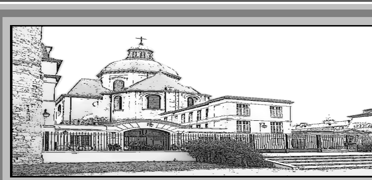
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 5 mars
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

# IS19

♡ 0 ♡ Prouvez $\forall (a,\ b,\ c) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ \big((a \wedge b) = 1 \ et\ (a \wedge c) = 1\big) \Leftrightarrow \big(a \wedge (b \times c) = 1\big)$. 3 pt.

---

♡ 1 ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Inversez $A$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Donnez le polynôme caractéristique de $A$ ($\chi_A(X) = \det(X.I_3 - A)$), noté $P$. 2 pt.

♢ 0 ♢ Donnez le polynôme caractéristique de $3.A$, de $A - 2.I_3$ et de $A^{-1}$. 3 pt.

♢ 1 ♢ Montrez que l'une des racines de $P$ est entre $\frac{-4}{3}$ et $\frac{-5}{4}$. 2 pt. On note $\beta$ et $\gamma$ les deux autres racines.

♢ 2 ♢ Exprimez $\frac{\beta+\gamma}{2}$ et $\sqrt{\beta.\gamma}$ à l'aide de $\alpha$. 1 pt. Déduisez $\frac{13}{8} \leqslant \frac{\beta+\gamma}{2} \leqslant \frac{5}{3} < \sqrt{3} \leqslant \sqrt{\beta.\gamma} \leqslant \frac{4}{\sqrt{5}}$. Déduisez que $\beta$ et $\gamma$ sont deux complexes non réels, conjugués. 4 pt.

---

Lesquelles de ces parties de $\mathbb{R}$ sont majorées (respectivement minorées) ? Quand elles le sont, déterminez leur borne supérieure (respectivement inférieure). 5 pt.

$A = \{2^{((-1)^n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad B = \{(-1)^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad C = \{n^{(-1)^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$D = \{2^{(n^{-1})} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad E = \{(-1)^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad F = \{n^{(2^{-1})} \mid n \in \mathbb{N}\}$

♢ 3 ♢ Simplifiez moi cette chose (et au moins, est-ce un rationnel ?) : 3 pt.

$$\frac{\frac{5}{\sqrt{5}} \times 10^{-5} \times 0,01 \times 60 \times (2\times 5)^2 \times \sqrt{63}}{(\sqrt{96} + 2.\sqrt{6} - 2.\sqrt{24} - 3.\sqrt{54})^2 \times 0,04 \times 30 \times 12 \times \sqrt{112}}$$

♣ 0 ♣ Une partie $A$ de $\mathbb{R}^+$ est dite « bien répartie » si il existe un réel $\alpha$ strictement positif tel que tout segment de $\mathbb{R}^+$ de longueur $\alpha$ contient au moins un élément de $A$. Montrez que $\mathbb{N}$ est bien réparti. 1 pt. Montrez que toute partie bien répartie est de cardinal infini. 1 pt. Montrez que $\{n^{1/2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est bien répartie. 1 pt. Montrez que $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas bien répartie. 1 pt. La réunion de deux parties bien réparties l'est elle encore ? 1 pt. L'intersection de deux parties bien réparties l'est elle encore ? 1 pt.

---

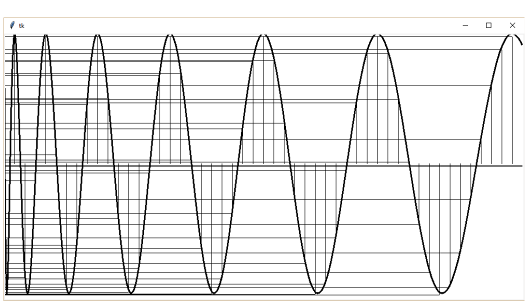
♡ 3 ♡ L'élève ↺ dit que si $(a_n)$ converge (vers $\alpha$), alors $(a_{n^2})$ converge vers $\alpha^2$. Montrez qu'il a tort. 1 pt.

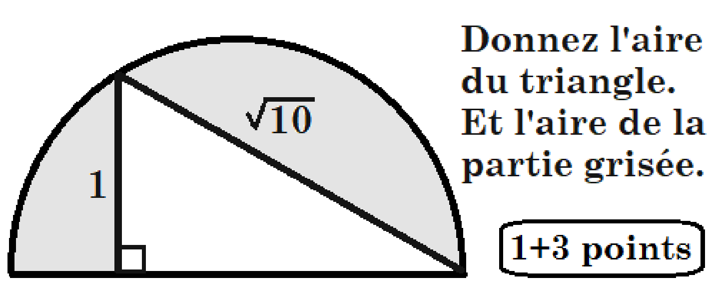
♢ 4 ♢ L'élève ↻ dit que si $(a_{n^2})$ converge (vers $\alpha$), alors $(a_n)$ converge vers $\alpha$. Montrez qu'il a tort. 1 pt.

♠ 0 ♠ L'élève ☿ dit que si $(a_{n^2})$ converge vers $\alpha$ et $(a_{n+1} - a_n)$ converge vers 0, alors $(a_n)$ converge vers $\alpha$ (il encadre $n$ par deux carrés consécutifs $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$ et écrit $\alpha - a_n = \alpha - a_{(k+1)^2} + \sum_{p=n}^{k^2+2.k-n} (a_{p+1} - a_p)$).

Pour montrer qu'il a tort, on pose $a_n = \cos(2.\sqrt{n}.\pi)$. Montrez que $(a_{n^2})$ converge vers 1. 1 pt. Montrez que $(a_{n+1} - a_n)$ converge vers 0 (différence de cosinus et quantité conjuguée). 3 pt. Montrez que $(a_{n^2+n})$ converge vers $-1$ (indication : $\cos(2.\sqrt{n^2+n}.\pi - 2.n.\pi)$). 2 pt. Concluez que $(a_n)$ ne converge pas. 1 pt.

♠ 1 ♠ L'élève ☽☾ dit que si $(b_{n^2})$ converge vers $\alpha$ et $(n.(b_{n+1} - b_n))$ converge vers 0, alors $(a_n)$ converge vers $\alpha$. Donnez lui raison. 4 pt.





LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 5 mars
M.P.S.I.2

2024 2025
IS19
CORRECTION

## IS19 Histoires de p.g.c.d.

On se donne $a$, $b$ et $c$.
On suppose que $a$ et $b$ sont premiers entre eux, de même que $a$ et $c$.
On écrit alors deux identités de Bézout : $\exists(u,\ v,\ u',\ v') \in \mathbb{Z}^4,\ (a.u+b.v)=1 \ et\ (a.u'+c.v')=1$.
On se laisse porter simplement en effectuant le produit et en regroupant

$$1=(a.u+b.v).(a.u'+c.v')=(a.a'.u+b.v.u'+u.c.v').a+(v.v').(b.c)$$

On a une identité de Bézout entre $a$ et $b.c$. Ils sont premiers entre eux.

*Il était agréable ici de passer par une identité de Bézout.*

Réciproquement, on suppose $a$ et $b.c$ premiers entre eux (pas de diviseur commun).
On écrit une identité de Bézout, et on la relit de deux façons :

$$\exists(U\ V)\in\mathbb{Z}^2,\ a.U+b.(c.V)=1 \ et\ a.U+c.(b.V)=1$$

*On pouvait passer agréablement aussi par les diviseurs communs.*

## IS19 Matrice.

On découpe $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On calcule trois produits vectoriels utiles (ou listes de cofacteurs)

| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=$ |

On calcule le déterminant avec $(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}=-4$. Il ne reste plus qu'à écrire nos trois vecteurs en ligne puis à diviser par le déterminant (hop, un signe moins)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*On peut aussi proposer et vérifier.*
*Ou résoudre le système* $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & a \\ x & +2.y & +z & = & b \\ & y & -z & = & c \end{array}\right.\Bigg|$, *trouver* $\left\{\begin{array}{rrrcrrr} 4.x & & & = & 3.a & +b & +c \\ & 4.y & & = & -a & +b & +c \\ & & 4.z & = & -a & +b & -3.c \end{array}\right.\Bigg|$ *et conclure matriciellement.*

---

Par définition, le polynôme caractéristique de $A$ est $\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ qu'on calcule en développant par rapport à la première colonne car elle contient un 0

$$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix}=(X-1).\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix}=\begin{array}{cc} (X-1).(X-2).(X+1) & \\ -(X-1) & +X+1 \end{array}$$

On trouve $X^3-2.X^2-X+4$ et on confirme la valeur de la trace (2) et du déterminant $(-4)$. L'autre terme est la classique $\dfrac{Tr(A)^2-Tr(A^2)}{2}$, mais ça ne nous avance pas.

---

On calcule ensuite pour les nouvelles matrices

$$\det(X.I_3 - 3.A) = \det\Big(3.\Big(\frac{X}{3}.I_3 - A\Big)\Big) = 3^3.\det\Big(\frac{X}{3}.I_3 - A\Big) = 27.\Big(\frac{X^3}{27} - 2.\frac{X^2}{9} - \frac{X}{3} + 4\Big) = X^3 - 6. - 9.X + 108$$

$$\det(X.I_3 - (A - 2.I_3)) = \det\big((X+2).I_3 - A\big) = (X+2)^3 - 2.(X+2)^2 - (X+2) + 4 = X^3 + 4.X^2 + 3.X + 2$$

$$\det(X.I_3 - A^{-1}) = \det\big((X.A - I_3).A^{-1}\big) = \frac{\det\Big(-X.\Big(-A + \frac{1}{X}.I_3\Big)\Big)}{\det(A)} =$$

$$\det(X.I_3 - A^{-1}) = \frac{-X^3}{-4}.\Big(\Big(\frac{1}{X}\Big)^3 - 2.\Big(\frac{1}{X}\Big)^2 - \frac{1}{X} + 4\Big) = X^3 - \frac{X^2}{4} - \frac{X}{2} + \frac{1}{4}$$

*Pour ma part, je me perds moins avec la définition $\det(M - X.I_n)$ pour le polynôme caractéristique, mais le programme recommande $\det(X.I_n - M)$.*

---

Pour montrer que $P$ (de degré 3) a une racine entre deux réels donnés par l'énoncé, la meilleure piste semble le théorème des valeurs intermédiaires (une fonction polynôme, c'est continu). On va donc estimer $P$ (et en fait son signe) en deux points

| | |
|---|---|
| $P\Big(\frac{-4}{3}\Big) = \frac{-64}{27} - 2.\frac{16}{9} + \frac{4}{3} + 4 = \frac{-64 - 96 + 36 + 108}{27} = \frac{-16}{27}$ négatif | $P\Big(\frac{-5}{4}\Big) = \frac{-125}{64} - 2.\frac{25}{16} + \frac{5}{4} + 4 = \frac{-125 - 200 + 80 + 256}{64} = \frac{11}{64}$ positif |

On a donc une racine (réelle) entre $-\frac{4}{3}$ et $-\frac{5}{4}$ (rappel $-\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$ par calcul de la différence : $\frac{-5}{4} - \frac{-4}{2} = \frac{1}{12}$).

Le degré du polynôme nous assure de l'existence de deux autres racines $\beta$ et $\gamma$ dont on ne sait pas encore si elles sont réelles ou complexes conjuguées (à moins que de tracer le graphe, mais on va jouer autrement).

---

Les relations coefficients racines donnent $\alpha + \beta + \gamma = 2$ et $\alpha.\beta.\gamma = -4$. On extrait :

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \ et\ \sqrt{\beta.\gamma} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}$$

---

On a encadré $\frac{-4}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{-5}{4}$ donc

$$\frac{5}{3} = 1 - \frac{-4}{2.3} \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2} \geqslant 1 - \frac{-5}{2.4} = \frac{13}{8}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5/4}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{4/3}} = \sqrt{3}$$

On trie ensuite : $\sqrt{3} \geqslant \frac{5}{3}$ en comparant les carrés et avec un produit en croix ($3 \geqslant \frac{25}{9}$ car $27 \geqslant 25$).

En mettant bout à bout, on a l'encadrement demandé : $\boxed{\frac{13}{8} \leqslant \frac{\beta + \gamma}{2} \leqslant \frac{5}{3} < \sqrt{3} \leqslant \sqrt{\beta.\gamma} \leqslant \frac{4}{\sqrt{5}}}$

---

On ne garde que deux termes : $\frac{\beta + \gamma}{2} < \sqrt{\beta.\gamma}$. La comparaison des moyennes est dans le mauvais sens. Il est donc impossible que $\beta$ et $\gamma$soient deux réels positifs.
La seule solution est donc $\beta$ et $\gamma$ sont complexes conjugués.

*Sinon, on peut aussi revenir au polynôme de racines $\beta$ et $\gamma$ : $X^2 - (\beta + \gamma).X + \beta.\gamma$ et calculer son discriminant $(\beta + \gamma)^2 - \beta.\gamma$ : négatif.*

## IS19 Un gros calcul.

Décomposons le travail, avec le numérateur et le dénominateur, et même en mettant de côté les puissances de 10 et les radicaux :

$$\frac{\frac{5}{\sqrt{5}} \times 10^{-5} \times 0,01 \times 60 \times (2 \times 5)^2 \times \sqrt{63}}{(\sqrt{96} + 2.\sqrt{6} - 2.\sqrt{24} - 3.\sqrt{54})^2 \times 0,04 \times 30 \times 12 \times \sqrt{112}}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numérateur | entiers | | | | 6 | | | 6 |
| | $10^p$ | | $10^{-5}$ | $10^{-2}$ | $10^1$ | $10^2$ | | $10^{-4}$ |
| | radicaux | $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ | | | | | $3.\sqrt{7}$ | $3.\sqrt{7}.\sqrt{5}$ |
| Dénominateur | entiers | $(4.\sqrt{6}+2.\sqrt{6}-4.\sqrt{6}-9.\sqrt{6})^2 = 49.6$ | 4 | 3 | 12 | | | |
| | $10^p$ | | $10^{-2}$ | $10^1$ | | | | $10^{-1}$ |
| | radicaux | | | | | $4.\sqrt{7}$ | | $4.\sqrt{7}$ |

Les $\sqrt{6}$ ont disparu, les $\sqrt{7}$ se sont simplifiées, le $\sqrt{5}$ survit.

Et en simplifiant tout ce qu'il reste $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}.10^{-3}}{2.3.7^2}}$

*Pour les masochistes et mon logiciel de calcul formel :* $\dfrac{\sqrt{5}}{294000}$.

*Pour les physiciens :* $7.6 \times 10^{-6}$.

## IS19 Bornes supérieures et inférieures.

On aura intérêt à écrire quelques éléments de chacun des ensembles pour en comprendre le contenu.
Une fois qu'on aura compris, pour montrer qu'un ensemble n'est pas majoré, on construit une suite d'éléments, qui tend vers l'infini (tout majorant proposé est alors dépassé par au moins un élément de l'ensemble).
Sinon, pour montrer qu'un ensemble est majoré, on trouve un majorant. Si possible le plus petit afin de tenir la borne supérieure. Si d'ailleurs il s'agit d'un élément de l'ensemble, c'est un maximum (atteint). Sinon, pour une borne supérieure non atteinte, on montre que c'est un majorant vers lequel tend une suite d'éléments de l'ensemble.

| | | |
|---|---|---|
| $A = \{2^{((-1)^n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$<br>borne inférieure $1/2$ | | $\{2^1,\ 2^{-1},\ 2^1,\ 2^{-1}\ldots\}$ ensemble fini<br>borne supérieure 2 |
| $B = \{(-1)^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$<br>borne inférieure $-1$ $(n = 0)$ | | $\{(-1)^1,\ (-1^2,\ (-1)^4,\ (-1)^8,\ldots\}$ ensemble fini<br>borne supérieure 1 |
| $C = \{n^{(-1)^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$<br>borne inférieure 0 $(n = 0)$ | | $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ c'est $\mathbb{N}$<br>« borne supérieure » infinie |
| $D = \{2^{(n^{-1})} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$<br>borne inférieure 1 (limite quand $n$ tend vers $+\infty$) | | $\{2,\ 2^{1/2},\ 2^{1/3},\ldots\}$<br>borne supérieure 2 $(n = 1)$ |
| $E = \{(-1)^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$<br>borne inférieure $-1$ ($n$ pair) | | $\{(-1)^0,\ (-1)^1,\ (-1)^4,\ (-1)^9\ldots\}$ ensemble fini<br>borne supérieure 1 ($n$ pair) |
| $F = \{n^{(2^{-1})} \mid n \in \mathbb{N}\}$<br>borne inférieure 0 $(n = 0)$ | | $\{\sqrt{0},\ \sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ldots\}$ non majoré<br>« borne supérieure » infinie |

## IS19 Parties bien réparties.

• Pour $\mathbb{N}$ on prend $\alpha = 1$. Tout intervalle $[a,\ a+1]$ de longueur 1 contient au moins un entier naturel (en fait un seul).
Il suffit en effet de prendre $x = [a] + 1$ (partie entière à l'entier supérieur). On a $a - 1 < [a] \leqslant a$ par définition, et en ajoutant 1 on a $a \leqslant [a] + 1 \leqslant a + 1$.

• Pour $\mathbb{Q}$ on prend ce qu'on veut pour $\alpha$ puisque tout intervalle contient au moins un rationnel (densité).
Et même, je prends $\alpha = 1$. Tout intervalle de longueur 1 contient au moins un entier, donc un rationnel.

• Si une partie $A$ est bien répartie, il existe donc un réel $\alpha$ tel que tout intervalle de longueur $\alpha$ contienne au moins un élément $x$ de $A$. Or, il y a une infinité de tels intervalles, ne se rencontrant pas, donc une infinité de $x$ dans $A$.
Proprement, on pose même $I_n = [2.n.\alpha,\ (2.n+1).\alpha]$. Pour chaque $n$, cet $I_n$contient au moins un élément $a_n$ de $A$. Comme ces intervalles n'ont aucun point commun (vous comprenez pourquoi j'ai pris ça plutôt que $[n.\alpha,\ (n+1).\alpha]$ ?), les $a_n$ sont tous distincts. Et l'ensemble $A$ contient le sous-ensemble infini $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*On pouvait aussi raisonner par contraposée. Si $A$ était fini, on note $M$ son plus grand élément. Et dès lors, tout intervalle de la forme $[M+1,\ M+1+\alpha]$ ne pouvait contenir aucun élément de $A$ (quel que soit $\alpha$).*

• On prend la partie $\{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ldots\}$. Le plus grand écart entre deux éléments est 1. On va pouvoir montrer que tout intervalle $[a,\ a+1]$ de longueur 1 contient au moins une racine carrée d'entier.
Explicitement, pour $a$ donné, on veut $n$ vérifiant $a \leqslant \sqrt{n} \leqslant a + 1$. On demande alors $a^2 \leqslant n \leqslant a^2 + 2.a + 1$ et $n$

entier. On prend $n = [a^2 + 2.a]$ et on vérifie.

• En revanche, les écarts entre carrés grimpent trop vite. L'ensemble $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ « se raréfie ».

*On va montrer que pour tout $\alpha$ il existe au moins un intervalle de longueur $\alpha$ qui ne contient aucun point de notre ensemble. C'est bien la négation de la « bonne répartition ».*

Supposons qu'il existe $\alpha$ tel que tout intervalle de longueur $\alpha$ contienne au moins un carré d'entier.
Or, la distance entre deux carrés consécutifs $(n^2 + 1) - n^2$ vaut $2.n + 1$. Pour $n$ plus grand que $\alpha$, l'intervalle $[n^2 + 1,\ (n + 1)^2]$ est de longueur plus grande que $\alpha$ et ne contient aucun carré (le dernier carré avant, c'est $n^2$ et le premier carré après, c'est $(n + 1)^2$).

*Si vous voulez un intervalle vraiment de longueur $\alpha$ prenez $[n^2 + 1,\ n^2 + 1 + \alpha]$.*

• Si $A$ est bien réparti (avec un réel $\alpha$) et $B$ aussi (même pas besoin de citer $\beta$ ), alors tout intervalle de longueur $\alpha$ contient au moins un élément de $A$ donc un élément de $A \cup B$. Ceci prouve que $A \cup B$ est à son tour bien réparti.

*En fait, tout ensemble contenant un ensemble A bien réparti est à son tour bien réparti.*

• En revanche, pour l'intersection, c'est raté.
On a vu que $\mathbb{N}$ était bien réparti (avec $\alpha = 1$).
De même, l'ensemble $\left\{n + \dfrac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est lui aussi bien réparti (prendre cette fois encore $\alpha = 1$).
Et leur intersection est vide et ne peut pas être bien répartie.

## IS19 — Des élèves qui disent n'importe quoi.

Si $(a_n)$ converge vers $\alpha$ alors $(a_{n^2})$ converge aussi vers $\alpha$ puisque $n^2$ tend vers l'infini aussi.
Il suffit de prendre une suite dont la limite ne vaut ni 0 ni 1 pour tenir un contre-exemple.
Je prends même la suite constante égale à 2. Les deux suites $(a_n)$ et $(a_{n^2})$ convergent vers 2 (et la seconde ne converge donc pas vers 4).

On notera qu'il faut se méfier si on dit « $a_n$carré », doit on entendre $a_{n^2}$ou $(a_n)^2$.
Les habitués des maths diront qu'on compose deux fonctions dans deux ordres différents : $n \longmapsto n^2 \longmapsto a_{n^2}$ contre $n \longmapsto a_n \longmapsto (a_n)^2$.

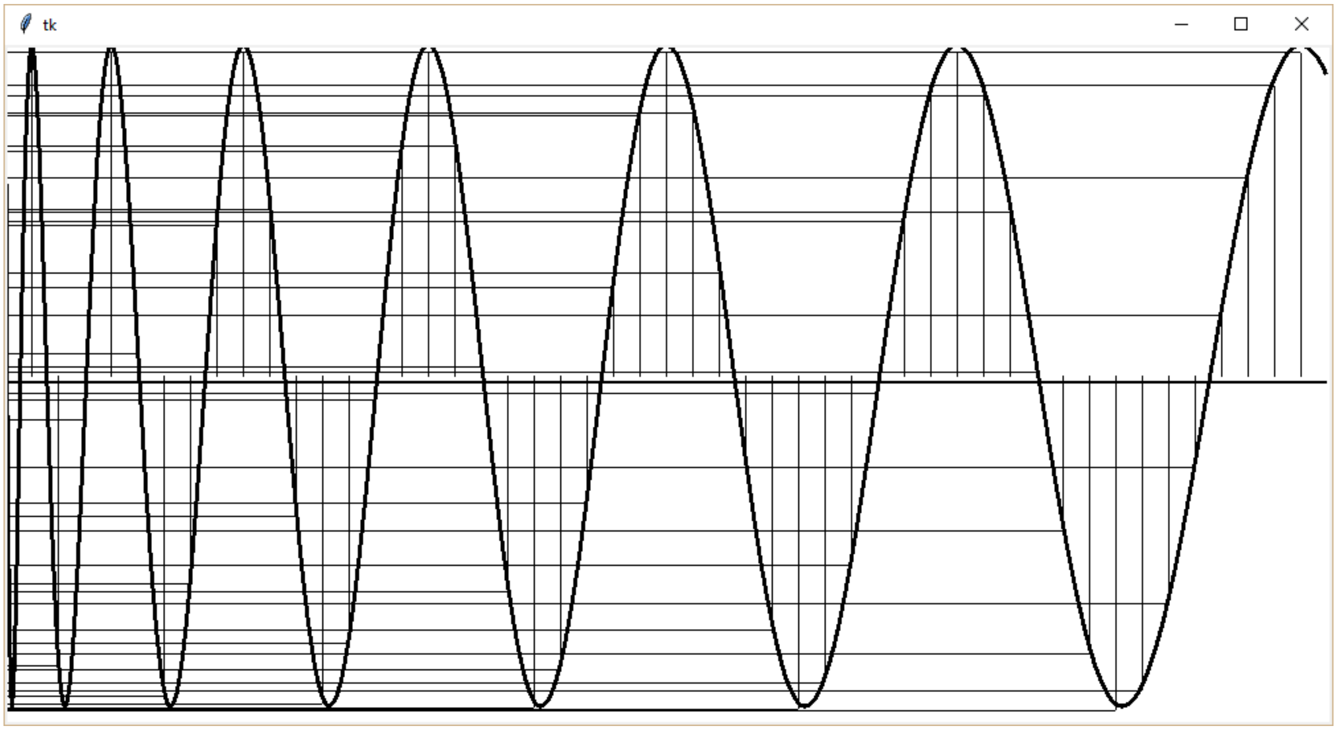
---

La suite $(a_{n^2})$ ne regarde que des termes particuliers de la suite $(a_k)$. Il se peut que la suite $(a_k)$ diverge mais que pour les carrés parfaits elle se comporte bien.
On peut en construire une de manière près artificielle. Si $k$ est un carré parfait $a_k$ vaut 1 et sinon, $a_k$ vaut 0.
La sous-suite $(a_{n^2})$ vaut 1 et converge vers 1.
Mais la suite globale ne peut pas converger, puisque la sous-suite $(a_{n^2+1})$ vaut 0 et converge vers 0.

La suite de l'exemple suivant peut aussi servir.

---

On prend donc la suite définie par $\forall n,\ a_n = \cos(2.\pi.\sqrt{n})$.
On a naturellement pour tout $n$ : $a_{n^2} = \cos(2.\pi.n) = 1$ (multiple pair de $\pi$). Étant constante, cette suite (sous-suite en fait) converge vers 1.




Il faut maintenant montrer que la suite $(a_n)$ varie de moins en moins vite (tout en ne convergeant pas, il est vrai). On va donc calculer $a_{n+1} - a_n$ en suivant les pistes données (différence de cosinus qui donne un produit de sinus) et en espérant que cette différence va tendre vers 0

$$a_{n+1} - a_n = \cos(2.\pi.\sqrt{n+1}) - \cos(2.\pi.\sqrt{n}) = -2.\sin\left(\pi.\sqrt{n+1} - \pi.\sqrt{n}\right).\sin\left(\pi.\sqrt{n+1} + \pi.\sqrt{n}\right)$$

Si on doit conjuguer, on conjugue

$$a_{n+1} - a_n = -2.\sin\left(\pi.\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right).\sin\left(\pi.\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right) = -2.\sin\left(\pi.\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right).\sin\left(\pi.\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$$

Le second sinus n'a pas l'air génial, on va juste dire qu'il est entre $-1$ et 1. Mais le premier sinus est parfait : $dsp\pi.\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, et son sinus tend vers 0.

On peut simplement encadrer $a_{n+1} - a_n$ par $-2.\sin\left(\pi.\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$ et $\sin\left(\pi.\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$.
Les deux encadrants tendent vers 0, la différence $a_{n+1} - a_n$tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

*L'application $t \longmapsto \cos(2.\pi.t)$ oscille, mais l'application $t \longmapsto \cos(2.\pi.\sqrt{t})$ oscille de plus en plus lentement.*
*Il suffit d'ailleurs de voire le graphique pour comprendre, et de regarder sa dérivée pour s'en convaincre.*

---

On nous suggère de regarder $\cos(2.\pi.\sqrt{n^2+n})$. Pourquoi pas. Mais pourquoi ceci tendrait il vers $-1$. Et d'ailleurs pourquoi $-1$ ?
Parce que c'est $\cos((2.n+1).\pi)$. Et $2.\sqrt{n^2+n}.\pi$ ressemble peut être à $(2.n+1).\pi$.
Attrapons la perche tendue et calculons $\cos(2.\pi.\sqrt{n^2+n} - 2.\pi.n)$.
Par périodicité, c'est $\cos(2.\pi.\sqrt{n^2+n})$. Donc c'est $a_{n^2+n}$.
Mais sinon, par conjugaison, on a aussi

$$a_{n^2+n} = \cos(2.\pi.\sqrt{n^2+n} - 2.\pi.n) = \cos\left(2.\pi.\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \cos\left(2.\pi.\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$$

Or, par usage d'équivalents (ou division du numérateur et du dénominateur par $n$), le quotient $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ tend vers $\frac{1}{1+1}$.
Par continuité, le cosinus tend vers $\cos\left(2.\pi.\frac{1}{2}\right)$ et ceci vaut $-1$.

*On a une suite qui se promène de plus en plus doucement entre $-1$ et 1 (sans atteindre $-1$ mais en atteignant 1 pour les indices qui sont des carrés).*

La suite $a(_n)$ ne peut pas converger, sinon les deux suites $a(_{n^2+n})$ et $(a_{n^2})$ devraient converger vers toutes deux vers la même valeur (la limite de $(a_n)$ ).

---

On suppose que $(b_{n^2})$ converge vers $\alpha$ et que $(n.(b_{n+1}-b_n))$ converge vers 0.
On se donne $\varepsilon$. A partir d'un certain rang $N_\varepsilon$ on a (pour tout $n$ plus grand que $N_\varepsilon$) : $|b_{n^2}-\alpha| \leqslant \varepsilon$.
A partir d'un certain rang $D_\varepsilon$ on a (pour tout $n$ plus grand que $D_\varepsilon$) : $n.|b_{n+1}-b_n| \leqslant \varepsilon$ et donc $|b_{n+1}-b_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}$

Prenons $n$ plus grand que $Max((N_\varepsilon)^2,\ D_\varepsilon)$ pour avoir les deux propriétés à la fois.

Suivons l'idée de l'élève en encadrant $n$ entre deux carrés : $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$ (en fait $k=[\sqrt{n}]$).
Mesurons la distance de $b_n$ à $\alpha$ en avançant par accroissements $b_{k+1}-b_k$ jusqu'à $b_{(k+1)^2}$

$$b_{(k+1)^2}-b_n = \sum_{p=n}^{k^2+2.k}(b_{p+1}-b_p)$$

$$\alpha-b_n = \alpha-b_{(k+1)^2}+b_{(k+1)^2}-b_n = \alpha-b_{(k+1)^2}+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}(b_{p+1}-b_p)$$

Appliquons l'inégalité triangulaire et même polygonale

$$|\alpha-b_n| \leqslant |\alpha-b_{(k+1)^2}|+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}|b_{p+1}-b_p|$$

Comme $n$ est plus grand que $(N_\varepsilon)^2$, $(k+1)^2$ l'est aussi et $k+1$ est plus grand que $N_\varepsilon$. On peut majorer un terme

$$|\alpha-b_n| \leqslant |\alpha-b_{(k+1)^2}|+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}|b_{p+1}-b_p| \leqslant \varepsilon+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}|b_{p+1}-b_p|$$

Comme n est plus grand que $D_\varepsilon$, tous les $p$ au delà de $n$ le sont aussi et on continue

$$|\alpha-b_n| \leqslant |\alpha-b_{(k+1)^2}|+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}|b_{p+1}-b_p| \leqslant \varepsilon+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}\frac{\varepsilon}{p}$$

On compte les termes et on majore par le plus grand

$$|\alpha-b_n| \leqslant |\alpha-b_{(k+1)^2}|+\sum_{p=n}^{k^2+2.k}|b_{p+1}-b_p| \leqslant \varepsilon+(k^2+2.k-n+1).\frac{\varepsilon}{n}$$

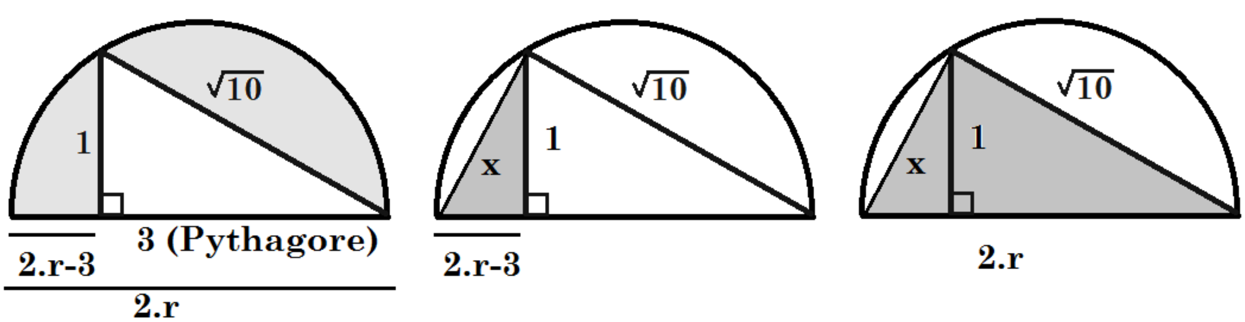
Mais l'encadrement $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$ permet de majorer $(k^2+2.k+1-n)$ par $2.n$.
On a finalement $|\alpha-b_n| \leqslant 3.\varepsilon$ pour $n$ assez grand. C'est la définition de la convergence de $(a_n)$ vers $\alpha$.

## IS19 Problème de géométrie.

L'aire du triangle, c'est cadeau. C'est « base fois hauteur divisé par 2 ».
On connait la hauteur : 1.
Et Pythagore connaît la base : 3 (puisque $1^2+3^2=(\sqrt{10})^2$.

L'aire est donc de $\boxed{\dfrac{3}{2}}$ (ah pardon, j'ai oublié u.a. comme « unité arbitraire ».

Reste à trouver le rayon du disque pour avoir son aire et lui soustraire celle du triangle.



Notons $r$ le rayon qui nous manque (au oui, qui est le petit rayon de soleil qui nous manque quand il/elle n'est pas là ?).

Regardons alors un petit triangle rectangle, de côtés $2.r - 3$ (soustraction) et 1 (hauteur).
Nommons $x$ le côté qui manque et écrivons le théorème de Pythagore

$$x^2 = 1^2 + (2.r - 3)^2$$

Continuons avec le grand triangle inscrit dans le demi cercle, de côtés $x$ et $\sqrt{10}$ et d'hypoténuse $2.r$

$$x^2 + 10 = (2.r)^2$$

On soustrait ces deux égalités et il reste $x^2 + 10 - x^2 = (2.r^2) - 1 - (2.r - 3)^2$. Ceci se simplifie et donne $r = 5/3$.

La valeur cherchée est $\boxed{\frac{\pi}{2}.\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}}$ et n'a aucun intérêt et en a encore moins si on dit $2,86$ à $10^{-2}$ près.