t = \sin(t)$		$y''_t + y_t = \sin(t)$
une solution	$\dfrac{\sin(t) - t.\cos(t)}{2}$	$\pi/2$	$\dfrac{t.\cos(t) - \sin(t)}{2} - \pi.\cos($



Mais autant utiliser la formule obtenue par convolution.

Première égalité par changement de variable $v = x - u$:

$$F(x) = \int_0^x \sin(x-u).|\sin(u)|.du = \int_x^0 \sin(v).|\sin(x-v)|.(-dv) = \int_0^x \sin(v).|\sin(x-v)|.dv$$

Seconde égalité par périodicité et relation de Chasles :

$$F(x+2.\pi) = \int_0^{x+2.\pi} \sin(u).|\sin(x+2.\pi-u)|.du = \int_0^{x+2.\pi} \sin(u).|\sin(x-u)|.du$$

$$F(x+2.\pi) = \int_0^{x} \sin(u).|\sin(x-u)|.du + \int_x^{x+2.\pi} \sin(u).|\sin(x-u)|.du$$

Changement de variable encore $\theta = u - x$

$$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_{\theta=0}^{\theta=2.\pi} \sin(\theta+x).|\sin(\theta)|.d\theta$$

On peut couper en deux par relation de Chasles et tenir compte du signe (notre objectif est maintenant d'arriver à $F(x+2.\pi) - F(x) = 0$)

$$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta+x).\sin(\theta).d\theta - \int_{\theta=\pi}^{2.\pi} \sin(\theta+x).\sin(\theta).d\theta$$

Chaque intégrale se calcule alors en linéarisant

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta+x).\sin(\theta).d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos(x) - \cos(2.\theta+x)}{2}.d\theta = \ldots$$

On fait de même avec la seconde.

Mais il est encore plus agréable de recoller les morceaux en changeant de variable dans la seconde intégrale $\theta' = \theta - \pi$

$$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta+x).\sin(\theta).d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta'+\pi+x).\sin(\theta'+\pi).d\theta'$$

$$F(x+2.\pi) - F(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta+x).\sin(\theta).d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta'+x).\sin(\theta').d\theta'$$

et il ne reste rien.

On a donc prouvé $F(x+2.\pi) - F(x) = 0$ pour tout x.
La solution obtenue est périodique de période $2.\pi$.

On pourrait l'étudier sur une période pour donner son signe.

IS18 Sous-groupes de $(S_4, \circ)$.

S_4 est de cardinal 24, donc on ne cherche pas au delà de 24.
Et même, on ne cherche que parmi les diviseurs de 24 (merci Lagrange) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
						0		0		0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Un sous-groupe contient au moins le neutre. 0 est impossible. Et il n'y a que $\{Id\}$ comme sous-groupe de cardinal 1. De même pour le cardinal 24 : S_4 lui même.

Les sous-groupes de cardinal 2 sont faits du neutre et d'un élément qui est son propre symétrique.
On pense à ceux de la forme $\{Id,\ \overrightarrow{(1\,2)}\}$, $\{Id,\ \overrightarrow{(1\,3)}\}$, $\{Id,\ \overrightarrow{(1\,4)}\}$ jusqu'à $\{Id,\ \overrightarrow{(3\,4)}\}$.Mais j'ai moi même failli rater

$$\{Id,\ \overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}\}$$

Les sous-groupes de cardinal 3 contiennent un tricycle et son carré (=inverse). Et il suffit de choisir trois éléments parmi 4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	0	1	9	4		0		0		0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Avec S_3 on tient un sous-groupe de $(S_4,\circ)$ de cardinal 6.
De même en prenant les permutations qui laissent 2 invariant (permutations de la liste $[1,\ 3,\ 4]$) et ainsi de suite.

$$\{Id,\ \overrightarrow{(1\,3)},\ \overrightarrow{(1\,4)},\ \overrightarrow{(3\,4)},\ \overrightarrow{(1\,3\,4)},\ \overrightarrow{(1\,4\,3)}\}$$

Avec un quadricycle, son carré (double bicycle) et son cube (inverse) on a un sous-groupe de cardinal 4.

$$\{Id,\ \overrightarrow{(1\,3\,4\,2)},\ \overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(3\,2)},\ \overrightarrow{(1\,2\,4\,3)}\}$$

Le seul sous-groupe de cardinal 12 est A_4(les permutations de signature 1).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	0	1	9	4	3	0	4	0		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Et il y a trois sous-groupes de cardinal 8.
Saurez vous les trouver ?