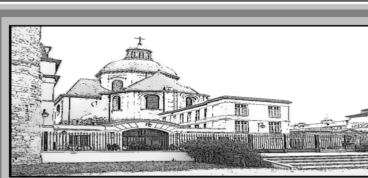
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 18 janvier

M.P.S.I.2



2024 2025

IS13

♡ 0 ♡ Montrez $\det(A) = \det(A^T)$ pour toute matrice carrée A de taille n sur n. 3 pt.

♡ 1 ♡ Démontrez pour f et g continues : $\left(\int_a^b f(t).g(t).dt\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (g(t))^2.dt$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Justifiez : pour que $n!$ soit un multiple de 2025 il suffit de prendre $n \geqslant 2025$.
Justifiez : pour que $n!$ soit un multiple de 2025 il faut prendre $n \geqslant 9$.
Complétez : pour que $n!$ soit un multiple de 2025 il faut et il suffit de prendre $n \geqslant$ ☺. 3 pt.

♡ 3 ♡ Montrez que $\binom{30}{15}$ est multiple de 11ou 23 (ou exclusif). 2 pt.

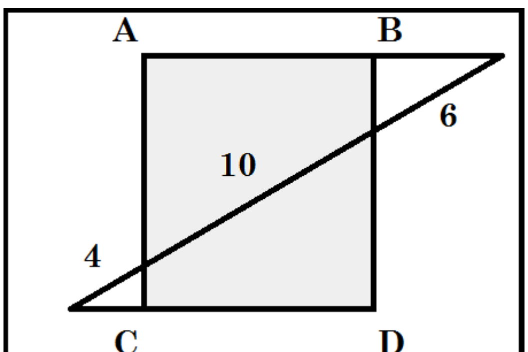
◇ 0 ◇ Diagonalisez les matrices suivantes 2 pt. + 1 pt. + 2 pt. + 3 pt.

$A = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 0 & 0 \\ -12 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 1 & 0 \\ -12 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$.

◇ 1 ◇ On donne $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -6 \\ 3 & -4 & 3 \\ 9 & -18 & 11 \end{pmatrix}$.
Calculez $\mathbb{A}^2$, $\mathbb{B}^2$, $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}.\mathbb{A}$. Montrez : $\mathbb{M} = 2.\mathbb{A} + \mathbb{B}$ et calculez alors $\mathbb{M}^n$ pour tout entier naturel n. 5 pt.

◇ 2 ◇ Pour tout n, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\binom{n}{k})^2}$. Montrez en calculant les premiers termes que la suite (a_n) n'est ni croissante, ni décroissante. 1 pt. Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant a_n - 2 \leqslant \frac{(n-1)}{(\binom{n}{k})^2}$. déduisez que la suite (a_n) converge et donnez sa limite. 3 pt.

♣ 0 ♣ Écrivez proprement la somme $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + +\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2024^2}+\frac{1}{2025^2}}$ et montrez qu'elle vaut simplement $\frac{2024 \times 2026}{2025}$. 4 pt. *Remarque :* $\sqrt{1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}} = \frac{111}{110}$ *et* $\sqrt{1+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{22^2}} = \frac{463}{462}$, *est ce par hasard ?*



(A B C D) est un carré.
Quelle est son aire ?

```
def test(n) :
....s = str(n)
....d = int(s[0])*10 + int(s[-1])
....return (n%d) == 0
```

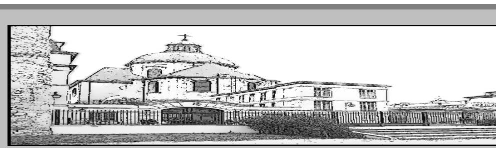
Justifiez que `test(2025)` va répondre `True`, de même que `test(1053)`, `test(915456)`. Que donneront `test(509465)`, `test(3)` et `test(237405)` ? 3 pt.

☼$_0$ Une suite géométrique (u_n) vérifie $u_{2!} = 15!$ et $u_{3!} = 16!$. u_0 est il entier ? 2 pt.

☼$_1$ Calculez $\int_1^2 \frac{\ln(p)}{p+p.(\ln(p))^2}.dp$. 2 pt.

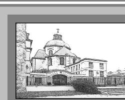
☼$_2$ Trouvez l'aire du carré (avec « opposé sur hypoténuse » ou Thalès, puis Pythagore, ça passe bien). 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 18 janvier
M.P.S.I.2



2024 2025
IS13
CORRECTION

IS13 Questions de cours.



On note a_i^k le terme général de A et α_i^k celui de sa transposée. par définition $\alpha_i^k = a_k^i$.
On calcule le déterminant de A^T avec la formule

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i\in\{1,2,\dots n\}} a_{\sigma(i)}^i$$

Dans le produit on pose $k = \sigma(i)$, ré-indexation de $\{1,\ 2,\dots n\}$

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{k\in\{1,2,\dots n\}} a_k^{\sigma^{-1}(k)}$$

Or, σ et sa réciproque ont la même signature (le produit des deux signatures vaut 1, et la signature vaut -1 ou 1).

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma^{-1}).\prod_{k\in\{1,2,\dots n\}} a_k^{\sigma^{-1}(k)}$$

Il ne reste qu'à poser $\sigma^{-1} = \tau$, ré-indexation de S_n et on reconnaît $\det(A^T) = \det(A)$ par mutisme des variables.

Qui sont ceux qui n'ont pas appris leur cours et se sont lancés dans une récurrence.

Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on développe $\displaystyle\int_a^b (\lambda.f(t) + g(t))^2.dt$ qui est positive (intégrale d'application continue positive).
Or, c'est le trinôme $\lambda^2.\Big(\displaystyle\int_a^b (f(t))^2.dt\Big) + 2.\lambda.\Big(\int_a^b f(t).g(t).dt\Big) + \Big(\int_a^b (g(t))^2.dt\Big)$.
Comme il est de signe constant sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif. On divise par 4 et on fait passer $\displaystyle\int_a^b f(t).g(t).dt\Big)^2$ de l'autre côté et c'est fini.

En toute rigueur il faut traiter à part le cas $\Big(\displaystyle\int_a^b (f(t))^2.dt\Big) = 0$ *pour lequel on n'a même pas de trinôme, mais pour lequel* f *est forcément nulle, et pour lequel l'inégalité est une brave égalité.*

Il suffit, c'est : $\forall n \in\in \mathbb{N},\ (n \geqslant 2025) \Rightarrow (n! \in 2025.\mathbb{Z})$.
Et si n dépasse 2025 , il y a au moins un facteur 2025 dans $n!$ (le 2025^{ieme} facteur d'ailleurs).

Il faut, c'est : $\forall n \in\in \mathbb{N},\ (n! \in 2025.\mathbb{Z}) \Rightarrow (n \geqslant 9)$.
Et on contrapose : $\forall n \in\in \mathbb{N},\ (n < 9) \Rightarrow (n! \notin 2025.\mathbb{Z})$.
Et en effet, 1, 2, 6, 24, 120, 720 et 40320 ne sont pas des multiples de 2025.

L'élève naïf dira : $9! = 2^7.3^4.5.7$ *n'est pas multiple de* 2025*. mais on demande juste une implication.*

Pour l'équivalence, on veut le premier entier à partir duquel $n!$ est un multiple de 2025. C'est à dire contient $3^4.5^2$.
Et en fait, déjà $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 2025.(1.2.1.4.1.2.7.8.1.2)$. Et pour les suivants, c'est encore mieux, puisque par transitivité $\boxed{\text{pour } n \text{ plus grand que 10 2025 divise } 10! \text{ qui divise } n!.}$

L'entier $\binom{30}{15}$ admet des facteurs premiers. Il faut montrer qu'on y trouve 11 ou 23 (mais pas les deux).
Le plus simple est de le décomposer en produit de facteurs premiers. Mais avec intelligence, c'est à dire pas avec

$$\binom{30}{15} = \frac{265252859812191058636308480000000}{(1307674368000)^2}$$

, on est en 210 (ou en 404). On écrit 15 facteurs au numérateur, et 15 facteurs au dénominateur, puis on simplifie

$$\binom{30}{15} = \frac{30\times 29\times 28\times 27\times 26\times 25\times 24\times 23\times 22\times 21\times 20\times 19\times 18\times 17\times 16}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11\times 12\times 13\times 14\times 15}\ (\star)$$

Quand je dis « on simplifie », c'est par exemple le 15 d'en bas avec le 30 d'en haut, de même le 14 avec le 28et quelques autres

$$\binom{30}{15} = \frac{2\times 29\times 2\times 27\times 2\times 25\times 2\times 23\times 2\times 21\times 2\times 19\times 1\times 17\times 1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1}$$

On simplifie ensuite le 7 et le 3 avec le 21, le 5 avec le 25 jusqu'à $\binom{30}{15} = 2^4.3^2.5.17.19.23.29$.
C'est un multiple de 23 et ce n'est pas un multiple de 11. Donc on a bien le « ou exclusif ».

Mais en fait, il y a encore plus simple.
On cherche les facteurs 11 au numérateur et au dénominateur dans la forme ($\star$).
Au numérateur, un facteur 11 et un seul (dans 22).
Au dénominateur, un facteur 11 et un seul (dans 11).
Au total, aucun facteur 11 dans le binomial.

Au numérateur, un facteur 23 et un seul (dans 23). Pas de facteur 23 au dénominateur. Exposant 1 pour 23.

IS13 Diagonalisation.

Pour A et B tout se passe bien :

	trace	déterminant	char_poli	valeurs propres	choix de D	choix de P
$A = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$	1	-2	$X^2 - X - 2$	-1 et 2	$D_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$P_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$	4	3	$X^2 - 4.X + 3$	1 et 3	$D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pour la seconde colonne de P_A, le système dégénéré donnait $\begin{array}{rcrcr} -10.x & + & 9.y & = & 2.x \\ -12.x & + & 11.y & = & 2.y \end{array}$ et j'ai préféré choisir $x = 3$ (donc $y = 4$) plutôt que $x = 1$ (et $y = 4/3$).

Et pour la matrice de taille 4, on raisonne par blocs

$$\begin{pmatrix} P_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & P_B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} D_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & D_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_A.D_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & P_B.D_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.P_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & B.P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & P_B \end{pmatrix}$$

ou si vous préférez

$$\begin{pmatrix} P_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & P_B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} D_A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & D_B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (P_A)^{-1} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & (P_B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_A.D_A.(P_A)^{-1} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & P_B.D_B.(P_B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & B \end{pmatrix}$$

Une matrice diagonale est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et une matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $T = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 1 & 0 \\ -12 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$, il faut inventer. Il faudrait éliminer un bloc I_2 dans le coin.

On va donc proposer comme matrice de passage $\begin{pmatrix} P_A & Q \\ 0_2 & P_B \end{pmatrix}$ et on veut avoir

$$\begin{pmatrix} A & I_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P_A & Q \\ 0_2 & P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_A & Q \\ 0_2 & P_B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} D_A & 0_2 \\ 0_2 & D_B \end{pmatrix}$$

Case par case, ceci donne

$A.P_A = P_A.D_A$	$A.Q + P_B = 0_2$
$0_2 = 0_2$	$B.P_B = P_B.D$

Trois des cases ne posent aucun problème, seule la dernière nous donne une équation du premier degré :

$Q = -A^{-1}.P_B$.

IS13 Matrices de taille 3 sur 3.

La phase calculatoire est directe, il suffit de multiplier :

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A},\ \mathbb{B}^2 = \mathbb{B},\ \mathbb{A}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.\mathbb{A} = 0_{3,3}$$

La constatation $\mathbb{M} = 2.\mathbb{A} + \mathbb{B}$ repose sur le calcul aussi.
La suite devient plus intéressante, c'est là qu'il faut un peu improviser.
La relation $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.\mathbb{A}$, même avec un 2 permet d'appliquer la formule du binôme

$$\mathbb{M}^n = (2.\mathbb{A} + \mathbb{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(2.\mathbb{A})^{n-k}.\mathbb{B}^k$$

La relation allongée $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.\mathbb{A}$ donne ensuite qu'il ne reste que deux termes

$$\mathbb{M}^n = (2.\mathbb{A} + \mathbb{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(2.\mathbb{A})^{n-k}.\mathbb{B}^k = (2.\mathbb{A})^n + \mathbb{B}^n$$

Mais il y a encore mieux. En mettant en boucle $A.A = A$, on a $A^3 = (A.A).A = A.A = A$ et ainsi de suite.

$$\mathbb{M}^n = (2.\mathbb{A} + \mathbb{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(2.\mathbb{A})^{n-k}.\mathbb{B}^k = 2^n.\mathbb{A} + \mathbb{B}$$

Et sans binôme, cette formule se démontre aussi par récurrence sur n (plus grand que 1). L'initialisation est la question de l'énoncé, et pour l'hérédité, on écrit

$$\mathbb{M}^{n+1} = \mathbb{M}^n.\mathbb{M} = (2^n.\mathbb{A} + \mathbb{B}).(2.\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 2^{n+1}.\mathbb{A}.\mathbb{A} + 2^n.\mathbb{A}.\mathbb{B} + 2.\mathbb{B}.\mathbb{A} + \mathbb{B}^2 = 2^{n+1}.\mathbb{A} + 0_{3,3} + \mathbb{B}$$

On peut ensuite, si on est plus physicien que matheux expliciter $M^n = \begin{pmatrix} -2-2^n & 4+2^{n+2} & -2-2^{n+1} \\ 1+2^n & -2-2^n & 1+2^n \\ 3+3.2^n & -6-3.2^{n+1} & 3+2^{n+2} \end{pmatrix}$,
mais sincèrement, le matheux trouve plus explicite $\mathbb{M}^n = 2^n.\mathbb{A} + \mathbb{B}$.

IS13 Exercice Python.

On prend en entrée un nombre `n` qui doit être un entier.	2025	1053	915456	509465	3	237405
On le convertit en chaine de caractères appelée `s`.	'2025'	'1053'	'915456'	'509465'	'3'	'237405'
On prend le premier caractère `s[0]` qu'on convertit en entier.	2	1	9	5	3	2
On prend le dernier caractère `s[-1]` qu'on convertit en entier.	5	3	6	5	3	5
On combine avec `10*premier+dernier`.	25	13	96	55	33	25
On teste si cet entier `d` à deux chiffres divise `n`.	2025	1053	915456	509465	pas	pas
	=25*81	=13*81	=96*9536	=55*9263	divisible	divisible
Réponse	True	True	True	True	False	False

IS13 Somme d'inverses de carrés de binomiaux.

On calcule les premières sommes

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$a_0 = \dfrac{1}{1^2} = 1$	$a_1 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1^2} = 2$	$a_2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{1} = 2,5$	$a_3 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{20}{9} 2.22\ldots$

La relation $a_0 < a_1 < a_2$ montre que (a_n) n'est pas décroissante.
La relation $a_2 > a_3$ montre que (a_n) n'est pas décroissante.

On cherche juste des contre-exemples : $\exists n,\ a_n < a_{n+1}$ et $\exists n,\ a_n > a_{n+1}$.

On constate qu'à partir de $n = 1$ il y a deux termes au moins dans la somme

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}^2} + 1 \geqslant 2$$

car les termes du milieu sont positifs. Ensuite, comptons les termes : il y en a $n-1$. Les plus grands sont $\dfrac{1}{\binom{n}{1}^2}$ et $\dfrac{1}{\binom{n}{n-1}^2}$ puisque la liste $k \longmapsto \binom{n}{k}$ est croissante puis décroissante. On a donc cette fois en comptant juste

$$2 \leqslant a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}^2} + 1 \leqslant 1 + (n-1).\frac{1}{n^2} + 1$$

Comme le membre de droite $2 + \dfrac{n-1}{n^2}$ converge vers 2, le théorème d'encadrement du sandwich des gendarmes donne à la fois la convergence et la limite : 2.

Attention, ce n'est pas un passage à la limite, c'est mille fois plis fort.
Si vous dites « je passe à la limite dans $2 \leqslant a_n \leqslant 2 + \dfrac{n-1}{n^2}$ et j'ai $2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant 2$ », vous avez la naïveté déconcertante du papillon de nuit dans une salle de T.P. de physique.
Vous pensez que tout a une limite. Et ça, c'est être aussi con qu'un balai brosse au sommet du Mont-Blanc.
Rappelons $-2 \leqslant (-1)^n \leqslant 2$ pour tout n, mais on n'a pas $-2 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \leqslant 2$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

IS13 Une somme avec des racines.

Proprement, la somme est $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$. Chaque radical existe et se simplifie en fait très bien

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2.(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2.(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{n^4 + 2.n^3 + 3.n^2 + 2.n + 1}}{n.(n+1)} = \frac{\sqrt{(n^2+n+1)^2}}{n.(n+1)}$$

il suffit en effet de développer $(n^2+n+1)^2$ et de comparer à $n^4 + 2.n^3 + 3.n^2 + 2.n + 1$
ou même d'écrire $(n^2+n+1)^2 - n^2.(n+1)^2 = (n^2+n+1-n^2-n).(n^2+n+1+n^2+n)$

Bref, on a juste

$$\sum_{n=1}^{2024} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{n=1}^{2024} \frac{n^2+n+1}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{2024} \left(1 + \frac{1}{n.(n+1)}\right)$$

Le compteur nous donne 2024, et la somme télescopique $\displaystyle\sum_{n=1}^{2025} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ nous donne $1 - \dfrac{1}{2025}$. On peut conclure avec un résultat général

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = N + 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{(N+1)^2 - 1}{N+1} = \frac{(N+1+1).(N+1-1)}{(N+1)^2}$$

IS13 Suite géométrique et factorielles. Une intégrale.

Notons $u_0$le premier terme de la suite géométrique et r sa raison. Aucun n'est nul, et on a

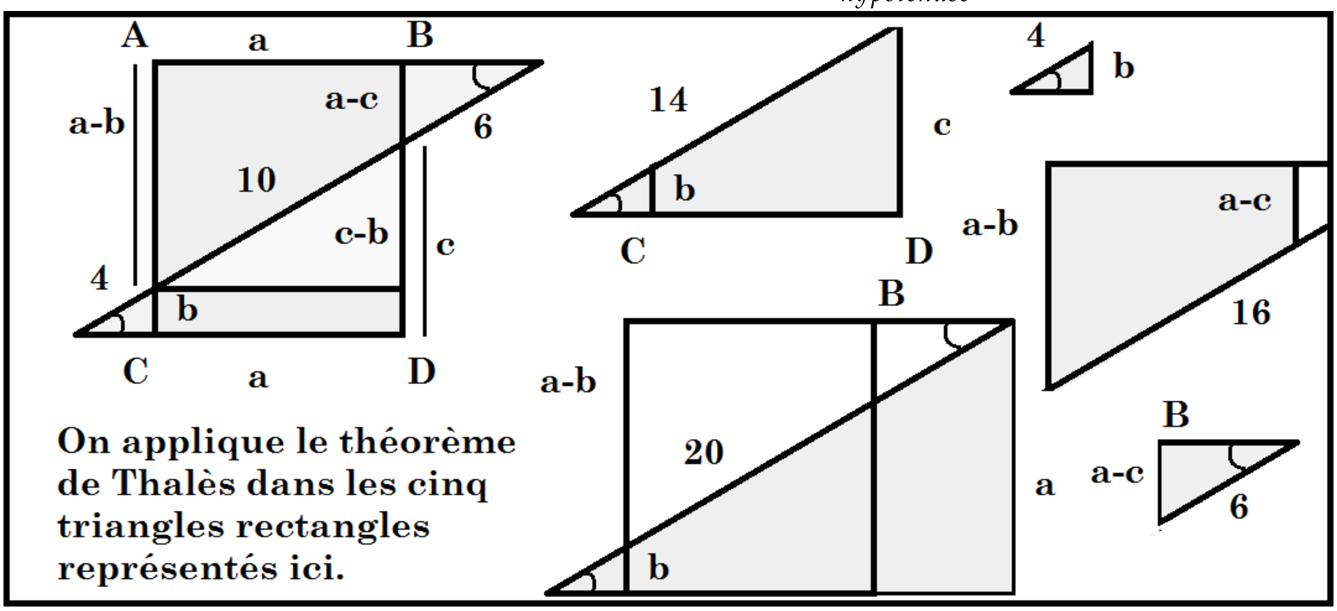
$$u_0.r^2 = u_2 = u_{2!} = 15! \; et \; u_0.r^6 = u_6 = u_{3!} = 16! = 16.15!$$

Par quotient $r^4 = 16$ d'où $r = 2$. Ou $r = -2$. Ou $r = 2.i$ ou $r = -2.i$ puisque l'énoncé ne dit pas si la suite est réelle, complexe, positive...
Quoi qu'il en soit, $u_0 = 15!/r^2 = \pm 15!/2$ (expression mathématique sans ce $\pm$: $u_0 \in \{15!/2, \; -15!/2\}$.
En tout cas, u_0 est un entier naturel ou relatif (pour relatif, il faut prendre une raison imaginaires).

L'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln(p)}{p + p.(\ln(p))^2}.dp$ existe, et nous déroute par sa variable p par rapport à nos habitudes en x, u, y ou t. Mais pourquoi pas.
D'autant qu'on change de variable :♫ $= \ln(p)$ va aller de 0 à $\ln(2)$.
L'intégrale devient $\int_{♫=0}^{\ln(2)} \frac{♫}{1+♫^2}.d♫$ et se calcule avec un logarithme $\frac{\ln(1+♫^2)}{2}$ on trouve $\frac{\ln(1+(\ln(2))^2)}{2}$ qu'on ne cherchera pas à simplifier.

IS13 Un carré dont on cherche l'aire.

On commence par nommer quelques distances pour s'y retrouver (nommer les objets pour les contrôler).
Mais pas trop car certaines se déduisent d'autres.
On applique alors le théorème de Thalès dans cinq triangles.
Ou plutôt, on calcule la tangente de l'angle mis en valeur sur la figues ($\frac{oppose}{hypotenuse}$)



	petit en bas	grand en bas	petit en haut	grand en haut	très grand
$\tan(\alpha) =$	$\frac{b}{4} =$	$\frac{c}{14} =$	$\frac{a-c}{6} =$	$\frac{a-b}{16} =$	$\frac{a}{20}$

On effectue les produits en croix $2.c = 7.b$, $3.c = 7.a - 7.c$, $8.a - 8.c = 3.a - 3.c$ et $5.a - 5.b = 4.a$.

Ces équations sont redondantes, on trouve juste $a = 5.b$ et $c = 7.b/2$.

Mais il est temps d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle de côtés a, $c - b$[1] et 10.

On a donc $a^2 + (c-b)^2 = 10^2$ et avec juste a : $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 100$
On extrait a^2 et on n'a pas besoin d'aller plus loin, puisque seul a^2 nous intéresse. Et il vaut 80 (unités).

1. en reportant, $c - b$ vaut $a/2$