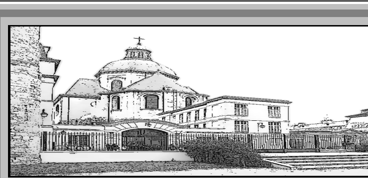
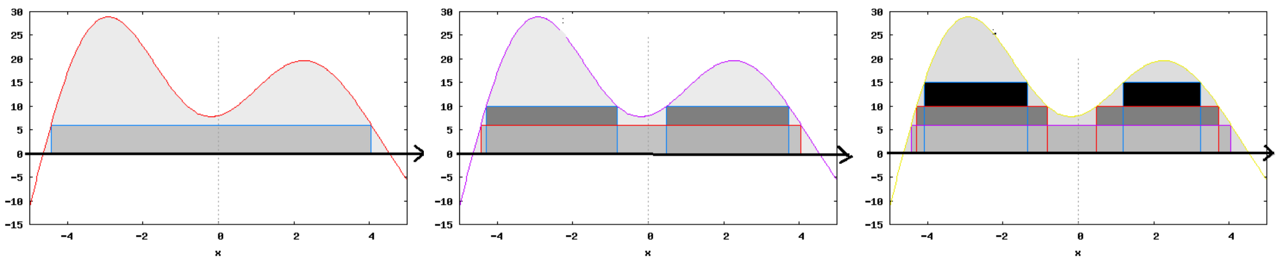
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

TD20

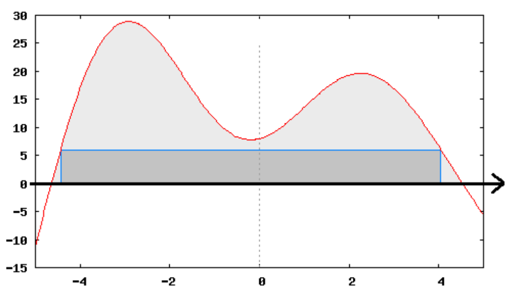
◁0▷ ♠ Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer que f est majorée *(c'est quelle quantification : $\forall x \in [a,\ b],\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ ou $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,\ b],\ f(x) \leqslant M$?)*. On pose pour tout n : $A_n = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \geqslant n\}$. On suppose que f n'est pas majorée *(quantifiez)*. Montrez alors que les A_n sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées. On pose alors $\alpha_n = Sup(A_n)$ pour tout n. Montrez alors pour tout n : $A_{n+1} \subset A_n$ et $a \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Déduisez que la suite (α_n) converge. On note sa limite β. Que se passe-t-il alors en β ? Concluez ?



Montrez que f est aussi minorée.

On va montrer « toute application continue de $[a,\ b]$ (segment) dans $\mathbb{R}$ est majorée. Sans utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass. Mais évidemment, on va utiliser ce qui caractérise $\mathbb{R}$: toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant.

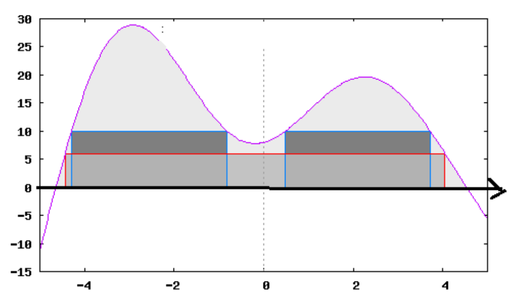
On raisonne par l'absurde. On suppose f non majorée : $\forall M,\ \exists x \in [a,\ b],\ f(x) > M$.



En prenant $M = n$ on a au moins un élément x dans chaque A_n.
Pas le même pour tous les A_n quand même, faut pas pousser.
Sur ce dessin, on a représenté l'ensemble A_1, là où la fonction dépasse 1.
Sa borne supérieure est visible à la fin de l'ensemble A_1, le long de l'axe des abscisses.

Chaque A_n est une partie non vide, minorée par a. Elle admet une borne supérieure, que l'on nomme a_n.
Par continuité de f , on a $\alpha_n \in A_n$.

Pour tout n, on a $A_{n+1} \subset A_n$. En effet, quand on prend une abscisse x vérifiant $f(x) \geqslant n+1$, on a forcément $f(x) \geqslant n$.
Il s'ensuit, en passant à la borne supérieure : $Sup(A_{n+1}) \leqslant Sup(A_n)$.
Proprement : le réel α_n majore tous les éléments de A_n donc tous les éléments de A_{n+1}.
En tant que « un majorant de A_{n+1} », il est plus grand que « le plus petit majorant de A_{n+1} ».
On a donc $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ (avec égalité éventuelle a priori, même si de fait, c'est difficile d'avoir cela).



Sur ce schéma, on lit l'inclusion de A_2dans A_1 et on voit la borne supérieure « descendre ».

La suite (α_n) est décroissante comme on vient de le voir. Et elle est minorée par a car tous les $\alpha_n$sont dans $[a,\ b]$.
Par principe de la borne supérieure (ou plutôt de la borne inférieure), elle converge vers son plus grand minorant.
On note β la limite de la suite (α_n).
Par continuité de f en β on a $f(\alpha_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(\beta)$.
Mais dans le même temps, chaque α_n est dans A_n et vérifie $f(\alpha_n) \geqslant n$. Ceci donne $f(\alpha_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$.
Les deux résultats se contredisent. Le raisonnement par l'absurde se termine.

Toute application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est majorée.

En l'appliquant à $-f$: Toute application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est minorée.

◁1▷ ♡ Déterminez $Inf\Big\{Sup\{Arctan(n.x) \mid n \in \mathbb{N}\}\ \Big|\ x \in \mathbb{R}^{+*}\Big\}$
puis $Sup\Big\{Inf\{Arctan(n.x) \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\}\ \Big|\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

Pour x dans $]0,\ +\infty[$, on a $Sup\{Arctan(n.x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \dfrac{\pi}{2}$ (en faisant tendre n vers l'infini).
$Inf\Big\{\dfrac{\pi}{2} \mid x \in]0,\ +\infty[\Big\} = \dfrac{\pi}{2}$ (borne supérieure d'un ensemble à un seul élément)

Pour tout n, on a $Inf\{Arctan(n.x) \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\} = 0$ (en faisant tendre x vers 0).
$Sup\Big\{Inf\{Arctan(n.x) \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\}\ \Big|\ n \in \mathbb{N}\Big\} = 0$ comme borne supérieure d'un singleton.

On ne permute pas les Sup et les Inf !

◁2▷ Avec des signes qui clignotent, calculez $Sup\Big\{\dfrac{(-1)}{p+1}^n \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$, $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $Sup\Big\{\dfrac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$.

Les deux ensembles $\Big\{\dfrac{(-1)}{p+1}^n \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$ et $\Big\{\dfrac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $\Big\{\dfrac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ sont majorés, par exemple par 1. Et ils sont non vides. L'entier $(-1)^p - p$ n'est jamais nul, même pour $p = 1$.

Dans le premier, on a les $\dfrac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et ainsi de suite, et leurs opposés. La borne supérieure est 1 et c'est un maximum.

Le second contient juste $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $dsp\frac{-1}{4}$, $\dfrac{1}{5}$ et ainsi de suite. La borne supérieure est $\dfrac{1}{3}$.

Le dernier contient $\dfrac{1}{-2}$, $\dfrac{1}{-1}$, $\dfrac{1}{-4}$, $\dfrac{1}{-3}$, $\dfrac{1}{-6}$ et ainsi de suite. La borne supérieure vaut 0, non atteinte.

◁3▷ A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+$ non vides, majorées.
Exprimez $Sup(A \cup B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.
Exprimez $Sup(A + B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$ (on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$).
Pouvez vous exprimer $Sup(A \cap B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

$Sup(A \cup B) = Max(Sup(A),\ Sup(B))$

$Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$
Tout élément de $A + B$ s'écrit $c = a + b$ et est majoré par $Sup(A) + Sup(B)$.
Et il existe une suite (a_n) d'élément de A qui converge vers $Sup(A)$, de même qu'il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $Sup(B)$.
Comme par hasard la suite $(a_n + b_n)$ est dans $A + B$ et converge vers le majorant $Sup(A) + Sup(B)$.

$Sup(A \cap B)$ n'a aucune raison d'exister *(intersection certes majorée mais pouvant être vide)*

◁4▷ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(x) \mid (t,\ x) \in \mathbb{R}^2\}$ et $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dans le premier, comme x et t varient, on peut maximiser $\cos(t)$ en prenant t égal à 0 et maximiser $3.\sin(x)$ en prenant x égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
La borne supérieure est un maximum, égal à 4, atteint.

Pour le second, on a une fonction d'une seule variable. t ne peut pas être égal à la fois à 0 et à $\dfrac{\pi}{2}$ (l'exposé de physique quantique c'était l'autre jour).
Mais on sait écrire $\cos(t) + 3.\sin(t) = \sqrt{1^2 + 3^3}.\cos(t - \alpha)$ avec $\alpha = Arctan(3)$. Le maximum est $\sqrt{10}$, atteint d'ailleurs en $Arctan(3)$.

◁5▷ Lesquels de ces ensembles sont majorés :

$A=\left\{\frac{e}{n!}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$	$B=\left\{frac\left(\frac{n!}{e}\right)\mid (n,\ p)\in\mathbb{N}^2\right\}\clubsuit$	$C=\left\{\frac{e^p}{n!}\mid (n,\ p)\in\mathbb{N}^2\right\}$
$D=\left\{\frac{e^{2.n}}{n!}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$	$E=\left\{(-1)^{n+p+1}\frac{p!}{n!}\mid (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ p\leqslant n\right\}$	$F=\left\{\frac{n^e}{n!}\mid (n,\ p)\in\mathbb{N}^2\right\}$

où $frac(x)$ est la partie décimale ou fractionnaire de x $(x-[x])$ et donnez sa borne supérieure de ceux qui en ont une.

A est majoré par 200, mais j'y vais un peu large.
En fait, tous les éléments de A sont plus petits que e. Et cette valeur est atteinte.
La borne supérieure de A est e, et c'est même un maximum (atteint).

Dans B, il n'y a que des $frac\left(\frac{n!}{e}\right)$, donc tous plus petits que 1 (une partie décimale est entre 0 et 1).
Mais 1 n'est pas atteint puisque les parties fractionnaires restent dans $[0,\ 1[$.
Peut être quand même 1 est « le plus petit majorant ».

A suivre.

Dans C il y a déjà tous les e^p quand p décrit $\mathbb{N}$ (et que n vaut 0).
Ce sous-ensemble n'est pas majoré.
Faites varier n, le gros ensemble n'est toujours pas majoré.
Précisément, si vous voulez qu'un élément de C dépasse une valeur A que vous rêvez d'atteindre et dépasser, prenez juste $n=[\ln(A)]+1$ (donc $n>\ln(A)$) et vous avez $e^n\geqslant e^{\ln(A)}=1$.

Étant non majoré, comment cet ensemble aurait il une borne supérieure.

Dans D on a tous les termes d'une suite qui a la bonne idée de converger vers 0 (croissances comparées).
On a un ensemble majoré, et il suffit en fait de trouver le plus grand terme de cette suite.
Étudions ses variations en calculant $\frac{e^{2.(n+1)}}{(n+1)!}-\frac{e^{2.n}}{n!}$ (pour en avoir le signe).
On a $\frac{e^{2.(n+1)}}{(n+1)!}-\frac{e^{2.n}}{n!}=\frac{e^{2.n}}{(n+1)!}.(e^2-(n+1))$.
On a donc $\frac{e^{2.0}}{0!}\leqslant\frac{e^{2.1}}{1!}\leqslant\frac{e^{2.2}}{2!}\leqslant\frac{e^{2.3}}{3!}\leqslant\frac{e^{2.4}}{4!}\leqslant\frac{e^{2.5}}{5!}\leqslant\frac{e^{2.6}}{6!}\leqslant\frac{e^{2.7}}{7!}\geqslant\frac{e^{2.8}}{8!}\geqslant\frac{e^{2.9}}{9!}\geqslant\frac{e^{2.10}}{10!}\geqslant\ldots$.
Le maximum (donc borne supérieure atteinte) est $\boxed{\frac{e^{2.7}}{7!}}$

A finir.

◁6▷ ♡ Déterminez $Sup\{(-1)^{n+1}+(-2)^{-n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ et $Sup\{(-1)^{n+1}+(-2)^{-p}\mid (n,\ p)\in\mathbb{N}^2\}$.

$(-1)^{n+1}+(-2)^{-n}$ vaut $(-1)^{n+1}.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.
On cherche à le majorer. Les termes négatifs sont majorés par 0. Et les termes positifs sont majorés par 1.
Et on ne fera pas mieux que 1.
En effet, les $(-1)^{n+1}.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ avec n impair tendent vers 1 quand n tend vers l'infini.
La borne supérieure vaut 1, non atteinte.

Comme dans $\{(-1)^{n+1}+(-2)^{-p}\mid (n,\ p)\in\mathbb{N}^2\}$ p et n varient en toute indépendance, on atteint $1+1$ avec $n=1$ et $p=0$.
Et c'est un majorant. la borne supérieure vaut 2. Atteinte.

◁7▷

-a- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{(-1)^p}{2^p}\mid n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.
-b- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{(-1)^n}{2^n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.
-c- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^p}{2^n}+\frac{(-1)^n}{2^p}\mid n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.
-d- Déterminez $Sup\left\{\frac{(-1)^n}{2^p}+\frac{(-1)^n}{2^p}\mid n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.

Tous nos ensembles sont majorés par 2. Et les bornes supérieures valent... 2.

a	2	atteinte pour $n = p = 0$	Décevant !
b	2	atteinte pour $n = 0$	
c	2	atteinte pour $n = p = 0$	
d	2	atteinte pour $n = p = 0$	

◃8▹ Déterminez $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ et $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{Q}\}$ et enfin $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ vaut 0 car cet ensemble est le singleton $\{0\}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ vaut 1. C'est en effet un majorant. Et il est atteint pour $t = \dfrac{1}{2}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{R}\}$ vaut 1 aussi, pour les mêmes raisons.

◃9▹ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\left\{\dfrac{x+10}{x^2+261} \mid x \in [0, +\infty[\right\}$ et $Sup\left\{\dfrac{x+10}{x^2+261} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$.

Sur $\mathbb{R}$ on trace le graphe ou même juste un tableau de variations après avoir dérivé.
La dérivée est du signe de $-x^2 - 20.x + 261$. Elle s'annule et change de signe en 9.
Le maximum est atteint en 9 et il vaut $\dfrac{1}{18}$.

Et sur $\mathbb{N}$, on a de la chance, c'est le même maximum.

Remarque : *Si le maximum sur $\mathbb{R}$ avait été atteint en π par exemple, il aurait fallu comparer la valeur en 3 et en 4 pour connaitre le maximum sur $\mathbb{N}$.*

◃10▹ Montrez : $p.p.c.m.(a,b,c) = p.p.c.m.(p.p.c.m.(a,c),\ p.p.c.m.(b,c))$.

On écrit $a = \prod_i (p_i)^{\alpha_i}$, $b = \prod_i (p_i)^{\beta_i}$ et $c = \prod_i (p_i)^{\gamma_i}$ avec les α_i, β_i et γ_i dans $\mathbb{N}$ (nuls à partir d'un certain rang).
On calcule $p.p.c.m.(a,\ b,\ c) = \prod_i (p_i)^{Max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}$.
On poursuit $p.p.c.m.(a,\ b) = \prod_i (p_i)^{Max(\alpha_i,\beta_i)}$, $p.p.c.m.(b,\ c) = \prod_i (p_i)^{Max(\beta_i,\gamma_i)}$.
On termine en comparant $Max(Max(a,b),\ Max(b,c))$ avec $Max(a,\ b,\ c)$ pour tout triplet d'entiers.

◃11▹ Si A est une partie de $\mathbb{C}$ on pose $diam(A) = Sup\{|b-a| \mid (a,\ b) \in A^2\}$. Déterminez le diamètre d'un disque de centre C et de rayon R.
Montrez : $A \subset B \Rightarrow diam(A) \leqslant diam(B)$.
Quel est le diamètre du vide ?

Le diamètre du vide vaut $-\infty$.
Moi je trouve ça normal.
C'est les points qui ont un diamètre nul.
Et un segment a pour diamètre sa longueur.

◃12▹ Déterminez $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\Big\}$.
Pouvez vous déterminer $Sup\Big\{Inf\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid a \in \mathbb{R}\} \mid t \in \mathbb{R}\Big\}$.

Pour $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\Big\}$, on voit que pour chaque a on doit calculer $Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ qu'on va noter μ_a.
Et on ira chercher ensuite le minimum (ou la borne inférieure) des μ_a.
Or, pour calculer μ_a il suffit d'étudier l'application $t \longmapsto a.\cos(t) + (1-a).\sin(t)$.
Avec nos bonnes habitudes des maths et excellentes habitudes de la physique, on la met sous la forme $t \longmapsto \sqrt{a^2 + (1-a)^2}.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi.
Le maximum μ_a est donc justement $\sqrt{a^2 + (1-a)^2}$. Et on l'écrire $\mu_a = \sqrt{2.a^2 - 2.a + 1}$.

On doit ensuite chercher la borne inférieure de ces μ_a quand a décrit $\mathbb{R}$. C'est un minimum, atteint « au sommet de la parabole », pour $a = 1/2$.
On trouve donc $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\Big\} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : *Si vous voyez tout de suite ce qu'il faut calculer en lisant* $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\mid a\in\mathbb{R}\Big\}$, *vous êtes matheux, et vous avez compris. Ensuite, il vous faudra certes ingurgiter des théorèmes pour réussir les concours, mais c'est un bon début.*
Si vous restez perplexe face à $Inf\Big\{Sup\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\mid a\in\mathbb{R}\Big\}$, *il faudra que vous appreniez des théorèmes, mille exercices type, deux cent problèmes classiques, treize cent méthodes classiques, et enfin, vous réussirez les concours. C'est jouable, j'en connais qui en sont capables...*

Pour $Sup\Big\{Inf\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid a\in\mathbb{R}\}\mid t\in\mathbb{R}\Big\}$ les rôles changent. Donc tout change.
On avance à partir de la strate la plus visible : t va varier dans $\mathbb{R}$.
Pour chaque t , on va calculer $Inf\{a.\cos(t)+(1-a).\sin(t)\mid a\in\mathbb{R}\}$. Mais cette partie de $\mathbb{R}$ non vide n'a pas de minorant.
On fait tendre a vers un infini bien choisi (en fonction des signes de $\cos(t)$ et $\sin(t)$). Et on va « aussi bas qu'on veut ».
La borne inférieure n'existe pas. Ou alors elle vaut $-\infty$.
Et ensuite on a beau faire varier t, la borne supérieure de quantités « toutes égales à $-\infty$ » vaut$-\infty$.
Par abus de langage.

◃13▹ Déterminez la limite de $\dfrac{x^3-3^x}{x-3}$ quand x tend vers 3.
Conseil : taux d'accroissement de $x\longmapsto x^3$ et de $x\longmapsto 3^x$.

On a évidemment une forme indéterminée. Écrivons la $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ avec $f=x\longmapsto x^3-3^x$ et $a=3$.
On a justement $f(3)=3^3-3^3=0$.
La limite des taux d'accroissement donne le nombre dérivé en a : $f'(3)=27-27.\ln(3)$.
(car $f(x)=x^3-e^{x.\ln(3)}$ et $f'(x)=3.x^2-\ln(3).3^x$)
Si la difficulté pour vous est de dériver $x\longmapsto 3^x$, il va y avoir du travail...

◃14▹ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation ◂ par $\Big((a+i.b)\blacktriangleleft(\alpha+i.\beta)\Big)\Leftrightarrow\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$ (a, b, α et β sont des réels).
Montrez que c'est une relation d'ordre, et que cet ordre est total (on l'appelle « ordre lexicographique » ou « ordre du dictionnaire »).
Montrez que le disque fermé (c'est à dire avec son cercle)$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$ admet pour borne supérieure 1.
Montrez que le disque ouvert (c'est à dire sans son cercle) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ n'admet pas de borne supérieure.

$\boxed{\text{Réflexivité}}$ On se donne un seul complexe $a+i.b$. On a alors $(a=a)$ *et* $(b\leqslant b)$. La seconde assertion est vérifiée, on a bien $(a+i.b)\blacktriangleleft(a+i.b)$.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ On se donne deux complexes qu'on suppose ordonnés dans les deux sens à la fois.
On a donc à la fois $\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$
et $\Big((\alpha<a)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (\beta\leqslant b)\big)\Big)$.

On distribue ces disjonctions de cas

	$(a<\alpha)$	$((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta))$
$\alpha<a$	impossible	impossible
$(\alpha=a)\ et\ (\beta\leqslant b)$	impossible	

La seul et dernière case possible donne $a=\alpha$ puis $b=\beta$ par antisymétrie.
On est bien arrivé à $(a+i.b)=(\alpha+i.\beta)$.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ On se donne cette fois trois complexes et on suppose
$\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$ et $\Big((\alpha<A)\ ou\ \big((\alpha=A)\ et\ (\beta\leqslant B)\big)\Big)$.

On distribue aussi

	$(a<\alpha)$	$((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta))$
$\alpha<A$	$a<A$	$a<A$
$(\alpha=A)\ et\ (\beta\leqslant B)$	$a<A$	$a=\alpha=A$ et $b=\beta=B$

Trois cases ont conduit à $a<A$ (et donc $(a+i.b)\blacktriangleleft(A+i.B)$), la dernière conduit à l'autre cas de figure amenant à la même conclusion ($a+=A$ et $b\leqslant B$).

On a une relation d'ordre.

Pour comparer deux complexes, on comparer déjà les abscisses, et en cas d'égalité, on compare les ordonnées.

On se donner $a+i.b$ et $\alpha+i.\beta$ et il faut arriver à les comparer, dans un sens ou dans l'autre. Sans arriver à « ben non, pas comparables ».
On regarde déjà les abscisses et comme l'ordre sur $\mathbb{R}$ est total, on a trois possibilités

$a<\alpha$	$a=\alpha$	$a>\alpha$
$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$	?	$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$

Dans le cas $a=\alpha$, on compare les parties imaginaires b et β (ordre total sur $\mathbb{R}$ encore)

<table>
<tr><td>$a<\alpha$</td><td colspan="3">$a=\alpha$</td><td>$a>\alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$</td><td>$b<\beta$</td><td>$b=\beta$</td><td>$b>\beta$</td><td rowspan="2">$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td></tr>
<tr><td>$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$</td><td>$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$
et $(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td><td>$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td></tr>
</table>

Tous les cas conduisent à une comparaison. L'ordre est total.

La borne supérieure de $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ est son plus grand élément : 1.
C'est un élément de cet ensemble (puisque $|1| \leqslant 1$).
Tous les autres éléments sont de la forme $x+i.y$ avec $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1$.
On a nécessairement $x \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1$.
Si on a $x<1$ alors on a bien $(x+i.y) \blacktriangleleft (1+i.0)$.
Si on a $x=1$ alors forcément $y=0$ et on a bien $(1+i.0) \blacktriangleleft (1+i.0)$.

Le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ne contient plus $(1+i.O)$.
Tous ses éléments n'en sont pas moins majorés (pour $\blacktriangleleft$) par $1+i.0$.
Mais mieux encore : tous ses éléments sont majorés (pour $\blacktriangleleft$) par $1-5.i$ et même par tout nombre de la forme $1+b.i$.

Tous les éléments de la droite « tangente au cercle en 1) sont des majorants du disque.
De plus, si un certain $a+i.b$ majore tous les x+i.y du disque, il majore par exemple les $x+i.0$ avec $-1<x<1$ (ils sont dans le disque).
On a donc $x<a$ ou $x=a$ *et* $0 \leqslant b$
Dans les deux cas, on a forcément $x \leqslant a$ et par passage à la limite sur x : $1 \leqslant a$.

Les majorants du disque ont donc un a supérieur ou égal à 1.
Et tous les $a+ib$ avec $a \geqslant 1$ sont des majorants de tous les points du disque.

Or, parmi les $a+i.b$ avec $a \geqslant 1$, il n'y en a pas qui soit le plus petit.
Proposez moi $1+i.b_0$ et je vous trouve $1+i.(b_0-1)$ qui est resté un majorant, et est encore plus petit

---

◁15▷ A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Complétez ce qui manque dans ce raisonnement.
On pose $M=Sup(A)$ et $\mu=Inf(A)$.
On a $x-y \leqslant M-\mu$.
Notons α un majorant de $x-y$. Alors pour tout y, on a
pour tout x : $x \leqslant \alpha+y$ donc $M \leqslant \alpha+y$. Et donc pour tout y : $M-\alpha \leqslant y$.
On déduit : $M-\alpha \leqslant \mu$.
Finalement $Sup\{x-y \mid (x,\ y) \in A^2\} = M-\mu$.

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée.
Elle admet donc une borne supérieure qu'on note M : $M=Sup(A)$.

On suppose aussi A minorée. Elle a alors une borne inférieure : $\mu=Inf(A)$.

On va alors montrer que $\{x-y \mid (x,\ y) \in A^2\} = M-\mu$ admet pour borne supérieure $M-\mu$.

Qui sont ces $\{x-y \mid (x,\ y) \in A^2\}$: ce sont les distances entre points de A. Et on cherche la plus grande distance.
Me permettrez vous de l'appeler « diamètre de A » ?

Pour tout x et tout y de A, on a déjà $x \leqslant M$ (majorant) puis $\mu \leqslant y$.
On passe à l'opposé dans la seconde et on somme : $x-y \leqslant M-\mu$.

> *Déjà, le diamètre ne peut pas dépasser $M-$, ce qui est assez logique par l'inclusion $A \subset [\mu,\ M]$ (non ! qui d'entre vous a transformé en $A=[\mu,\ M]$, estimant que tout ensemble est un segment ?).*

On a $x - y \leqslant M - \mu$.

Il faut montrer que $M - \mu$ est non seulement un majorant de notre ensemble de différences, mais même « son plus petit majorant ». On va utiliser ici l'approche « tous les autres majorants sont plus grands que $M - \mu$.

Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y et tout x, on a $x - y \leqslant \alpha$ donc $x \leqslant \alpha + y$.
Gardons y fixé pour l'instant. Et insistons sur le $\forall x$.
Le réel $\alpha + y$ majore tous les x de A. C'est un majorant de A.
Par définition du plus petit majorant : $M \leqslant \alpha + y$.

On fait passer α de l'autre côté : $M - \alpha \leqslant y$.
Le réel $M - \alpha$ est un minorant de A.
Par définition du plus grand minorant : $M - \alpha \leqslant \mu$.

> *Oui, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je fais tendre y vers la borne inférieure μ et j'obtiens $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous avez aussi tout compris.*
> *En revanche, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je prends y égal à la borne inférieure μ et l'obtient $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous n'avez pas compris qu'une borne inférieure n'est pas forcément atteinte. Erreur classique, mais on est MP bordel, pas en licence de physique !*

On rétablit : $M - \mu \leqslant \alpha$.

Le réel $M - \mu$ est un majorant de $\{x - y \mid (x,\ y) \in A^2\}$, plus petit que les autres majorants.
C'est lui la borne supérieure.

C'est quoi ce bordel ?

$$16 = 2^4 = (1+1)^4 = \binom{4}{k}.1^k.1^{4-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{20}{10} = 184756$$

◃16▹ ♠ Soit (a_n) une suite réelle bornée par μ et M. Montrez que chaque partie $A_n = \{a_k \mid k \geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, qui admet une borne supérieure noté s_n. Montrez pour tout n : $s_{n+1} \leqslant s_n$. Montrez que la suite (s_n) converge vers un réel α. Montrez que pour tout n il existe un entier $\varphi(n)$ vérifiant : $s_n - \dfrac{1}{n+1} \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant s_n$. Déduisez que $a_{\varphi(n)}$ converge vers α. Avez vous redémontré le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

La suite a est bornée par μ et M. L'ensemble $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est donc borné par μ et M, et ses sous-ensembles $\{a_k \mid k \geqslant n\}$ (pour lesquels on a enlevé quelques valeurs) le sont encore.
Chaque partie $\{a_k \mid k \geqslant n\}$ contient au moins a_n.
Chaque partie non vide majorée admet une borne supérieure (qui n'est peut être pas un élément de l'ensemble, c'est une borne supérieure, pas un maximum, comme on le verra plus loin).
Pour tout n, on a $A_{n+1} \subset A_n$ (on en enlevé éventuellement un élément). On passe à la borne supérieure : $Sup(A_{n+1}) \leqslant Sup(A_n)$.

> *Démonstration rapide de $A \subset B \Rightarrow Sup(A) \leqslant Sup(B)$. Tous les éléments de B sont plus petits que $Sup(B)$. En tant que cas particuliers, tous les éléments de A sont plus petits que $Sup(B)$. Le réel $Sup(B)$ est un majorant de A. En tant que plus petit majorant de A, $Sup(A)$ est plus petit que $Sup(B)$.*

La suite (s_n) est donc décroissante.
Mais chaque partie A_n est incluse dans $[\mu,\ M]$. On a donc pour tout n $M \leqslant s_n$.

> *Si vous en avez besoin, prenez un élément particulier de A_n : $M \leqslant a_n \leqslant s_n$.*

La suite (s_n) est décroissante, minorée. Elle converge, vers son plus grand minorant qu'on va noter α.

Pour tout n, par définition de la borne supérieure : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A_n,\ s_n - \varepsilon < x \leqslant s_n$(puisque $s_n - \varepsilon$ n'est plus un majorant). On prend le cas particulier $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$. Il existe un élément de A_n, c'est à dire un a_k avec k plus grand que n. C'est le premier de ces k qu'on va noter $\varphi(n)$.
On a pour tout n :

$$s_n - \frac{1}{n+1} \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant s_n$$

Or, la suite (s_n) converge vers α et la suite $\left(s_n - \dfrac{1}{n+1}\right)$ converge aussi vers α.
Par encadrement, $(a_{\varphi(n)})$ converge vers α.

On est parti d'une suite réelle bornée (a_n). A-t-on vraiment construit une sous-suite de (a_n) qui converge (ici, $(a_{\varphi(n)})$ vers α ?
La suite $(a_{\varphi(n)})$ converge effectivement. mais qu'est ce qui garantit que les indices vont en croissant ? Rien dans la construction.
Il faudrait donc soit forcer la croissance, soit ré indexer.

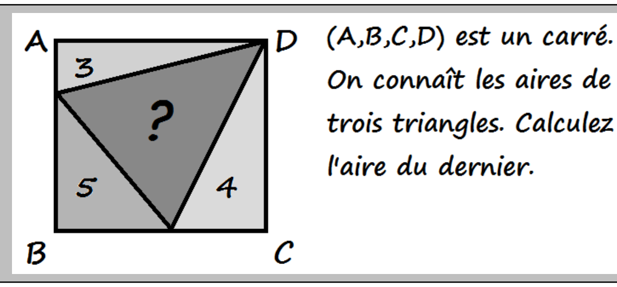
On pourra à chaque étape remplacer dans notre définition A_n par $B_n = \{a_k \mid k \geqslant \varphi(n-1)+1\}$.

De toute suite réelle bornée, on peut extraire au moins une sous-suite qui converge.

◁ 17 ▷

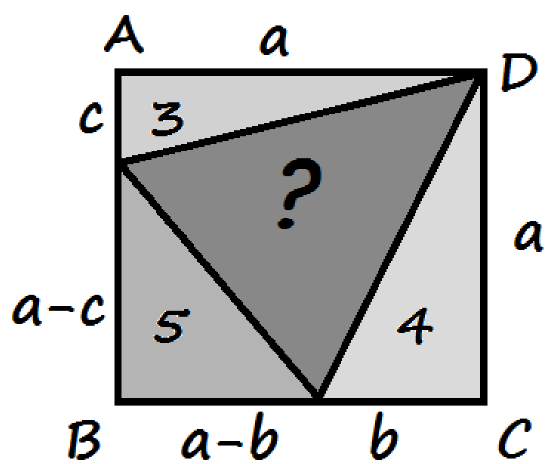
Montrez pour tout x entre 0 et 1 : $Arctan(x) \leqslant x$ et même $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant Arctan(x) \leqslant x$.

La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5+\sqrt{7}$.



Deux exercices sans rapport. Mais c'est juste pour la mise en page.

On décide de nommer les longueurs qui interviennent. a est le côté du carré, b et c les côtés de deux des triangles.



Les longueurs du troisième triangle se déduisent par soustraction : $a-b$ et $a-c$.
Mais la formule « base fois hauteur sur 2 » permet d'écrire $a.b = 8$ et $a.c = 6$ puis $(a-b).(a-c) = 10$.
On reporte : $\left(a - \dfrac{8}{a}\right).\left(a - \dfrac{6}{a}\right) = 10$.
On développe : $a^2 - 24.a + \dfrac{48}{a^2} = 0$.
On multiplie par a^2 non nul et on pose même $X = a^2$. On a cette fois $X^2 - 24.X + 48 = 0$.
On résout avec un discriminant positif : $X = 12 - 4.\sqrt{6}$ ou $X = 12 + 4.\sqrt{6}$.
Les deux sont positives. Gardons les a priori.
Mais alors le grand carré a pour aire justement a^2ce qui fait X.
Pour trouver l'aire du triangle central, il suffit de lui soustraire les aires des trois triangles déjà connus.
L'aire cherchée est donc $X - (3+4+5) = X - 12$.
On voit que $X = 12 - 4.\sqrt{6}$ conduit à une aire étrange et négative pour le triangle central.
On élimine. L'aire cherchée vaut donc $(12 + 4.\sqrt{6}) - 12$, ce qui fait effectivement $\boxed{4.\sqrt{6}}$

L'inégalité $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant Arctan(x) \leqslant x$ sent son inégalité de convexité et sa formule de Taylor.
On dérive l'arctangente trois ou quatre fois et on calcule en 0 :

$Arctan(t)$	$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\dfrac{-2.t}{(1+t^2)^2}$	$\dfrac{6.t^2-2}{(1+t^2)^3}$	$\dfrac{24.(t-t^3)}{(1+t^2)^4}$
0	1	0	-2	signe ?

La formule de Taylor donne par exemple $Arctan(x) = 0 + 1.x + \dfrac{x^2}{1}.\displaystyle\int_0^1 (1-t).\dfrac{-2.t.x}{(1+t.x)^3}.dt$. Pour x positif, le reste intégrale est négatif : $Arctan(x) \leqslant x$.
(on l'a aussi par variations de la fonction $x \longmapsto x - Arctan(x)$, et ça va même plus vite).

Poussons un peu plus loin : $Arctan(x) = 0 + 1.x + 0.x^2 + \dfrac{-2}{6}.x^3 + \dfrac{x^4}{6}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^3.\dfrac{24.t.x.(1-t^2.x^2)}{(1+t.x)^4}.dt$.

cette fois, $t.x$ reste plus petit que 1, le reste intégrale est positif.

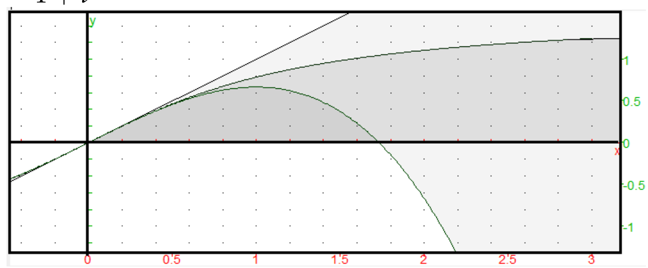
Pardon ? Vous ne connaissez pas la formule de Taylor ?
Alors, variations de fonctions.

On définit $t \longmapsto t - Arctan(t)$. On la dérive : $t \longmapsto 1 - \frac{1}{1+t^2}$. En l'écrivant $t \longmapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ cette dérivée est positive. L'application $t \longmapsto t - Arctan(t)$ est croissante. Étant nulle en 0, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $t - Arctan(t) \geqslant 0$ pour tout t positif.

On définit ensuite $t \longmapsto Arctan(t) - t + \frac{t^3}{3}$, et on la nomme g.

Elle est nulle en 0, c'est un bon début. Elle se dérive en $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2} - 1 + t^2$.

On réduit au commun dénominateur : $t \longmapsto \frac{t^4}{1+t^2}$.
Cette dérivée est positive, g est croissante.
g est nulle en 0, elle est donc positive sur $[0,\ +\infty[$. Et tant pis si l'énoncé se limite à $[0,\ 1]$. mais il est vrai qu'au delà de 1 ce n'est plus guère intéressant.



◁18▷ ♡ Sachant $deg(P) = 3$, $P(1) - 1 = P'(1) + 1 = P''(1) - 6 = P^{(3)}(1) + 6 = 0$, calculez $P(3)$.
Si vous commencez en écrivant $P(X) = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$, vous êtes très mal parti, sauf si vous adorez les calculs idiots.

Application directe de la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$P(a+h) = P(a) + h.P(a) + \frac{h^2}{2}.P''(a) + \frac{h^3}{6}.P^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_0^1 (a-t)^3.P^{(4)}(a+t.h).dt$$

Mais le degré de P nous donne $P^{(4)} = 0$, qu'on regarde en a, en $a+h$ ou en $a+t.h$.

On a donc $P(a+h) = P(a) + h.P(-a) + \frac{h^2}{2}.P''(a) + \frac{h^3}{6}.P^{(3)}(a)$.
On choisit $a = 1$ (là où on a les informations) et $h = 2$ (pour aller assez loi) :

$$P(3) = P(1) + 2.P'(1) + \frac{2^2}{2}.P''(1) + \frac{2^3}{6}.P^{(3)}(1) = 1 - 2.P'(1) + \frac{4.6}{2} + \frac{2^3.(-6)}{6}$$

$P(3)$ vaut 3 et on a en fait $P = -X^3 + 6.X^2 - 10.X + 6$ si on y tient.

◁19▷ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+6.t+10}$.

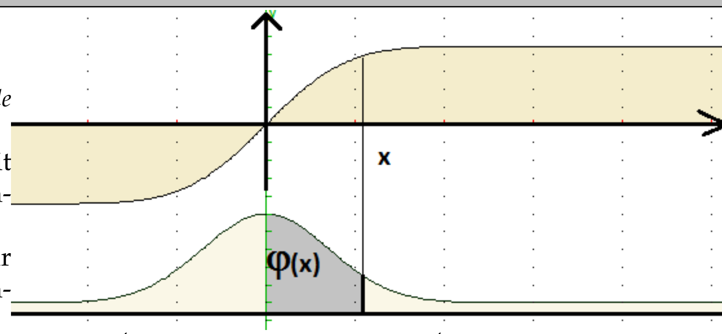
$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(3+t)^2}$
$Arctan(t)$	$Arctan(t+1)$	$Arctan(t+2)$	$Arctan(t+3)$
$\frac{\pi}{4}$	$Arctan(2) - \frac{\pi}{4}$	$Arctan(3) - Arctan(2)$	$Arctan(4) - Arctan(3)$

Trouverez vous vraiment utile de compacter $Arctan(4) - Arctan(3)$ en $Arctan\left(\frac{1}{1+12}\right)$? Moi non.

◃20▹ *(extrait d'un sujet de l'École du Génie de l'Eau et de l'Environnement (si si, ne cherchez pas un jeu de mot, un acronyme caché, ça existe), datant de quand vous n'étiez pas encore nés)*

I∼0) On définit $\varphi = t \longmapsto \int_0^t e^{-u^2/2}.du$. Montrez que φ est impaire, strictement croissante. Montrez pour tout t plus grand que 1 :
$\varphi(t) \leqslant \varphi(1) + \int_1^t e^{-u/2}.du$ et déduisez que φ admet une limite en $+\infty$ que l'on notera p *(en fait, on pourrait montrer : $p = \sqrt{\pi/2}$ mais ça prend un sujet de Sup pour y parvenir*[a]*)*.

a. j'en profite pour dire que $t \longmapsto e^{t^2}$ n'a pas de primitive à l'aide des fonctions usuelles, et surtout pas un $t \longmapsto \frac{e^{t^2}}{2.t}$ comme l'inventent de sombres crétins qui oublient qu'il faudrait ensuite dériver aussi leur $1/t$!



Pour tout t *(positif ou négatif)*, $\varphi(t)$ existe *(intégrale d'une application continue sur un segment)*.
On se donne t et on compare $\varphi(t)$ et $\varphi(-t)$, soit par un argument géométrique, soit par un changement de variable.
Géométriquement, on a le même graphe sur $[-t,\ 0]$ que sur $[0,\ t]$, mais comme on prend l'intervalle en sens inverse...
Sinon, on pose $v = -u$: $\varphi(-t) = \int_{u=0}^{u=-t} e^{-u^2/2}.du = \int_{v=0}^{v=t} e^{-(-v)^2/2}.(-dv) = -\int_{v=0}^{v=t} e^{-v^2/2}.dv = -\varphi(t)$.
On dérive : $\varphi' = t \longmapsto e^{-t^2/2}$. la dérivée est positive, l'application est croissante.

Qui a dérivé en $\varphi' = t \longmapsto e^{-t^2/2} - e^{-0^2/2}$? Pourtant, en notant F une primitive de f, on peut exprimer $\int_0^t f(u).du = F(t) - F(0)$, et la constante $F(0)$ disparait à la dérivation.

Sinon, on peut aussi se donner a plus petit que b et calculer par relation de Chasles :
$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^b e^{-u^2/2}.du - \int_0^a e^{-u^2/2}.du = \int_a^b e^{-u^2/2}.du$. C'est l'intégrale d'une application positive sur un segment pris dans le bon sens ; c'est positif.

C'est d'ailleurs cette démonstration qui est la bonne, car celle par dérivation fait appel à d'énormes théorèmes sans en avoir l'air (dérivation de l'intégrale, signe de la dérivée) dont vous n'avez démontré aucun en Terminale.

Pour t plus grand que 1, on découpe $\varphi(t)$ par relation de Chasles en $\int_0^1 e^{-u^2/2}.du + \int_1^t e^{-u^2/2}.du$. Or, pour les u entre 1 et t, on a $u^2 \geqslant u$ puis $-\frac{u^2}{2} \leqslant \frac{u}{2}$ et finalement $e^{-u^2/2} \leqslant e^{-u/2}$. On intègre cette relation de 1 à t (intervalle pris dans le sens croissant), on a la majoration indiquée.

Maintenant *(et seulement maintenant)*, on calcule le membre de droite : $\varphi(t) \leqslant \varphi(1) + [-2.e^{-u/2}]_{u=1}^{u=t}$.
On majore donc $\varphi(t)$ par $\varphi(1) + 2e^{-1/2} - 2.e^{-t/2}$ et même par $\varphi(1) + 2e^{-1/2}$.

De la sorte, le majorant est vraiment un nombre, qui ne dépend pas de t. Majorer par une quantité qui bouge avec t, ce n'est pas majorer.

L'application φ est croissante, majorée, elle admet une limite *(il doit y avoir un nom comme "limite monotone", ou "théorème sur la convergence des applications croissantes majorées")*.

On notera que le théorème ne fournit pas la valeur de la limite, et que le majorant $\varphi(1) + 2.e^{-1/2}$ n'est pas le meilleur. ce n'est donc pas lui la limite.

L'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ est un classique du domaine des probabilités.

∼0) On note E_a l'équation différentielle $y'_t = e^{y_t} - t$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = a$. En posant $z_t = e^{-y_t}$, résolvez *(en utilisant φ)* E_a.

L'équation $y'_t = e^{y_t} - t$ n'est vraiment pas linéaire. Mais elle a la bonne idée d'être sous forme de Cauchy Lipschitz, ce qui garantit existence et unicité d'une solution maximale "sur un intervalle le plus long possible", une fois qu'on a fixé une condition initiale, comme le fait l'énoncé.

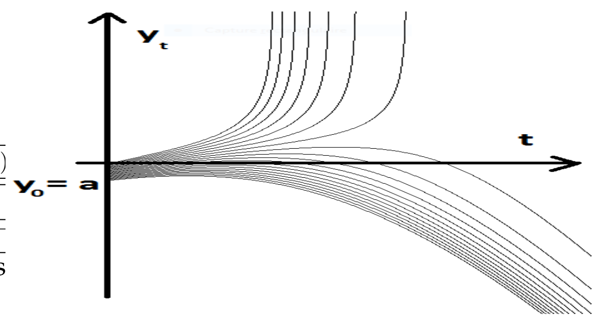
On pose donc $z_t = e^{-y_y}$ dont l'existence et la dérivabilité est assurée par les théorèmes de composition.

On dérive : $z'_t = -y'_t.e^{-y_t}$. y est solution de E_a si et seulement si *(le facteur multiplicatif ne s'annulant jamais, on raisonne bien par équivalences)* on a $z'_t = -(e^{y_t} - t).e^{-y_t}$ *(plus une condition initiale)*.
On transforme en $z'_t = -1 + t.z_t$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec un second membre.
On résout l'équation homogène $h'_t - t.h_t = 0$ et on trouve $S_h = Vect(t \longmapsto e^{t^2/2})$.
• On cherche une solution particulière ?
• On utilise le facteur intégrant ?
• On fait une variation de la constante ?
Dans les deux cas, on aboutit à $\lambda'_t = -e^{-t^2/2}$.
On intègre $\lambda_t = -\displaystyle\int_0^t e^{-u^2/2}.du + \lambda_0$ *(puisque la condition initiale est en 0)*.
On reporte : $z_t = \lambda_0.e^{-t^2/2} - \varphi(t).e^{-t^2/2}$.
On pouvait aussi proposer spontanément la solution particulière...
On détermine λ_0 par la condition initiale : $z_t = e^{-y_0}.e^{-t^2/2} - \varphi(t).e^{-t^2/2}$ puisque $\varphi(0)$ est nul.
On revient à la fonction cherchée $y : t \longmapsto -\ln\Big(\big(e^{-y_0} - \varphi(t)\big).e^{-t^2/2}\Big)$ ou même $y = t \longmapsto \dfrac{-t^2}{2} - \ln\Big(e^{-y_0} - \varphi(t)\Big)$.

∼0) Montrez qu'il existe une constante α *(à préciser)* telle que pour $a \leqslant \alpha$ la solution de E_a est définie sur $\mathbb{R}$, tandis que pour $a > \alpha$, la solution n'est définie que sur un intervalle $]-\infty,\ k_a[$ avec k_a dépendant de a.

Cette solution est valable tant que $e^{-y_0} - \varphi(t)$ est positif.
Il l'est en 0. Il l'est pour t négatif *($\varphi(t)$ est négatif, la somme devient positive)*.
Mais il y a un problème si $\varphi(t)$ atteint la valeur e^{-y_0}.

Est ce possible ? $\varphi(t)$ peut varier entre 0 et $\sqrt{\pi/2}$. Si e^{-y_0} est plus grand que $\sqrt{\pi/2}$, il n'y a donc pas de problème. Si e^{-y_0}est aussi entre 0 et $\sqrt{\pi/2}$, la valeur e^{-y_0}est atteinte une fois par φ. Et au delà de cette valeur, $e^{-y_0} - \varphi(t)$ devient négatif.



Le logarithme n'existe plus, la fonction n'est plus définie.
On résume :

$a = y_0 < -\ln(\sqrt{\pi/2})$	$a = y_0 = -\ln(\sqrt{\pi/2})$	$a = y_0 > -\ln(\sqrt{\pi/2})$
$e^{-y_0} > \sqrt{\pi/2}$	$e^{-y_0} = \sqrt{\pi/2}$	$e^{-y_0} < \sqrt{\pi/2}$
t décrit $\mathbb{R}$	t décrit $\mathbb{R}$	t décrit $]-\infty,\ \varphi^{-1}(e^-$

Suivant la condition initiale, la solution dure plus ou moins longtemps.

I∼0) On définit $f = t \longmapsto e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du$ et $h = t \longmapsto \dfrac{e^{t^2}}{2.t} - \displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du$.
Donnez le tableau de variations de h sur $]0,\ +\infty[$, avec sa limite en 0 par valeur supérieure.

Pour le tableau de variations de h, on dérive
$h' = \Big(t \longmapsto \dfrac{e^{t^2}}{2.t} - \displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du\Big)' = \Big(t \longmapsto \dfrac{2.t.e^{t^2}}{2.t} - \dfrac{e^{t^2}}{2.t^2} - e^{t^2}\Big) = \Big(t \longmapsto -\dfrac{e^{t^2}}{2.t^2}\Big)$.
L'application h décroit sur $]0,\ +\infty[$.

Si vous avez dérivé avec des $\dfrac{}{(2.t)^2}$, c'est lourd comme pas permis. Pas faux, mais lourd lourd lourd. Où pourrez vous aller avec de tels sabots ?

En 0^+ (par valeur supérieure donc puisque le domaine est $]0,\ +\infty[$), l'intégrale tend vers 0 (continuité puisque dérivabilité). L'exponentielle tend vers 1. Son dénominateur tend vers 0. Le quotient tend vers l'infini positif.

On a même, pour être précis : $f(t) \sim_{t\to 0^+} \dfrac{1}{2.t}$.

∼0) Montrez : $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour x positif.

Que vient faire la minoration $e^t \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ ici ? On n'en sait rien. Mais on la démontre par un argument de niveau Sup : la formule de Taylor avec reste intégrale :
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^1 (1-t)^2.e^{t.x}.dt$ (les dérivées de l'exponentielle donnent l'exponentielle).
Le reste intégrale est fait de termes tous positif. Il est positif.

Niveau Terminale, on étudie les variations de la différence $t \longmapsto e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$, quitte à la dériver deux fois et à regarder les valeurs en 0.

$\sim$0) Démontrez qu'il existe un unique réel b de $]0,\ 1[$ vérifiant $h(b) = 0$.

On nous demande de regarder la valeur de f en 1. C'est $\dfrac{e}{2} - \displaystyle\int_0^1 e^{u^2}.du$.

On exploite l'inégalité $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ pour x positif : ici : $e^{u^2} \geqslant 1 + u^2 + \frac{u^4}{2}$.

On intègre de 0 à 1 (sens positif) : $\displaystyle\int_0^1 e^{u^2}.du \geqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$.

On estime : $\displaystyle\int_0^1 e^{u^2}.du \geqslant \frac{43}{30} \geqslant \frac{e}{2}$ puisque on va estimer $\dfrac{e}{2}$ à $1,35$ à 10^{-2} près et $\dfrac{43}{30}$ à $1,43$ à 10^{-2} près aussi.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure à l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ entre 0 exclu et 1.
La stricte monotonie donne unicité de la solution.

Attention, il ne faut pas mélanger : l'existence vient de continuité et intervalle, tandis que l'unicité vient de la stricte monotonie.

I$\sim$0) Montrez que f est solution de l'équation différentielle linéaire $y'_t + 2.t.y_t = 1$.

On dérive f comme un produit : $f' = t \longmapsto (-2.t).e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du + e^{-t^2}.e^{t^2}$.

On simplifie : $f'(t) = -2.t.f(t) + 1$. C'est l'équation $y'_t + 2.t.y_t = 1$.

$\sim$0) Résolvez cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

L'équation différentielle a pour solutions homogènes $Vect(t \longmapsto e^{-t^2})$.
Et pour solution particulière f.
Ses solutions sont donc de la forme $t \longmapsto \lambda.e^{-t^2} + f(t)$ avec λ réel à déterminer en fonction des conditions initiales.

I$\sim$0) Montrez pour tout t strictement positif : $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u.t}.du$. Déduisez que f a une limite en $+\infty$ dont vous donnerez la valeur.

On se donne t positif. Dans $e^{-t^2}.\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du$, tout est positif, et l'intervalle est dans le bon sens.

De plus, pour tout u de $[0,\ t]$, on a $0 \leqslant u^2 \leqslant t.u$. On passe à l'exponentielle *(croissante)*, on intègre *(intervalle dans le bon sens)* : $\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du \leqslant \int_0^t e^{t.u}.du$. On multiplie par e^{-t^2} *(strictement positif)*.

Tout ce que m'importe de voir dans vos copies est ce que j'écris entre parenthèses : les arguments. Vous serez payés plus tard pour tout surveiller.

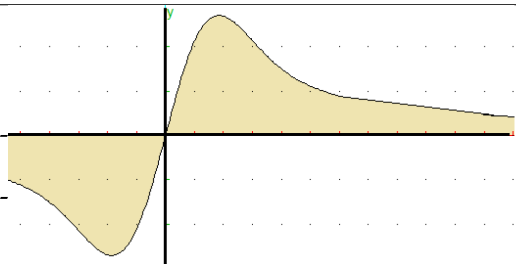
Profitons de la stricte positivité de t pour calculer explicitement l'intégrale *(variable d'intégration u)* : $\displaystyle\int_0^t e^{t.u}.du = \left[\frac{e^{t.u}}{t}\right]_{u=0}^{t} = \frac{e^{t^2} - 1}{t}$.

L'encadrement trouvé auparavant devient $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t^2}.\dfrac{e^{t^2} - 1}{t} = \dfrac{1 - e^{-t^2}}{t} \leqslant \dfrac{1}{t}$.
Le majorant tend vers 0 ; le minorant vaut 0.
Par théorème d'encadrement, $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Faute de raisonnement : « on passe à la limite dans $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$ et on trouve $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Pour écrire ceci, il faut savoir que la limite existe. Or, rien ne dit qu'elle va exister. C'est le théorème d'encadrement qui donne l'existence de la limite et sa valeur du même coup.
Rappelons qu'on a $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ pour tout t, mais qu'on ne peut pas en déduire $-1 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \sin(t) \leqslant 1$, puisque le terme du milieu n'a pas de limite...

Donnez le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$.

Peut on simplifie $f(b)$? Sachant que $f'(b)$ est nul, on a $f(b) = 1 - 2.b.f(b)$. On obtient guère mieux que $f(b) = 1/(2.b)$. Mais comme on ne connaît pas b...



Et sur $\mathbb{R}$? f est impaire ! En effet, l'intégrale $\int_{u=0}^{u=-t} e^{u^2}.du$ est l'opposé de $\int_{v=0}^{v=t} e^{v^2}.dv$ par changement de variable $v = -u$. On multiplie par le terme pair e^{-t^2} et on récupère $f(-t) = -f(t)$.

I~0) On définit $A = t \longmapsto 2.t.e^{-t^2}.\int_0^{t-1} e^{u^2}.du$ et $B = t \longmapsto 2.t.e^{-t^2}.\int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du$.
Montrez pour t plus grand que 1 : $A(t) \leqslant 2.t.e^{-t^2}.e^{(t-1)^2}.(t-1)$.

L'existence de $A(t)$ et $B(t)$ ne pose aucun problème par continuité.

On prend t plus grand que 1 *(pour que l'intervalle* $[0,\ t-1]$ *soit inclus dans* $\mathbb{R}^+$*)* : $A(t) = 2.t.e^{-t^2}.\int_0^{t-1} e^{u^2}.du$.

Sous le signe somme, on majore e^{u^2} par e^{t^2} (application croissante). L'intervalle est de longueur $t-1$ $\int_0^{t-1} e^{u^2}.du \leqslant (t-1).e^{t^2}$.
Le multiplicateur est positif. On peut conclure.

~0) Déduisez la limite de $A(t)$ quand t tend vers l'infini.

Ensuite, $A(t)$ est positif. On encadre : $0 \leqslant A(t) \leqslant 2.t.e^{-t^2+(t-1)^2}.(t-1) = 2.(t^2-t).e^{-2.t}.e$.
Le polynôme n'y peut rien face à l'exponentielle. Par croissances comparées, le majorant tend vers 0.
Par encadrement, $A(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

~0) Montrez aussi : $\frac{1}{t}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du \leqslant \int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \frac{1}{t-1}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du$.

Pour $\frac{1}{t}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du \leqslant \int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \frac{1}{t-1}.\int_{t-1}^{t} u.e^{u^2}.du$, on écrit simplement $\int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du = \int_{t-1}^{t} \frac{1}{u}.u.e^{u^2}.du$.

On encadre pour u entre $t-1$ et t *(tous positifs)* : $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{t-1}$.

On multiplie : $\frac{1}{t}.u.e^{u^2} \leqslant e^{u^2} \leqslant \frac{1}{t-1}.u.e^{u^2}$.

On intègre de $t-1$ à t *(intervalle dans le sens croissant)* : $\int_{t-1}^{t} \frac{1}{t}.u.e^{u^2}.du \leqslant \int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \int_{t-1}^{t} \frac{1}{t-1}.u.e^{u^2}.du$.

On sort les $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$ des intégrales.

~0) Déduisez que $\int_0^t e^{u^2}.du$ est équivalent à $\frac{e^{t^2}}{2.t}$ quand t tend vers l'infini.

Maintenant, les intégrales se calculent : $\frac{1}{t}.\left[\frac{e^{u^2}}{2}\right]_{u=t-1}^{t} \leqslant \int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \frac{1}{t-1}.\left[\frac{e^{u^2}}{2}\right]_{u=t-1}^{t}$.

On divise par $\frac{e^{t^2}}{2.t}$ pour raconter l'histoire d'équivalent (le quotient doit tendre vers 1).

Ceci revient à multiplier par $2.t.e^{-t^2}$: $e^{-t^2}.\left[e^{u^2}\right]_{u=t-1}^{t} \leqslant 2.t.e^{-t^2}.\int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du \leqslant \frac{t}{t-1}.e^{-t^2}.\left[\frac{e^{u^2}}{2}\right]_{u=t-1}^{t}$.

Le terme $e^{-t^2}.\left[e^{u^2}\right]_{u=t-1}^{t}$ vaut $1-e^{(t-1)^2-t^2}$ et même $1-e^{-2.t+1}$.
Son exponentielle tend vers 0. Le minorant tend vers 1.
dans la majoration, c'est pareil : $\dfrac{t}{t-1}$ tend vers 1 de même que $e^{-t^2}.\left[e^{u^2}\right]_{u=t-1}^{t}$.
Par encadrement, $2.t.e^{-t^2}.\displaystyle\int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du$ tend vers 1 quand t tend vers l'infini.

On ajoute le terme $2.t.e^{-t^2}.\displaystyle\int_{0}^{t-1} e^{u^2}.du$ dont on a vu qu'il tendait vers 0.

Par somme et relation de Chasles, $2.t.e^{-t^2}.\displaystyle\int_{0}^{t-1} e^{u^2}.du + 2.t.e^{-t^2}.\int_{t-1}^{t} e^{u^2}.du$ tend vers 1.

C'est la définition de $\displaystyle\int_0^t e^{u^2}.du \sim_{t\to+\infty} \frac{e^{t^2}}{2.t}$.

Pour le physicien et le matheux, la valeur moyenne de $u \longmapsto e^{u^2}$ sur $[0,\ t]$ est « à peu près » $\dfrac{e^{t^2}}{2}$.

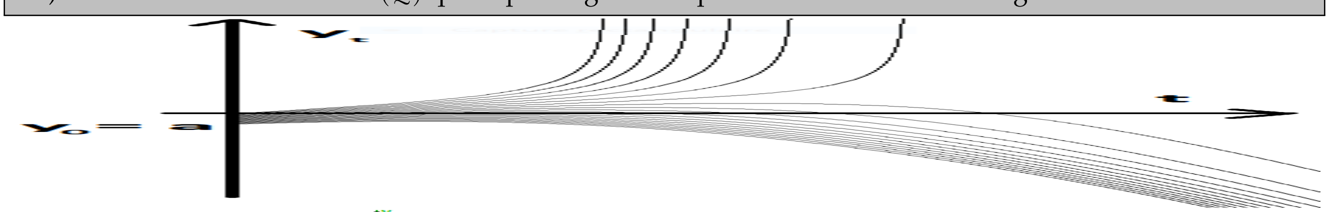
I∼0) Soit l'équation différentielle $y_t' - (y_t)^2 - 2.t.y_t = 2$ d'inconnue y fonction de t strictement positif (notée (Q)). Vérifiez que $t \longmapsto \dfrac{-1}{t}$ est solution.

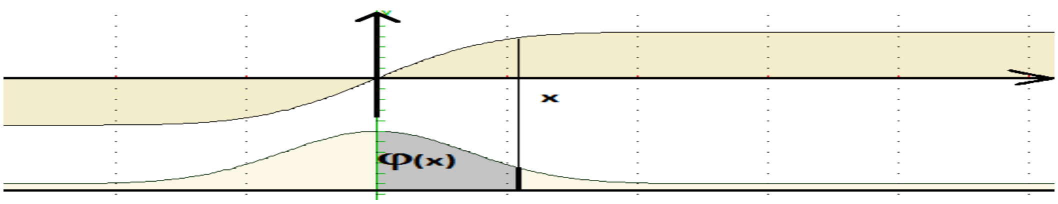
Avec des notations simplifiées : $y_t = \dfrac{-1}{t}$ et $y_t' = \dfrac{1}{t^2}$.
On calcule alors $y_t' - (y_t)^2 - 2.t.y_t = \dfrac{1}{t^2} - \left(-\dfrac{1}{t}\right)^2 - 2.t.\dfrac{-1}{t} = 0+1$. C'est l'équation différentielle.

∼0) En posant $y_t = \frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}$, résolvez (Q).

En posant $y_t = \dfrac{-1}{t} + \dfrac{1}{z_t}$... pourquoi pas. On dérive : $y_t' = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{z_t'}{(z_t)^2}$.
On reporte dans le premier membre de l'équation différentielle pour agir par équivalences :
$$y_t' - (y_t)^2 - 2.t.y_t = \frac{1}{t^2} - \frac{z_t'}{(z_t)^2} - \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}\right)^2 - 2.t.\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}\right) = 2 - \frac{t.z_t' + 1 + \frac{2}{t}.z_t + 2.t.z_t}{t.(z_t)^2}.$$
ceci est égal à 2 si et seulement si z est solution de $t.z_t' + 1 + \dfrac{2}{t}.z_t + 2.t.z_t = 0$.
Remarque : on a traité un sujet de problème. Il y a des méthodes jolies. Mais finalement, comprend on ce qu'on a fait ?

∼0) Existe-t-il des solutions de (Q) qui se prolongent en 0 par continuité à droite et à gauche.





◃21▹ ♡? Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comparez $\displaystyle\int_0^x \left(\int_t^x f(u).du\right).dt$ et $\displaystyle\int_0^x v.f(v).dv$.

Comme F est continue, elle admet des primitives. On en prend une qu'on appelle F, caractérisée par deux choses : $F' = f$ et $\displaystyle\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)$ pour tout couple $(a,\ b)$.

On calcule alors la première double intégrale : $\displaystyle\int_0^x (F(x) - F(t)).dt = \int_0^x F(x).dt - \int_0^x F(t).dt$.
le premier terme vaut $x.F(x)$. Le second peut être intégré par parties, puisque tout est dérivable à dérivée continue

$F(t)$	$\hookrightarrow$	$f(t)$
1	$\hookleftarrow$	t

. On a alors

$$\int_0^x F(t).dt = \Big[t.F(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x t.f(t).dt = x.F(x) - \int_0^x t.f(t).dt$$

Surprise : le terme $x.F(x)$ est présent deux fois, mais avec des signes opposés : $\int_0^x (F(x) - F(t)).dt = 0 - \Big(- \int_0^x t.f(t).dt\Big)$.

Parlez de $\int_0^x t.f(t).dt$ ou de $\int_0^x t.f(t).dt$ c'est pareil.

Un exercice qui aurait pu figurer dans le cours, tant il utilise de manière directe des résultats du cours.
De plus, il montre qu'au lie de chercher une « primitive de primitive » en intégrant deux fois (premier membre), il suffit d'une seule intégrale. Pratique.
Ça sert en résistance des matériaux par exemple.
Sinon, la formule de Taylor avec reste intégrale est cachée là dedans mine de rien...

◃ 22 ▹ a, b, c, d et e sont cinq complexes non nuls. Le polynôme $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e)$ est noté P, et sous forme développée, on l'écrit $X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$. Pour tout k, on pose aussi $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k + e^k$. Exprimez S_2 à l'aide des σ_i. *Le but est d'écrire simplement les relations donnant les S_k à l'aide des σ_i et vice versa.*

Montrez : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X-a} + \dfrac{1}{X-b} + \dfrac{1}{X-c} + \dfrac{1}{X-d} + \dfrac{1}{X-e}$ *(partez du côté qui vous semble le plus pratique).*

Justifiez pour α non nul : $\dfrac{1}{t-\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini *(on rappelle : « $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers un truc » signifie « la forme surement indéterminée $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers le truc en question »).*

Déduisez $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{S_k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$, puis déduisez par produit en croix les formules de Newton (par exemple $S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$).

Déduisez et généralisez $S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$.

On écrit $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e) = X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$.
Les relations coefficients-racines disent tout de suite

$\sigma_1 = a+b+c+d+e$
$\sigma_2 = a.b+a.c+a.d+a.e+b.c+b.d+b.e+c.d+c.e+d.e$
$\sigma_3 = a.b.c+a.b.d+a.b.e+a.c.d+a.c.e+a.d.e+b.c.d+b.c.e+b.d.e+c.d.e$
$\sigma_4 = a.b.c.d+a.b.c.e+a.b.d.e+a.c.d.e+b.c.d.e$
$\sigma_5 = a.b.c.d.e$

Un calcul classique donne $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (\sigma_1)^2 - 2.\sigma_2$

On doit décomposer $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ en éléments simples. C'est $\dfrac{P'(x)}{(X-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)}$.

On peut décomposer en éléments simples sous la forme $\dfrac{\alpha}{x-a} + \dfrac{\beta}{x-b} + \dfrac{\gamma}{x-c} + \dfrac{\delta}{x-d} + \dfrac{\epsilon}{x-e}$.

Il ne reste plus qu'à calculer α, β, γ, δ et ϵ par la méthode des pôles et trouver 1 à chaque fois.
Soit en bluffant, soit par un calcul bien mené.

Mais il ne faut pas toujours utiliser la même méthode. Il faut savoir varier les points de vue. partir de droite pour aller à gauche, ou partir de gauche pour aller à droite ; réduire au dénominateur commun ou au contraire séparer... Innovez !
Ici, on part de ce qu'on nous propose à droite :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x-e} = \frac{\ldots}{(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)} = \frac{\ldots}{P(x)}$$

Et qui est ce numérateur ? C'est

$$(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)+(x-a).(x-c).(x-d).(x-e)+(x-a).(x-b).(x-d).(x-e)$$

$$+(x-a).(x-b).(x-c).(x-e)+(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$$

Il est facile d'y voir une chose comme $u'.v+u.v'$ ou $v'.v.w+u.v'.w'$ et même la généralisation à cinq termes, où chaque dérivée u', v' ou w' vaut 1.
Bref, c'est $P'(x)$ quand on dérive $P(x)=(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)$ comme un produit. C'est tout !

Pour la formule $\dfrac{1}{t-\alpha}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$, on peut aussi partir du meilleur côté. Le plus compliqué. Qu'on va essayer de simplifier.
Sinon, c'est une formule de Taylor avec reste intégrale pour l'application $x\longmapsto\dfrac{1}{t-\alpha}$ qu'on aura d'abord factorisée sous la forme $\dfrac{1}{t}.\dfrac{1}{1-\alpha.t}$. On y écrase ensuite le reste intégrale en en faisant un $o(1/t^{n+1})$.
Mais partons juste de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{t^{k+1}}=\frac{1}{t}+\frac{\alpha}{t^2}+\frac{\alpha^2}{t^3}+\ldots+\frac{\alpha^n}{t^{n+1}}$. C'est une série géométrique dont la raison est $\dfrac{\alpha}{t}$, qui ne vaut pas 1 (comme t va tendre vers l'infini, il a dépassé la valeur particulière α).
Ceci vaut $\dfrac{\frac{1}{t}-\frac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}}}{1-\frac{\alpha}{t}}$ et on simplifie en $\dfrac{1}{t-\alpha}-\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)}$.
On tient notre terme $\dfrac{1}{t-\alpha}$, et le terme correctif est $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)}$.

On vérifie si c'est un $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en effectuant (comme la définition le dit) le quotient $\dfrac{\frac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)}}{\frac{1}{t^{n+1}}}$. Il vaut $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t.\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)}$.

Quand t tend vers l'infini, ceci tend bien vers 0.

Écrivons cette formule pour α égal à a, puis à b, puis à c, puis à d et à e, et sommons :

$$\frac{1}{t-a}+\frac{1}{t-b}+\ldots+\frac{1}{t-e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{t^{k+1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{t^{k+1}}+\ldots+\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$$

en sommant déjà les quatre $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en un seul.
On réunit les sommes en une seule, et on dit qui est le premier membre :

$$\frac{P'(t)}{P(t)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k+b^k+c^k+d^k+e^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$$

Et heureusement, il y a une notation pour $a^k+b^k+c^k+d^k+e^k$, et c'est justement S_k.
On a bien $\dfrac{P'(t)}{P(t)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini.

Dans la formule précédente, effectuons un produit en croix et remplaçons $P'(t)$ et $P(t)$ par leurs valeurs sur la base canonique :

$$5.X^4-4.\sigma_1.X^3+3.\sigma_2.X^2-2.\sigma_3.X+\sigma_4=(t^5-\sigma_1.t^4+\sigma_2.t^3-\sigma_3.t^2+\sigma_4.t-\sigma_5).\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)\Big)$$

quand t tend vers l'infini.
La mention « quand t tend vers l'infini », c'est pour que le petit o ait un sens, sinon, il y a un reste sous forme d'intégrale impossible à écrire simplement.
Écrivons cette formule pour n pas trop grand :
$5.t^4-4.\sigma_1.t^3+3.\sigma_2.t^2-2.\sigma_3.t+\sigma_4 = (t^5-\sigma_1.t^4+\sigma_2.t^3-\sigma_3.t^2+\sigma_4.t-\sigma_5).\Big(\frac{S_0}{t}+\frac{S_1}{t^2}+\frac{S_2}{t^3}+\frac{S_3}{t^4}+\frac{S_4}{t^5}+o\Big(\frac{1}{t^5}\Big)\Big)$
$(t\to+\infty)$
avec bien sûr $S_0=a^0+b^0+c^0+d^0+e^0=5$.

On identifie de chaque côté les termes en fonction des puissances de t

t^4	5	S_0
t^3	$-4.\sigma_1$	$S_1 - \sigma_1.S_0$
t^2	$3.\sigma_2$	$S_2 - \sigma_1.S_1 + \sigma_2.S_0$
t	$-2.\sigma_3$	$S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - \sigma_3.S_0$
1	σ_4	$S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0$

L'identification donne
- $S_0 = 5$, ce n'est pas un scoop.
- $-4.\sigma_1 = S_1 - 5.\sigma_1$ d'où $\sigma_1 = S_1$, nihil novi sub sole
- $3.\sigma_2 = S_2 - (\sigma_1)^2 + 5.\sigma_2$, rien de neuf non plus : $(S_1)^2 = S_2 + 2.\sigma_2$.
- $-2.\sigma_3 = S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - 5.\sigma_3$ c'est déjà un peu plus intéressant :

$(a^3 + \ldots + e^3) - (a + \ldots + e).(a^2 + \ldots e^2) + (a.b + a.c + \ldots + d.e).(a + \ldots + e) = 3.(a.b.c + \ldots + c.d.e)$
Et la dernière relie un peu toutes les autres, mais avec $(a^4 + b^4 + \ldots + e^4)$ et des $(a.b + a.c + \ldots d.e).(a^2 + \ldots + e^2)$ et autres termes homogènes.

On doit trouver une belle formule avec un déterminant.
La démarche bourrine de Terminale consiste à calculer S_4, à calculer le déterminant et à comparer les deux objets.
Vous n'irez jamais loin en « raisonnant » comme ça.
Regardez ce qu'on a obtenu plus haut :

$S_0 = 5$
$S_1 - \sigma_1.S_0 = -4.\sigma_1$
$S_2 - \sigma_1.S_1 + \sigma_2.S_0 = 3.\sigma_2$
$S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - \sigma_3.S_0 = -2.\sigma_3$
$S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4.\sigma_1 \\ 3.\sigma_2 \\ -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix}$$

Ça s'appelle un système de Cramer, et ça se résout par les formules du même nom. En particulier $S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$

En plus petit, on avait aussi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\ 4.\sigma_1 \\ 3.\sigma_2 \end{pmatrix}$

puis $S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 3.\sigma_2 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^2 - 2.\sigma_2$

Mais les formules de Newton se généralisent avec

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_5 \end{vmatrix}$$

puis $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -\sigma_5 \\ 0 & -\sigma_5 & \sigma 4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{vmatrix}$ puisque σ_6 est nul.

Il existe aussi les formules renversées qui calculent les coefficients σ_k du polynôme à l'aide des sommes de puissances des racines :

telles que $\sigma_2 = \dfrac{1}{2!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$, $\sigma_3 = \dfrac{1}{3!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$, $\sigma_4 = \dfrac{1}{4!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$

◃23▹ Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :
Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

◃24▹ On définit une autre multiplication matricielle, dite *multiplication industrielle*, car elle intervient dans les enchainements et mises en parallèle de processus dans les chaines de fabrication et production. On y remplace les additions par des Max et les multiplication par des additions ; $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$ devient donc $c_i^k = Max(a_i^j + b_j^k \mid j \leq n)$.
Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\boxtimes n}$ *(puissance n matricielle)*.
Écrivez une procédure ***Python*** qui prend en entrée deux matrices carrées de même taille et rend leur produit industriel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 & 2+2 \\ 2+3 & 3+3 & 2+3 \\ 3+2 & 3+4 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ (mais au fait, elle es associative ou pas, cette loi ?)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et par récurrence } \begin{pmatrix} n & n-1 & n-1 \\ n-1 & n & n-1 \\ n-1 & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

◃25▹ On rappelle que pour un emprunt d'une somme de S euros au taux τ[a] d'une durée de n mois avec des mensualités d'un montant μ, on a les formules suivantes :

$\mu = \dfrac{\tau.S}{1-(1+\tau)^{-n}}$ et $n = -\dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{\tau.S}{\mu}\right)}{\ln(1+\tau)}$ *(redémontrez les)*.

Donnez les limites de ces quantités quand τ tend vers 0. Est ce cohérent ?

a. le taux τ, voilà une blague !

Notons S la somme empruntée et fabriquons la formule qui dit quelle est votre dette mois après mois vis à vis de la banque.
C'est une suite u_n qui vérifie $u_0 = S$ et $u_{n+1} = (1+\tau).u_n - \mu$.[1]
Expliquons cette formule avec des versions de banque plus ou moins accommodantes :

la banque ne vous fait rien payer, mais vous ne remboursez rien	$u_{n+1} = u_n$
la banque ne vous fait rien payer, et vous remboursez μ chaque mois	$u_{n+1} = u_n - \mu$
la banque vous facture des intérêts chaque mois à un taux τ et vous ne remboursez rien	$u_{n+1} = u_n + \tau.u_n$
la banque vous facture des intérêts, mais vous pensez aussi à rembourser	$u_{n+1} = (1+\tau).u_n - \mu$

C'est cette formule arithmético-géométrique que l'on retient.

1. si vous devez un pour cent d'intérêts, la formule $u_{n+1} = 1,01 \times u_n$ vous semble cohérente ? oui !
sinon, faites toutes les études que vous voulez... sauf celles contenant des maths, de la physique, de la finance, des sciences, des choses intelligentes... bref, si vous ne comprenez pas $(1+\tau).u_n$, reprenez vos études de latin pour devenir traducteur de Plaute et Pline, c'est tout ce qu'il vous reste...

On note que suivant les lignes, la suite (u_n) décroit (vous devez de moins en moins, c'est bon, elle finira par vous être redevable).
la suite (u_n) croît (et ne croyez pas que la banque vous laissera faire)
Pour la dernière tout dépend de μ par rapport à $\tau.u_n$

$\mu > \tau.u_n$	vous remboursez plus que les intérêts	vous allez grignoter votre capital dû, c'est bon
$\mu = \tau.u_n$	vous remboursez chaque mois pile poil les intérêts	votre dette reste constante (emprunts à taux progressifs au début)
$\mu < \tau.u_n$	vous ne remboursez même pas les intérêts	votre dette augmente de plus en plus

Illustration : vous empruntez 1000 euros à un taux mensuel (usurier) de 1 pour cent par mois.
Vous remboursez 10 euros par mois... Pas génial, mais au moins, vous n'augmentez pas votre dette.
Vous remboursez 100 euros par mois. le premier mois, vous avez payé 10 euros d'intérêts et remboursé 90 euros de capital
le second mois, vous avez payé 9 euros d'intérêts et remboursé encore 91 euros de capital
le troisième mois, vous avez payé un peu moins de 9 euros d'intérêts et remboursé encore 91, . . . euros de capital
A la fin, vous devrez 200 euros à la banque. Elle vous demandera 2 euros d'intérêts, vous rembourserez 98 euros de capital, et un mois après ce sera fini.

Bref, la formule $u_{n+1} = (1+\tau).u_n - \mu$ est la bonne, avec $u_0 = S$.

Mais la suite n'est ni arithmétique ($u_{n+1} = u_n - \mu$) ni géométrique ($u_{n+1} = (1+\tau).u_n$).
Alors on fait quoi ? On la rend géométrique en lui soustrayant ce qu'il faut.
C'est la suite $u_n - \dfrac{\mu}{\tau}$ qui est géométrique.
Pourquoi elle ? Because le calcul.
Et parce que $\dfrac{\mu}{\tau}$ est justement la somme à rembourser pour que votre situation se maintienne à une dette constante.
Si vous empruntez plus que μ/τ, vous ne pourrez jamais éponger votre dette...
Bon, calcul ! On pose $v_n = u_n - \alpha$ avec α à ajuster
On a donc aussi $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$
On remplace : $v_{n+1} = (1+\tau).u_n - \mu - \alpha$
On remplace encore : $v_{n+1} = (1+\tau).(v_n + \alpha) - \mu - \alpha$
On développe : $v_{n+1} = (1+\tau).v_n + \tau.\alpha - \mu$
On a justement choisi : $\mu = \tau.\alpha$!
On reconnaît : (v_n) est géométrique de raison $1+\tau$.

On a alors $v_n = (1+\tau)^n.v_0$.

On remplace : $u_n + \dfrac{\mu}{\tau} = (1+\tau)^n.\Big(S - \dfrac{\mu}{\tau}\Big)$.

On déplace : $u_n = (1+\tau)^n.S + \dfrac{\mu}{\tau}.\Big(1 - (1+\tau)^n\Big)$.

Dans $\dfrac{(1+\tau)^n - 1}{(1+\tau) - 1}$ certains reconnaissent une série géométrique. Et ils ont raison.
On l'obtient aussi en moulinant $u_1 = (1+\tau).u_0 - \mu$
$u_2 = (1+\tau).u_1 - \mu = (1+\tau)^2.u_0 - \mu.(1 + (1+\tau))$
$u_3 = (1+\tau).u_2 - \mu = (1+\tau)^3.u_0 - \mu.(1 + (1+\tau) + (1+\tau)^2)$
$u_4 = (1+\tau).u_3 - \mu = (1+\tau)^4.u_0 - \mu.(1 + (1+\tau) + (1+\tau)^2 + (1+\tau)^3)$

Remarque : Finalement,la récurrence ça a aussi du bon...

On a la formule $u_n = (1+\tau)^n.(S - \dfrac{\mu}{\tau}\Big) + \dfrac{\mu}{\tau}$ et $u_n = (1+\tau)^n.S + \dfrac{\mu}{\tau}.\Big(1 - (1+\tau)^n\Big)$.

On se dit qu'on a tout remboursé quand u_n est enfin nul (au delà, on change de signe !).

On a donc cette fois une équation liant :

N	capital emprunté
τ	taux des intérêts
μ	montant des remboursements
n	nombre de mensualités pour solder le crédit

$(1+\tau)^n.(\dfrac{\mu}{\tau} - S\Big) = \dfrac{\mu}{\tau}$.

On extrait n par exemple : $(1+\tau)^n = \dfrac{\mu}{\tau.\left(\dfrac{\mu}{\tau} - S\right)} = \dfrac{\mu}{\mu - \tau.S}$.

On passe au logarithme pour extraire n (durée du remboursement) :
$n.\ln(1+\tau) = \ln\left(\dfrac{\mu}{\mu - \tau.S}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{\tau.S}{\mu}\right)$ [2].

Approximons pour τ « petit »[3] : $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ devient $\ln(1+x) \simeq x$ (sorry, I dont't understand ce $\simeq$)
$n.\tau \simeq n.\ln(1+\tau) = -\ln\left(1 - \frac{\tau.S}{\mu}\right) \simeq -\left(-\frac{\tau.S}{\mu}\right)$
On trouve n peu différent de S/μ. Logique, si on rembourse μ chaque mois, il en faut S/μ pour rembourser S.

Sinon, on avait aussi $(1+\tau)^n.(\dfrac{\mu}{\tau} - S\Big) = \dfrac{\mu}{\tau}$ qui devenait $\mu = \dfrac{\tau.S}{1-(1+\tau)^n}$ en résolvant une équation du premier degré.

Et cette fois, pour τ « petit » : $(1+\tau)^n = 1 + n.\tau + \ldots$ et il reste $\mu = \frac{\tau.S}{\tau.n} = \frac{S}{n}$. C'est la même formule.

◁ 26 ▷ ♡ Une homographie h (c'est à dire une application de la forme $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$, je l'ai déjà dit douze fois) vérifie $h(1) = 2$, $h(2) = 3$ et $h(3) = 1$. Calculez la. Déterminez $h(4)$, puis $h \circ h \circ h \circ h$.

On a un système : $\dfrac{a+b}{c+d} = 2$, $\dfrac{2.a+b}{2.c+d} = 3$ et $\dfrac{3.a+b}{3.c+d} = 1$.

On fait des produits en croix : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & -2.c & -2.d & = 0 \\ 2.a & +b & -6.c & -3.d & = 0 \\ 3.a & +b & -3.c & -d & = 0 \end{array}\right|$.

On n'a que trois équations pour quatre inconnues. C'est incomplet ?

Sauf que nos quatre inconnues sont « à une constante multiplicative près ».
L'homographie $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ est la même que $x \longmapsto \dfrac{(3.a).x+(3.b)}{(3.c).x+(3.d)}$ et que $x \longmapsto \dfrac{\lambda.a.x+\lambda.b}{\lambda.c.x+\lambda.d}$.
On peut donc imposer une valeur par exemple à b (non nulle) et trouver les autres.

On trouve : $x \longmapsto \dfrac{\dfrac{5}{13}.x - 1}{\dfrac{3}{13}.x - \dfrac{7}{13}}$ et on préfèrera $\boxed{x \longmapsto \dfrac{5.x-13}{3.x-7}}$ (on peut vérifier).

Rien de gentil : $h(4) = \dfrac{7}{5}$.

Pour déterminer h^4, on écrit la matrice de h : $\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

puis celle de $h \circ h$: $\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

puis celle de h^4 : $\begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -104 \\ 24 & -56 \end{pmatrix}$.

On résume :

$$h \circ h \circ h \circ h = x \longmapsto \frac{40.x - 104}{24.x - 56}$$

On allège :

$$h \circ h \circ h \circ h = x \longmapsto \frac{5.x - 13}{3.x - 7}$$

On a $h^3 = Id$...

Remarque | Et c'est normal : $h^3(1) = 1$, $h^3(2) = 1$ et $h^3(3) = 3$. Réfléchissez un peu...

◁ 27 ▷ ♡ L'homographie h a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^2}$ et vérifie $h(1) = 1$. Pouvez vous la retrouver ? Calculez $h \circ h \circ h \circ h(1)$ et $h \circ h \circ h \circ h(2)$.

On l'écrit $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$. On la dérive : $f' = x \longmapsto \dfrac{a.d-b.c}{(c.x+d)^2}$.

---

2. et si $\tau.S/\mu$ est trop grand, ce logarithme n'existe pas, et vous ne pouvez rien emprunter !
3. aidez moi, je suis en train de devenir physicien !

On devine vite : $c.x+d = x-3$. On tient c et d. Puis on choisit a et b pour avoir à la fois $\dfrac{a+b}{1-3} = 1$ et $a.(-3)-b.1=1$.
On résout : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{-5}{2}$.

On écrit l'homographie $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x-5}{2.x-6}}$ après avoir multiplié haut et bas par 2.

De toutes façons $h\circ h\circ h\circ h(1) = 1$. Et même en en mettant plein !

$$h\circ h\circ h\circ h(2) = \frac{87}{86}$$

après calculs idiots.

On rappelle qu'on compose les homographies en multipliant les matrices.

		$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
matrice	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 26 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 & -105 \\ 42 & -106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -169 & 425 \\ -170 & 426 \end{pmatrix}$
application	$\dfrac{x-5}{2.x-6}$	$\dfrac{-9.x+25}{-10.x+26}$	$\dfrac{41.x-105}{42.x-106}$	$\dfrac{-169.x+425}{-170.x+426}$

◁28▷ On définit : $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}.u_n+\sqrt{3}-2}{2.u_n+\sqrt{6}}$. Montrez que u est bornée. Rappel : $4.\cos(\pi/12) = \sqrt{2}+\sqrt{6}$.
Rappel : on compose les homographies en multipliant les matrices

Itérer la suite, c'est composer des homographies : $u_n = h\circ h\circ\ldots\circ h(u_0)$.

Composer des homographies, c'est multiplier des matrices : $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3}-2 \\ 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^n$.

A^{12} est $\begin{pmatrix} -4096 & 0 \\ 0 & -4096 \end{pmatrix}$
En termes d'homographies, $h^{12} = Id$.

Et pour la suite $u_{n+12} = u_n$.

Étant périodique, la suite est bornée.

◁29▷ Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.
Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

La suite (n) n'est pas bornée, de même que la suite $(-n)$. Mais leur somme est bornée. On appelle ceci un contre-exemple.

En revanche, si les deux suites sont positives, on n'a plus le moyen de compenser l'une par l'autre.
Prenons (a_n) et (b_n) positives, et supposons les non majorées.
On traduit en écrivant la négation de « majorée » pour la suite (a_n) :

$$\forall M,\ \exists n,\ a_n > M$$

Mais par positivité de (b_n) on a forcément

$$\forall M,\ \exists n,\ a_n+b_n > M+0 = M$$

C'est la quantification de (a_n+b_n) non majorée.

On peut aussi partir de (a_n) et (b_n) positives, et prouver une contraposée :
si (a_n+b_n) est majorée, alors (a_n) et (b_n) le sont.
Et ça repose sur $a_n \leqslant a_n+b_n \leqslant M$.

◁30▷ ♡ Deux suites sont liées par $\left\{\begin{array}{rcrcl} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & 4.u_n & + & v_n \end{array}\right|$ avec u_0 et v_0 donnés.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q,\ u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.

On suppose à un rang p : $u_p = v_p = 0$.
Alors par exemple au rang $p+1$: $\left\{\begin{array}{rcrcrl} u_{p+1} & = & u_p & + & v_p & = 0 \\ v_{p+1} & = & 4.u_p & + & v_p & = 0 \end{array}\right|$.
Et par récurrence, on propage aux rangs suivants.
proprement : si à un certain rang n supérieur ou égal à p on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on l'a aussi au rang $n+1$ en écrivant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.
On a la nullité de tout le monde au delà du rang p.
La récurrence doit aussi remonter, avec l'aide de la matrice inverse :

$$\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si deux termes u_p et u_{p+1} sont nuls, alors la relation $u_{p+1} = u_p + v_p$ permet de dire que v_p est nul aussi.
Et par la question précédente, tous les termes des deux suites sont nuls.

Si on suppose que deux termes différents de la suite u sont nuls u_p et u_q (avec $q > p$ sans restreindre la généralité), alors on va pouvoir montrer que u_p et v_p sont nuls, et on sera ramené au premier cas.
On écrit $\begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p}.\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p}.\begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$.
Mais la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p}$ est une matrice à coefficients entiers naturels strictement positifs qu'on va noter $\begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix}$ sans même les calculer.
La lecture de la première ligne de $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$ donne $v_p = 0$ comme demandé.

Le tout sans même diagonaliser la matrice ni calculer explicitement le terme d'indice n.

◁31▷

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

SERIE LACUNAIRE

Le but avoué de cet exercice est de déterminer un équivalent en 1 par valeur inférieure de l'application $x \longmapsto x^1 + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ *(infinité de termes)*, après en avoir prouvé l'existence.

On rappelle la définition du logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Vérifiez que c'est bien l'application réciproque de $t \longmapsto a^t$. Résolvez l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$ d'inconnue n dans $\mathbb{N} \cap [0,\ 2016]$.

I∼0) Pour tout x réel, on définit les séries suivantes *(les sommes partielles sont en $\sum_{n=1}^{N}$)* :

terme général	nom des sommes partielles	nom de la somme si convergence
x^{2n}	$\varphi_N(x)$	$\varphi(x)$
x^{2^n}	$F_N(x)$	$F(x)$
$\log_2(n).x^n$	$G_N(x)$	$G(x)$
$[\log_2(n)].x^n$	$\Gamma_N(x)$	$\Gamma(x)$
$H_n.x^n$	$S_N(x)$	$S(x)$
x^n/n	$L_N(x)$	$L(x)$

Montrez que pour tout x de $]1,\ +\infty[$, ces séries divergent grossièrement.
I∼1) On se fixe x dans $[0,\ 1[$. Montrez que ces séries sont croissantes et que leurs termes généraux tendent vers 0.
On ne peut pas encore conclure évidemment, mais calculez déjà $\varphi(x)$.
I∼2) Montrez $F_N(x) \leqslant \varphi_N(x)$ pour tout N. Concluez que F est définie sur $[0,\ 1[$ puis sur $]-1,\ 1[$.
I∼3) Écrivez un script `Python` pour représenter graphiquement F_{10} sur $[-1,\ 1]$.

I∼4) Donnez le développement limité d'ordre 10 de F en 0.

II∼0) Montrez $L_N(x) = \int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$.

II∼1) Montrez par encadrement que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Déduisez la valeur de $L(x)$.
II∼2) Simplifiez $(1-x).S_N(x)$ et déduisez la valeur de $S(x)$.

III∼0) Montrez que la suite $\frac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Est elle bornée ? Déduisez qu'il existe A (dépendant de x mais pas de n) vérifiant $[\log_2(n)].x^n \leqslant \log_2(n).x^n \leqslant A.\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n$.
III∼1) Déduisez que $G(x)$ et $\Gamma(x)$ existent.
III∼2) Montrez : $\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \frac{x}{1-x}$.
III∼3) Montrez : $(1-x).\Gamma(x) = x.F(x)$ *(il faudra étudier quand on a* $[\log_2(n)] = [\log_2(n+1)]$*)*.
III∼4) Montrez pour tout n : $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
III∼5) Déduisez : $\frac{G(x)}{x} \leqslant S(x) \leqslant G(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$.
III∼6) Déduisez que $G(x)$ est équivalent à l'une des quantités suivantes quand x tend vers 1 par valeur inférieure : $-\ln(2).\ln(1-x)$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$, $(1-x)^{x.\ln(2)}$.
III∼7) Déduisez que $F(x)$ est équivalent à $-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2)}$ quand x tend vers 1 par valeur inférieure.

IV∼0) Et que serait un équivalent en 1 de $x \longmapsto x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots$?

TD20 — A propos du logarithme de base a.

On rappelle que l'application $t \longmapsto a^t$ est strictement monotone pour a dans $]0,\ 1[$ ou $]1,\ +\infty[$. Elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,\ +\infty[$ (limites aux bornes qui sont dans le bon sens pour a plus grand que 1 et dans le mauvais pour a plus petit que 1).
On détermine la réciproque en se donnant x strictement positif et en résolvant $a^t = x$ d'inconnue réelle t. On passe au logarithme naturel (bijectif) : $t.\ln(a) = \ln(x)$ et on divise $t = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. C'est donc bien $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ qui en est la réciproque.

Pour ce qui est de l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$, elle demande finalement que $\ln(n)/\ln(2)$ soit de la forme k avec k dans $\mathbb{N}$. On aboutit à $n = 2^k$ avec k décrivant $\mathbb{N}$.
Comme on veut des solutions entières plus petites que 2016, on trouve

$$S = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024\}$$

et on s'arrête là.

TD20 — Convergence et divergence de nos séries.

Pour la divergence grossière, il faut et il suffit de prouver que le terme général ne tend pas vers 0. Rappelons que le fait que le terme général tende vers 0 est une condition nécessaire pour la convergence, mais évidemment pas suffisante.

> *Rappelons aussi que pour la divergence grossière, le terme général peut tendre vers autre chose que* 0*, tendre vers l'infini, ou même n'avoir aucune limite.*

Ici, on va regarder le terme général pour x plus grand que 1 et utiliser les croissances comparées si nécessaire. Mais il y a bien des cas où c'est un produit de deux suites infiniment grandes. Le cas $x = 1$ sera traité à part.
On ajoute tout de suite le cas où x est entre 0 et 1

terme général	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x^{2n}	0 évident	1	$+\infty$ géométrique
x^{2^n}	0	1	$+\infty$
$\log_2(n).x^n$	0 logarithme contre géométrique	$+\infty$	$+\infty$ "sur-déterminée"
$[\log_2(n)].x^n$	0 majorée par la précédente	$+\infty$	$+\infty$
$H_n.x^n$	0 majorée par $\ln(n).x^n$	$+\infty$	$+\infty$
x^n/n	0 évident	0	$+\infty$ croissances comparées

Pour x entre 0 et 1, les termes généraux sont positifs, les séries sont croissantes.

On a aussi le terme général qui tend vers 0, c'est bon signe, mais ça ne veut rien dire, rappelons que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$ à la vitesse d'un logarithme.

On s'offre la première série car elle est géométrique de raison x^2 : $\sum_{n=1}^{N} x^{2.n} = \frac{x^2 - x^{2.N+2}}{1-x^2}$ *(avec x^2 non nul)*. On fait tendre N vers l'infini, puisqu'on parle de série : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2.n} = \frac{x^2}{1-x^2}}$ *(car pour x entre 0 et 1, $x^{2.N+2}$ converge vers 0 quand N tend vers l'infini).*

> *Attention, disons le tout de suite, il ne faut pas confondre x^{2^n} avec $x^{2.n}$. Dans le premier, on regroupe l'exposant $x^{(2^n)}$ pour être rigoureux. Dans le second, on peut écrire $(x^2)^n = x^{2.n}$. Bref, on ne confond pas $(a^b)^c$ avec a^{b^c}. L'opérateur d'exponentiation n'est pas associatif...*

TD20 Application F.

On garde x entre 0 et 1. On se donne n entier, on a $2.n \leqslant 2^n$ *(comparaison simple, preuve par récurrence simple)*. Comme x est plus petit que 1, on a alors $x^{2^n} \leqslant x^{2.n}$ (attention, $\left(\frac{1}{2}\right)^{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ par exemple, car on compare $2.n.\ln(x)$ avec $2^n.\ln(x)$ mais avec $\ln(x)$ négatif).
On somme de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} x^{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} x^{2.n}$$

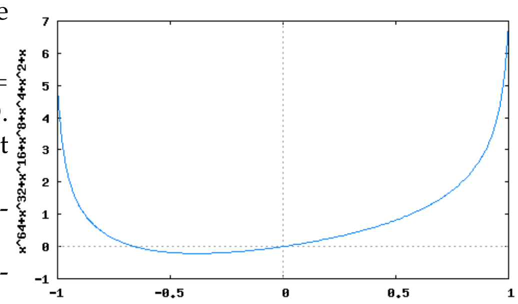
Mieux encore :

$$\sum_{n=1}^{N} x^{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} x^{2.n} = \frac{x^2 - x^{2.N+2}}{1-x^2} \leqslant \frac{x^2}{1-x^2}$$

On a donc majoré la série croissante $\left(\sum_{n=1}^{N} x^{2^n}\right)$ par le nombre $\frac{x^2}{1-x^2}$.

Cette suite converge. Et on sait au mieux qu'on peut majorer sa somme par $\frac{x^2}{1-x^2}$. Mais on ne peut pas dire mieux que $F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$
Et on ne confond pas avec $F_N(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots + x^{2^N}$.

On étend la définition de F à $]-1,\ 1[$ avec un simple argument de parité :
$F_N(-x) = -x + (-x)^2 + (-x)^4 + (-x)^8 + (-x)^{16} + \ldots + (-x)^{2^N} = F_N(x) - 2.x$pour tout réel x et tout entier naturel N *(exposants pairs)*.
On peut prendre x entre 0 et 1 et obtenir que $F(-x)$ existe et vaut $F(x) - 2.x$. Tous les réels de $]-1,\ 0]$ ont donc une image par F.
Quant aux réels de $]-\infty,\ -1]$, ils donnent aussi une divergence grossière.
Bref, F est définie sur $]-1,\ 1[$ et on peut en donner une représentation graphique sommaire



Plus précisément, on commence par créer la fonction

```
def F(x, N) :
....s = 0
....expo = 1
....for k in range(N+1) :
........s = s+x**expo
........expo = expo*2
....return(s)
```

On peut évidemment aussi faire appel à x**(2**k) (physicien) ou tout au contraire mettre une autre boucle de mathématicien

```
def F(x, N) :
....s = 0
....xn = x
....for k in range(N+1) :
........s = s+xn
........xn = xn*xn
....return(s)
```

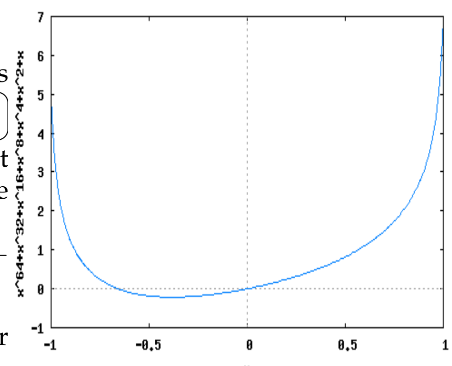
On peut aussi, puisque l'énoncé parle juste de F_{10} :

```
def F10(x) :
....return(x+x**2+x**4+x**8+x**16+x**32+x**64+x**128+x**256+x**512+x**1024)
```

mais c'est décevant car non modulable si on veut changer la valeur de N, ce qu'on ne manquera pas de faire...

Ensuite, on suit la démarche du Python enroulé en hélice sur une Solénoïde :

```
import numpy as np
import mathplotlib.pyplot as plt
x = np.arange(-1, 1, 0.05)
plt.plot(x, F(x,10))
plt.show()
```



Pour le développement limité de F en 0, on ne prend que les termes d'ordre peu élevé dans $F(x)$: $\boxed{F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + o(x^{10})_{x\to 0}}$

Ce qu'on doit prouver c'est que la somme $x^{16} + x^{32} + x^{64} + \ldots$ est bien un $o(x^{10})$ quand x tend vers 0. Même si c'est évident, il faut le prouver, car il y a quand même une infinité de termes...

$0 \leqslant x^{16} + x^{32} + x^{64} + \ldots = x^{11}.(x^5 + x^{21} + x^{53} + \ldots) \leqslant x^{11}.(x + x^2 + x^3 + \ldots) = x^{11}.\dfrac{x}{1-x}$

Le majorant tend vers 0 quand x tend vers 0, on peut conclure par encadrement.

TD20 Applications L et S.

Pour prouver $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$, on peut partir du membre de droite *(dont l'existence est assurée car $1-t$ ne s'annule pas entre 0 et x, avec argument de continuité)*. On remplace $\dfrac{1-t^N}{1-t}$ par la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} t^n$. On intègre de 0 à 1 par linéarité en N termes : $\displaystyle\int_0^x t^n.dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. La somme vaut donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On décale les indices en $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$. On reconnaît $L_N(x)$.

On regarde l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$. Elle est positive *(et elle existe par continuité)*. On majore $\dfrac{t^N}{1-t}$ par $\dfrac{x^N}{1-x}$ *(car $t^N \leqslant x^N$ et $1-t \geqslant 1-x$ avec tout ce beau monde positif)*. On intègre la constante et on a donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ compris entre 0 et $\dfrac{x^{N+1}}{1-x}$ *(si vous avez obtenu d'autres majorations comme* $\dfrac{x^{N+1}}{(N+1).(1-x)}$*, vous pouvez avoir raison aussi).*

Le majorant tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Par encadrement, l'intégrale tend vers 0.

A la louche, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^N}{1-t}$ *tendait vers* 0 *quand* N *tendait vers l'infini tant que* t *restait dans* $[0,\ x]$ *inclus dans* $[0,\ 1[$*. Mais de là à conclure sur l'intégrale qui est une aire, il ne faut pas parler trop vite...*

On sépare : $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^N.dt}{1-t}$. La deuxième intégrale tend vers 0 quand N tend vers l'infini. La première se calcule et vaut $-\ln(1-x)$.
Par somme, le premier membre tend vers $-\ln(1-x)$.

Comment se rendre ridicule pour montrer que $L_N(x)$ *converge vers* $-\ln(1-x)$ *: avoir des réflexes idiots de Terminable en prouvant déjà la convergence par un théorème classique du type "croissante majorée", puis calculer la limite par le petit calcul ci dessus. En effet, à quoi bon faire appel au théorème "croissante majorée". Du moment qu'on prouve que la suite a une limite, c'est bien qu'elle converge...*

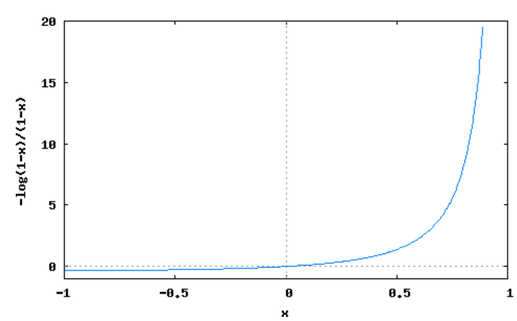
On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = L(x) = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

On passe à $(1-x).S_N(x)$, qu'on écrit sous forme de deux sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} H_n.x^n - \sum_{n=1}^{N} H_n.x^{n+1}$.

On décale la seconde : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} H_n.x^n - \sum_{k=2}^{N+1} H_{k-1}.x^k$.

On fusionne en $x + \displaystyle\sum_{n=2}^{N} (H_n - H_{n-1}).x^n - H_n.x^{n+1}$.

On simplifie en $x + \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}.x^n - H_n.x^{n+1}$.



On reconnaît $L_N(x) - H_n.x^{n+1}$.
On peut faire tendre N vers l'infini. La forme indéterminée $H_n.x^{N+1}$ tend vers 0, par croissances comparées *(*H_N *est équivalent à* $\ln(N)$ *tandis que* x^{N+1}*est de type exponentielle*[a]*).*
On déduit : $(1-x).S_N(x)$ tend vers $-\ln(1-x)$.
Par division, $S_N(x)$ converge vers $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

a. ou géométrique, c'est pareil

On a obtenu : $\boxed{x + \left(1+\frac{1}{2}\right).x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).x^3 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).x^4 + \ldots = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}}$ avec une infinité de termes dans la somme.
La série entière L est un classique du cours de Spé. S est un classique des exercices de Spé.

Pour qui a du mal, on le refait, avec des points de suspension :

$$(1-x).\left(x + \left(1+\frac{1}{2}\right).x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).x^3 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).x^4\right)$$

est égal à

$$\left(x + \left(1+\frac{1}{2}\right).x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).x^3 + \left(1+\ldots+\frac{1}{4}\right).x^4\right) - \left(x^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right).x^3 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).x^4 + \left(1+\ldots+\frac{1}{4}\right).x^5\right)$$

et on regarde ce qu'il reste.

TD20 Existence de G et Γ.

On s'est donné x dans $]0,\ 1[$, et on n'a rien dit de plus sur lui depuis, il y est toujours. On étudie $\dfrac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ qui est une forme très indéterminée sous cette forme. Mais ensuite, on a $\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\dfrac{2.x}{1+x}\Big)^n$.
On a un terme logarithmique face à un terme exponentiel. La raison $\dfrac{2.x}{1+x}$ est positive, strictement plus petite que 1.
C'est la suite géométrique qui l'emporte par **puissances comparées**. La suite $\Big(\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\dfrac{2.x}{1+x}\Big)^n\Big)_n$ tend vers 0. Elle est donc bornée, comme toute suite convergente.

Notons A un majorant de cette suite : $\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\dfrac{2.x}{1+x}\Big)^n \leqslant A$ pour tout n.

On effectue un produit en croix *(légitime par positivité de tout ce beau monde)* : $\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}.x^n \leqslant A.\Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)^n$.

Ensuite, on rappelle que $[u]$ se majore par u pour tout u, on multiplie par x^n, positif :

$$\Big[\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\Big].x^n \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.x^n \leqslant A.\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n$$

C'est bien la formule demandée, en écrivant ce qu'est le logarithme de base 2.

On somme ces inégalités pour n de 1 à N donné : $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\sum_{n=1}^{N}\Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)^n$.

On identifie dans le majorant une série géométrique qui se calcule : $A.\dfrac{1-\Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)^{N+1}}{1-\dfrac{1+x}{2}}$.

On est certes tenté (à presque juste titre) *de faire tendre N vers l'infini pour continuer à majorer.*

> *Mais il n'en est rien. On majore, c'est tout. L'infini ne vient qu'après et il se manipule avec précaution et avec le cerveau.*

On a donc $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\dfrac{1}{1-\frac{1+x}{2}}$.
Les deux séries à termes positifs $\Big(\Gamma_N(x)\Big)_N$ et $\Big(G_N(x)\Big)_N$ sont croissantes *(en N)* et majorées *(par une constante qui ne dépend que de x et pas de N)*. Elles convergent.

> *Bref, à partir de maintenant on a donné un sens à* $\log_2(1).x + \log_2(2).x^2 + \log_2(3).x^3 + \log_2(4).x^4 + \log_2(5).x^5 + \ldots$ *et le même avec des parties entières.*
> *On peut les simplifier d'ailleurs en* $0.x + 1.x^2 + \log_2(3).x^3 + 2.x^4 + \log_2(5).x^5 + \ldots$ *et* $0.x + 1.x^2 + 1.x^3 + 2.x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 3.x^8 + 3.x^9 + 3.x^{10} + \ldots$.

On a montré dans la majoration précédente : $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\dfrac{2}{1-x}$. En passant à la limite *(maintenant qu'on sait qu'elle existe)* : $\Gamma(x) \leqslant G(x)$.
C'est normal, la partie entière fait descendre.
Mais en partant de $[\log_2(n)] \leqslant \log_2(n) \leqslant [\log_2(n)] + 1$ *(encadrement usuel* $[u] \leqslant u < [u]+1$*)*, en multipliant par x^n *(positif)* et en sommant, on a

$$\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant \Gamma_N(x) + \sum_{n=1}^{N} x^n = \Gamma_N(x) + \frac{x - x^{N+1}}{1-x}$$

On passe à les limites *(elles existent car x est entre* 0 *et* 1*)* :

$$\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \frac{x}{1-x}$$

> *On devrait pouvoir en déduire des limites et peut être des équivalents quand x tend vers 1...*

TD20 Lien entre Γ et F.

Comme indiqué, on calcule le produit $(1-x).\Gamma(x)$ ou même $(1-x).\Gamma_N(x)$ en ne travaillant déjà que sur des sommes finies.
en développant :

$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n - \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^{n+1}$$

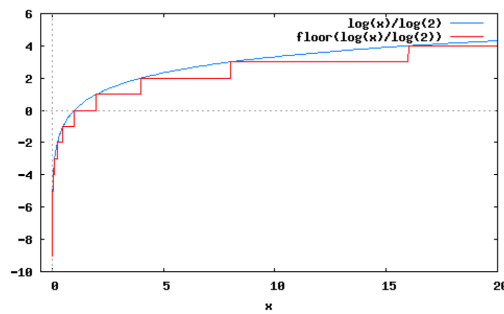
en ré-indexant :

$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n - \sum_{n=2}^{N+1}[\log_2(n-1)].x^n$$

en effaçant le terme nul :

$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=2}^{N}\big([\log_2(n)]-[\log_2(n-1)]\big).x^n - [\log_2(N)].x^{N+1}$$

Tout va se jouer avec le terme $\big([\log_2(n)]-[\log_2(n-1)]\big)$. C'est un entier.
Il est positif car $\log_2(n-1)$ est plus petit que $\log_2(n)$ *(et l'application partie entière est croissante au sens large)*.
Et il vaut souvent 0.
Il ne passe à 1 que quand n est une puissance de 2.
Écrivons en effet $2^{k-1} \leqslant n-1 < 2^k$ *(pour dire* $[\log_2(n-1)] = k-1$*)*.
On a alors $2^{k-1} \leqslant n-1 < 2^k$ ou bien $n = 2^k$. Dans le premier cas : $[\log_2(n)] = k-1$ et la différence est nulle. Dans le second cas : $[\log_2(n)] = k$ et la différence vaut 1.



On a par exemple

$$\Gamma_{18}(x) = x^2 + x^3 + 2.x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 3.x^8 + 3.x^9 + \ldots + 3.x^{15} + 4.x^{16} + 4.x^{17} + 4.x^{18}$$

On multiplie :

$$x.\Gamma_{18}(x) = x^3 + x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 2.x^8 + 3.x^9 + 3.x^{10} + \ldots + 3.x^{16} + 4.x^{17} + 4.x^{18} + 4.x^{19}$$

On effectue :

$$(1-x).\Gamma_{18}(x) = x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} - 4.x^{19}$$

On résume dans le cas général :

$$(1-x).\Gamma_N(x) = \sum_{n=1}^{N} 1_{n\in P}.x^n - [\log_2(N)].x^{N+1}$$

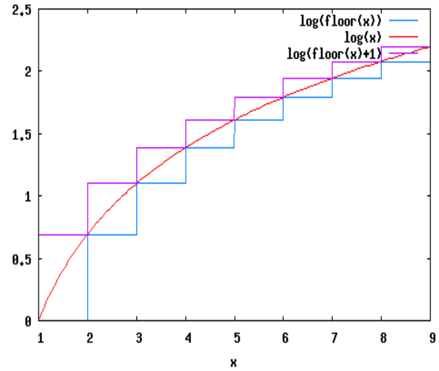
avec P l'ensemble des puissances de 2.
On a donc

$$(1-x).\Gamma_N(x) = F_k(x) - x - [\log_2(N)].x^{N+1}$$

avec k égal à $[\log_2(n)]$.
On fait tendre N vers l'infini, $(1-x).\Gamma_N(x)$ tend vers $(1-x).\Gamma(x)$. Le réel $[\log_2(N)].x^{N+1}$ tend vers 0 par croissances comparées. $F_k(x)$ converge vers F.
On a $\boxed{(1-x).\Gamma(x) = F(x) - x}$

TD20 Série harmonique et logarithme.

L'encadrement $\ln(1+n) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n)$ est un de nos grands classiques.



Pour tout k de 2 à n, on encadre $\frac{1}{k}$ par $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$, puis on somme. Les intégrales se concatènent par relation de Chasles, et se calculent par intervention du logarithme. On ajoute le terme $k = 1$ du côté "majoration", on introduit même $\int_1^2 \frac{dt}{t}$ du côté minoration, et c'est fini.
Le dessin suivant ne suffit quand même pas, mais en dit long :

On prend ces inégalités, on les divise par $\ln(2)$ et on les multiplie par x^n (tout est positif) :

$$\log_2(n+1).x^n \leqslant \frac{H_n.x^n}{\ln(2)} \leqslant \log_2(n).x^n + x^n$$

On somme de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} \log_2(n+1).x^n \leqslant S_N(x) \leqslant G_N(x) + \sum_{n=1}^{N} x^n$$

Dans le premier terme, on identifie $\sum_{k=2}^{N+1} \log_2(k).x^{k-1}$ (on peut commencer à sommer à 1 ou 2, le premier logarithme est nul). C'est bien $G_{N+1}(x)/x$.*
On fait tendre N vers l'infini, on passe à la limite dans ces inégalités :

$$\frac{G(x)}{x} \leqslant \frac{S(x)}{\ln(2)} \leqslant G(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

Il n'y a plus qu'à identifier une série géométrique de raison strictement plus petite que 1.

Évidement, des raisonnements basés par exemple sur des développements limités sont à proscrire, car les développements limités ne sont que des comportements "à la limite"*, et ne donnent jamais des inégalités sur tout un intervalle.*
Enfin, les preuves du type "je calcule la différence des fonctions, je dérive, je fais un tableau de variations" *sont ici vouées à l'échec car il est délicat de dériver des séries de fonctions* (vous le verrez en Spé, mais on peut s'en douter car il y a une infinité de termes...).

On rappelle qu'on a prouvé $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$. Mais c'est G qu'il faut isoler dans $\frac{G(x)}{x} \leqslant \frac{S(x)}{\ln(2)} \leqslant G(x) + \frac{x}{1-x}$.
On bascule donc en

$$\frac{S(x)}{\ln(2)} - \frac{x}{1-x} \leqslant G(x) \leqslant x.\frac{S(x)}{\ln(2)}$$

(si il vous faut une plus d'une minute pour comprendre ce passage, justement, passez... mais pas en Spé).
On a cette fois

$$-\frac{\ln(1-x)+\ln(2).x}{\ln(2).(1-x)} \leqslant G(x) \leqslant -x.\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$$

On ne passe pas à la limite, ça ne servirait à rien, tout tend vers l'infini.
Enfin, si ! On a déjà par minoration $G(x) \longrightarrow_{x\to 1^-} +\infty$ *(mais on s'en serait douté à partir de* $\log_2(2).x^2 + \log_2(3).x^3 + \log_2(4).x^4 + \dots$ *avec son infinité de termes.*

On multiplie par $\ln(2).(1-x)$ et on divise par $-\ln(1-x)$ *(tous deux positifs)* : $\frac{G(x)}{-\ln(1-x)/\ln(2).(1-x)}$ est compris entre $1 + \frac{x}{\ln(1-x)}$ et x. Quand x tend vers 1, les deux tendent vers 1.
Par encadrement, $\frac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$ tend vers 1.

Par définition, $\boxed{G(x) \text{ est équivalent en } 1^- \text{ à } -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$ *(et ça, c'est un infiniment grand en 1^-).*

TD20 Equivalent de F en 1 par valeur inférieure.

Il est temps de mettre bout à bout tout ce qu'on a prouvé pour tout x de $[0,\ 1[$ *(outre l'existence des quantités)* :

$(1-x).\Gamma(x)+x = F(x)$	$\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \dfrac{x}{1-x}$	$G(x) \sim_1 -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$	$L(x) = -\ln(1-x)$	$S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$
	$\Gamma(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\log_2(n)].x^n$	$G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\log_2(n).x^n$	$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$	$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}H_n.x^n$

On repart de $\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \dfrac{x}{1-x}$ qu'on transforme en

$$G(x) - \frac{x}{1-x} \leqslant \Gamma(x) \leqslant G(x)$$

On divise par $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$ et on encadre le quotient central par $\dfrac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}} - \dfrac{x.\ln(2)}{\ln(1-x)}$ et $\dfrac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$. Par définition de l'équivalent de G, les deux encadrants tendent vers 1.

Par théorème d'encadrement, on aboutit à $\Gamma(x)$ est équivalent aussi à $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$.

On multiplie par $1-x$ et on ajoute x *(qui reste borné et est un $o(\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)})$).*

Par une grande transitivité, on aboutit à $\boxed{F(x) \text{ est équivalent en } 1^- \text{ à } -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)}}$ *(dans toute l'histoire, le facteur $1-x$ a été apporté deux fois, puis simplifié...).*

Cette série entière tend vers l'infini moins vite que $\dfrac{1}{1-x}$ qui était formée de tous les termes : $F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ contre $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$.

Pour $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{(3^n)}$, on refait les mêmes calculs avec 3 à la place de 2 *(les $\log_2(n)$ deviennent des $\log_3(n)$)*. Finalement, tout le raisonnement peut être repris et on trouve $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots \sim_1 -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(3)}$

◁32▷ Existe-t-il une homographie (application de la forme $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$) dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?

On veut $2.a + b = 4.c + 2.d$ et $3.a + b = 9.c + 3.d$.
On trouve des solutions, telles que $b = -6.c$ et $a = 5.c + d$.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{5.x-6}{x}$ (ici $d = 0$).

◁33▷ Une information binaire (True/False, 1/0) est réémise par des transmetteurs successifs, indépendants les uns des autres. Mais un transmetteur se trompe avec probabilité p et transmet alors le bit "opposé". On note a_n la probabilité que le bit de la n^{ieme} étape soit le bit initial. Exprimez a_{n+1} à l'aide de a_n. Calculez a_n pour tout n.

Évidemment, a_0 est égal à 1. Quant à a_1 il vaut p.
Ensuite, l'information au rang $n+1$ est vraie dans deux cas :
- elle était vraie au rang n et on le n^{ieme} transmetteur a bien transmise,
- elle était fausse au rang n et le n^{ieme} transmetteur a justement rétabli la vérité en se trompant

$P(Vrai_{n+1}) = P(Vrai_n \mid Vrai_{n-1}).P(T_n\ sincere) + P(Vrai_n \mid Faux_{n-1}).P(T_n\ se\ trompe)$ avec les formules attendues aux concours.
On a donc $a_{n+1} = p.a_n + (1-p).(1-a_n) = (2.p-1).a_n + (1-p)$.
On reconnaît une suite arithmético-géométrique : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2.p-1 & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}$ si on aime.

Sinon, on trouve le point fixe : $\dfrac{1}{2}$, et on montre que la suite $a_n - \dfrac{1}{2}$ est géométrique de raison $(2.p-1)$.

On trouve finalement : $\boxed{a_n = (2.p-1)^{n-1}.p + \dfrac{1}{2}}$

Quand n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $1/2$.

◁34▷ Une suite récurrente u vérifie $u_{n+3} = 3.u_{n+2} + 10.u_{n+1} - 24.u_n$ pour tout n, avec $u_0 = 0$, $u_1 = -8$ et $u_2 = 2$ donnés. Montrez qu'on peut calculer u_n pour tout n.
Diagonalisation. On ne sait pas encore diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ (notée M), mais on peut quand même au moins résoudre l'équation $\det(M - x.I_3) = 0$ d'inconnue réelle x (racines α, β et γ).
Baisse de degré. Montrez que $(u_{n+1} - \alpha.u_n)$ (notée (v_n)) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (équation caractéristique ?). Calculez son terme général. Retrouvez le terme général de u.
Diagonalisation sans le dire. Montrez que $(u_{n+2} - (\alpha+\beta).u_{n+1} + \alpha.\beta.u_n)$ (notée (c_n)) est géométrique (raison ?) ; même question avec $(u_{n+2} - (\alpha+\gamma).u_{n+1} + \alpha.\gamma.u_n)$ et une autre que vous ajusterez.

$X^3 - 3.X^2 - 10.X + 24$ a pour racines 4, 2 et -3.

On trouve des vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ puis avec la formule définitive $M^n = P.D^n.P^{-1}$, on a neuf termes.

Seule la première ligne de M nous intéresse puisque $M^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. C'est du calcul.

Si on pose $v_n = u_{n+1} - 4.u_n$ par exemple, on constate :
$v_{n+1} = u_{n+2} - 4.u_{n+1}$ et $v_{n+2} = u_{n+3} - 4.u_{n+2} = (3.u_{n+2} + 10.u_{n+1} - 24.u_n) - 4.u_{n+2}$.
Ayant $v_{n+2} = -u_{n+2} + 10.u_{n+1} - 24.u_n$, on y remplace u_{n+2} par $v_{n+1} + 4.u_{n+1}$ puis u_{n+1} par $v_n + 4.u_n$.

Au final, on arrive à avoir $v_{n+2} = -v_{n+1} + 6.v_n$.
Celle ci est dans le programme officiel, car d'ordre 2. Équation caractéristique $\lambda^2 = -\lambda + 6$. Spectre $\{2,\ -3\}$.
On a donc $v_n = a.2^n + b.(-3)^n$ avec a et b calculables.
On a donc $u_{n+1} - 4.u_n = a.2^n + b.(-3)^n$.
On trouve les solutions homogènes $A.4^n$ et on ajoute des particulières : $\dfrac{a.2^n}{-2}$ et $\dfrac{b.(-3)^n}{-7}$.
On retrouve la combinaison promise.

Et si on prend $\begin{array}{l} \alpha_n = (u_{n+2} - (4+2).u_{n+1} + 4.2.u_n) \\ \beta_n = (u_{n+2} - (2-3).u_{n+1} + 2.(-3).u_n) \\ \gamma_n = (u_{n+2} - (4-3).u_{n+1} + 4.(-3).u_n) \end{array}$ on constate $\begin{array}{l} \alpha_n = (-3).\alpha_n \\ \beta_n = 4.\beta_n \\ \gamma_{n+1} = 2.\gamma_n \end{array}$

On a donc tout de suite $\begin{array}{l} \alpha_n = (-3)^n.\alpha_0 \\ \beta_n = 4^n.\beta_0 \\ \gamma_n = 2^n.\gamma_0 \end{array}$ avec α_0, β_0 et γ_0 connus [4]

Il ne reste plus qu'à récupérer u_n à partir de $\begin{array}{l} u_{n+2} - 6.u_{n+1} + 8.u_n = (6'')^n.\alpha_0 \\ u_{n+2} + 1.u_{n+1} - 6.u_n = 4^n.\beta_0 \\ u_{n+2} - 1.u_{n+1} - 12.u_n = 2^n.\gamma_0 \end{array}$ par la bonne combinaison (et ça c'est P qui le fait).

◁35▷ ♡ Une suite récurrente u vérifiant $u_{n+2} = 12.u_n - u_{n+1}$ pour tout n reste de signe constant. Montrez que c'est une suite géométrique, et calculez u_{100}/u_5.

Le cours dit • équation caractéristique $\lambda^2 = -\lambda + 12.\lambda$
• spectre $\{-4,\ 3\}$
Les solutions sont de la forme $a.(-4)^n + b.3^n$. Avec a et b à déterminer en fonction des conditions initiales.
Mais si a est non nul, la suite sera du signe de a pour n pair assez grand, puis du signe de $-a$ pour n impair assez grand.
Et ceci contredira « de signe constant ».
Il s'ensuit que a est nul.
La suite est de la forme $(b.3^n)$.
Elle est géométrique de raison 3. Et le quotient $\dfrac{u_{100}}{u_5}$ vaut 3^{95} (raison).

4. cette étape c'est D^n, et la détermination de α_0, β_0 et γ_0 c'est P^{-1}

◁36▷ Est il possible de choisir a réel pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} - u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 9 ?
Est il possible de choisir a et b rationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 12 ?

Est il possible de choisir a et b irrationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 12 ?
Est-il possible de choisir a, b, c et d réels pour que dans le couple $(u,\ v)$ de suites vérifiant $\left\{\begin{array}{lcll} u_{n+1} & = & a.u_n & +b.v_n \\ v_{n+1} & = & c.u_n & +d.v_n \end{array}\right|$ pour tout n, la suite u soit périodique de période 6.
Montrez que si u est périodique, alors v l'est aussi.

Pour l'équation récurrente $u_{n+2} = a.u_{n+1} - u_n$, les solutions sont des combinaisons de suites géométriques. Elles ne seront bornées (car périodiques) que si les deux raisons sont plus petites que 1 en module.
Cas particulier : une racine double, on exige alors que le module soit strictement plus petit que 1 car sinon $(\alpha.n + \beta).r^n$ diverge aussi pour α non nul.
L'équation caractéristique $\lambda^2 - a.\lambda + 1 = 0$ a deux racines dont le produit vaut 1.
Il faut donc que les deux soient de module 1 (sinon, une plus grande, une plus petite et rien n'est périodique).
On va même demander que les deux valeurs propres soient des racines neuvièmes de l'unité.

Il suffit de choisir $a = 2.\cos(2.\pi/9)$, ou même $a = 2.\cos(2.\pi/3)$ et pourquoi pas $a = 2.\cos(2.\pi)$...
Ah, non, pas $a = 2.\cos(2.\pi)$, car on a alors une racine double et des solutions en $(\alpha.n + \beta)$.

Remarque : Il faut bien sûr ne pas avoir oublié que l'équation dont les racines sont $e^{i.k.\pi/N}$ et son conjugué est $\lambda - 2.\cos(2.k.\pi/N).\lambda + 1 = 0$.
Mais si vous avez oublié ça, je ne peux plus rien pour vous...

Avec $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ c'est un peu pareil.
On demande que les racines de l'équation caractéristique soient encore des $e^{i.k.\pi/12}$. C'est possible :
$u_{n+2} = 2.\cos(\pi/12).u_{n+1} - u_n$ ou $u_{n+2} = 2.\cos(4.\pi/12).u_{n+1} - u_n$ ou $u_{n+2} = 2.\cos(3.\pi/12).u_{n+1} - u_n$.

Ah, mais on les veut rationnels ! Et ces cosinus ne le sont guère.
Sauf quand même $u_{n+2} = 2.\cos(4.\pi/12).u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+2} = 2.\cos(6.\pi/12).u_{n+1} - u_n$.
Les solutions sont périodiques de période 12 (même si 12 n'est pas la plus petite période).

Rappel : Tant que la question est « pouvez vous choisir... » ou « choisissez... », une réponse est « on propose/on vérifie ».
Il n'est pas utile de raisonner par conditions nécessaires ($\Rightarrow$). C'est même idiot si à la fin vous ne vérifiez pas.
Il n'y a que pour le cas « on ne peut pas choisir » qu'il faut raisonner par implications, afin d'arriver à une contradiction.
C'est parfois ce qu'il manque à certains d'entre vous : déjà lire la question et ne pas se précipiter tout de suite sur des $\Rightarrow$ comme dans un mauvais exercice du bac...

Pour $\left\{\begin{array}{lcll} u_{n+1} & = & a.u_n & +b.v_n \\ v_{n+1} & = & c.u_n & +d.v_n \end{array}\right|$, c'est cette fois la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qu'il suffit de bien choisir pour que ses deux valeurs propres soient des racines de l'unité...
On peut même se ramener à des recherches de l'exercice précédent avec $\left\{\begin{array}{lcll} u_{n+1} & = & a.u_n & +b.v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & \end{array}\right|$.

◁37▷ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2.|x-y|}{3}$.
Montrez (par l'absurde ?) qu'il existe au plus un réel a vérifiant $f(a) = a$.
On définit la suite (u_n) par « u_0 donné » et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrez par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$.
On définit deux suites : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big)$.
Montrez pour tout n : $A_{n+1} - A_n \geqslant 0$ et $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$.
Montrez pour tout n : $\dfrac{S_n}{2} \leqslant A_n \leqslant \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$.
déduisez dans l'ordre que (A_n), (S_n), $(S_n + A_n)$ et (u_n) convergent.
On note α la limite de la suite (u_n). Montrez : $f(\alpha) = \alpha$. Déduisez que α ne dépend pas du choix de u_0.
Montrez pour tout n : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2^n}{3^{n-1}}.|u_1 - u_0|$.

C'est le théorème du point fixe.

Le théorème sous sa forme habituelle énonce :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour un k de $[0,\ 1[$:

$$\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x-y|$$

On appelle ceci $k-$contractante avec un rapport k strictement plus petit que 1.

Alors f admet un unique point fixe (solution de $f(x) = x$). On obtient ce point fixe comme limite de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (dont on sait qu'elle va toujours converger). De plus, on connaît la vitesse de convergence vers le point fixe a (vérifiant $f(a) = a$) : $|u_n - a|$ tend vers 0 plus vite qu'une suite géométrique de raison k (rappelons que comme k est plus petit que 1, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0).

Unicité du point fixe en cas d'existence.

On suppose qu'il existe deux points fixes a et α : $f(a) = a$ et $f(\alpha) = \alpha$.

Mais alors avec la propriété de contraction :

$$|a - \alpha| = f(a) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2.|a-\alpha|}{3}$$

Ceci conduit à un contradiction du type $3.d \leqslant 2.d$ avec d strictement positif diront les uns.
Ceci conduit à une contradiction, sauf avec $a - \alpha = 0$ diront les autres.

La récurrence pour $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$ est évidente.
L'initialisation à $n = 0$ est une égalité.

On se donne ensuite n quelconque. (on a transformé le « $\forall n \in \mathbb{N}$ » en démonstration mathématique).
On suppose $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$ (c'est la propriété P_n).
On calcule alors

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(_n)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right).|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.|u_1 - u_0|$$

Ainsi se trouve démontré P_{n+1}.
Le principe de récurrence permet de conclure.

La croissance de (A_n) et (S_n) se fait en calculant deux différences.
Pour tout n donné

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=0}^{n+1-1} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{n+1-1} |u_{k+1} - u_k| = |u_{n+1} - u_n| \geqslant 0$$

Dans la formule $\sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n$*, beaucoup d'élèves voient un télescopage. Il n'en est rien, c'est juste la relation de Chasles* $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{On} = \overrightarrow{nN}$.

De même

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big) - \sum_{k=0}^{n-1} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big) = \Big(|u_{n+1} - u_n| + (u_{n+1} - u_n)\Big)$$

Le terme qui reste est de la forme $|y| + y$ et il est positif [5].
La positivité de $S_{n+1} - S_n$ et $A_{n+1} - A_n$ pour tout n traduit bien la croissance des deux suites (S_n) et (A_n).

L'élève qui aura voulu simplifier tout de suite $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ *en* $u_n - u_0$ *en disant « ouah j'ai deviné un truc de fou, je suis trop fort » aura perdu tout ce que l'énoncé mettait en place pour lui.*

$\dfrac{S_n}{2} \leqslant A_n \leqslant \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$ se démontre sans récurrence. Le mot clef est « série géométrique de raison $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ».
Déjà, la première inégalité, en calculant une différence.

$$A_n - \frac{S_n}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u_{k+1} - u_k| - (u_{k+1} - u_k)}{2}$$

Or, chaque terme $\dfrac{|u_{k+1} - u_k| - (u_{k+1} - u_k)}{2}$ de la somme est positif [6], la somme est positive.

La majoration $A_n \leqslant \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0|$ vient d'une majoration établie plus haut pour tout

$$A_n \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k.|u_1 - u_0| = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0|$$

On calcule ensuite explicitement la série géometrique de raison $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ avec la formule [7]

$$\frac{(premier\ terme\ ecrit) - (premier\ terme\ a\ venir)}{1 - raison}$$

Enfin, la majoration $\dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$ vient juste de $\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0| \geqslant 0$.

Et du calcul $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$, mais ne me dites pas que c'est ça qui a été la difficulté pour vous !

La suite (A_n) est une suite réelle croissante (deux questions plus haut) et majorée (par le réel $3.|u_1 - u_0|$), elle converge vers son plus petit majorant.

*Par rapport à la terminale, prenez l'habitude d'insister sur « suite **réelle** croissante majorée » et « converge **vers son plus petit majorant** ». Ce second point permet de dire ensuite « et sa limite est plus petite que* $3.|u_1 - u_0|$ *» sans invoquer le moindre passage à la limite. ? C'est juste «* $3.|u_1 - u_0|$ ***est un majorant** » et « **la limite est le plus petit majorant** ».*

De même, (S_n) est une suite réelle croissante majorée. Elle converge.

---

5. toute somme $|y| + y$ est soit nulle (pour y négatif), soit égale à $2.|y|$ (pour y positif)
6. toute différence $|y| - y$ est soit nulle (pour y positif), soit égale à $2.|y|$ (pour y négatif)
7. comptez les termes si vous voulez, mais la formule du décompte est la plus mauvaise à retenir, et tant pis si c'est celle qu'on vous a enseigné, dites vous que ce n'est pas la première fois qu'on vous aura mal conseillé

Mais alors, par théorème algébrique [8], leur différence converge aussi.
Et la différence $S_n - A_n$ est la somme télescopique évoquée plus haut en remarque

$$S_n - A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(|u_{k+1}-u_k| + (u_{k+1}-u_k)\Big) - \sum_{k=0}^{n-1}|u_{k+1}-u_k| = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$$

Grâce à cette astuce de S_n et A_n, on vient de prouver que $(a_n - a_0)$ converge. Et comme a_0 est un réel fixé, la suite (a_n) converge.

On ne sait pas si elle est monotone, elle n'a d'ailleurs aucune raison de l'être.
Il a fallu ici ruser par rapport aux théorèmes habituels.

Sachant que (u_n) converge (on nomme sa limite, même si on ne la connaît pas encore [9]), on déduit par continuité que $(f(u_n))$ vers $f(\alpha)$.
Mais on a aussi $u_{n+1} = f(u_n)$ par construction. Par passage à la limite : $\alpha = f(\alpha)$.
La limite est un point fixe.

Et finalement, qu'a-t-on prouvé ?
Que la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ existe »
Que la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ converge » donc que sa limite existe.
Que sa limite est un point fixe. Il existe donc un point fixe.

De plus, comme le point fixe est unique (début du problème), il ne dépend pas du choix de la valeur initiale.

Pour la vitesse de convergence vers le point fixe, on va recommencer les arguments « somme télescopique » et « série géométrique », avec en plus « inégalité triangulaire » . On commence par travailler à horizon fini, entre n et N (avec $N \geqslant n$ a priori) :

$$u_N - u_n = \sum_{k=n}^{N-1}(u_{k+1}-u_k)$$

$$|u_N - u_n| = \Big|\sum_{k=n}^{N-1}(u_{k+1}-u_k)\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}|u_{k+1}-u_k|$$

$$|u_N - u_n| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}|u_{k+1}-u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k.|u_1-u_0|$$

$$|u_N - u_n| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k.|u_1-u_0| = \frac{\Big(\frac{2}{3}\Big)^n - \Big(\frac{2}{3}\Big)^N}{1-\Big(\frac{2}{3}\Big)}.|u_1-u_0|$$

$$|u_N - u_n| \leqslant \frac{\Big(\frac{2}{3}\Big)^n - \Big(\frac{2}{3}\Big)^N}{\frac{1}{3}}.|u_1-u_0| \leqslant 3.\Big(\frac{2}{3}\Big)^n.|u_1-u_0|$$

n reste fixé, mais on fait tendre N vers l'infini.
Maintenant qu'on sait que la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (vers α), on peut passer à la limite à gauche (et à droite il n'y a pas de N)

$$|\alpha - u_n| \leqslant 3.\Big(\frac{2}{3}\Big)^n.|u_1-u_0|$$

On connaît donc la vitesse de convergence.

L'exemple le plus classique est la suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$. On appuie sans arrêt sur la touche con de sa calculatrice.
On voit bien que la suite converge. Mais vers quoi ?
On ne sait pas dire. Mais ce dont on est sûr c'est que la limite est solution de $\cos(x) = x$. Et c'est même « la solution de $\cos(x) = x$ ».
Ce que vous savez même, c'est la vitesse de convergence maintenant. Combien de décimales sont exactes à la douzième itération (avec ici un rapport de contraction autre que $\frac{2}{3}$ sur l'intervalle de travail).

---

8. appellation pour les histoires de « sommes, produits, combinaisons linaires »
9. et on ne la connaîtra pas, elle sera juste caractérisée

◁38▷ A est une matrice de terme général a_i^k.
Comparez : $Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \Bigm| i \leqslant n\Big)$ et $Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \Bigm| k \leqslant n\Big)$ *(il n'y a pas forcément égalité, mais l'un est toujours plus petit que l'autre, regardez sur un exemple pour des matrices* 4 *sur* 4*, et pour la preuve générale, pensez à regarder le terme à l'intersection de la ligne donnant le max et la colonne donnant le min).*
(a_n^p) est une famille de réels indexée par deux entiers *(suite de suites)*, bornée.
Comparez $Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \Bigm| i \in \mathbb{N}\Big)$ et $Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \Bigm| k \in \mathbb{N}\Big)$ après avoir montré l'existence de chacun.

Un tableau à double entrée (ça s'appelle une matrice)

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big)$	$Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \Bigm\vert i \leqslant n\Big)$
i=1	4	3	9	12	7	3	
i=2	5	8	17	9	2	2	
i=3	9	4	13	7	8	4	
i=4	12	5	6	17	4	4	
i=5	5	7	13	6	11	5	5
$Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big)$	12	8	17	17	11		
$Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \Bigm\vert k \leqslant n\Big)$		8					

Sur cet exemple $Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \Bigm| k \leqslant n\Big) \geqslant Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \Bigm| i \leqslant n\Big)$.
Et pour comprendre :

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big)$	$Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \Bigm\vert i \leqslant n\Big)$
i=1	4	3	9	12	7	3	
i=2	5	8	17	9	2	2	
i=3	9	4	13	7	8	4	
i=4	12	5	6	17	4	4	
i=5	5	7	13	6	11	5	5
$Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big)$	12	8	17	17	11		
$Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \Bigm\vert k \leqslant n\Big)$		8					$8 \geqslant 7 \geqslant 5$

Passons à la preuve.
Pour chaque ligne i, on calcule la minimum d'une liste finie : $Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big)$, qu'on va noter μ_i (nommer les objets est une étape vers la solution).
De tous ces μ_i, on prend le plus grand : $Max(\mu_i)$. Disons qu'il est atteint pour un indice i_0 (il se peut qu'il y en ait plusieurs, on en prend un).

Pour chaque colonne k, on calcule la maximum d'une liste finie : $Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big)$, qu'on va noter ν_k (nommer les objets rend les choses plus claires).
De tous ces ν_k on prend le plus petit, atteint disons pour un indice k_0.

Considérons alors l'élément $a_{i_0}^{k_0}$ de la ligne i_0 et de la colonne k_0.
Il fait partie de la liste définissant $\mu_{i_0} = Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big)$. On a donc $\mu_{i_à} \leqslant a_{i_0}^{k_0}$ (ci dessus : $5 \leqslant 7$).
Il fait partie de la liste définissant $\nu_{i_0} = Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big)$. On a donc $\nu_{i_à} \geqslant a_{i_0}^{k_0}$ (ci dessus : $8 \geqslant 7$).
Par transitivité : $\boxed{Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \Bigm| k \leqslant n\Big) = \nu_{k_0} \geqslant a_{i_0}^{k_0} \geqslant \mu_{i_0} Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \Bigm| i \leqslant n\Big)}$

Pour passer aux ensembles infinis et comparer $Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \Bigm| i \in \mathbb{N}\Big)$ et $Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \Bigm| k \in \mathbb{N}\Big)$, on va faire presque de même.

Après avoir justifié l'existence de ces bornes.
Disons que la suite à double indice est majorée par A et minorée par B.
Chaque partie $\{a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (i fixé) est non vide, et minorée par B. Elle admet donc une borne inférieure minorée par B (un minorant face au plus grand minorant).
Chaque $Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big)$ existe et est plus grand que B. Mais il est plus petit que A puisque $Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \leqslant$

$a_i^0 \leqslant A$.
L'ensemble $\left\{ Inf\left(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ est non vide, majoré par A.
Il admet une borne supérieure.

On fait « de même » pour l'existence de $Inf\left(Sup\left(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\right) \middle| k \in \mathbb{N}\right)$.

A l'image de $Max\left(Min\left(a_i^k \mid k \leqslant n\right) \middle| i \leqslant n\right) \leqslant Min\left(Max\left(a_i^k \mid i \leqslant n\right) \middle| k \leqslant n\right)$, on va prouver

$$Sup\left(Inf\left(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \middle| i \in \mathbb{N}\right) \leqslant Inf\left(Sup\left(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\right) \middle| k \in \mathbb{N}\right)$$

presque de la même manière.
Pourquoi presque ?
Ne peut on dire « on prend le k_0 qui réalise $Inf\left(Sup\left(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\right) \middle| k \in \mathbb{N}\right) = Sup\left(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\right)$
le i_0 qui réalise $Sup\left(Inf\left(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \middle| i \in \mathbb{N}\right) = Inf\left(a_{i_0}^k \mid i \in \mathbb{N}\right)$
on glisse $Inf\left(a_{i_0}^k \mid i \in \mathbb{N}\right) \leqslant a_{i_0}^{k_0} \leqslant Sup\left(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\right)$
et tout est fini. »
Beh non. On ne peut pas dire ça. Ni l'écrire. Parce que une borne supérieure n'est pas un maximum. Elle n'est pas forcément atteinte.

Rappel : | La borne inférieure de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ est 0, mais aucun x ne réalise $e^x = 0$.
La borne supérieure de l'arctangente sur $\mathbb{R}$ est $\pi/2$, mais aucun x ne réalise $Arctan(x) = \pi/2$.

Mais une borne supérieure s'atteint presque, à εprès. Et ce, pour tout ε, aussi petit soit il.
On va donc avoir des « égalités à ε près », et à la fin, on verra quoi faire de ce ε.

Idée classique : | Idée à retenir : un réel qui est plus petit que tout εstrictement positif est forcément négatif ou nul.
On s'en convainc par l'absurde.

Posons $I = Inf\left(Sup\left(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\right) \middle| k \in \mathbb{N}\right)$ et $S = Sup\left(Inf\left(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \middle| i \in \mathbb{N}\right)$.
On se donne donc εstrictement positif.
Il existe un k_0 vérifiant $I \leqslant Sup\left(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\right) \leqslant I + \varepsilon$ (car $I + \varepsilon$ n'est plus un minorant).
Il existe un i_0 vérifiant $S \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant S - \varepsilon$ (un élément de l'ensemble au moins s'est glissé entre S et $S - \varepsilon$).

Maintenant que deux indices sont fixés, on peut comparer $a_{i_0}^{k_0} \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right)$
et $a_{i_0}^{k_0} \leqslant Sup\left(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\right)$
Par transitivité, on a $Sup\left(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant a_{i_0}^{k_0} \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right)$.
On efface celui du milieu qui a tenu son rôle : $Sup\left(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right)$.

Peut on enchaîner agréablement avec $I \leqslant Sup\left(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\right) \leqslant I + \varepsilon$ et $S \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant S - \varepsilon$?
Pas tant que ça [10]. Il reste des ε : $I + \varepsilon \geqslant Sup\left(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant Inf\left(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\right) \geqslant S - \varepsilon$.
Toutefois, en effaçant le milieu, on a $I + \varepsilon \geqslant S - \varepsilon$.

Et ce, pour tout ε.
l'idée naturelle (mais pas tout à fait exacte) est de dire « on fait tendre ε(strictement positif, mais quelconque) vers 0, il reste $I \geqslant S$, ce qui était notre objectif.

La bonne idée est de séparer : $2.\varepsilon \geqslant S - I$.
Le réel $S - I$ est plus petit que tout nombre strictement positif. Il est donc négatif ou nul : $S - I \leqslant 0$, et donc enfin

10. sauf si on triche et enchaîne mal les inégalités, juste pour pouvoir conclure, mais ceci est un corrigé, pas une copie d'élève qui veut à tout prix conclure même si rien n'est logique

$S \leqslant I$.

On peut aussi le jouer par l'absurde.
Si on n'avait pas $S \leqslant I$, on aurait $S > I$ et $S - I > 0$.
Il suffit alors de prendre $\varepsilon = \dfrac{S-I}{3}$ (strictement positif) dans la démonstration précédente, pour aboutir à une contradiction.

◁39▷ Un réel α est pétillant si pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'entier $[\alpha^{(2^n)}] + 2$ est un carré parfait.
Montrez qu'aucun entier α ne pétille.
Montrez que aucun réel de $[0,\ 1]$ ne pétille.
Montrez que si α pétille, alors α^2 pétille aussi

k est un entier naturel non nul. On définit la suite u par $u_1 = (1+k)^2$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. MOntrez que (u_n) est croissante, plus grand que 3.
Pour tout n, on pose $a_n = \sqrt[2^n]{u_n - 2}$ et $b_n = \sqrt[2^n]{u_n - 1}$. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones.
Déduisez que (a_n) converge vers un réel αde $[k,\ k+1[$.
Montrez pour tout n : $(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$ et déduisez que α est pétillant.

Aucun entier α ne pétille.
Si α est entier, alors α^{2^n} est entier. Et c'est même un carré parfait (celui de $\alpha^{2^{n-1}}$).
Et si on ajoute 2 à un carré, on n'a plus un carré.

En effet, si c^2 est un carré, $c^2 + 2$ est strictement entre c^2 et $c^2 + 2.c + 1$, deux carrés consécutifs.

Aucun réel de $[0,\ 1]$ ne pétille.
Si αest entre 0 et 1 alors α^{2^n} y est aussi, et sa partie entière vaut 0 (ou 1 dans le cas $\alpha = 1$). Et $0 + 2$ n'est pas un carré.

$1 + 2$ non plus, mais de toutes façons le cas des entiers a déjà été traité, $\alpha = 1$ ne pétille pas.

Si α pétille, alors α^2 pétille aussi
En effet, si chaque $[\alpha^{2^n} + 2]$ est un carré, alors chaque $[\alpha^{2^{n+1}} + 2]$ l'est aussi (variable muette).
Et il s'agit ici de $[(\alpha^2)^{2^n} + 2]$. Comme ceci est vrai pour tout n, α^2 est à son tour pétillant.

Corolaire : en mettant en boucle, si il y a un nombre pétillant, son carré, le carré de son carré et ainsi de suite sont aussi pétillants.
Il y a alors une infinité de nombres pétillants.
Donc : soit aucun, soit une infinité.

$u_1 = (1+k)^2$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Par récurrence immédiate, chaque u_n est un entier.
u_1 est plus grand que 3 par choix de k.
Si pour un n donné $u_n$est plus grand que 3 alors $u_n - 1$ est plus grand que 2 et son carré est plus grand que 4. Donc plus grand que 3.
L'hérédité est établie.

Ensuite, on calcule $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 - 3.u_n + 1 = u_n.(u_n - 3) + 1$.
Comme $u_n$est plus grand que 3, le produit $u_n.(u_n - 3)$ est positif, et la différence $u_{n+1} - u_n$l'est aussi.
La suite est croissante.

$a_n = \sqrt[2^n]{u_n - 2}$ et $b_n = \sqrt[2^n]{u_n - 1}$ existent. Et par construction, on a $a_n \leqslant b_n$.

On se donne n et on doit comparer $a_n = \sqrt[2^n]{u_n - 2}$ et $a_{n+1} = \sqrt[2^{n+1}]{u_{n+1} - 2}$. Comme ce sont des réels positifs, comparons leurs puissances avec le même exposant : 2^{n+1}

$$(a_n)^{2^{n+1}} = \left((u_n - 2)^{1/2^n}\right)^{2^{n+1}} = (u_n - 2)^{2^{n+1}/2^n} = (u_n - 2)^2$$

$$a_{n+1} = \left(\sqrt[2^{n+1}]{u_{n+1} - 2}\right)^{2^{n+1}} = u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 - 2$$

On calcule donc une différence :

$$(a_{n+1})^{2^{n+1}} - (a_n)^{2^{n+1}} = (u_n - 1)^2 - 2 - (u_n - 2)^2 = (u_n)^2 - 2.u_n + 1 - 2 - (u_n)^2 + 4.u_n - 4$$

On simplifie et il reste $2.u_n - 3$. C'est positif. La suite (a_n) est croissante.

On mène le même type de calculs pour (b_n) :

$$(b_{n+1})^{2^{n+1}} - (b_n)^{2^{n+1}} = (u_n - 1)^2 - 1 - (u_n - 1)^2 = (u_n)^2 - 2.u_n + 1 - 2 - (u_n)^2 + 2.u_n - 1$$

Cette fois, la différence est négative. la suite (b_n) décroit.

Grand classique :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

La suite (a_n) est croissante majorée (par b_1), elle converge.
La suite (b_n) est décroissante minorée (par a_1), elle converge.

En notant α la limite de la suite (a_n) et β la limite de la suite (b_n) (rien ne les force à ce stade à être égales), on a par passage à la limite dans

$$a_n \leqslant a_{n+p} \leqslant b_{n+p} \leqslant b_n$$

on a $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$ (oui, c'est p qui est parti à l'infini).

L'encadrement large au possible $a_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_1$ permet de cerner α entre b et $b+1$.

Pour tout n, on avait :

$$a_n < \alpha < b_n$$

On passe à la puissance 2^n (croissance)

$$(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$$

On revient aux définition

$$(u_n - 2) < (\alpha)^{2^n} < (u_n - 1)$$

Comme $u_n - 1$ est un entier, on déduit $[\alpha^{2^n}] = u_n - 2$.
On ajoute 2 : $[\alpha^{2^n}] + 2 = u_n$.
Mais u_n est le carré de $u_{n-1} - 1$ (construction de la suite).
$[\alpha^{2^n}] + 2$ est un carré. Pour tout n. C'est donc que notre nombre est pétillant.

Il y a donc au moins un entier pétillant dans chaque intervalle$[k,\ k+1]$ et on a un moyen de le « construire ».

Avec des guillemets car c'est la limite d'une suite.

On peut, pour la plaisir même écrire un script Python.

Je trouve ainsi que 4.896849955310805 doit être pétillant.
Et aux erreurs d'arrondis près, les nombres suivants sont des carrés parfaits

[25, 576, 330625, 109312229377, 11949163490932621836290, 142782508133037097454211720301427084257918978]

Source : concours général 2023.

◁40▷ Soit (a_n) une suite croissante admettant une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ décroissante. Montrez que (a_n) est constante à partir d'un certain rang.

La suite (a_n) est croissante. La sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ est donc aussi croissante, par extraction.
Mais comme on la suppose aussi décroissante, elle est donc constante.
Notons C la valeur commune de tous les $c_{\varphi(n)}$.
L'objectif est alors de montrer que tous les a_k sont égaux à C à partir d'un certain rang. Quel rang ? Disons $\varphi(0)$.

On se donne un entier k quelconque plus grand que $\varphi(0)$. On l'encadre : $\varphi(0) \leqslant k \leqslant \varphi(k)$.
Mais par croissance, on a donc $C = a_{\varphi(0)} \leqslant a_k \leqslant a_{\varphi(k)} = C$.
Par antisymétrie de l'ordre : $a_k = C$.

◁ 41 ▷ Montrez que pour tout a, $\displaystyle\int_0^a \frac{Atan(a.t)}{t}.dt$ existe (on la note $F(a)$).
Montrez : $F'(a) = 2.\dfrac{Arctan(a^2)}{a}$ *(si si, il y a bien un 2, et l'astuce constera à changer de variable pour qu'il n'y ait plus de a dans la fonction intégrée, juste dans les bornes).*

Qu'est ce qui pourrait empêcher cette intégrale d'exister. Je sais, pour vous, tout existe, du moment que vous l'écrivez. Et qu'il n'y a pas un dénominateur nul.
Tiens, et là justement, le dénominateur s'annule en 0. Et 0 est dans notre intervalle d'étude (juste au bord, mais il y est).
Toutefois, l'application $x \longmapsto \dfrac{Arctan(a.x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur a (équivalents).
On a juste l'intégrale d'une application continue sur un segment, elle existe.

L'idée trop naïve est de dériver une intégrale fonction de la borne supérieure comme $a \longmapsto \displaystyle\int_0^a f(t).dt$. Le cours nous dit que si f est continue, on obtient $f(a)$.

Le con lui, nous dit $f(a) - f(0)$ car il n'a rien compris.

Et ce résultat se justifie en écrivant $\displaystyle\int_0^a f(t).dt = F(a) - F(0)$ puis en dérivant.

Mais ici, l'application sous le signe somme dépend de a. On a donc une forme

$$\int_0^a f_a(t).dt = F_a(a) - F_a(0).$$

Et il devient plus délicat de dériver.

Certains vont aller chercher des gros théorèmes de seconde année avec

$$\frac{d}{da}\Big(\int_0^a f_a(t).dt\Big) = F_a(a) + \int_0^a \frac{\partial}{\partial a}\Big(f_a(t)\Big).dt$$

C'est bien d'avoir des lectures saines.

Mais ici, il y a plus simple, et toujours pratique : un petit changement de variable pour « sortir a ».

$$\int_{t=0}^a \frac{Atan(a.t)}{t}.dt = \int_{u=0}^{u=a^2} \frac{Arctan(u)}{u/a}.\frac{du}{a} = \int_{u=0}^{u=a^2} \frac{Arctan(u)}{u}.du$$

On dérive maintenant une composée : $\begin{array}{ccccc} u & \longrightarrow & a^2 & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^{a^2} f(t).dt \\ & 2.a & & f(a^2) & \end{array}$.

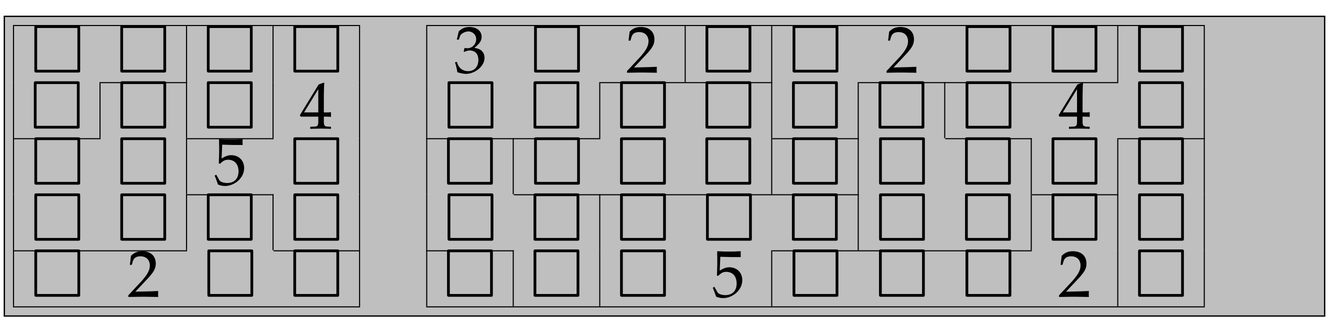
On trouve finalement $2.a.\dfrac{Arctan(a^2)}{a^2}$ c'est à dire effectivement $2.\dfrac{Arctan(a^2)}{a}$

Et tout ça, sans avoir calculé de primitive pour la fonction sous le signe somme, une fois de plus.

Encore un exercice sans difficulté majeure (je n'ai pas dit sans difficulté), mais qui permet de voir si vous avez bien compris, ou si vous manipulez des formules sans voir ce qu'il y a derrière. Un exercice type de Sup.

◁ 42 ▷ Les A_k sont des parties non vides incluses dans $[0,\ 1]$ *(k varie dans un ensemble d'indexation I)*. On note alors a_k la borne supérieure de chaque A_k. Montrez que $\bigcup_{k\in I} A_k$ est encore une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Qui est sa borne supérieure ?

A faire.



◃43▹

33	+		+		=	44
+	■	×	■	×	■	■
	×		+		=	47
−	■	+	■	+	■	■
	+	4	×		=	31
=	■	=	■	=	■	■
35	■	44	■	12	■	■

40	−		+		=	43
+	■	×	■	+	■	■
	+		−	6	=	11
−	■	+	■	×	■	■
	×		−		=	5
=	■	=	■	=	■	■
45	■	19	■	47	■	■

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

◃44▹

Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale. Déduisez qu'elle est toujours diagonalisable.
Construisez une matrice complexe de taille 2 non diagonalisable (choisissez la nilpotente, vérifiant $S^2 = 0_2 \neq S$).

On prend M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on calcule sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique et même le discriminant de celui ci.

$a+c$	$a.c-b^2$	$X^2-(a+c).X+(a.c-b^2)$	$\Delta=(a+c)^2-4.(a.c-b^2)=(a-c)^2+4.b^2$

Le discriminant est toujours positif, on a deux valeurs propres réelles (éventuellement double).

Si a est différent de c ou b non nul, alors Δ est strictement positif. On a alors deux valeurs propres distinctes :

$$\lambda_+ = \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$$
$$\lambda_- = \frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$$

Chaque système $M.X = \lambda_{\pm}.X$ est dégénéré et admet des solutions non nulles.
On peut donc créer une matrice de taille 2 sur 2 formée des deux colonnes.
La matrice de passage ainsi construite est inversible, et on la note P.

Si a est égal à c et b nul, on a deux fois la même valeur propre. La matrice risque de ne pas être diagonalisable. Mais en fait elle est déjà diagonale. Donc diagonalisable, via $P = I_2$.

De taille 2 non diagonalisable, c'est facile : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $Tr(D) = Tr(M)$ et $\det(D) = \det(M)$. Ceci forcerait $a = b0$.
Mais on ne pourrait trouver P inversible vérifiant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$.

Mais si on exige « symétrique » ? $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}}$ pour les mêmes raisons.

Elle devrait figurer dans tous les livres pour les concours.
Vous aurez en effet l'an prochain un théorème : « toute matrice réelle symétrique se diagonalise. »
Et trop souvent on entend les élèves se contenter de dire
« tout matrice symétrique se diagonalise ».
Trouvez l'erreur.

◃45▹

♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A *(valeurs propres ?)*.
Donnez la troisième valeur propre, et trouvez un vecteur propre associé.
Diagonalisez A. Diagonalisez A^2. Diagonalisez A^{-1}.
Diagonalisez A^T.

Pour « vecteur propre », il suffit de montrer que U et $A.U$ sont colinéaires.
Et le coefficient λ dans $A.U = \lambda.U$ sera la valeur propre associée.

Ici : $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut 3

$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut -4

Il est à noter que la valeur propre a le droit d'être nulle. C'est au vecteur qu'on interdit la chose. Pour qu'on puisse le mettre en colonne de la matrice P inversible.
λ sera sur la diagonale de D, et aura le droit d'être nulle.

Pour la troisième valeur propre, soyons matheux, et varions les points de vue.

Quand je dis soyons matheux, c'est évitions le truc « j'ai appris par cœur racines du polynôme caractéristique, donc je calcule celui ci, j'en cherche les trois racines... ». En étant déjà un peu plus intelligent, on se dit qu'on en connaît déjà deux racines, non ?

Mais le plus simple est de dire que les trois valeurs propres formeront la diagonale de D.
Et que D aura même trace que M.
La somme des trois valeurs propres vaut $8 + 3 - 10$.
deux valent déjà 3 et -4.
La troisième vaut donc 2.

Ensuite, on cherche U vérifiant $M.U = 2.U$.
Là, c'est juste un système à résoudre, dont on sait qu'il a des solutions non triviales.

$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On met les valeurs propres dans l'ordre qu'on veut dans D, et on complète les colonnes de D avec les vecteurs propres trouvés, dans l'ordre des valeurs propres :

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Pour diagonaliser A^2, on ne calcule pas A^2, on réfléchit.
On a prouvé $AP.D.P^{-1}$ et on déduit $A^2 = P.D^2.P^{-1}$.
D^2 est diagonale de termes diagonaux 3^2, $(-4)^2$ et 2^2.
Et la matrice de passage est la même.

D'ailleurs, les vecteurs propres sont les mêmes :
$M.U = \lambda.U$ entraîne $M^2.U = M.(M.U) = M.(\lambda.U) = \lambda.M.U = \lambda^2.U$.

Plus généralement, A^n a pour matrice diagonale D^n et pour matrice de passage P.

L'exposant peut même être -1 : $M^{-1} = (P.D.P^{-1}) = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$.
C'est bien sûr D^{-1} de valeurs propres $\dfrac{1}{\lambda_i}$ qui sert.
Et surtout, c'est la matrice matrice de passage P.
Les vecteurs colonne n'ont pas changé. $M.U = \lambda.U$ donne $M^{-1}.U = \dfrac{1}{\lambda}.U$.

En revanche, pour M^T on a cette fois $M^T = ()^T.D.P^T$ car$D^T = D$.
On garde les mêmes valeurs propres. Mais les vecteurs propres ont changé, et sont peut clairs : les lignes de P^{-1}...
Pourquoi pas.

◃46▹ Complétez et diagonalisez $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour que ses valeurs propres soient 3 et -5 *(s'il y a plusieurs solutions, traitez les toutes)*.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable, même sur $\mathbb{C}$.

Pour que $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ait pour spectre $\{-3,\ 5\}$, il faut qu'on la relie à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec qui elle devra partager trace et déterminant.

On impose donc

trace	déterminant
$a+b=-3+5=2$	$a.b-7=(-3).5=-15$

les deux réels a et b sont les deux racines de $X^2-2.X-8=0$.
On trouve deux matrices qu'on va d'ailleurs diagonaliser en la même matrice D qu'on connaît déjà : $D=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
$D=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/7 & 1 \end{pmatrix}$ ou même $P=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1/7 \end{pmatrix}$ ou même $P=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comment faire pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Qu'elle ne puisse pas être semblable à une matrice diagonale à coefficients réels ?
Imposons que son polynôme caractéristique ait un discriminant négatif :
$\begin{pmatrix} a & 7 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2-(a+b).X+(a.b-7)$, de discriminant $(a+b)^2-4.a.b+28$, celui ci vaut $(a-b)^2+28$, il est toujours positif.
On a donc toujours au moins une matrice D et on résoudra un petit système bien lourd (mais résoluble).
La matrice $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ est toujours diagonalisable.

Et sur $\mathbb{C}$? On va se dire que c'est encore pire. L'équation du second degré a toujours des racines !
Mais si elle n'en a qu'une ?

Je m'explique : si on a une valeur propre double λ, il y a un problème ; la matrice devrait être semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, or seule $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
On va donc ici annuler le discriminant $a-b=i.\sqrt{28}$: par exemple $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ne se diagonalise pas :

trace	déterminant	polynôme	spectre	D	P
$i.2.\sqrt{7}$	-7	$X^2-2.i.\sqrt{28}-7$	$\{i.\sqrt{7}\}$ en double	$\begin{pmatrix} i.\sqrt{7} & 0 \\ 0 & i.\sqrt{7} \end{pmatrix}$	jamais inversible

Toutes les matrices P trouvées ont leurs deux colonnes égales ou proportionnelles.

◃47▹ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres (valeur propre ?). Donnez un dernier vecteur propre, formant une base de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ avec des trois autres (on supposera $a+b+c+d$ non nul).

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

c'est bien une matrice carrée.
Le déterminant de $M-X.I_4$ donne $X^4-(a+b+c+d).X^3$ si on fait le calcul.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(a+b+c+d)$$

C'est une formule du type $M.U = \lambda.U$ avec $\lambda = a+b+c+d$ (la valeur propre)

et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ (le vecteur propre, non nul)

De même $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(0).$

On a un vecteur propre (non nul) et c'est la valeur propre qui est nulle *(ça c'est autorisé)*.

Remarque :	*Un vecteur propre est non nul, sinon $M.0_n = \lambda.0_n$ est sans intérêt.* *La valeur propre λ associée au vecteur propre a le droit d'être nulle.* *Et d'ailleurs, le cas « il y a une valeur propre nulle » est le cas où on peut avoir à la fois* *M non inversible* *M diagonalisable* *Pourquoi confondez vous inversibilité et diagonalisabilité.* *Inversibilité, c'est facile, on calcule un déterminant.* *Diagonalisabilité nécessite de trouver D et P, c'est plus « chaud ».*

On écrit nos couples

valeur propre	$a+b+c+d$	0	0	0
vecteur propre	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On en déduit

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Et si ! D est diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ si vraiment vous n'avez pas les trous en face de yeux.

◃48▹ ♡ Montrez que M et M^T ont le même spectre. (racines de $\det(M - X.I_n)$).

Normal, elles ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes racines pour ce polynôme.
L'un est $\det(M - \lambda.I_n)$ et l'autre $\det({}^tM - \lambda.{}^tI_n)$.
Et une matrice a le même déterminant que sa transposée.

En revanche, on ne sait pas passer des vecteurs propres de M à ceux de ${}^tM$.

◃49▹ ♡ On pose $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice A vérifiant $A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$. Calculez son spectre *(dans $\mathbb{C}$ si nécessaire)*.

En posant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on trouve $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} b.z - c.y \\ c.x - a.z \\ a.y - b.x \end{pmatrix}$

La matrice qui transforme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} & -c..y & +b.z \\ c.x & & -a.z \\ -b.x & +a.y & \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

(et d'avoir écrit le vecteur sous une forme un peu intelligente et aérée a simplifié le travail !).

On écrit le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix}$.

On le calcule (soit ainsi, soit par trace, détermina,t somme des mineurs 2 sur 2) :
$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2).\lambda$

Une racine est 0 (de vecteur propre $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, devinez vous pourquoi ?)
et les deux autres sont $i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $-i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (complexes conjuguées, c'est un peu normal).