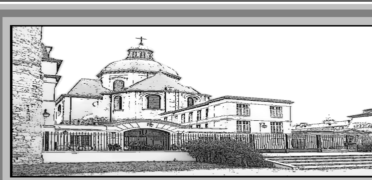
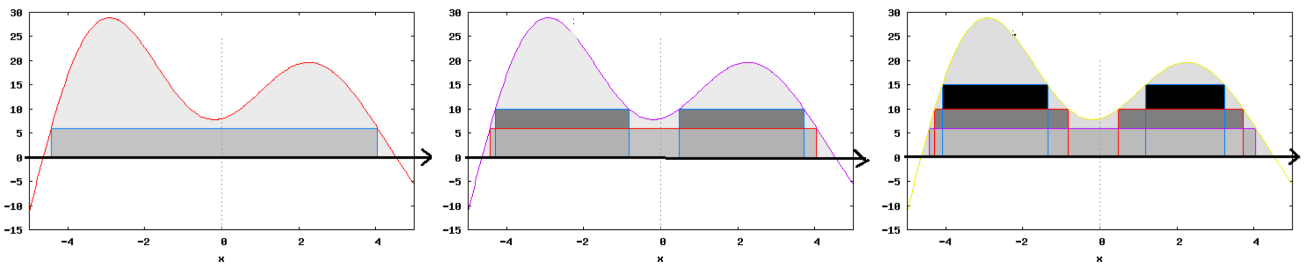
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

# TD20

◁0▷ ♠ Soit $f$ une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer que $f$ est majorée *(c'est quelle quantification : $\forall x \in [a,\ b],\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ ou $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,\ b],\ f(x) \leqslant M$ ?)*. On pose pour tout $n$ : $A_n = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \geqslant n\}$. On suppose que $f$ n'est pas majorée *(quantifiez)*. Montrez alors que les $A_n$ sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées. On pose alors $\alpha_n = Sup(A_n)$ pour tout $n$. Montrez alors pour tout $n$ : $A_{n+1} \subset A_n$ et $a \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Déduisez que la suite $(\alpha_n)$ converge. On note sa limite $\beta$. Que se passe-t-il alors en $\beta$ ? Concluez ?



Montrez que $f$ est aussi minorée.

◁1▷ ♡ Déterminez $Inf\Big\{Sup\{Arctan(n.x) \mid n \in \mathbb{N}\}\ \Big|\ x \in \mathbb{R}^{+*}\Big\}$
puis $Sup\Big\{Inf\{Arctan(n.x) \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\}\ \Big|\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

◁2▷ Avec des signes qui clignotent, calculez $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^n}{p+1} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$, $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $Sup\Big\{\dfrac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$.

◁3▷ $A$ et $B$ sont des parties de $\mathbb{R}^+$ non vides, majorées.
Exprimez $Sup(A \cup B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

Exprimez $Sup(A+B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$ (on pose $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$).

Pouvez vous exprimer $Sup(A \cap B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

◁4▷ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(x) \mid (t,\ x) \in \mathbb{R}^2\}$ et $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

◁5▷ Lesquels de ces ensembles sont majorés :

| | | |
|---|---|---|
| $A = \Big\{\dfrac{e}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$ | $B = \Big\{frac\Big(\dfrac{n!}{e}\Big) \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\Big\}$♣ | $C = \Big\{\dfrac{e^p}{n!} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\Big\}$ |
| $D = \Big\{\dfrac{e^{2.n}}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$ | $E = \Big\{(-1)^{n+p+1}\dfrac{p!}{n!} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant n\Big\}$ | $F = \Big\{\dfrac{n^e}{n!} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\Big\}$ |

où $frac(x)$ est la partie décimale ou fractionnaire de $x$ *($x - [x]$)* et donnez sa borne supérieure de ceux qui en ont une.

◁6▷ ♡ Déterminez $Sup\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $Sup\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-p} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\}$.

◁7▷ **-a-** Déterminez $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{(-1)^p}{2^p} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$.

**-b-** Déterminez $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$.

-c- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^p}{2^n}+\frac{(-1)^n}{2^p} \mid n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.

-d- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^n}{2^p}+\frac{(-1)^n}{2^p} \mid n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.

---

◁8▷ Déterminez $Sup\{\sin(t.\pi)\mid t\in\mathbb{N}\}$ et $Sup\{\sin(t.\pi)\mid t\in\mathbb{Q}\}$ et enfin $Sup\{\sin(t.\pi)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

---

◁9▷ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\left\{\frac{x+10}{x^2+261}\mid x\in[0,\ +\infty[\right\}$ et $Sup\left\{\frac{x+10}{x^2+261}\mid x\in\mathbb{N}\right\}$.

---

◁10▷ Montrez : $p.p.c.m.(a,b,c)=p.p.c.m.\big(p.p.c.m.(a,c),\ p.p.c.m.(b,c)\big)$.

---

◁11▷ Si $A$ est une partie de $\mathbb{C}$ on pose $diam(A)=Sup\{|b-a|\mid(a,\ b)\in A^2\}$. Déterminez le diamètre d'un disque de centre $C$ et de rayon $R$.
Montrez : $A\subset B\Rightarrow diam(A)\leqslant diam(B)$.
Quel est le diamètre du vide ?

---

◁12▷ Déterminez $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\mid a\in\mathbb{R}\Big\}$.

Pouvez vous déterminer $Sup\Big\{Inf\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid a\in\mathbb{R}\}\mid t\in\mathbb{R}\Big\}$.

---

◁13▷ Déterminez la limite de $\frac{x^3-3^x}{x-3}$ quand $x$ tend vers 3.
Conseil : taux d'accroissement de $x\longmapsto x^3$ et de $x\longmapsto 3^x$.

---

◁14▷ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\blacktriangleleft$ par $\Big((a+i.b)\blacktriangleleft(\alpha+i.\beta)\Big)\Leftrightarrow\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$ ($a$, $b$, $\alpha$ et $\beta$ sont des réels).
Montrez que c'est une relation d'ordre, et que cet ordre est total (on l'appelle « ordre lexicographique » ou « ordre du dictionnaire »).

Montrez que le disque fermé (c'est à dire avec son cercle)$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$ admet pour borne supérieure 1.

Montrez que le disque ouvert (c'est à dire sans son cercle) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ n'admet pas de borne supérieure.

---

◁15▷ $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Complétez ce qui manque dans ce raisonnement.
On pose $M=Sup(A)$ et $\mu=Inf(A)$.
On a $x-y\leqslant M-\mu$.
Notons $\alpha$ un majorant de $x-y$. Alors pour tout $y$, on a
pour tout $x$ : $x\leqslant\alpha+y$ donc $M\leqslant\alpha+y$. Et donc pour tout $y$ : $M-\alpha\leqslant y$.
On déduit : $M-\alpha\leqslant\mu$.
Finalement $Sup\{x-y\mid(x,\ y)\in A^2\}=M-\mu$.

---

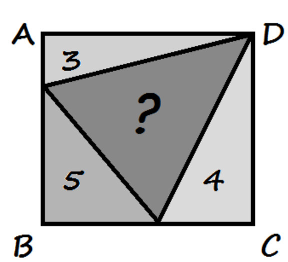
◁16▷ ♠ Soit $(a_n)$ une suite réelle bornée par $\mu$ et $M$. Montrez que chaque partie $A_n=\{a_k\mid k\geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, qui admet une borne supérieure noté $s_n$.
Montrez pour tout $n$ : $s_{n+1}\leqslant s_n$.
Montrez que la suite $(s_n)$ converge vers un réel $\alpha$.
Montrez que pour tout $n$ il existe un entier $\varphi(n)$ vérifiant : $s_n-\frac{1}{n+1}\leqslant a_{\varphi(n)}\leqslant s_n$.
Déduisez que $a_{\varphi(n)}$ converge vers $\alpha$. Avez vous redémontré le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

---

◁17▷

Montrez pour tout $x$ entre 0 et 1 : $Arctan(x)\leqslant x$ et même $x-\frac{x^3}{3}\leqslant Arctan(x)\leqslant x$.

La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5+\sqrt{7}$.




(A,B,C,D) est un carré.
On connaît les aires de trois triangles. Calculez l'aire du dernier.

---

◁18▷ ♡ Sachant $deg(P)=3$, $P(1)-1=P'(1)+1=P''(1)-6=P^{(3)}(1)+6=0$, calculez $P(3)$.

*Si vous commencez en écrivant $P(X)=a.X^3+b.X^2+c.X+d$, vous êtes très mal parti, sauf si vous adorez les calculs idiots.*
*Qu'y a-t-il sur le ventre du Teletubies en salle 210 ?*

◁19▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+6.t+10}$.

◁20▷ *(extrait d'un sujet de l'École du Génie de l'Eau et de l'Environnement (si si, ne cherchez pas un jeu de mot, un acronyme caché, ça existe), datant de quand vous n'étiez pas encore nés)*

I∼0) On définit $\varphi = t \longmapsto \displaystyle\int_0^t e^{-u^2/2}.du$. Montrez que $\varphi$ est impaire, strictement croissante. Montrez pour tout $t$ plus grand que 1 :
$\varphi(t) \leqslant \varphi(1) + \displaystyle\int_1^t e^{-u/2}.du$ et déduisez que $\varphi$ admet une limite en $+\infty$ que l'on notera $p$ *(en fait, on pourrait montrer : $p=\sqrt{\pi/2}$ mais ça prend un sujet de Sup pour y parvenir* [1]*)*.

I∼1) On note $E_a$ l'équation différentielle $y'_t = e^{y_t} - t$ d'inconnue $y$ fonction de $t$ avec condition initiale $y_0 = a$. En posant $z_t = e^{-y_t}$, résolvez *(en utilisant $\varphi$)* $E_a$.

I∼2) Montrez qu'il existe une constante $\alpha$ *(à préciser)* telle que pour $a \leqslant \alpha$ la solution de $E_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, tandis que pour $a > \alpha$, la solution n'est définie que sur un intervalle $]-\infty,\ k_a[$ avec $k_a$ dépendant de $a$.

---

II∼0) On définit $f = t \longmapsto e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du$ et $h = t \longmapsto \dfrac{e^{t^2}}{2.t} - \displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du$.
Donnez le tableau de variations de $h$ sur $]0,\ +\infty[$ , avec sa limite en 0 par valeur supérieure.

II∼1) Montrez : $e^x \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}$ pour $x$ positif.

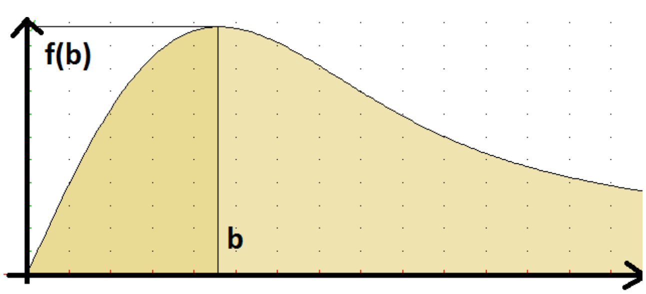
II∼2) Démontrez qu'il existe un unique réel $b$ de $]0,\ 1[$ vérifiant $h(b)=0$.

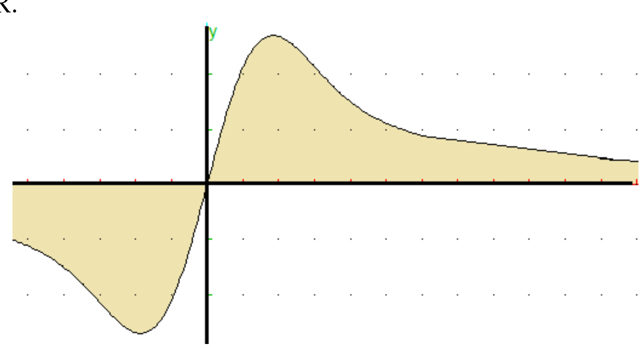
III∼0) Montrez que $f$ est solution de l'équation différentielle linéaire $y'_t + 2.t.y_t = 1$.

III∼1) Résolvez cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

IV∼0) Montrez pour tout $t$ strictement positif : $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u.t}.du$. Déduisez que $f$ a une limite en $+\infty$ dont vous donnerez la valeur.

Donnez le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$.




V∼0) On définit $A = t \longmapsto 2.t.e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^{t-1} e^{u^2}.du$ et $B = t \longmapsto 2.t.e^{-t^2}.\displaystyle\int_{t-1}^t e^{u^2}.du$.

---

1. *j'en profite pour dire que $t \longmapsto e^{t^2}$ n'a pas de primitive à l'aide des fonctions usuelles, et surtout pas un $t \longmapsto \dfrac{e^{t^2}}{2.t}$ comme l'inventent de sombres crétins qui oublient qu'il faudrait ensuite dériver aussi leur $1/t$ !*

Montrez pour $t$ plus grand que 1 : $A(t) \leqslant 2.t.e^{-t^2}.e^{(t-1)^2}.(t-1)$.

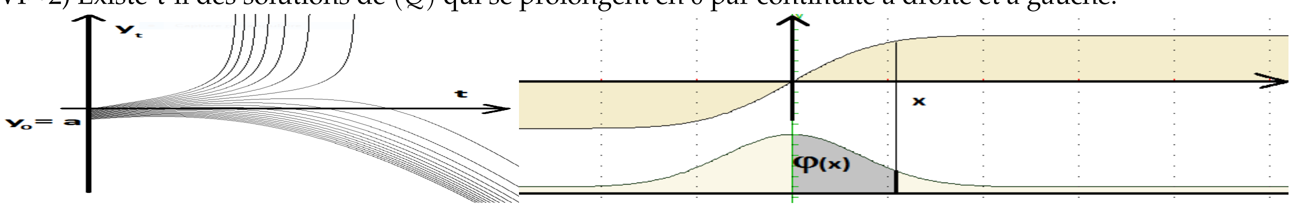
V$\sim$1) Déduisez la limite de $A(t)$ quand $t$ tend vers l'infini.
V$\sim$2) Montrez aussi : $\frac{1}{t}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du \leqslant \int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \frac{1}{t-1}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du$.

V$\sim$3) Déduisez que $\int_0^t e^{u^2}.du$ est équivalent à $\frac{e^{t^2}}{2.t}$ quand $t$ tend vers l'infini.

VI$\sim$0) Soit l'équation différentielle $y'_t - (y_t)^2 - 2.t.y_t = 2$ d'inconnue $y$ fonction de $t$ strictement positif (notée $(Q)$).
Vérifiez que $t \longmapsto \frac{-1}{t}$ est solution.

VI$\sim$1) En posant $y_t = \frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}$, résolvez $(Q)$.

VI$\sim$2) Existe-t-il des solutions de $(Q)$ qui se prolongent en 0 par continuité à droite et à gauche.




◁21▷ ♡? Soit $f$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comparez $\int_0^x \left(\int_t^x f(u).du\right).dt$ et $\int_0^x v.f(v).dv$.

◁22▷ $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ sont cinq complexes non nuls. Le polynôme $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e)$ est noté $P$, et sous forme développée, on l'écrit $X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$. Pour tout $k$, on pose aussi $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k + e^k$. Exprimez $S_2$ à l'aide des $\sigma_i$. *Le but est d'écrire simplement les relations donnant les $S_k$ à l'aide des $\sigma_i$ et vice versa.*
Montrez : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-a} + \frac{1}{X-b} + \frac{1}{X-c} + \frac{1}{X-d} + \frac{1}{X-e}$ *(partez du côté qui vous semble le plus pratique)*.
Justifiez pour $\alpha$ non nul : $\frac{1}{t-\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{t^{k+1}} + o\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)$ quand $t$ tend vers l'infini *(on rappelle : « $f(t) = o(g(t))$ quand $t$ tend vers un truc » signifie « la forme surement indéterminée $\frac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 quand $t$ tend vers le truc en question »)*.
Déduisez $\frac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{t^{k+1}} + o\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)$, puis déduisez par produit en croix les formules de Newton (par exemple $S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$).
Déduisez et généralisez $S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$.

◁23▷ Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | C | | A | | |
| | A | C | D | | B | |
| D | D | B | C | A | | A |
| A | | A | B | D | C | |
| C | C | | A | B | D | D |
| | B | D | | C | A | |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | | B | | C | |
| | . | . | . | . | . | D |
| | . | . | . | . | . | |
| | . | . | . | . | . | |
| A | . | . | . | . | . | |
| | . | . | . | . | . | |
| | | D | D | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | D | | A | | B | |
| C | . | . | . | . | . | |
| | . | . | . | . | . | |
| | . | . | . | . | . | |
| | . | . | . | . | . | B |
| | . | . | . | . | . | |
| | | | C | C | | |

◁24▷ On définit une autre multiplication matricielle, dite *multiplication industrielle*, car elle intervient dans les enchainements et mises en parallèle de processus dans les chaines de fabrication et production. On y remplace les additions par des Max et les multiplication par des additions ; $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$ devient donc $c_i^k = Max(a_i^j + b_j^k \mid j \leq n)$.

Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\boxtimes n}$ *(puissance*

*n matricielle)*.
Écrivez une procédure ***Python*** qui prend en entrée deux matrices carrées de même taille et rend leur produit industriel.

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :
Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

---

◃25▹ On rappelle que pour un emprunt d'une somme de $S$ euros au taux $\tau$ [2] d'une durée de $n$ mois avec des mensualités d'un montant $\mu$, on a les formules suivantes :
$\mu = \dfrac{\tau.S}{1-(1+\tau)^{-n}}$ et $n = -\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{\tau.S}{\mu}\right)}{\ln(1+\tau)}$ *(redémontrez les)*.
Donnez les limites de ces quantités quand $\tau$ tend vers 0. Est ce cohérent ?
Rappel : $v_n = u_n - \alpha$ avec $\alpha$ point fixe de la fonction $f$ vérifiant $\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

---

◃26▹ ♡ Une homographie $h$ (c'est à dire une application de la forme $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$, je l'ai déjà dit douze fois) vérifie $h(1) = 2$, $h(2) = 3$ et $h(3) = 1$. Calculez la. Déterminez $h(4)$, puis $h \circ h \circ h \circ h$.

---

◃27▹ ♡ L'homographie $h$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^2}$ et vérifie $h(1) = 1$. Pouvez vous la retrouver ? Calculez $h \circ h \circ h \circ h(1)$ et $h \circ h \circ h \circ h(2)$.

---

◃28▹ On définit : $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}.u_n + \sqrt{3} - 2}{2.u_n + \sqrt{6}}$. Montrez que $u$ est bornée. Rappel : $4.\cos(\pi/12) = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.
Rappel : on compose les homographies en multipliant les matrices.

---

◃29▹ Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.
Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

---

◃30▹ ♡ Deux suites sont liées par $\left\{\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & 4.u_n & + & v_n \end{array}\right|$ avec $u_0$ et $v_0$ donnés.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q,\ u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.

---

◃31▹

| Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24 |
|---|---|---|

## SERIE LACUNAIRE

Le but avoué de cet exercice est de déterminer un équivalent en 1 par valeur inférieure de l'application $x \longmapsto x^1 + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ *(infinité de termes)*, après en avoir prouvé l'existence.

On rappelle la définition du logarithme de base $a$ ($a > 0$, $a \neq 1$) : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Vérifiez que c'est bien l'application réciproque de $t \longmapsto a^t$. Résolvez l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{N} \cap [0,\ 2016]$.

VII∼0) Pour tout $x$ réel, on définit les séries suivantes *(les sommes partielles sont en $\sum_{n=1}^{N}$)* :

2. le taux $\tau$, voilà une blague !

| terme général | nom des sommes partielles | nom de la somme si convergence |
|---|---|---|
| $x^{2n}$ | $\varphi_N(x)$ | $\varphi(x)$ |
| $x^{2^n}$ | $F_N(x)$ | $F(x)$ |
| $\log_2(n).x^n$ | $G_N(x)$ | $G(x)$ |
| $[\log_2(n)].x^n$ | $\Gamma_N(x)$ | $\Gamma(x)$ |
| $H_n.x^n$ | $S_N(x)$ | $S(x)$ |
| $x^n/n$ | $L_N(x)$ | $L(x)$ |

Montrez que pour tout $x$ de $]1,\ +\infty[$, ces séries divergent grossièrement.

*Une série $A_N$ de terme général $a_n$ est définie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Elle vérifie donc $A_N - A_{N-1} = a_N$.*
*Si $(A_N)$ converge (vers un complexe $\alpha$) alors nécessairement $A_N - A_{N-1}$ tend vers 0 quand $N$ tend vers $+\infty$ et $(a_n)$ converge vers 0.*
*Attention, la condition est juste nécessaire et seuls les crétins sans cervelle (ni connaissance de la série harmonique) diront « comme $a_n$ tend vers 0, alors $a_0 + \ldots + a_n$converge ».*
*Mais en tout cas, la contraposée de notre condition nécessaire donne « si $(a_n)$ ne converge pas vers 0, alors $(A_N)$ ne peut pas converger.*
*C'est ce qu'on appelle la divergence grossière et c'est ce qui permet de dire que les divagation poétiques sur $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$ et $1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}$ ne peuvent avoir de sens dans le cadre de l'analyse réelle et complexe.*

VII∼1) On se fixe $x$ dans $[0,\ 1[$. Montrez que ces séries sont croissantes et que leurs termes généraux tendent vers 0. On ne peut pas encore conclure évidemment, mais calculez déjà $\varphi(x)$.
VII∼2) Montrez $F_N(x) \leqslant \varphi_N(x)$ pour tout $N$. Concluez que $F$ est définie sur $[0,\ 1[$ puis sur $]-1,\ 1[$.
VII∼3) Écrivez un script `Python` pour représenter graphiquement $F_{10}$ sur $[-1,\ 1]$.
VII∼4) Donnez le développement limité d'ordre 10 de $F$ en 0.

VIII∼0) Montrez $L_N(x) = \int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$.
VIII∼1) Montrez par encadrement que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ tend vers 0 quand $N$ tend vers l'infini. Déduisez la valeur de $L(x)$.
VIII∼2) Simplifiez $(1-x).S_N(x)$ et déduisez la valeur de $S(x)$.

IX∼0) Montrez que la suite $\frac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ converge vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Est elle bornée ? Déduisez qu'il existe $A$ (dépendant de $x$ mais pas de $n$) vérifiant $[\log_2(n)].x^n \leqslant \log_2(n).x^n \leqslant A.\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n$.
IX∼1) Déduisez que $G(x)$ et $\Gamma(x)$ existent.
IX∼2) Montrez : $\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \frac{x}{1-x}$.
IX∼3) Montrez : $(1-x).\Gamma(x) = x.F(x)$ *(il faudra étudier quand on a $[\log_2(n)] = [\log_2(n+1)]$).*
IX∼4) Montrez pour tout $n$ : $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
IX∼5) Déduisez : $\frac{G(x)}{x} \leqslant S(x) \leqslant G(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$.
IX∼6) Déduisez que $G(x)$ est équivalent à l'une des quantités suivantes quand $x$ tend vers 1 par valeur inférieure : $-\ln(2).\ln(1-x)$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$, $(1-x)^{x.\ln(2)}$.
IX∼7) Déduisez que $F(x)$ est équivalent à $-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2)}$ quand $x$ tend vers 1 par valeur inférieure.

X∼0) Et que serait un équivalent en 1 de $x \longmapsto x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots$ ?

---

◃32▹ Existe-t-il une homographie (application de la forme $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$) dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?

---

◃33▹ Une information binaire (True/False, 1/0) est réémise par des transmetteurs successifs, indépendants les uns des autres. Mais un transmetteur se trompe avec probabilité $p$ et transmet alors le bit "opposé". On note $a_n$ la probabilité que le bit de la $n^{ieme}$ étape soit le bit initial. Exprimez $a_{n+1}$ à l'aide de $a_n$. Calculez $a_n$ pour tout $n$.

---

◃34▹ Une suite récurrente $u$ vérifie $u_{n+3} = 3.u_{n+2} + 10.u_{n+1} - 24.u_n$ pour tout $n$, avec $u_0 = 0$, $u_1 = -8$ et $u_2 = 2$

donnés. Montrez qu'on peut calculer $u_n$ pour tout $n$.

**Diagonalisation.** On ne sait pas encore diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ (notée $M$), mais on peut quand même au moins résoudre l'équation $\det(M - x.I_3) = 0$ d'inconnue réelle $x$ (racines $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$).
**Baisse de degré.** Montrez que $(u_{n+1} - \alpha.u_n)$ (notée $(v_n)$) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (équation caractéristique ?). Calculez son terme général. Retrouvez le terme général de $u$.
**Diagonalisation sans le dire.** Montrez que $(u_{n+2} - (\alpha+\beta).u_{n+1} + \alpha.\beta.u_n)$ (notée $(c_n)$) est géométrique (raison ?) ; même question avec $(u_{n+2} - (\alpha+\gamma).u_{n+1} + \alpha.\gamma.u_n)$ et une autre que vous ajusterez.

---

◁ 35 ▷ ♡ Une suite récurrente $u$ vérifiant $u_{n+2} = 12.u_n - u_{n+1}$ pour tout $n$ reste de signe constant. Montrez que c'est une suite géometrique, et calculez $u_{100}/u_5$.

---

◁ 36 ▷ Est il possible de choisir $a$ réel pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} - u_n$ pour tout $n$" soient toutes périodiques de période 9 ?

Est il possible de choisir $a$ et $b$ rationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout $n$" soient toutes périodiques de période 12 ?

Est il possible de choisir $a$ et $b$ irrationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout $n$" soient toutes périodiques de période 12 ?

Est-il possible de choisir $a$, $b$, $c$ et $d$ réels pour que dans le couple $(u,\ v)$ de suites vérifiant $\left\{ \begin{array}{ccll} u_{n+1} & = & a.u_n & +b.v_n \\ v_{n+1} & = & c.u_n & +d.v_n \end{array} \right|$ pour tout $n$, la suite $u$ soit périodique de période 6.
Montrez que si $u$ est périodique, alors $v$ l'est aussi.

---

◁ 37 ▷ Théorème du point fixe pour une application contractante.

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2.|x-y|}{3}$.
Montrez (par l'absurde ?) qu'il existe au plus un réel $a$ vérifiant $f(a) = a$.
On définit la suite $(u_n)$ par « $u_0$ donné » et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrez par récurrence sur $n$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$.
On définit deux suites : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big)$.
Montrez pour tout $n$ : $A_{n+1} - A_n \geqslant 0$ et $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$.
Montrez pour tout $n$ : $\dfrac{S_n}{2} \leqslant A_n \leqslant \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{2}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$.
déduisez dans l'ordre que $(A_n)$, $(S_n)$, $(S_n + A_n)$ et $(u_n)$ convergent.
On note $\alpha$ la limite de la suite $(u_n)$. Montrez : $f(\alpha) = \alpha$. Déduisez que $\alpha$ ne dépend pas du choix de $u_0$.
Montrez pour tout $n$ : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2^n}{3^{n-1}}.|u_1 - u_0|$.

---

◁ 38 ▷ $A$ est une matrice de terme général $a_i^k$.
Comparez : $Max\Big(Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big)\ \Big|\ i \leqslant n\Big)$ et $Min\Big(Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big)\ \Big|\ k \leqslant n\Big)$ *(il n'y a pas forcément égalité, mais l'un est toujours plus petit que l'autre, regardez sur un exemple pour des matrices 4 sur 4, et pour la preuve générale, pensez à regarder le terme à l'intersection de la ligne donnant le max et la colonne donnant le min).*
$(a_n^p)$ est une famille de réels indexée par deux entiers *(suite de suites)*, bornée.
Comparez $Sup\Big(Inf\big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\big)\ \Big|\ i \in \mathbb{N}\Big)$ et $Inf\Big(Sup\big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\big)\ \Big|\ k \in \mathbb{N}\Big)$ après avoir montré l'existence de chacun.

---

◁ 39 ▷ ♣ Un réel $\alpha$ est pétillant si pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ l'entier $[\alpha^{(2^n)}] + 2$ est un carré parfait.
Montrez qu'aucun entier $\alpha$ ne pétille.
Montrez que aucun réel de $[0,\ 1]$ ne pétille.
Montrez que si $\alpha$ pétille, alors $\alpha^2$ pétille aussi

$k$ est un entier naturel non nul. On définit la suite $u$ par $u_1 = (1+k)^2$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Montrez que $(u_n)$ est croissante, plus grand que 3.
Pour tout $n$, on pose $a_n = \sqrt[2^n]{u_n - 2}$ et $b_n = \sqrt[2^n]{u_n - 1}$. Montrez que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont monotones. Déduisez que $(a_n)$ converge vers un réel $\alpha$de $[k,\ k+1[$.
Montrez pour tout $n$ : $(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$ et déduisez que $\alpha$ est pétillant.

*Je trouve ainsi que 4.896849955310805 doit être pétillant.*
*[25, 576, 330625, 109312229377, 11949163490932621836290, 142782508133037097454211720301427084257918978]*
*Source : concours général 2023.*

---

◃40▹ Soit $(a_n)$ une suite croissante admettant une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ décroissante. Montrez que $(a_n)$ est constante à partir d'un certain rang.

---

◃41▹ Montrez que pour tout $a$, $\int_0^a \frac{Atan(a.t)}{t}.dt$ existe (on la note $F(a)$).

Montrez : $F'(a) = 2.\frac{Arctan(a^2)}{a}$ *(si si, il y a bien un 2, et l'astuce constera à changer de variable pour qu'il n'y ait plus de a dans la fonction intégrée, juste dans les bornes ).*

---

◃42▹ Les $A_k$ sont des parties non vides incluses dans $[0,\ 1]$ *(k varie dans un ensemble d'indexation I)*. On note alors $a_k$ la borne supérieure de chaque $A_k$. Montrez que $\bigcup_{k\in I} A_k$ est encore une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Qui est sa borne supérieure ?

---

◃43▹

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | + | | + | | = | 44 |
| + | ■ | × | ■ | × | ■ | ■ |
| | × | | + | | = | 47 |
| − | ■ | + | ■ | + | ■ | ■ |
| | + | 4 | × | | = | 31 |
| = | ■ | = | ■ | = | ■ | ■ |
| 35 | ■ | 44 | ■ | 12 | ■ | ■ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | − | | + | | = | 43 |
| + | ■ | × | ■ | + | ■ | ■ |
| | + | | − | 6 | = | 11 |
| − | ■ | + | ■ | × | ■ | ■ |
| | × | | − | | = | 5 |
| = | ■ | = | ■ | = | ■ | ■ |
| 45 | ■ | 19 | ■ | 47 | ■ | ■ |

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

---

◃44▹ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale. Déduisez qu'elle est toujours diagonalisable.
Construisez une matrice complexe de taille 2 non diagonalisable (choisissez la nilpotente, vérifiant $S^2 = 0_2 \neq S$).

---

◃45▹ ♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de $A$ *(valeurs propres ?)*.
Donnez la troisième valeur propre, et trouvez un vecteur propre associé.
Diagonalisez $A$. Diagonalisez $A^2$. Diagonalisez $A^{-1}$.
Diagonalisez $A^T$.

---

◃46▹ Complétez et diagonalisez $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour que ses valeurs propres soient 3 et $-5$ *(s'il y a plusieurs solutions, traitez les toutes)*.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable, même sur $\mathbb{C}$.

---

◃47▹ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres (valeur propre ?). Donnez un dernier vecteur propre, formant une base de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ avec des trois autres (on supposera $a+b+c+d$ non nul).

---

◁ 48 ▷ ♡ Montrez que $M$ et $M^T$ ont le même spectre. (racines de $\det(M - X.I_n)$).

---

◁ 49 ▷ ♡ On pose $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice $A$ vérifiant $A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$. Calculez son spectre *(dans $\mathbb{C}$ si nécessaire)*.