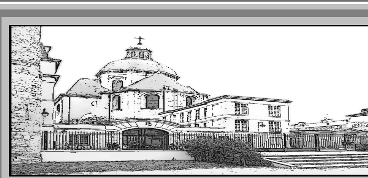
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 17 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

TD21

◁0▷ Un réel α est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers α. Montrez que tout point de A est adhérent à A. Qui sont les points adhérents à $\mathbb{Z}$?
Montrez que tout points adhérent à A est adhérent à $A \cup B$. Montrez que tout point adhérent à $A \cup B$ est adhérent à A ou adhérent à B (d'une suite (c_n), *ne gardez soit que les points de A ou soit que les points de B).*
Montrez par un contre-exemple que l'on peut être adhérent à A et à B sans être adhérent à $A \cap B$.

Soit a un point de A. Alors la suite constante égale à a converge vers a.
a est adhérent à A.

La réciproque est fausse. 0 est adhérent à $]0,\ +\infty[$ mais n'est pas dans $]0,\ +\infty[$.

Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont adhérents à $\mathbb{Z}$ comme on vient de le dire.
On va montrer qu'il n'y a qu'eux. Soit en effet un élément a dans l'adhérence de $\mathbb{Z}$. Il existe une suite (α_n) d'entiers qui converge vers a.
Mais si une suite d'entiers converge, elle est constante à partir d'un certain rang (écrire $|\alpha_p - \alpha_q| \leqslant |\alpha_p - a| + |a - \alpha_q| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un rang $N_{\varepsilon/2}$).
Et étant constante, sa limite est égale à la valeur en question. On a donc $a = \alpha_{N_{\varepsilon/2}} \in \mathbb{Z}$. a est entier.

Soit a un élément adhérent à A. Il existe une suite (α_n) de points de A qui converge vers a. Mais c'est aussi une suite de points de $A \cup B$. Notre élément a est adhérent à $A \cup B$.

Soit a adhérent à $A \cup B$. Il existe une suite d'éléments (x_n) de $A \cup B$ qui converge vers a.

> Il n'y a aucune raison qu'ils soient tous dans A ou tous dans B (exemple 0 est adhérent à $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ en utilisant la suite $((-2)^{-n})$ ou si vous préférez $\left(\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)$., mais cette suite sautille sans arrêt de A à B.

Mais une suite est faite d'une infinité de termes. C'est donc qu'il y en a au moins une infinité dans A ou une infinité dans B.

> On note $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\}$ et $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B\}$. Par construction $\mathbb{N}_A \cup \mathbb{N}_B = \mathbb{N}$ et il est impossible que les deux ensembles soient de cardinal fini.

Supposons que justement $\mathbb{N}_A$ est infini. On en liste les éléments par ordre croissant $\mathbb{N}_A = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, et on a une sous-suite de la suite initiale $(x_{\varphi(n)})$. Elle converge vers a et tous ses éléments sont dans A. a est donc adhérent à A.

On revient avec 0 adhérent à $]-\infty,\ 0[$ (suite $(-1/n)$) et adhérent à $]0,\ +\infty[$ (suite $(1/n)$).
Mais comment pourrait il être adhérent à leur intersection. Allez donc me construire une suite de $]-\infty,\ 0[\cap]0,\ +\infty[$!

◁1▷

On rappelle les définitions :

$\mathring{A}$	intérieur de A	$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0,\ [a-\alpha,\ a+\alpha] \subset A)$
$\overline{A}$	adhérence de A	$c \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0,\ [c-\alpha,\ c+\alpha] \cap A \neq \emptyset$

Complétez

A	$]0,\ 1]$	$\mathbb{Q}$	$([0,\ 1] \cap \mathbb{Q} \cup ([1,\ 2] \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}))$	$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{A}$	$]0,\ 1[$	$\emptyset$		$]0,\ 1[$
$\overline{A}$	$[0,\ 1]$	$\mathbb{R} =]-\infty,\ +\infty[$		$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{\overline{A}}$	$]0,\ 1[$	$\mathbb{R}$		$]0,\ 1[$
$\overline{\mathring{A}}$	$[0,\ 1]$	$\emptyset$		$[0,\ 1]$
$\overline{A} - \mathring{A}$	$\{0,\ 1\}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{Z}$

Trouvez un ensemble pour lequel les six lignes sont toutes distinctes.

Pourquoi est ce que je ne demande rien sur $\overline{\overline{A}}$ ni sur $\mathring{\mathring{A}}$?

Montrez que le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A.
Trouvez une phrase avec complémentaire de l'adhérence.

Lesquelles sont vraies

l'adhérence	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'adhérence	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'intérieur	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B
l'intérieur	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B

◁2▷

Un peu de topologie, pour qui veut s'amuser à regarder les étoiles.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On définit intérieur et adhérence (notées aussi $\dot{A}$ et $\overline{A}$) :

$Int(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\subset A\}$	$Adh(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\cap A \neq \emptyset\}$

Montrez : $Int(A) \subset A \subset Adh(A)$.
Montrez qu'un réel a est dans $Adh(A)$ si et seulement si il est limite d'au moins une suite de points de A.
Complétez *(et expliquez pourquoi la colonne $*$ est impossible)* :

A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	$[0,\ 1[$	$\mathbb{Z} \cup]3/2,\ 5/2[$		*	
$Int(A)$						$]0,\ 1[$	$[0,\ 1]$	
$Adh(A)$						$[0,\ 2]$	$[0,\ 1]$	

Montrez $In(Int(A)) = Int(A)$ et $Adh(Adh(A)) = Adh(A)$.
Montrez : $Int(A^c) = (Adh(A))^c$ et $Adh(A^c) = (Int(A))^c$.
Montrez : $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$. Montrez $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, et donnez un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

◁3▷

♡ On dit que α est une **valeur d'adhérence** de la suite u si il existe une sous-suite de u qui converge vers α.
1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.
2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.
3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.
4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.
5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v, alors $\alpha + \beta$ est valeur d'adhérence de $u + v$. Montrez qu'il a tort *(contre-exemple universel ?)*.
6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ alors elle est valeur d'adhérence de (u_n).
♣ Peut on montrer que si α est valeur d'adhérence de (u_n) alors elle est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ ou de $(u_{2.n+1})$?
Montrez que 0 et 1 sont valeurs d'adhérence de $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$.
♠ Montrez que la suite $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$ a une infinité de valeurs d'adhérences.

1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.
Si la suite converge, toutes ses sous-suites convergent aussi, mais vers la même limite.
Les seules limites de sous-suites possibles sont donc la limite λ.

2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.
Prenons une suite périodique de période 3. Par exemple $\left(\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)\right)$.
Chacun des trois réels $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12},\right)\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$ est limite d'au moins une sous-suite $((u_{3.n}),\ (u_{3.n+1})$ et $(u_{3.n+2}))$.
Aucun autre réel ne peut être valeur d'adhérence.

En effet, si une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel α, alors au moins un des trois ensembles suivants est infini : $\{n \mid \varphi(n) = 0[3]\}$, $\{n \mid \varphi(n) = 1[3]\}$ et $\{n \mid \varphi(n) = 2[3]\}$. Si c'est le premier (sans perte de généralité), on en indexe les éléments par ordre croissante, et la sous-sous-suites $(u_{\varphi(\phi(n))})$ est constante égale à $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12},\right)$. La seule valeur possible pour α est donc $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12},\right)$ (dans le cas « congru à 0, je vous laisse compléter dans les autres cas).

3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.
La suite (n) diverge vers $+\infty$. Toutes ses sous-suites divergent donc aussi.
Aucun réel ne peut donc être limite d'une sous-suite.

Abusivement, direz vous que l'infini est sa seule valeur d'adhérence ?

4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.
Si la suite est bornée (disons par M), alors toutes ses sous-suites sont bornées.
Si une certains sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers une valeur d'adhérence λ, alors par passage à la limite dans $\forall n,\ |u_{\varphi(n)}| \leqslant M$, on obtient $|\lambda| \leqslant M$.

De plus, si la suite est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'il y a au moins une sous-suite convergente. C'est à dire une valeur d'adhérence.

5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v, alors $\alpha + \beta$ est valeur d'adhérence de $u + v$. Montrez qu'il a tort *(contre-exemple universel ?)*.
Tiens : ($a_n = (-1)^n$ pour tout n et $b_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n.
Les deux valeurs d'adhérence de (a_n) sont -1 et 1.
Pareil pour (b_n).
Mais $(a_n + b_n)$ a pour unique valeur d'adhérence 0 (elle est constante).
Et on n'y retrouve pas $1 + 1$.

Le problème vient de « une sous-suite de (a_n) qui converge vers α : $(a_{\varphi(n)})$ »
« une sous-suite de (b_n) qui converge vers β : $(b_{\phi(n)})$ ».
Pourquoi aurait on la même extraction ?

6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ alors elle est valeur d'adhérence de (u_n).
Si une sous-suite $(u_{2.\varphi(n)})$ converge vers un réel α, alors il suffit de la voir comme sous-suite de (a_n) pour que α soit valeur d'adhérence de (a_n).

On suppose qu'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel α (ce sera α la valeur d'adhérence de la grande suite).
Mais alors si on pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 0[2]\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1[2]\}$, on a $A \cup B = \mathbb{N}$.
Il est impossible que A et B soient de cardinal fini.
L'un au moins est infini.
Si c'est A, on en indexe les éléments par ordre croissant, et on dispose d'une suite de nombres de la forme u_{pair} qui converge vers α. C'est donc une valeur d'adhérence de $(u_{2.p})$.
Si c'est B, on en indexe les éléments par ordre croissant, et on dispose d'une suite de nombres de la forme u_{impair} qui converge vers α. C'est donc une valeur d'adhérence de $(u_{2.p+1})$.

Si on pose $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ comme indiqué (partie fractionnaire ou « derrière la virgule »), alors la sous-suite (u_{n^2}) est nulle et converge vers 0.
En revanche $(u_{n^2+2.n})$ converge vers 1.
Pour faire converger vers des réels de $[0,\ 1]$, on prend des (u_{n^2+truc}) et on ajuste *truc* (exercice trouvable sur le TD).

◃4▹

On rappelle la définition de A est un ouvert de $\mathbb{R}$: $\forall \alpha \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon] \subset A$.
Montrez que si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont ouverts.
Montrez que chaque $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ est ouvert. Montrez que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ n'est plus un ouvert.
Montrez que si chaque A_i est un ouvert, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est encore un ouvert.
Soit A un ouvert et (b_n) une suite à valeurs dans A^c (complémentaire). On suppose que (b_n) converge vers β. Montrez (par l'absurde) que β est aussi dans A^c.

$\boxed{H}$	$\forall \alpha \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon] \subset A$
$\boxed{H}$	$\forall \beta \in B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\beta - \varepsilon,\ \beta + \varepsilon] \subset B$
$\boxed{?}$	$\forall x \in A \cup B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cup B$ prenons x dans $A \cup B$ deux possibilités :x est dans A ou x est dans B • si x est dans A : $\exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \subset A \cup B$ • si x est dans B : $\exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset B \subset A \cup B$
$\boxed{?}$	$\forall x \in A \cap B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cap B$
	prenons x dans $A \cap B$ deux possibilités :x est dans A et x est dans B • puisque x est dans A : $\exists \varepsilon_1 > 0,\ [x - \varepsilon_1,\ x + \varepsilon_1] \subset A$ • puisque x est dans B : $\exists \varepsilon_2 > 0,\ [x - \varepsilon_2,\ x + \varepsilon_2] \subset B$ considérons $\varepsilon = Min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$: $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset [x - \varepsilon_1,\ x + \varepsilon_1] \subset A$ $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset [x - \varepsilon_2,\ x + \varepsilon_2] \subset B$ on reconnaît $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cap B$.

$]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ est un intervalle ouvert, il a intérêt à être ouvert.
Prenons x dans $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$. On a alors $-2^{-n} < x < 2^{-n}$.
On mesure $2^{-n} - x$ et $x + 2^{-n}$ *(distance au « bord du segment)*.
On prend le plus petit des deux : $Min(2^{-n} - x,\ x + 2^{-n})$. Il est strictement positif.
On le divise par 2, il est toujours strictement positif. On l'appelle ε.
On a alors $-2^{-n} < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 2^{-n}$. L'intervalle $]-x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[$ est inclus dans $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$.

Plus généralement, pour x dans $]a,\ b[$, prendre $\varepsilon = \dfrac{Min(a - x,\ x - b)}{2}$.

L'intersection généralisée se réduit à 0 : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[= \{0\}$.

Si tu m'écris $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[= 0$, *je te fais bouffer toutes les feuilles de papier millimétré des labos de physique.*

Ce n'est plus un ouvert.
0 est dedans, mais aucun intervalle $]0 - \varepsilon,\ 0 + \varepsilon[$ ne peut être inclus dans $\{0\}$.

Soient A_i des ouverts. On prend x dans la réunion. Il est donc dans l'un des A_i. Disons A_{i_0}.
Alors, comme A_{i_0}est ouvert, il existe un ε_{i_0}strictement positif vérifiant $]x - \varepsilon_{i_0},\ x + \varepsilon_{i_à}[\subset A_{i_0}$.
Mais alors, par définition de la réunion *(plus petit ensemble contenant tous les A_i)* : $]x - \varepsilon_{i_0},\ x + \varepsilon_{i_à}[\subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
C'est ce qu'on voulait.

A est un ouvert, chaque b_n est dans A^c. Et on suppose que la suite des (b_n) converge *(après tout, une suite croisée au hasard dans le cours de maths n'a aucune raison de converger, sauf dans le cours de maths de Terminale)*.

On note b la limite de la suite. Il faut montrer qu'elle n'est pas dans A.
Si elle était dans A, alors il existerait un ε vérifiant $]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset A$.
Mais on sait aussi qu'à partir d'un certain rang $N_{\varepsilon/2}$ (pour la tendre moitié cet ε là en particulier), on a $|b_n - b| \leqslant \varepsilon/2$.
Ce qui se traduit par $b_n \in]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset A$.
certains des b_n sont dans A, c'est contradictoire.
Dès lors, forcément, la limite b est dans A^c.

On peut résumer en disant que le complémentaire d'un ouvert est « stable par passage à la limite ».

Rappel :	Les inégalité strictes se conservent par passage à la limite. Les fermés comme $[a,\ b]$ sont stables par passage à la limite. Les inégalités strictes ne se conservent pas par passage à la limite. Les ouverts $]a,\ b[$ ne sont pas stables par passage à la limite.

◁5▷ ♠ On appelle section ouverte finissante toute partie A non vide de $\mathbb{Q}$ majorée vérifiant

$$\big(\forall a\in A,\ \exists b\in A,\ a<b\big)\ et\ \big(\forall a\in A,\ \forall c\in\mathbb{Q},\ c\leqslant a\Rightarrow c\in A\big)$$

Montrez que pour tout rationnel r, l'ensemble $]-\infty,\ r[$ est une coupure.
Montrez que $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\ ou\ x\leqslant 0\}$ est une section ouverte finissante.

Montrez que l'inclusion est une relation d'ordre sur les sections ouvertes finissantes.
Montrez que cet ordre est total.

Pour A et B sections, on définit $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$. Montrez que c'est une section ouverte finissante.
Montrez que cette addition est commutative et associative et que $\mathbb{Q}^{-*}$ en est le neutre.
Soit A une section ouverte finissante. On définit $A'=\{x\in\mathbb{Q}\mid \exists\alpha\in\mathbb{Q},\ \forall a\in A,\ x<\alpha\leqslant -a\}$. Montrez que A' est une section ouverte finissante.
Montrez : $A+A'=\mathbb{Q}^{-*}$.

On se donne une famille $(A_n)_{n\in I}$ de sections ouvertes finissantes toutes incluses dans une section ouverte finissante $\mathbb{A}$.
Montrez que $\bigcup_{n\in I}A_n$ est encore une section ouverte finissante, contenant toutes les A_n.
Montrez que toute section ouverte finissante contenant tous les A_n contient $\bigcup_{n\in I}A_n$.
L'ensemble des sections ouvertes finissantes est $\mathbb{R}$, et les questions au dessus montrent que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet un plus petit majorant.

A faire.

◁6▷ Montrez qu'une suite vérifiant : $\exists p,\ \forall n,\ a_n\leqslant a_p$ et $\exists q,\ \forall n,\ a_n\geqslant a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.
Montrez qu'une suite vérifiant $\exists p,\ \forall n,\ a_n\leqslant a_p$ et $\forall n,\ \exists q,\ a_n<a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.

Question que j'aurais pu poser en I.S.
Dans l'hypothèse $\exists p,\ \forall n,\ a_n\leqslant a_p$ et $\exists q,\ \forall n,\ a_n\geqslant a_p$, la suite est bornée par a_q et a_p.
Nos amis Bolzano et Weierstrass donnent une sous-suite qui converge.

Si la suite $\exists p,\ \forall n,\ a_n\leqslant a_p$ et $\forall n,\ \exists q,\ a_n<a_p$, alors elle est majorée par a_p. Mais rien ne dit qu'elle est minorée.
Simplement, pour tout a_n il y a au moins un a_q plus grand que lui.
C'est ce qui va permettre de construire une sous-suite croissante.
Et cette sous-suite croissante majorée va converger.

Pour n égal à 0, il existe p_0 vérifiant $a_{p_0}>a_0$. On prend celui dont l'indice est le plus petit.
Pour n égal à p_0, il existe p_1 vérifiant $a_{p_1}>a_{p_0}$. on prend celui dont l'indice est le plus petit. Et il est forcément plus grand que p_0 d'après la ligne au dessus.
Pour n égal à p_1, on prend le premier indice p vérifiant $a_p>a_{p_1}$.
Et ainsi de suite.
C'est avec « le premier indice tel que » que l'on garantit que l'extraction est croissante.

◁7▷ ♡ Montrez que si la suite (u_n) converge, alors la suite $(\sin(u_n))$ converge aussi. Montrez qu'on n'a pas de réciproque.

Si (u_n) converge vers a alors $(\sin(u_n))$ converge vers $\sin(a)$.
Par continuité de l'application sinus.

H_a	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ n\geqslant N_\varepsilon\Rightarrow |u_n-a|\leqslant\varepsilon$
$\boxed{?}$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists S_\varepsilon,\ \forall n,\ n\geqslant S_\varepsilon\Rightarrow |\sin(u_n)-\sin(a)|\leqslant\varepsilon$

Il suffit de prendre $S_\varepsilon=N_\varepsilon$et de faire usage de $|\sin(b)-\sin(a)|\leqslant|b-a|$ pour tout couple $(a,\ b)$.

Pour l'absence de réciproque, la suite $((-1)^n.\pi)$ diverge.
Mais $(\sin((-1)^n.\pi))$ converge (vers 0).

I∼0) Déterminez la limite quand N tend vers l'infini de

$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$

Dans la liste proposée, plusieurs sont des produits télescopiques.

Je vous en traite un $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}=\frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N}n}=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$.

Et même deux $\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\frac{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\prod_{n=2}^{N}n}=\frac{(N+1)!/2}{N!}=\frac{N+1}{2}$.

Et aussi $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}=\frac{\prod_{n=2}^{N}(n+1).\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\left(\prod_{n=2}^{N}k\right)^2}=\frac{N+1}{2.N}$.

$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$
télescopique	télescopique	télescopique	nul	tous égaux
$\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N+1}{2.N}$	0	$\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$
0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{e}$

Pour la dernière, tous les termes sont égaux, on a donc juste à compter les termes. Et pour la limite, on passe par le logarithme $N.\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)=-\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x}$ avec $x=\frac{-1}{N}$ qui tend vers 0. La limite des taux d'accroissement est la dérivée du logarithme en 1 *(et c'est* 1*)*.

Étrange : *Si j'écris* $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0$, *cela vous choque-t-il ?*
Un produit est nul alors qu'aucun des facteurs ne l'est...
Mais ce n'est pas un produit, mais une limite de produits...

I∼1) Montrez pour tout t de $]0,\ 1[$: $t-\frac{t^2}{2}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$.

L'encadrement $t-\frac{t^2}{2}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$ s'obtient par • variation de fonctions $t\longmapsto t-\ln(1+t)$ et $t\longmapsto\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$
• formule de Taylor
et surtout pas par développement limité

Un développement limité est une histoire de limite en 0 de formes indéterminées, et jamais au grand jamais il ne peut donner le signe du reste ou des encadrements et inégalités, même dans vos rêves les plus fous [1].

Par tableau de variations :
• $t\longmapsto t-\ln(1+t)$ est décroissante puis croissante (dériver), nulle en 0, donc positive.
• $t\longmapsto\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$ est croissante, nulle en 0, donc positive après 0.

1. *sauf si vos rêves les plus fous sont des calculs approchés en physique, mais alors ce sont des cauchemars, non ?*

Avec formule de Taylor : • $\ln(1+t) = 0 + 1.t + \frac{t^2}{1}.\int_{u=0}^{u=1}(1-u).\frac{-1}{(1+t.u)^2}.du$ le reste est négatif
donc $\ln(1+t) \leqslant t$
• $\ln(1+t) = 0 + 1.t + -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2}.\int_{u=0}^{u=1}(1-u)^2.\frac{2}{(1+t.u)^3}.du$ ce reste est positif pour t positif
donc $\ln(1+t) \geqslant t - \frac{t^2}{2}$

I∼2) x est un réel dans $]0,\ 1[$, le produit $\prod_{n=1}^{N}\left(1+x^n\right)$ converge-t-il quand N tend vers l'infini ?

On regarde le logarithme du réel positif $\prod_{n=1}^{N}\left(1+x^n\right)$: c'est $\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n)$.
On majore avec la moitié de l'encadrement précédent et des formules usuelles
$\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n) \leqslant \sum_{n=1}^{N}x^n = \frac{x-x^{N+1}}{1-x} \leqslant \frac{x}{1-x}$
La suite $\left(\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n)\right)_N$ est croissante *(passage de N à $N+1$ en ajoutant un réel positif $\ln(1+x^{N+1})$)* et majorée *(par un réel, ne dépendant pas de N, c'est la moindre des choses)* elle converge donc.
Sa limite n'est pas explicitée ici, et la minoration ne sert à rien pour la conclusion.

Petit extrait quand même du rapport du jury :

• *Malgré l'utilisation de la calculatrice, on rencontre des erreurs de calculs ou, plus souvent, des incompréhensions sur la signification des calculs (par exemple $u_N \to_{N\to+\infty} 1$ qui se transforme en $u_N = 1$ ou l'oubli des termes en o lors des développements limités).*
• *Le respect le plus élémentaire pour l'infini semble être devenu une compétence optionnelle, implicitement réservée à la tête de classe ; seuls les meilleurs candidats se rendent compte que le produit infini n'est défini que comme limite et demande à être manipulé avec précaution.*
• *La longueur et la difficulté du sujet sont tempérées par la présence de nombreuses questions ne nécessitant aucun raisonnement ni aucune rédaction, permettant ainsi de masquer les difficultés, pourtant inquiétantes, d'expression et de compréhension des candidats.*
• *Le jury rappelle que penser et s'exprimer clairement, plus encore que calculer juste, sont deux qualités essentielles pour un ingénieur.*

Je ne peux qu'être d'accord avec eux sur tous ces points...

◃ 8 ▹

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

. Centrale PC .

II∼0) On note UP l'ensemble des suites réelles ultimement périodiques ($\exists R \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant R,\ a_{n+p} = a_n$). Montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$. Est il de dimension finie ?

Ma correction sera émaillée d'extraits du rapport du jury de Centrale-Supelec.
Je vous livre d'ailleurs tout de suite une première remarque de leur part :

Quelques remarques générales pour commencer :
notons de graves fautes de raisonnement dans les raisonnements par récurrence : « supposons qu'une propriété est vraie pour tout n et montrons-la pour n+1 », mauvaise initialisation de la récurrence lorsqu'il faut faire deux vérifications au départ.
l'incapacité à nier une assertion, par exemple « a est bornée ».
Signalons encore l'utilisation abusive de « il est clair que », « il est évident que », l'invocation d'un théorème du cours pour justifier une assertion sans citer le dit théorème ni vérifier que les hypothèses sont satisfaites, la facilité avec laquelle est signalée une erreur de texte lorsque le résultat obtenu n'est pas celui annoncé (jusqu'à trois erreurs dénoncées dans une même copie !).
Enfin, le vocabulaire est très souvent imprécis (confusion entre nombre et chiffre, entre bornée et majorée).

On va utiliser la notion de sous-espace vectoriel (en précisant de qui).

La suite nulle est ultimement périodique (rang 0 période 1).

Prenons deux suites ultimement périodiques (rangs R et R', périodes p et p'). On a alors

$\forall n \geqslant Max(R, R'),\ u_{n+q} = u_n$ en posant q le $p.p.c.m.$ de p et p'.

Rapport du jury : La définition d'un espace vectoriel n'est pas toujours connue. La recherche d'une période commune à deux suites ultimement périodiques n'apparaît pas toujours nécessaire. Il y a confusion entre cardinal et dimension d'un espace vectoriel.

L'espace des suites ultimement périodiques contient déjà celui des suites périodiques (avec $R = 0$). Et cet espace des suites périodiques est de dimension non finie. En effet, on peut y trouver de familles libres de suites aussi grandes que l'on veut.

On se donne N et on construit des suites de périodes 2, 3, 5, 7, 11 jusqu'au N^{ieme} nombre premier (astuce pour qu'elles forment une famille libre).

La k^{ieme} suite, associée au nombre p_k est définie par $n \longmapsto \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & n\ multiple\ de\ p_k \\ 0 & sinon & \end{array} \right|.$

Par exemple $(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1 \ldots)$ *pour l'entier premier* 5.

On notera v_{p_k} cette suite (de terme général $v_{p_k,n}$ il faut deux indices).

On montre la liberté de cette famille $(v_2,\ v_3,\ v_5, \ldots v_{p_N})$ en se donnant N réels et en supposant $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$ (suite nulle).

On veut montrer que les a_k sont tous nuls.

Pour comprendre :
$a_1.(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots) + a_2.(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0 \ldots) + a_3.(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 \ldots) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \ldots)$ *donne, rien qu'en regardant les termes d'indices* 2, 3 *et* 5 *:* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Regardons le terme d'indice $n = 2$ dans $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $a_1.1 + 0$. Donc a_1 est nul.

Regardons le terme d'indice $n = 3$ dans $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $0 + a_2.1 + 0$. Donc a_2 est nul.

Regardons le terme d'indice $n = 5$ dans $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $0 + a_3.1 + 0$. Donc a_3 est nul.

C'est en regardant le terme d'indice $n = p_k$ dans $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$ qu'on trouve $a_k = 0$.

Ayant une famille libre aussi grande qu'on veut, l'espace est de dimension infinie.

Rapport du jury : La justification de la dimension infinie est, sauf dans quelques très bonnes copies, très imprécise.

III∼0) **Montrez que toute suite ultimement périodique (a_n) est bornée.**

Soit une suite (a_n) périodique de période p à partir du rang R.
Elle ne prend alors qu'un nombre fini de valeurs.

On peut même en donner la liste a_0 *jusqu'à* a_{R-1} *puis les valeurs de* a_R *à* a_{R+p-1} *reprises ensuite de manière périodique.*
On peut majorer la suite en valeur absolue par $Max(|a_0|, |a_1 \ldots |a_{R+p-1}|)$.

III∼1) **Déduisez que si (a_n) est ultimement périodique et x dans $[0,\ 1[$ alors la famille $(a_n.x^n)$ est sommable, et montrez que sa somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k$ est une fraction rationnelle en x.**

On note K un majorant de la suite ultimement périodique (en l'occurrence $K = Max(|a_0|, |a_1 \ldots |a_{R+p-1}|)$).
Pour montrer que la famille $(a_n.x^n)$ (indexée par $\mathbb{N}$) est sommable, on va la majorer en valeur absolue par une famille sommable de référence : $|a_n.x^n| \leqslant K.x^n$.
Et la famille $(K.x^n)$ est sommable, il suffit de regarder les sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N} K.x^n = K.\frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \leqslant \frac{K}{1 - x}$$

Le majorant ne dépend plus que de x et pas de N.
La famille $(K.x^n)$ est sommable, et par majoration en valeur absolue, la famille $(a_n.x^n)$ l'est aussi.

On somme en séparant par paquets (familles sommables) :

• du rang 0 au rang $R-1$: $\sum_{n=0}^{R-1} a_n.x^n$: c'est un polynôme

• du rang R à l'infini en regroupant par période

$$\sum_{n=R}^{+\infty} a_n.x^n = \sum_{n=R}^{R+p-1}\Big(a_n.\sum_{k=0}^{+\infty} a^{n+k.p}\Big) = \sum_{n=R}^{R+p-1}\Big(a_n.x^n.\sum_{k=0}^{+\infty}(x^p)^k\Big) = \sum_{n=R}^{R+p-1}\Big(a_n.x^n.\frac{1}{1-x^p}\Big)$$

Cette fois, on a une fraction rationnelle.
La somme est une fraction rationnelle

$$\frac{\sum_{n=R}^{R+p-1} a_n.x^n}{1-x^p} + \sum_{n=0}^{R-1} a_n.x^n$$

Exemple : $a = (1, 2, 3, 4, -1, 5, 7, -1, 5, 7, -1, 5, 7, \dots)$ (rang 4 , période 3)
La somme cherchée vaut

$$1 + 2.x + 3.x^2 + 4.x^3 + \Big((-1+5.x+7.x^2).x^4 + (-1+5.x+7.x^2).x^7 + (-1+5.x+7.x^2).x^{10} + \dots\Big)$$

On regroupe :

$$1 + 2.x + 3.x^2 + 4.x^3 + (-1+5.x+7.x^2).x^4.(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) = 1 + 2.x + 3.x^2 + 4.x^3 + \frac{-x^4 + 5.x^5 + 7.x^6}{1-x^3}$$

à condition bien sûr que x reste entre 0 et 1.

IV∼0) On définit la suite de Fivebonacci : $FV_0 = FV_1 = 1$ et $FV_{n+2} = (FV_{n+1} + FV_n)\%5$. Calculez ses vingt premier termes, et montrez qu'elle est ultimement périodique (période ?).

Pour calculer les termes :

```
def Five(n) :
....L = [1, 1]
....for k in range(n-1) :
........new = (L[-2]+L[-1]) % 5
........L.append(new)
....return(L)
```

A la main :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$FV[n]$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1	0	1	1	2

Finit on par revoir les mêmes termes ?
Oui : $FV_{20} = FV_{21} = 1$, comme F_0 et F_1.
On redémarre avec le même germe.
La suite va se répéter. Proprement, on va montrer :

$$FV_{n+20} = FV_n$$

pour tout n par récurrence à double hérédité.

On initialise donc par notre recherche : $FV_{20} = FV_0$ et $FV_{21} = FV_1$.
On se donne n et on suppose pour ce n : $FV_{n+20} = FV_n$ et $FV_{n+21} = FV_{n+1}$.
On calcule $FV_{n+2+20} = FV_{n+1+20} + FV_{n+20}$ par définition, puis $FV_{n+2+20} = FV_{n+1} + FV_n$ par hypothèse, puis enfin $FV_{n+2+20} = FV_{n+2}$ par définition.

On notera qu'avoir $FV_7 = FV_0$ ne permettait pas de propager une périodicité de période 7.
On a besoin de récurrence à double hérédité.

La suite est non seulement ultimement périodique, mais même périodique.

IV∼1) Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} FV_k.x^k$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

Le calcul en regroupant les termes par lots de 20 donne

$$S(x) = \frac{1 + x + 2.x^2 + 3.x^3 + 3.x^5 + 3.x^6 + x^7 + 4.x^8 + 4.x^{10} + 4.x^{11} + 3.x^{12} + 2.x^{13} + 2.x^{15} + 2.x^{16} + 4.x^{17} + x^{18}}{1-x^{10}}$$

J'en viens à regretter d'avoir modifié l'énoncé qui travaillait sur la suite modulo 2.

Rapport du jury. Beaucoup d'étudiants reconnaissent la suite de Fibonacci mais obéissant à un réflexe taupinal, ils donnent la forme explicite du terme général avec des $(1+\sqrt{5})^n$, ce qui n'est guère utile pour étudier les congruences.

V∼0) On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$, $a_{2.n} = a_n$ et $a_{2.n+1} = -a_n$ pour tout n. Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 30}$.

Le script de construction donne $a_p = a_{p/2}$ si p pair (poser $p = 2.n$) et $a_p = -a_{(p-1)/2}$ si p impair (poser $p = 2.n+1$ et utiliser $a_{2.n+1} = -a_n$).

Voici les 31 premières valeurs
`[1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1]`

V∼1) Écrivez un script Python qui pour N donné retourne la liste $[a_0, \dots a_N]$.

```
def s(N) : #int -> list of int
....L = [1]
....for k in range(1, N+1) : #oui, range(n) c'est N termes, d'où N+1 au total de a0 à aN
........if k%2 == 0 : #test de parité
............L.append(L[k//2])
........else :
............L.append(-L[(k-1)//2])
....return(L)
```

V∼2) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$, la famille $(a_n.x^n)$ est sommable. On pose alors $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

Par construction, tous les termes de la suite existent (c'est peut être le plus délicat) et valent -1 ou 1.

La famille $(a_n.x^n)$ est dominée (en valeur absolue) par la famille (x^n), sommable (série géométrique de somme $\dfrac{1}{1-x}$).

La somme $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ existe pour tout x de $[0,\ 1[$.

V∼3) Montrez que $S(x^2)$ existe aussi et prouvez : $S(x) = (1-x).S(x^2)$.

Mais quand x est entre 0 et 1, x^2 y est aussi, et donc $S(x^2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.(x^2)^n$ existe aussi.

Multiplions par 1 et par x et soustrayons (toujours partir du membre le pus compliqué) :

$$S(x^2) - x.S(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2.n}.x^{2.n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2.n+1}.x^{2.n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p.x^p$$

en utilisant la définition de $a_{2.n}$et $a_{2.n+1}$ et en réunissant les termes de la famille sommable (avec $p = 2.n$ et $p = 2.n+1$ on forme une partition de $\mathbb{N}$).
On a bien $S(x) = (1-x).S(x^2)$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

V∼4) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$: $\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ est décroissante, minorée, et convergente, et montrez que sa limite est justement $S(x)$.

On se donne encore x dans $[0,\ 1[$ et on étudie $\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ en fonction de n.

Chaque $x^{(2^k)}$ reste entre 0 et 1. Chaque terme du produit $\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ est entre 0 et 1.

On a donc une suite à valeurs dans $[0,\ 1]$.

Pour passer de n à $n+1$, on multiplie le réel positif $\prod\limits_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})$ par $(1-x^{(2^{n+1})})$ (positif plus petit que 1) :

$$0 \leqslant \prod_{k=0}^{n+1}(1-x^{(2^k)}) = (1-x^{2^{n+1}}).\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)}) \leqslant \prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})$$

La suite est décroissante, positive (minorée par 0), elle converge.

Reste à voir que sa limite est $S(x)$. Ce qui est bien, c'est qu'on a

$$S(x) = (1-x).S(x^2) = (1-x).(1-x^2).S((x^2)^2) = (1-x).(1-x^2).(1-x^4).S(x^8)$$

$$\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)}) = (1-x).(1-x^2).(1-x^4)\dots(1-x^{2^n})$$

On fait tout en une fois. On montre par récurrence sur n : $S(x) = (1-x).(1-x^2)\dots(1-x^{2^n}).S(x^{2^{n+1}})$.
On fait tendre n vers l'infini (on sait que le produit infini converge).
Le réel $x^{2^{n+1}}$ converge vers 0 .
Par continuité, $S(x^{2^{n+1}})$ converge vers $S(0)$.
Et $S(0)$ vaut 1. On a donc $S(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k}).1$.

Au fait, la continuité de la somme infinie S n'est pas évidente.
D'ailleurs les correcteurs de Centrale s'en sont plaint.
Mais on peut s'en passer.

$$|S(t)-1| = \Big|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.t^n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|a_n.t^n\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

et par encadrement, $S(t)-1$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

V$\sim$5) Étudiez pour n donné $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{S(x)}{(1-x)^n}$.

n est un entier naturel fixé. On a écrit pour tout x de $[0,\ 1[$

$$S(x) = (1-x).(1-x^2)\dots(1-x^{2^n}).S(x^{2^{n+1}})$$

On divise par $(1-x)^n$:

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \frac{(1-x)}{1-x}.\frac{(1-x^2)}{1-x}.\frac{(1-x^4)}{1-x}\dots\frac{(1-x^{2^{n-1}})}{1-x}.(1-x^{2^n}).S(x^{2^n})$$

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = (1).(1+x).(1+x+x^2+x^3)\dots\Big(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} x^k\Big).(1-x^{2^n}).S(x^{2^n})$$

Chaque terme de la forme $\left(\frac{1-x^{2^k}}{1-x}\right)$ a une limite en 0.
Le terme $(1-x^{2^n})$ a une limite nulle en 0.
Le terme $S(x^{2^{n+1}})$ a une limite en 0.
Le produit tend vers 0 quand x tend vers 0.

V$\sim$6) Déduisez que a n'est pas ultimement périodique.

Il est temps de trouver une contradiction et un bel argument.
Si la suite (a_n) était ultimement périodique, alors la somme $S(x)$ serait une fraction rationnelle : $S(x) = Q(x) + \dfrac{P(x)}{1-x^T}$ avec T la période ultime.

Mais alors en cherchant la limite de

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \frac{Q(x)}{(1-x)^n} + \frac{P(x)}{(1-x)^n.(1-x^T)}$$

en 1, on ne peut plus avoir 0 (en tout cas pour n plus grand que $\deg(Q)+T$).

VI$\sim$0) On définit un opérateur : $f \longmapsto \phi(f) = \Big(x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt\Big)$ sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que ϕ est un endomorphisme de $(E,+,.)$ (ne vous trompez pas sur les étages).

Pour f donné, l'application $t \longmapsto t.f(t)$ existe, est continue. On peut l'intégrer sur tout segment et définir $\phi(f)(x)$

(et proprement $\Big(\phi(f)\Big)(x)$, et surtout pas $\phi(f(x))$ [2]
On se donne f et g, λ et μ et on compare $\phi(\lambda.f+\mu.g)$ et $\lambda.f+\mu.\phi(g)$.
On vérifie l'égalité de ces fonctions x par x :

$$\Big(\phi(\lambda.f+\mu.g)\Big)(x)=\int_0^x t.(\lambda.f(t)+\mu.g(t)).dt=\lambda.\int_0^x t.f(t).dt+\mu.\int_0^x t.g(t).dt=\Big(\lambda.\phi(f)+\mu.\phi(g)\Big)(x)$$

La réponse « par linéarité de l'intégrale ne sera pas suffisante, si on ne vous voit pas manipuler proprement x.
Surtout si après vous vous mettez à parler de $\phi(f)(\lambda.x+\mu.y)$ qui est totalement hors sujet.

Rapport du jury : C'est la partie qui a rapporté le plus de points aux candidats car elle est très classique. De nombreux étudiants se contentent de montrer que L est linéaire (ce qui est trivial) et oublient de montrer qu'elle va dans E.

Ah oui, tiens, ϕ va bien de E dans E ?

L'application $x\longmapsto\int_0^x t.f(t).dt$ est continue. Elle même dérivable.

VI∼1) **Résolvez l'équation $\phi(f)=(x\longmapsto 0)$ en pensant à dériver.**
On résout $\phi(f)=0$ (fonction nulle).
On a une solution évidente : $f=(x\longmapsto 0)$. Mais est ce la seule ?

On suppose donc $\forall x,\ \int_0^x t.f(t).dt=0$. On dérive : $\forall x,\ x.f(x)=0$ pour tout x. [3]

$f(x)$ est nul pour tout x, sauf peut être pour $x=0$.
Mais comme f est continue, la voilà nulle y compris en 0.

La seule solution de $\phi(f)=0$ est $f=0$.

le noyau de l'application linéaire ϕest réduit à 0.
ϕ est injective (linéarité, injectivité et noyau).

VI∼2) **Déduisez que ϕ est injectif. ϕest il bijectif de $(E,+,.)$ dans $(E,+,.)$?**
Injectivité traitée ci dessus.
Affirmation trop rapide de celui qui a lu des livres en diagonale et n'a retenu que des demi-théorèmes :
« par formule du rang, comme ϕ est injective, elle est bijective ».

Mais pour appliquer la formule du rang, la dimension doit être finie.
Ce qui n'est pas le cas ici.
Donc, on doit vraiment se pencher sur la question de la surjectivité.

Toute application continue g est elle de la forme $\phi(f)$ pour f bien choisie .

Et la réponse subtile est « non ».
L'application $x\longmapsto|x-1|$ est continue (donc dans $(E,+,.)$) mais pas dérivable.
Elle ne peut pas s'écrire $\phi(f)$ pour f bien choisie.
Si on avait $|x-1|=\int_0^x t.f(t).dt$, le membre de droite serait dérivable en 1 et pas celui de gauche.

VI∼3) **Pour α réel, résolvez l'équation $\phi(f)=\alpha.f$ d'inconnue f. Donnez le spectre de ϕ.**
On résout $\phi(f)=\alpha.f$ d'inconnue f en revenant à l'étage des réels.
On veut donc $\alpha.f(x)=\int_0^x t.f(t).dt$ pour tout x.
On dérive de chaque côté : $\alpha.f'(x)=x.f(x)$ pour tout x.
C'est une équation différentielle qu'on écrit

$$f'(x)-\frac{x}{\alpha}.f(x)=0$$

Le cas $\alpha=0$ a été traité à part. On peut diviser par α.

2. en effet, pouvez vous calculer $\phi(0)$ sachant que cela pourrait venir de $\phi(\sin)$ calculé en π ou $\phi(\cos)$ calculé en $\frac{\pi}{2}$; parler de $\Phi(f(x_0))$ signifie « si je connais f en x_0 je peux calculer $\phi(f)$ en x_0 tandis que $\phi(f)$ nécessite de connaître f partout sur $[0,\ x_0]$, même pour calculer juste $\phi(f)(x_0)$.

3. Rappelons en effet que $x\longmapsto\int_0^x g(t).dt$ se dérive en $x\longmapsto g(x)$.

Ses solutions sont de la forme $\exists A,\ \forall x,\ f(x) = A.e^{\frac{x^2}{2.\alpha}}$.

Je pensais avoir trouvé des vecteurs propres $f_\alpha$pour toutes les valeurs de α et je voulais conclure spectre $= \mathbb{R}$ puisque tous les α sont possibles.

Sauf qu'il faut cherche A. Et on sait quand même $\alpha.f(0) = \int_0^0 t.f(t).dt = 0$.
On a donc $A = 0$. La seule solution est $f = (x \longmapsto 0)$.

Finalement, aucune application non nulle ne vérifie $\phi(f) = \alpha.f$.
Le spectre de ϕ est vide.

Au fait, on avait le droit de dériver la relation $\alpha.f(x) = \int_0^x t.f(t).dt$ comme un physicien qui croit que tout est dérivable ?
Oui. f est continue. Donc $x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt$ est dérivable (de dérivée $f.Id$, continue).
Mais alors $\alpha.f$ est dérivable. Et après division, f l'est aussi.
Et en mettant en boucle ce raisonnement, f est de classe C^∞.

VII∼0) Soit f continue et bornée, on pose $M = Sup(|f(t)| \mid t \in \mathbb{R})$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(f)(x)| \leqslant M.\dfrac{x^2}{2}$.

Si f est bornée, on peut donner un sens à $M = Sup\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$ (plus petit majorant d'une partie de $\mathbb{R}$ bornée non vide).
On se donne ensuite x positif et on majore :

$$|f(x)| = \Big|\int_0^x t.f(t).dt\Big| \leqslant \int_0^x |t.f(t)|.dt \leqslant \int_0^x t.|f(t)|.dt \leqslant \int_0^x t.M.dt = \frac{M.x^2}{2}$$

Pour x négatif, il faut remettre l'intervalle d'intégration dans le bon sens

$$|f(x)| = \Big|\int_0^x t.f(t).dt\Big| = \Big|\int_x^0 t.f(t).dt\Big| \leqslant \int_x^0 |t.f(t)|.dt \leqslant \int_x^0 |t|.|f(t)|.dt \leqslant \int_x^0 |t|.M.dt = \frac{M.x^2}{2}$$

Rapport du jury. Les inégalités sont écrites sans valeur absolue, sans se soucier du signe des bornes de l'intégrale. Certains font preuve d'une mauvaise foi évidente, sortant la puissance de x de l'intégrale et retombant malgré tout sur le résultat annoncé.

On rappelle que l'inégalité triangulaire sur les intégrales n'est $\Big|\int_a^b \varphi(t).dt\Big| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|.dt$ que pour $a \leqslant b$. Sa formulation (lourde) est $\Big|\int_a^b \varphi(t).dt\Big| \leqslant \int_{Min(a,b)}^{Max(a,b)} |\varphi(t)|.dt$.

VII∼1) On définit (f_n) par $f_0 = f$ et $\forall n,\ f_{n+1} = \phi(f_n)$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.

La formule $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$ semble sortir d'une récurrence.
En tout cas, on vient nettement de l'initialiser.

Pour n donné, on suppose $\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.
On se donne un x (positif) et on calcule : $f_{n+1}(x) = \phi(f_n)(x) = \int_0^x t.f_n(t).dt$.
On passe à la valeur absolue et on majore : $\Big|f_{n+1}(x)\Big| \leqslant \int_0^x |t.f_n(t)|.dt$.
On utilise (pour la variable t) l'hypothèse de rang n : $\Big|f_{n+1}(x)\Big| \leqslant \int_0^x |t|.\dfrac{M.t^{2.n}}{2^n.n!}.dt$.
On sort M et on intègre explicitement : $\Big|f_{n+1}(x)\Big| \leqslant \dfrac{M}{2^n.n!}.\Big[\dfrac{t^{2.n+2}}{2.n+2}\Big]_{t=0}^x$.
On regroupe et on a bien $\dfrac{x^{2.n+2}}{2^{n+1}.(n+1)!}.M$.

On fait de même pour x négatif avec l'intervalle $[x,\ 0]$.

Attention à l'ordre des quantificateurs.

On montre par récurrence sur n la propriété $P_n : \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{M.x^{2.n}}{2^n.n!}$.

Ce n'est pas « pour tout x, on montre par récurrence sur n : $f_n(x)| \leqslant \dfrac{M.x^{2.n}}{2^n.n!}$.

VIII∼0) On choisit à présent et jusqu'à la fin $f = \sin$. Explicitez f_1 et f_2.

On calcule pour tout x $\int_0^x t.\sin(t).dt$ par parties ou par méthode a priori : $f_1 = (x \longmapsto \int_0^x t.\sin(t).dt)$ et on recommence avec $\int_0^x t.(sin(t) - t.\cos(t)).dt$.

$f_0(x) = \sin(x)$	$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$	$f_2(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$

Rapport du jury. L'intégration par parties est souvent correcte sans être toujours justifiée.

C'est vrai, pour intégrer par parties il faut justifier : les applications sont C^1 *(pour que* u' *et* v' *existent, et pour que* $u'.v$ *soit continue donc intégrable).*
C'est pourquoi on va plus vite en « proposant/vérifiant ».

VIII∼1) Montrez sans récurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$.

Comment prouver $\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$ sans récurrence ?
Et si on essayant une intégration par parties ?
Mais quelles parties ? C'est là la belle idée. Prenons comme le second membre le suggère t^2 et $t.f_{n-1}(t)$.
Mais si. Dérivons t^2 et intégrons $t.f_{n-1}(t)$ en $f_n(t)$.

C'est logique, puisque $f_n(t) = \int_0^t u.f_{n-1}(u).du$.

t^2	$\hookrightarrow$	$2.t$
$t.f_{n-1}(t)$	$\hookleftarrow$	$f_n(t)$

$$\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = \left[t^2.f_n(t)\right]_{t=0}^{x} - \int_0^x 2.t.f_n(t).dt = x^2.f_n(x) - \int_0^x 2.t.f_n(t).dt$$

Et justement, $\int_0^x 2.t.f_n(t).dt$ est exactement $2.f_{n+1}(x)$.

Cette question n'était pas dans l'énoncé original.
Je l'ai ajoutée pour vous faciliter le travail pour la suite.
Et pour vous permettre d'avoir des questions où gagner des points.

VIII∼2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$.

La formule $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$ est vraie au rang 1 :

$$f_2(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)\ et\ (3).f_1(x) - x^2.f_0(x) = 3.(\sin(x) - x.\cos(x)) - x^2.(\sin(x))$$

Supposons la formule vraie au rang n à l'étage des fonctions : $f_{n+1}(t) = (2.n+1).f_n(t) - t^2.f_{n-1}(t)$ pour tout t.

On multiplie par t et on intègre de 0 à x (fixé quelconque) :

$$\int_0^x t.f_{n+1}(t).dt = (2.n+1).\int_0^x t.f_n(t).dt - \int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt$$

Par définition même, ceci donne déjà $f_{n+2}(x) = (2.n+1).f_{n+1}(t) - \int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt$.
Et comme par hasard, le dernier terme fait l'objet de ma question précédente :

$$f_{n+2}(x) = (2.n+1).f_{n+1}(t) - \Big(x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)\Big) = (2.n+1+2).f_{n+1}(t) - x^2.f_n(x)$$

C'est la formule au rang $n+1$.

VIII∼3) Pour p entier donné, on note F_p l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et on définit $H = (P,\ Q) \longmapsto (P' - Q,\ P + Q')$. Montrez que H est un endomorphisme de $F_p \times F_p$. Donnez son noyau. Montrez que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

H prend bien deux polynômes et calcule un nouveau couple de polynômes (dérivation, somme).
Le degré ne peut pas augmenter (pas de produit...), on reste avec $P' - Q$ et $P + Q'$ dans F_p.
L'application va de $F_p \times F_p$ dans lui même.

On ne dit pas tout de suite si tout est atteint.

Passons à la linéarité.
On se donne $(P_1,\ Q_1)$ et $(P_2,\ Q_2)$. Leur somme est $(P_1 + P_2,\ Q_1 + Q_2)$.
L'image de la somme est $\Big((P_1 + P_2)' - (Q_1 + Q_2),\ (P_1 + P_2) + (Q_1 + Q_2)'\Big)$.
Elle est égale à $(P_1' - Q_1,\ P_1 + Q_1') + (P_2' - Q_2,\ P_2 + Q_2')$ (image de la somme, somme des images).

On se donne ensuite λ et on compare $\lambda.(P' - Q,\ P + Q')$ et $(\lambda.P' - \lambda.Q',\ \lambda.P + \lambda.Q')$.
Il y a encore égalité.

Conseil pratique : évitez si vous avez des polynômes, de les appeler P et P' ou Q et Q'. Vous risquez de confondre P'' (dérivée de P') et P'' dérivée seconde de P.

Rapport du jury. La question D1 est rarement complète : il y a confusion entre linéarité et bilinéarité, la démonstration de l'injectivité par l'étude du noyau précède souvent la démonstration de la linéarité.

Pour le noyau, on cherche un couple d'image nulle. Un tel couple vérifier $P' - Q = 0$ et $P + Q' = 0$.
On reporte : $P'' = -P$.
Mais P est un polynôme, il y a un problème de degré.
Si P est de degré d, P'' est de degré $d - 2$. La seule façon de s'en sortir est d'imposer $P = 0$.
Et en reportant dans $P' = Q$, Q est nul.

Le seul couple du noyau de H est la couple $(0,\ 0)$ (élément neutre de $F_p \times F_p$).

Comme le noyau est réduit au neutre, l'application H est injective (cours).

La formule du rang donne alors $\dim(F_p \times F_p) = 0 + \dim(Im(H))$.
Mais $Im(H)$ est inclus dans $F_p \times F_p$, avec cette égalité des dimensions, on a $Im(H) = F_p \times F_p$.

Bref, H est surjective de $F_p \times F_p$ dans lui même.
C'est bien une bijection de l'espace dans lui même. Un automorphisme.

L'énoncé demandait juste « automorphisme » sans insister sur « trouvez le noyau, puis justifiez comme un flemmard que l'image est l'espace entier ».
Sinon, vous noterez que j'ai tout rédigé sans mentionner la dimension de $F_p \times F_p$.
Et c'est $(p+1) \times (p+1)$.

VIII$\sim$4) Montrez : $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$ (où S_p désigne le sous-espace des fonctions paires de F_p et A_p le sous-espace des fonctions impaires de F_p).

Que peut signifier $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$?
On parle de $H(ensemble) = ensemble$ et pas $H(vecteur) = vecteur$.
Il faut montrer que H va de $S_p \times A_p$ dans $A_p \times S_p$ et même qu'elle atteint cet ensemble d'arrivée en entier.

Prenons $(P,\ Q)$ dans $S_p \times A_p$ (P est pair : $P(-x) = P(x)$ et S est impair $S(-x) = -S(x)$).

L'image $H((P, Q))$ est bien un couple de polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Mais on rappelle

fonction paire	$\hookrightarrow$	fonction impaire
	dérivation	
fonction impaire	$\hookrightarrow$	fonction paire

P pair	Q' pair	$P + Q'$ pair
Q impair	P' impair	$P' - Q$ impair

Le couple image $(P' - Q,\ P + Q')$ est de la forme $(impair,\ pair)$. Il est donc dans $A_p \times S_p$.

H va bien de $S_p \times A_p$ dans $A_p \times S_p$.

Mais est ce qu'on atteint tout ? Est ce que chaque couple $(R,\ S)$ avec R impair et S pair s'écrit il $(R,\ S) = (P' - Q,\ P + Q')$ avec P et Q bien choisis ?

Trouver un antécédent n'est pas évident.

Mais l'algébriste dit « H est injective, elle ne perd donc pas de dimensions ».
L'image de $S_p \times A_p$ par H est de même dimension que $S_p \times A_p$.
Et comme c'est un sous-espace vectoriel de $A_p \times S_p$, cette égalité des dimensions fait remplir tout le sous-espace

vectoriel.

Rapport du jury. Dans la question D2, la démonstration d'une inclusion (la plus facile) suffit à montrer l'égalité de deux ensembles.

Au fait, $\dim(A_p \times S_p) = \dim(A_p) \times \dim(S_p)$ *mais je ne peux pas en dire plus, tout dépend de la parité de p pour chacune des dimensions.*

IX∼0) Montrez que pour tout n il existe un unique couple $(P_n,\ Q_n)$ dans $S_n \times A_n$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(x) \times P_n(x) + \cos(x) \times Q_n(x)$.

On doit prouver existence et unicité de deux suites de polynômes vérifiant $f_n = \sin .P_n + \cos .Q_n$.

On sent venir la récurrence :

<table>
<tr><td colspan="2">$f_0(x) = \sin(x)$</td><td colspan="2">$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$</td><td colspan="2">$f_1(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$</td></tr>
<tr><td>$P_0 = 1$</td><td>$Q_0 = 0$</td><td>$P_0 = 1$</td><td>$Q_0 = -X$</td><td>$P_2 = 3 - X^2$</td><td>$Q_2 = -3.X$</td></tr>
</table>

Les premiers polynômes existent et respectent les règles de parité indiquées.

On va profiter de notre formule $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$ pour les construire de proche en proche par récurrence.

Récurrence à double hérédité déjà initialisée.
En supposant alors que P_n, Q_n, P_{n-1} et Q_{n-1} existent pour un n donné, on peut donc écrire

$$f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$$

$$f_{n+1}(x) = (2.n+1).(P_n(x).\sin(x) + Q_n(x).\cos(x)) - x^2.(P_{n-1}(x).\sin(x) + Q_{n-1}(x).\cos(x))$$

on distribue, on regroupe et on trouve

$$f_{n+1}(x) = \sin(x).\Big((2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)\Big) + \cos(x).((2.n+1).Q_n(x) - x^2.Q_{n-1}(x)\Big)$$

On pose naturellement $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$. Un polynôme. Pair.
Puis on pose aussi $Q_{n+1}(x) = (2.n+1).Q_n(x) - x^2.Q_{n-1}(x)$. Encore un polynôme. Et impair cette fois.

A ce stade, on a l'existence de ces polynômes.
On a bien deux suites, calculables de proche en proche.

Et l'unicité ?
On suppose $f_n(x) = \sin(x).P(x) + \cos(x).Q(x) = \sin(x).R(x) + \cos(x).S(x)$ pour tout x (avec P et R dans S_n et Q et S dans A_n)
On a alors $\sin(x).(P(x) - R(x)) = \cos(x).(S(x) - Q(x))$ pour tout x.
Prenons $x = k.\pi$ pour k de 0 à n.
On a alors $(S(k.\pi) - P(k.\pi)).(-1)^k = 0$ pour tout k de 0 à n (et m^me pour tout k de $\mathbb{Z}$, mais pas besoin d'en faire trop).
Le polynôme $S - P$ a plus de racines que son degré. Il est donc nul.

Maintenant qu'on a $S = P$, on reporte : $\sin(x).(P(x) - R(x)) = 0$ pour tout x.
Encore une fois (avec autre chose que des multiples de π) le polynôme $P - R$ a une infinité de racines.
Il est nul.

On est bien arrivé à $P = R$ et $Q = S$.

Rapport du jury. Dans la question D3, l'application H n'est jamais utilisée. L'étude de l'unicité est intégrée dans le raisonnement par récurrence, donc au procédé de construction, les vérifications sont partielles (degré ou parité mais très rarement les deux).

Et si justement on reprenait notre raisonnement en utilisant H ?
Et une récurrence simple.

On suppose à un rang n donné $f_n(x) = \sin(x).P_n(x) + \cos(x).Q_n(x)$ pour tout x.

On cherche f_{n+1} qui s'écrit $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t).t.dt$.
Ceci revient à demander : $(f_{n+1})' = Id.f_n$ et $f_{n+1}(0) = 0$.

On la cherche sous la forme $f_{n+1}(x) = \sin(x).P_{n+1}(x) + \cos(x).Q_{n+1}(x)$ avec P paire et Q impaire.
On a déjà $f_{n+1}(0) = \sin(0).P_{n+1}(0) + \cos(0).Q_{n+1}(0) = 0.P_{n+1}(0) + \cos(0).0 = 0$ car Q_{n+1} est impair, du moins on lui demande.

Reste l'autre condition. On dérive f_{n+1} et on trouve

$$(f_{n+1})'(x) = \cos(x).P_{n+1}(x) + \sin(x).(P_{n+1})'(x) - \sin(x)..Q_{n+1}(x) + \cos(x).(Q_{n+1})'(x)$$

En regroupant :

$$(f_{n+1})'(x) = \sin(x).\Big((P_{n+1})'(x) + Q_{n+1}(x)\Big) + \cos(x).\Big((Q_{n+1})'(x) + P_{n+1}(x)\Big)$$

Notre requête $(f_{n+1})' = Id.f_n$ se ramène donc à existe-t-il (P_{n+1}, Q_{n+1}) dans $S_{n+1} \times A_{n+1}$ vérifiant

$$\sin(x).\Big((P_{n+1})'(x) - Q_{n+1}(x)\Big) + \cos(x).\Big((Q_{n+1})'(x) + P_{n+1}(x)\Big) = \sin(x).\Big(x.P_n(x)\Big) + \cos(x).\Big(x.Q_n(x)\Big)$$

On veut un antécédent par H dans $S_{n+1} \times A_{n+1}$ à $(X.P_n,\ X.Q_n)$ (dans $A_{n+1} \times S_{n+1}$ justement).
Et c'est la bijectivité de H qui nous le donne !

Classe, non ?

IX∼1) Explicitez P_n et Q_n pour n de 0 à 2 (inclus).

On a déjà calculé :

$f_0(x) = \sin(x)$		$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$		$f_1(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$	
$P_0 = 1$	$Q_0 = 0$	$P_0 = 1$	$Q_0 = -X$	$P_2 = 3 - X^2$	$Q_2 = -3.X$

IX∼2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$.

Ça aussi, c'est plus haut.

IX∼3) Déduisez que les P_n sont tous à coefficients entiers.

De proche en proche, chaque P_n est à coefficients entiers.
Il suffit de mener une récurrence (à double hérédité).
P_0 et P_1 sont à coefficients entiers.
Si P_{n-1} et P_n le sont, alors par $(2.n+1).P_n(X) - X^2.P_{n-1}(X)$ est encore à coefficients entiers (structure d'anneau).

IX∼4) On suppose que π est rationnel d'écriture irréductible $\pi = \dfrac{p}{q}$. Montrez que la suite $\left((2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

On va construire un raisonnement par l'absurde. On suppose donc que π s'écrit $\dfrac{p}{q}$.

P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, à coefficients entiers.
On montre que $(2.q)^n.P_n\left(\dfrac{p}{2.q}\right)$ est un entier.
Chaque terme de la somme est rationnel. Mais le $(2.q)^n$ va effacer les dénominateurs.
Écrivons en effet $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k.X^k$ (on devrait écrire $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}.X^k$ pour montrer que le polynôme change avec n).
On a alors

$$(2.q)^n.P_n\left(\frac{p}{2.q}\right) = (2.q)^n.\sum_{k=0}^{n} \alpha_k.\left(\frac{p}{2.q}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.p^k.(2.q)^{n-k}$$

Tous les termes de la somme sont entiers. Comme $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau, on a un entier.

On calcule aussi

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On multiplie :

$$(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.q)^n.f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Il est temps d'utiliser les résultats des parties préliminaires sur nos applications f_n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \frac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$$

où M est un majorant de l'application initiale (ici le sinus, donc $M = 1$).
On a donc

$$\left|(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant (2.q)^n.\frac{\left(\frac{p}{2.q}\right)^{2.n}}{2^n.n!}.1 = \frac{p^{2.n}}{4^n.q^n.n!}$$

Que dire de ce majorant ? Il tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Par croissances comparées.

Par encadrement, la suite $\left(\left|(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On peut d'ailleurs enlever les valeurs absolues.

Quand on vous demande vers quoi converge une suite qui n'a pas une forme simple, il y a de fortes chances que ce soit vers 0 *et que vous l'obteniez par encadrement.*

IX$\sim$5) Déduisez que π est irrationnel.

Ceci permet il de conclure ?
La suite $\left((2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ est une suite d'entiers de limite nulle.
Elle est forcément nulle à partir d'un certain rang.
Il suffit de prendre la définition de la convergence vers 0 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. L'entier $(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ à partir du rang $N_{1/2}$ il ne peut être que nul.

On a donc $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ à partir d'un certain rang R.
Le coup de génie est alors de remonter dans le passé :

$$f_{R+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.n+1).f_R\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est nul aussi.

On recommence avec $f_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.n+1).f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.f_{R-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est au tour de $f_{R-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Par récurrence propre, chaque $f_{R-k}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est nul.

On remonte jusqu'à $f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Mais ceci donne $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Et c'est notre contradiction.

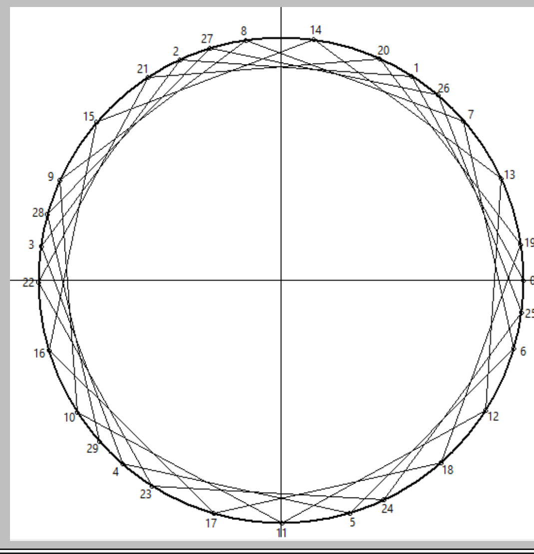
Rapport du jury. La partie « $(2.q)P_n^n.(\pi/2)$ est entier » est en général correcte et le reste n'est pratiquement jamais abordé.

X∼1) On définit à présent : $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, 0 sinon. Écrivez un script Python qui détermine les n premiers termes de cette suite (avec l'approche du physicien qui fait confiance au calcul avec des flottants).

Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 20}$

X∼2) On suppose que cette suite est ultimement périodique. Montrez qu'il existe deux entiers N et T ($T > 0$) tels que $\sin(k.T)$ soit de signe constant pour k plus grand que N. Déduisez que $(\cos(k.T))_{k\geqslant N}$ est une suite positive.

X∼3) On pose $G = \{n.T + 2.k.\pi \mid (n,k) \in \mathbb{Z}^2\} = T.\mathbb{Z} + 2.\pi.\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ mais qu'il ne peut pas s'écrire $a.\mathbb{Z}$ même pour a bien choisi.



X∼0)

Rapport du jury. Cette partie est très peu abordée sauf B1 et B2 (sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$) que beaucoup ont dû voir en exercices.

On note que comme πest irrationnel, $\sin(n)$ n'est jamais une une fois qu'on a dépassé 0.

```
from math import sin
def signesinus(n) :
....L = [0 for k in range(n+1) ]
....for k in range(n+1) :
.......if sin(k) > 0 :
...........L[k] = 1
....return(L)
```

Mais on peut aussi aller chercher `[int(sin(k)>0) for k in range(n+1)]` sachant que `int` transforme un booléen en 1 ou 0.

On préfèrera construire d'avance une liste de termes valant tous 0 pour ensuite en mettre certains à 1.
ceci permet d'avoir tout de suite une longueur de liste fixe (un tableau) et pas une liste qui grandit avec des pointeurs qui pointent toujours plus loin et cherchent de la place en mémoire.

On fait confiance au graphe pour lire le signe des sinus successifs :

$\sin 0$	$\sin 1$	$\sin 2$	$\sin 3$	$\sin 4$	$\sin 5$	$\sin 6$	$\sin 7$	$\sin 8$	$\sin 9$	$\sin 10$
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
$\sin 11$	$\sin 12$	$\sin 13$	$\sin 14$	$\sin 15$	$\sin 16$	$\sin 17$	$\sin 18$	$\sin 19$	$\sin 20$	
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	

Un peu monotone. Ou faussement périodique.
Mais les choses vont se décaler un peu plus tard.
[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0,** 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1,** 0, 0
oui, il y aura quatre 0 d'affilée.

Si on suppose la suite (a_n) ultimement périodique, disons de période T à partir du rang R, alors dès que $k.T$ est plus grand que R, on a $a_{(k+1).T} = a_{k.T}$.
On a donc pour k plus grand que $[R/T]$: la suite $a_{k.T}$ est constante.
Si elle est constante égale à 1, c'est que tous les $(\sin(k.T))_{k>[R/T]}$ sont strictement positifs.
Si elle est constante égale à 0, c'est que tous les $(\sin(k.T))_{k>[R/T]}$ sont strictement négatifs.
On rappelle en effet que les $(\sin(k.T)$ ne peuvent pas être nuls, puisque $k.T$ est entier et les multiples non nuls de π sont irrationnels.

Pourquoi les $\cos(k.T)$ sont tous positifs ?

Mais parce qu'il y a un lien entre $\sin(k.T)$, $\cos(k.T)$ et $\sin(2.k.T)$! On peut diviser (sinus jamais nul) :

$$\cos(k.T) = \frac{\sin(2.k.T)}{2.\sin(k.T)}$$

Numérateur et dénominateur sont de même signe (le terme $\sin(2.k.T)$ est extrait de la suite $(\sin(p.T))$). Le quotient est positif.

X∼1) On pose $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrez que G^+ admet une borne inférieure α. Montrez que si α est dans G^+ alors $G = \alpha.\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.
L'ensemble G contient 0 en prenant $n = k = 0$.
Il est stable par addition et passage à l'opposé.
Prenons en effet deux éléments g et g' dans G.
On les écrit $g = n.T + 2.k.\pi$ et $g' = n'.T + 2.k'.\pi$ avec n, n', k et k' entiers. Leur différence $g - g'$ s'écrit $(n - n').T + 2.(k - k').\pi$. Elle est dans G.

On a bien un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Si ce sous groupe est engendré par un élément a, il est formé des multiples de a et uniquement eux.
Ainsi, T est un multiple de a ($T = 1.T + 2.0.\pi \in G$) : $\exists p \in \mathbb{Z},\ T = p.a$.
De même, $2.\pi$ est un multiple de a ($2.\pi = 0.T + 2.1.\pi \in G$) : $\exists q \in \mathbb{Z},\ 2.\pi = q.a$.

Si on passe au quotient : $\frac{2.\pi}{T} = \frac{q.a}{p.a}$ et donc π est un quotient d'entiers : $\frac{q.T}{2.p}$.
Or, on sait (et ici on l'a montré) que π est irrationnel.

On a donc une contradiction.

Le cours (de seconde année) nous dit qu'il y a deux types de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$: les sous-groupes engendrés par un élément, de la forme $a.\mathbb{Z}$, et des sous-groupes « partout denses » comme $\mathbb{Q}$.

G^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $2.T$), minorée (par 0). Elle admet donc une borne inférieure.

On va montrer que cette borne inférieure est 0. Par l'absurde.

Supposons a dans G (comme $Inf[1, +\infty[= 1$).
Alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $n.a$ est dans G (stabilité du sous-groupe et récurrence).
Mais pour tout n de $\mathbb{Z}$,$n.a$ est dans G (stabilité du sous-groupe par passage à l'opposé).
On a donc déjà $a.\mathbb{Z} \subset G$.

Prenons maintenant un élément g de G. On l'encadre par deux multiples de a : $n.a \leqslant g < (n+1).a$ (il suffit de prendre $n = \left[\frac{g}{a}\right]$.
On soustrait : $0 \leqslant g - n.a < a$. L'élément $g - n.a$ est dans G (stabilité). Il est strictement plus petit que a, borne inférieure de G'). Il ne peut donc pas être dans G'. C'est donc qu'il est nul.
Finalement, tout élément g de G est de la forme $n.a$. On a la double inclusion.

Mais elle conduit à une absurdité comme on l'a vu.
Ce raisonnement par l'absurde se termine : a n'est pas dans G^+.
La borne inférieure n'est pas atteinte.

X∼2) α n'est donc pas dans G^+. On suppose $\alpha > 0$. Montrez qu'il existe g et g' dans G^+ vérifiant $\alpha < g' < g < 2.\alpha$. Déduisez $\alpha = 0$.

Supposons que la borne inférieure a soit strictement positive (comme $Inf]1, +\infty[$).
Par définition, tout intervalle $[a,\ a + \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$) contient au moins un élément de G^+(et donc de G), sinon la borne inférieure serait rejetée un peu plus loin, au delà de $a + \varepsilon$.

En particulier, pour ε il existe au moins un élément g de G^+ entre a et $2.a$.

On recommence avec $\varepsilon = g - a$. Il existe cette fois un g' entre a et $a + (g - a)$.

On a bien trouve un couple vérifiant $a < g' < g < 2.a$ avec g et g' dans G.
Mais alors, par soustraction : $0 < g - g' < a$.
On a trouve un élément $g - g'$ de G^+ entre 0 et a. C'est contradictoire.

Finalement, par l'absurde encore, la borne inférieure de G^+est 0.

Comme pour $]0, +\infty[$ *ou même* $\mathbb{Q}^{+*}$.

X∼3) Maintenant que l'on sait $\alpha = 0$, montrez que pour tout n il existe g_n dans G vérifiant $0 < g_n < 10^{-n}$.

La borne inférieure de G^+est 0. C'est le plus grand minorant. Tout nombre strictement positif n'est plus un minorant.
Pour tout ε, il existe au moins un élément de G^+ entre 0 et $0 + \varepsilon$.
On applique ce résultat à $\varepsilon = 10^{-n}$.

On a crée une suite d'éléments de G^+ vérifiant $\forall n,\ 0 < g_n < 10^{-n}$.

X∼4) Soit x un réel. Montrez qu'il existe une suite d'éléments de G qui converge vers x.

Si x est un réel quelconque, par densité, on va construire une suite d'éléments de G qui converge vers x.
Pour tout n, considérons $[x - g_n,\ x]$. C'est certes un « petit » intervalle à gauche de x, mais il va contenir un élément de G.
Il suffit de bien choisir son multiple de g_n.

On part de 0 et on avance avec des pas de longueur g_n plus petite que la longueur de l'intervalle. On va poser le pied dedans.

En l'occurrence, on prend $\left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n$.
C'est un multiple entier de g_n, donc c'est un élément du sous-groupe G.
Il vérifie $\dfrac{x}{g_n} - 1 < \left[\dfrac{x}{g_n}\right] \leqslant \dfrac{x}{g_n}$ puis $x - g_n < \left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n \leqslant x$.
On a donc une suite d'éléments de g : $a_n = \left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n$ vérifiant $x - g_n \leqslant a_n \leqslant x$.
Comme g_n tend vers 0 (positif, majoré par 10^{-n}), par encadrement, (a_n) tend vers x.

C'est ça un ensemble « partout dense dans $\mathbb{R}$ » : tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de points de l'ensemble.

X∼5) Montrez qu'il existe une suite (k_n) d'entiers positifs tels que $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

Prenons un x particulier : $\dfrac{2.\pi}{3}$ (si vous n'y pensez pas avec ces cosinus qui tendent vers $-\dfrac{1}{2}$, je fais quoi pour vous ?).
Il existe une suite (a_n) d'éléments de G qui converge vers $\dfrac{2.\pi}{3}$.
Notons $(k_n.T + 2.\pi.p_n)$ les éléments de cette suite (définition de G).
Mais alors $\cos(k_n.T + 2.\pi.p_n)$ converge vers $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{2}\right)$ (continuité).
Par périodicité et calcul : $\cos(k_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

X∼6) Montrez que $\{\cos(k_n.T) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des termes de cette suite) n'est pas de cardinal fini.

X∼7) Construisez alors une suite (y_n) strictement croissante extraite de (k_n) telle que $\cos(y_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

X∼8) La suite (a_n) est elle ultimement périodique ?

On a l'impression de tenir notre contradiction : la suite $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$ alors même qu'à partir d'un certains rang, tous ses termes sont positif.

Mais il manque un détail. La formulation $\cos(k_n.T)$ ne donne pas forcément une sous-suite de $(\cos(n))$, car $n \longmapsto k_n.T$ n'est pas forcément croissante.

Si déjà vous voyez cette difficulté, vous avez une bonne partie des points.

Si vous argumentez en disant « je réordonne les $k_n.T$ pour en faire une suite croissante, la convergence ne change pas », vous avez aussi gagné.

Maintenant, il faut rendre ceci rigoureux.
On prend le plus petit élément de l'ensemble ,des $k_n.T$. On l'appelle $y_0.T$.
On prend ensuite le plus petit élément de $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\} - \{y_0.T\}$. On le note $y_1.T$.

Et on recommence avec le plus petit élément de $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\} - \{y_0.T,\ y_1.T\}$.
Et ainsi de suite.

Mais serait il possible qu'il ne este plus rien à prendre à un moment ?
Vous allez me dire que l'ensemble $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini !
Non, a priori, ce qui est infini, c'est $\mathbb{N}$.
Mais il peut y avoir des $k_n$égaux entre eux.

Seulement voilà. Si l'ensemble $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini, alors la suite $k_n.T$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, de même que la suite $(\cos(k_n.T))$.
Alors qu'elle converge. C'est donc qu'elle est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).
Mais la constant serait $-\dfrac{1}{2}$.
Et la suite ne peut valoir $-\dfrac{1}{2}$ qu'avec $k.T = \pm\dfrac{2.\pi}{3}\ [2.\pi]$, ce qui est incohérent avec « π est irrationnel ».

Bref, la suite (a_n) de l'énoncé n'est pas ultimement périodique.
On peut même dire qu'elle fait un peu n'importe quoi.
[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1,**
1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1,**
1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1**,
0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1**, 0,
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1**, 0, 0,
0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1**, 0, 0, 0,
1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1,** 0, 0, 0, 1, 1, 1,
0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0,
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1,** 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1,
1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1**, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0,** 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0,
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1,** 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0**, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
En général, trois 0 trois 1 (normal, la période du sinus c'est $2.\pi$). mais de temps en temps il y a quatre 1 ou quatre 0 consécutifs.

◃9▹ Combien existe-t-il de suites géométriques (a_n) vérifiant $a_5 = 5$ et $a_6 = 10$? Calculez a_n pour tout n.
Combien existe-t-il de suites géométriques (b_n) vérifiant $b_5 = 5$ et $b_7 = 20$? Calculez (b_n) pour tout n.
Combien existe-t-il de suites arithmétiques (c_n) vérifiant $c_5 = 5$ et $c_7 = 10$? Calculez c_n pour tout n.
Combien existe-t-il de suites arithméticogéométriques (d_n) vérifiant $d_5 = 5$ et $d_6 = 10$?
Combien existe-t-il de suites arithméticogéométriques (e_n) vérifiant $e_5 = 5$ et $e_6 = 10$ et $e_7 = 25$? Exprimez e_n pour tout n.

◃10▹ ♡ On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2.k^2}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{3.n^3}$ pour tout n. Montrez qu'elles forment un couple de suites adjacentes (limite non demandée).

On se donne n et on calcule

$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \dfrac{1}{3.(n+1)^3} - \dfrac{1}{3.n^3}$	$\dfrac{1}{n^2.(n+1)^2} + \dfrac{1}{3.(n+1)^3} - \dfrac{1}{3.n^3} = \dfrac{-8.n^2 - 8.n - 3}{n^3.(n+1)^3} \leqslant 0$	suite décroissante
$b_n - a_n$	$\dfrac{1}{3.n^3} \geqslant 0$	majoration
$a_{n+1} - a_n$	$\dfrac{1}{n^2.(n+1)^2} \geqslant 0$	suite croissante
$b_n - a_n$		tend vers 0

Les deux suites vont donc converger, vers la même limite.

Mais qui est cette limite ? Ce n'est heureusement pas la question (c'est $\zeta(3)$ et on n'en sait guère plus).

L'unique suite géométrique vérifiant $a_5 = 5$ et $a_6 = 10$ a pour raison 2 et s'écrit $a_n = \frac{5}{2^5}.2^n$ pour tout n.

Deux suites géométriques vérifient $a_5 = 5$ et $a_7 = 20$ et ont pour raison 2 ou -2 et s'écrivent $b_n = \frac{5}{2^5}.2^n$ pour tout n ou $b_n = \frac{5}{(-2)^5}.(-2)^n$.

L'unique suite arithmétique vérifiant $c_5 = 5$ et $c_7 = 10$ a pour raison $5/2$ et s'écrit $c_n = 5 + (n-5).\frac{5}{2}$ pour tout n.

On écrit $d_{n+1} = a.d_n + b$ pour tout n. On veut alors $5.a + b = 10$. Il y a une infinité de solutions. Une par choix de a.

On écrit $e_{n+1} = a.e_n + b$ pour tout n. On veut alors $5.a + b = 10$ et $10.a + b = 25$. On n'a plus le choix
a vaut 3 et b vaut -5 : $\forall n,\ e_{n+1} = 3.e_n - 5$.
On crée la suite auxiliaire $e_n - \frac{5}{2}$ qui est alors géométrique de raison 3.
On déduit $e_n = 3^n.\Big(e_0 - \frac{5}{2}\Big)^n + \frac{5}{2}$ avec e_0 à déterminer (on trouvera $\frac{610}{243}$ mais on s'en fichera aussi, car ce n'est pas ça l'essentiel).

Mais il est plus judicieux pour la formule finale de translater $e_n = 3^{n-5}.\Big(e_5 - \frac{5}{2}\Big)^n + \frac{5}{2}$

◃ 11 ▹ ♡ Montrez que $\Big(2.\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\Big)$ et $\Big(2.\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\Big)$ sont adjacentes.
Couple de suites adjacentes : l'une croit, l'autre décroit, celle qui décroit majore celle qui croit, et la différence tend vers 0.

On pose $A_n = 2.\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $B_n = 2.\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Il est évident que $B_n$majore A_n.
Les autres calculs sont plus lourds, mais pas tant que ça :

$$A_{n+1} - A_n = 2.\sqrt{n+1} - 2.\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(le $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est ce qu'il reste après simplification des sommes. On conjugue :

$$A_{n+1} - A_n = 2.\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$$

Je suis sûr que là, certains trouvent jolie la transformation de $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ en $\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$. Elle est évidente, mais jolie.
Sous cette forme, $A_{n+1} - A_n$ est positif, puisque le second dénominateur est plus grand que le premier.

Pour B_n on fait de même : $B_{n+1} - B_n = 2.\sqrt{n+2} - 2.\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et le travail est du même type. (B_n) est décroissante.

Évidemment aussi, la différence $B_n - A_n$tend vers 0 quand n tend vers l'infini, encore et toujours en écrivant $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Remarque | *Le programme de mathématiques de première année a cet avantage d'être fait de jolies idées, de petits outils comme la conjugaison. Plus évidemment des définitions.*
En Spé, vous aurez d'avantage de théorèmes.

◁12▷ On pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}}$.

Montrez : $v_n - u_n \leqslant \frac{n}{2^{n-1}.\sqrt{(n-1)!}}$ *(conjuguez, conjuguez il en restera quelque chose).*

Déduisez que (u_n) et (v_n) forment un couple de suites adjacentes.

Écrivez un script **Python** qui pour ε donné calcule leur limite commune à ε près.

On en calcule un peu :

n	1	2	3	4	5
u_n	$\sqrt{1}$	$\leqslant \sqrt{1+\sqrt{2}}$	$\leqslant \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\leqslant \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}}$	$\leqslant \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}$
v_n	?	$\sqrt{1+\sqrt{4}}$	$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{6}}}$	$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{8}}}}$	$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{10}}}}}$

On voit bien que (u_n) croît, qu'elle est majorée par (v_n). Pour le reste, c'est plus dur.

Commençons par la première inégalité par conjugaison :

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}} - \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}} =$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}\right) - \left(1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}\right)}{v_n+u_n}$$

Les 1 s'en vont, il reste un numérateur qu'on conjugue aussi :

$$v_n - u_n = \frac{\left(2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}\right) - \left(2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}\right)}{(v_n+u_n).\left(\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}+2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}\right)}$$

Cette fois, les 2 s'en vont, et on re-conjugue :

$$v_n - u_n = \frac{\left(3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}\right) - \left(3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}\right)}{(v_n+u_n).\left(\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}\right).\left(\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}+\sqrt{3\ldots}\right.}$$

Il est un peu lourd de raconter ceci proprement, mais le numérateur fond petit à petit jusqu'à ce qu'il ne reste que $2.n - n$ c'est à dire n.

Et au dénominateur, il reste des produits de termes comme

$$\sqrt{5+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}+\sqrt{5+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$$

Un tel terme se minore par $2.\sqrt{5+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$, ce qui va permettre de majorer $v_n - u_n$.

Chacun apporte un facteur 2.

Et pour chacun, on minore encore $2.\sqrt{5+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} \geqslant 2.\sqrt{5}$.

Si on les garde tous, on minore le dénominateur par $2^{n-1}.\sqrt{n-1}.\sqrt{n-2}\ldots\sqrt{1}$ et on majore la différence $v_n - u_n$ par $\frac{n}{2^{n-1}.\sqrt{(n-1)!}}$ comme demandé.

Pour la croissance de (u_n), on doit comparer
$$u_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}}}$$
$$\text{et } u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$$

On commence par écrire $n+\sqrt{n+1} \geqslant n$, on passe à la racine (application croissante) et on ajoute $n-1$:

$$n-1\sqrt{n+\sqrt{n+1}} \geqslant n-1+\sqrt{n}$$

on passe à la racine, on ajoute $n-2$:

$$n-2+\sqrt{n-1\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}\geqslant n-2+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}$$

et ainsi de suite.
Avec une récurrence si nécessaire, arrêtée au dernier rang, on aboutit à $u_{n+1}\geqslant u_n$.

De même, on part de $\sqrt{2.n}\geqslant\sqrt{n}$ pour arriver à

$$v_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}}\geqslant\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}=u_n$$

en passant par

$$\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}\geqslant\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$$

Ensuite, on doit comparer

$$v_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}}$$

et

$$v_{n+1}=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{2.n+2}}}}}}$$

[4]
Comparons ce qu'il y a au bout : $2.n$ et $n+\sqrt{2.n+2}$. On a effectivement $n\geqslant\sqrt{2.n+2}$ en tout cas pour n plus grand que 3.
On ajoute n : $2.n\geqslant n+\sqrt{2.n+2}$, on passe à la racine $\sqrt{2.n}\geqslant\sqrt{n+\sqrt{2.n+2}}$, on ajoute $n-1$, on passe à la racine :

$$\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}\geqslant\sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{2.n+2}}}$$

et on recommence.
Finalement, $v_n\geqslant v_{n+1}$. La suite v décroit.

Résumé :

$$u_0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\ldots\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant v_3$$

Le dernier détail qui manque : $v_n-u_n\longrightarrow_{n\mapsto+\infty}0$. Mais on l'a par encadrement avec la première inégalité démontrée.
Bref, (u_n) et (v_n) convergent. Vers la même limite.

Que je ne connais pas.

Pour le script Python, on ne va pas calculer les termes de la suite jusqu'au n^{ieme}.
On va chercher n pour que l'encadrement soit bon (grâce à la première question).
Et ensuite, on va calculer chaque terme en mettant en boucle l'opération qui remonte. En effet, les termes de chaque suite ne se calculent pas les uns après les autres, mais chacun à partir de la fin.
Prenons le calcul de u_5 :

étape	0	1	2	3	4
	$\sqrt{5}$	$\sqrt{4+\sqrt{5}}$	$\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}$	$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}$

```
def suiteU(n) :
....u=0
....for k in range(n) :
........u = sqrt(n-k+u)
....return u
```

```
def suiteV(n) :
....v=sqrt(2*n)
....for k in range(1,n) :
........v = sqrt(n-k+v)
....return v
```

4. un terme en $\sqrt{2.n}$ effacé un terme en n inséré, et une racine du double recréée

Il serait ensuite absurde de demander une valeur de n trop grande, `Python` ne travaille qu'avec un nombre fixé de chiffres derrière la virgule. Il est à noter qu'avec la précision tout juste digne de l'amphi 21, on trouve `SuiteU(20)=SuiteV(20)=1.757932756618005`

◁13▷ Montrez que $\Big(\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)$ et $\Big(\ln(n)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\Big)$ forment un couple de suites adjacentes.

C'est la « généralisation » d'une exercice de l'I.S. dans lequel il y avait une série avec des $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}$.

On nomme (A_n) et (B_n) nos deux suites. A_n contient un terme de plus que (B_n) mais avec un signe moins. c'est (A_n) la plus petite.
On se dit donc que c'est à elle de croitre, et à (B_n) de décroitre.
On vérifie aussi tout de suite : $B_n - A_n$tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On se donne n et on calcule $B_{n+1}-B_n = \ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n}$.

On peut être tenté d'écrire $\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$ et même $\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$.

> *Oui, c'est tentant, et peut être même bien, à condition de se souvenir que* $\ln(1+x)$ *est plus petit que* x.
> *C'est une inégalité de convexité. On l'a par exemple en écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale pour le logarithme entre* 1 *et* $1+x$ *:*
> $\ln(1+x)=\ln(1)+\frac{1}{1}.x+\frac{x^2}{1}.\int_0^1(1-t).\frac{-1}{(1+t.x)^2}.dt$ *Le reste intégrale est négatif, c'est gagné.*
> *Encore une fois, une idée simple comme* $\ln(1+x)\leqslant x$.

Mais il y a une idée encore plus belle : $\ln(n+1)-\ln(n)$ c'est $\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$. Et c'est plus une aire qu'on compare à celle d'un rectangle.

Le graphe de $t\longmapsto\frac{1}{t}$ est entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ sur l'intervalle $[n\ n+1]$. On a donc $\frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{n}$.
Et l'une des inégalités est celle que l'on veut.

> *Avec plus de rigueur mais en perdant un peu du côté visuel :* $\forall t\in[n,\ n+1],\ \frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{n}$,
> *On intègre ensuite de n à* $n+1$ *:* $\frac{1}{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{dt}{n+1}\leqslant\int_n^{n=1}\frac{dt}{t}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{n}.dt=\frac{1}{n}$.

Avec moins de réflexes de Sup, mais avec de bons réflexes de Terminale, pour montrer que $\ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n}$ est négatif, il y a aussi l'idée de définit $x\longmapsto\ln(1+x)-\ln(x)-\frac{1}{x}$, de la dériver et d'étudier ses variations. Elle croit. Et elle tend vers 0 à l'infini. Elle est donc négative...

Bref, la suite (B_n) est décroissante.

Pour la croissance de (A_n), on calcule $A_{n+1}-A_n=\ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n+1}$. Et c'est l'autre inégalité qui sert. Quelle chance !

Pour information, la limite commune de ces deux suites est γ, la constante d'Euler.

◁14▷ On pose $0<a_0\leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1}=\sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n=\frac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1}=\sqrt{\frac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n=a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha)=a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda=\frac{\sqrt{(b_0)^2-(a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n-a_n)\sim_{n\to+\infty}a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

Par récurrence évidente, non traitée ici, les suites sont strictement positives.
On montre ensuite $a_n\leqslant b_n$ pour tout n.
C'est initialisé, et ensuite on suppose $a_n\leqslant b_n$ à un rang n quelconque donné, puis on calcule

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\sqrt{b_n.b_{n+1}}-\sqrt{a_n.b_{n+1}}=\sqrt{b_{n+1}}.\Big(\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{a_n}\Big)=\sqrt{b_{n+1}}.\frac{b_{n+1}-a_n}{\sqrt{b_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$$

en enchainant comme à chaque fois de petites idées simples.
Enfin, $b_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{a_n + a_n}{2}$ et on utilise l'hypothèse de rang n.

Maintenant qu'on a cette inégalité pour tout n, on calcule $b_{n+1} - b_n$ et on le trouve négatif (c'est $\dfrac{a_n - b_n}{2}$).
On calcule aussi $a_{n+1} - a_n$ ou même $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ puisque tout est positif.

Les suites vérifient $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
ce ne sont pas encore des suites adjacentes, car il n'est pas évident que $b_n - a_n$ tend vers 0.
Mais on passe par un chemin tout aussi simple : (a_n) est croissante majorée par b_0. Elle converge, on note sa limite α.
(b_n) est décroissante minorée par (a_0), elle converge vers une limite β.
En passant à la limite dans $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on trouve $\alpha = \beta$.
Les deux suites sont la même limite.

On calcule
$$d_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{\sqrt{a_n.b_{n+1}}} = \sqrt{\frac{b_{n+1}}{a_n}} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2.a_n}} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + +\frac{b_n}{a_n}\Big)}$$
Ici, pas de récurrence, c'est un calcul direct.

Les formules $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ se démontrent par récurrence. En posant $\alpha = Argch(b_0/a_0)$.

Dans la formule $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$, on a une forme indéterminée avec $2^n.sh(2^{-n}.\alpha)$. Mais si on l'écrit $\alpha.\dfrac{sh(2^{-n}.\alpha)}{2^{-n}.\alpha}$, on a une limite de la forme $\dfrac{sh(t)}{t}$ avec t qui tend vers 0. On l'écrit $\dfrac{sh(t) - sh(0)}{t - 0}$. Elle tend vers $ch(0)$ égal à 1.

On lève l'indétermination et on fait tendre n vers l'infini : $\lambda.\alpha = a_0.sh(\alpha)$. On isole, et on remplace $sh(\alpha)$ en fonction de $th(\alpha)$.

◁15▷ Montrez que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)$ sont adjacentes.

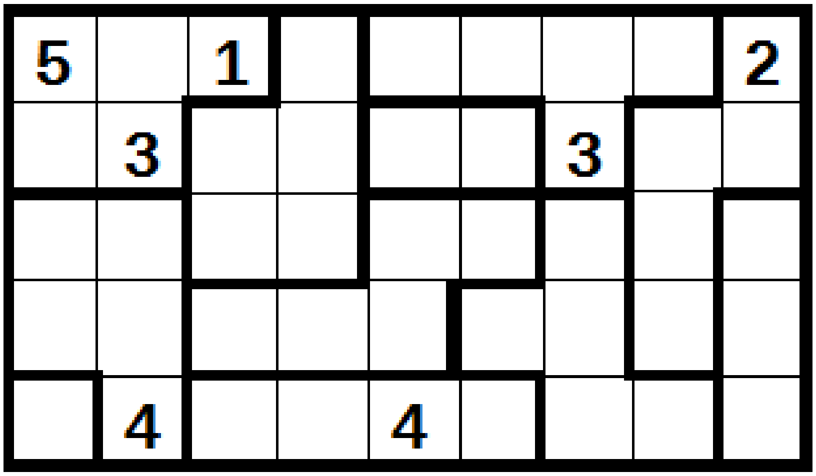
On les nomme (a_n) et (b_n).
$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

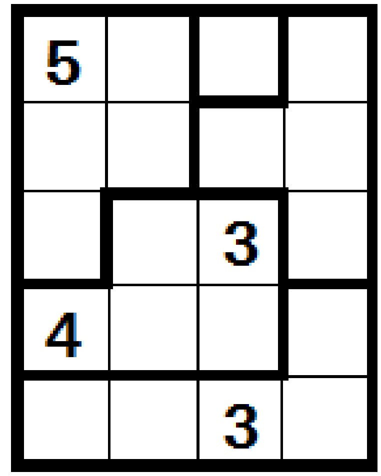
Nom propre : L'argument est relation de Chasles, et non pas télescopage.

$A_{n+1} =$	$\frac{1}{1^2}$	$\ldots$	$\frac{1}{(n-1)^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{(n+1)^2}$
$A_n =$	$\frac{1}{1^2}$	$\ldots$	$\frac{1}{(n-1)^2}$	$\frac{1}{n^2}$	

Pour b_n c'est plus lourd : $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} - \left(\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n}$
On réduit au dénominateur comme : $(n+1)^2.n$ (et surtout pas $(n+1).(n+1)^2.n$ comme l'écrivent les mauvais élèves).
Le numérateur vaut alors $n.(n+1) + n - (n+1)^2$. Il se simplifie en -1 et il est négatif.

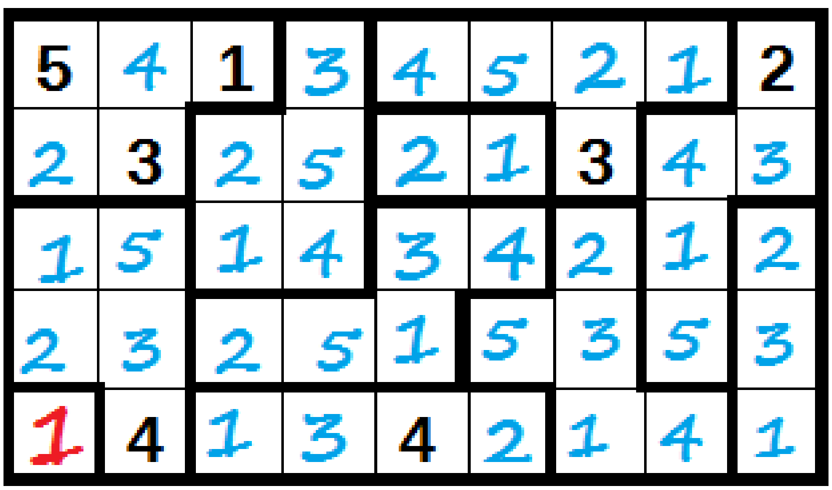
Enfin, la différence $b_n - a_n$ est positive et tend vers 0.
Les deux suites sont adjacentes. Elles convergent et ont la même limite.
Mais rien ne dit ce que cette limite vaut.

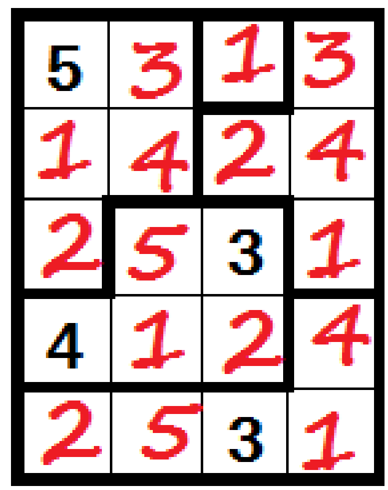




◃16▹

Rappel : une maison de taille n (délimitée en gras) contient les entiers de 1 à n (et donc la petite maison de taille 1...).
dans la grille, deux cases adjacentes (par un côté ou même un coin) ne peuvent pas contenir le même nombre.





◃17▹ Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge.

Le numérateur est borné, il vaut alternativement 1, i, -1 et $-i$.
Le dénominateur tend vers l'infini. Le terme général tend vers 0.
La condition nécessaire est validée. mais on ne peut pas encore conclure.

En module, le terme général vaut $\frac{1}{n+1}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ diverge. On ne peut donc pas appliquer un théorème de convergence en valeur absolue.

Les termes sont dans $\mathbb{C}$, on ne peut pas utiliser le critère des séries alternées.
Mais si on sépare partie réelle et partie imaginaire :
$\sum_{n=0}^{N} \frac{i^n}{n+1} = \sum_{2.p\leqslant N} \frac{(-1)^p}{2.p+1} + \sum_{2.p+1\leqslant N} \frac{i.(-1)^p}{2.p+2}$ (c'est la façon la plus simple que j'ai trouvé pour l'écrire).

La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+1}\right)_{p\geqslant 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+2}\right)_{p\geqslant 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

On multiplie la seconde par i et on somme : notre série initiale converge.

Ça manque un peu de rigueur, suivant le rang auquel on s'est arrêté. Il faut être plus rigoureux, suivant la valeur de N modulo 4 :

N modulo 4	0	1	2	3
$N =$	$4.q$	$4.q+1$	$4.q+2$	$4.q+3$
parte réelle	$\displaystyle\sum_{p=0}^{2.q}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\displaystyle\sum_{p=0}^{2.q}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\displaystyle\sum_{p=0}^{2.q+1}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\displaystyle\sum_{p=0}^{2.q+1}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$
partie imaginaire	$\displaystyle i.\sum_{p=0}^{2.q-1}\frac{(-1)^p}{2.p+2}$	$\displaystyle i.\sum_{p=0}^{2.q}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\displaystyle i.\sum_{p=0}^{2.q}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\displaystyle i.\sum_{p=0}^{2.q+1}\frac{(-1)^p}{2.p+1}$

On utilise le théorème de convergence des séries alternées, et un théorème de recouvrement de $\mathbb{N}$ par parité/imparité.

Bonus : et la somme vaut $\dfrac{\pi}{4}+i.\dfrac{\ln(2)}{2}$.

Bonus du bonus : $\exp\left(i.\left(\dfrac{\pi}{4}+i.\dfrac{\ln(2)}{2}\right)\right)=e^{i.\pi/4}.e^{-\ln(2)/2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.e^{i.\pi/4}=\dfrac{i}{2}$.

◁18▷

```
def Suite(n) :
....L = [2, 6, 7, 4, 2, *, 5, 4, 8, *, 3, 9, 3, 5, 5]
....return L[n%15]
```

Remplacez les `*` pour que `Suite` soit la somme d'une suite de période 3 et d'une suite de période 5.

Le programme Python crée bien une suite (en tout cas la fonction qui calcule le n^{ieme} terme d'une suite) périodique, de période 15 dont les valeurs successives sont celles de la liste.
Il n'est pas dit qu'elle puisse s'écrire comme somme d'une tri-périodique et d'une penta-périodique.
Raisonnons par condition nécessaire :

α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
2	6	7	4	2		5	4	8		3	9	3	5	5

On a 13 équations, et huit inconnues... Normalement, ça plante.
Oui, on attaque ça comme un algébriste, c'est à dire qu'on mesure avant de se ruer sur des calculs qu'on ne saura pas interpréter, en se persuadant à tort que « si on fait des calculs, on fait plaisir aux profs »...

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & & & & & +\alpha & & & = & 2\\
 & b & & & & & +\beta & & = & 6\\
 & & c & & & & & +\gamma & = & 7\\
 & & & d & & +\alpha & & & = & 4\\
 & & & & e & & +\beta & & = & 2\\
 & b & & & & +\alpha & & & = & 5\\
 & & c & & & & +\beta & & = & 4\\
 & & & d & & & & +\gamma & = & 8
\end{array}$$

huit équations, huit inconnues...
Et pourtant, il y a un problème. Le déterminant est nul.
En effet, il reste une part de liberté.
Il n'y a pas de somme directe. En notant P_k l'espace des suites périodiques de période k, on veut ici que notre suite (vivant dans P_{15} de dimension 15) soit dans la somme P_3+P_5.
Et on a en effet P_3+P_5 et pas $P_3\oplus P_5$.
On sait : $P_3\cap P_5=P_1$ de dimension 1.
On peut ajouter une suite constante à la première et la soustraire à la seconde, la somme doit redonner la même suite.

On peut donc faire une choix arbitraire, tel que $a=0$.

Le système de huit équations à huit inconnues donne alors

$a=0$	$b=3$	$c=1$	$d=2$	$e=-1$
$\alpha=2$	$\beta=3$	$\gamma=6$		

Mais ATTENTION. On fait des maths. On raisonne.
La condition est nécessaire. Est elle suffisante ?

2	3	6	2	3	6	2	3	6	2	3	6	2	3	6
0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1
2	6	7	4	2		5	4	8		3	9	3	5	5
E	E	E	E	E		E	E	E		V	V	V	V	V

La mention E signifie que c'est le système d'équation qu'on a imposé.
La mention V signifie qu'on vérifie. Et ici, tout va bien (évidemment, j'ai conçu l'exercice à partir des deux suites que j'ai additionnées).

On a retrouvé les deux valeurs qui manquaient :

```
L = [2, 6, 7, 4, 2, 6, 5, 4, 8, 1, 3, 9, 3, 5, 5]
```

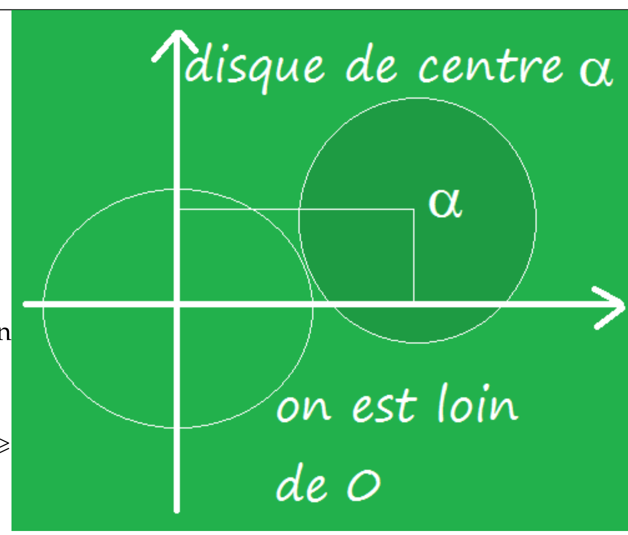
Remarque | Un bel exercice où la part calcul est peut être un peu lourde selon certains, mais où la part réflexion algébriste est fondamentale...
Vous l'avez aimé : vous avez l'esprit MP.
Vous l'avez aimé, mais seulement les calculs : vous avez l'esprit PSI.
Vous n'avez pas aimé, mais vous avez compris : vous avez l'esprit PC.
Vous n'avez rien compris, mais vous avez aimé : vous avez l'esprit TSI.
Vous n'avez ni aimé ni compris : vous avez l'esprit ailleurs.

◃19▹ Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n - \alpha| \leqslant |\alpha|/2 \Rightarrow |a_n| \geqslant |\alpha|/2$ en passant par $\alpha - \alpha/2 \leqslant a_n \leqslant \alpha + \alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

On sait faire sur $\mathbb{R}$ (dans le cas α positif, quitte à remplacer (a_n) par $(-a_n)$:
à partir du rang $N_{\alpha/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2}$, ce qui signifie $\alpha - \frac{\alpha}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha + \frac{\alpha}{2}$.
On obtient d'un côté $\frac{\alpha}{2} \leqslant u_n$. et u_n est « loin de 0.

Si α est négatif, on fait de même : à partir du rang $N_{|\alpha|/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{|\alpha|}{2}$ et on trouve $u_n \leqslant \frac{|\alpha|}{2}$, et $u_n$est négatif, « loin de 0 ».
C'est ce qu'on utilise pour montrer que si une suite réelle a une limite non nulle, alors tous les termes de $\frac{1}{u_n}$ sont définis à partir d'un certain rang, et « loin de 0 ».

C'est ce qui permet aussi de dire que si f est continue en a avec $\alpha = f(a) \neq 0$, alors sur un intervalle $[a - \eta_{a,|\alpha|/2},\ a + \eta_{a,|\alpha|/2}]$, f reste de signe constant.



Mais dans $\mathbb{C}$, comment passer de « z est proche de α » non nul à « z reste loin de 0 ».
On prend un disque de rayon « la moitié du module » :
$|z - \alpha| \leqslant \frac{|\alpha|}{2} \Rightarrow \left|z\right| = \left|-z\right| = \left|\alpha - (\alpha - z)\right| \geqslant \left||\alpha| - |g - \alpha|\right| = |\alpha| - |g - \alpha| \geqslant |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2}$.

◃20▹ Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1.
Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Par principe des tiroirs, l'une d'entre (qu'on appellera β) elle est prise une infinité de fois. En indexant par ordre croissant la liste des indices pour lesquels la suite vaut β, on a une extraction. Et la suite extraite est constante,

donc convergente.

Sinon, une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est aussi une suite réelle bornée. Elle admet donc au moins une sous-suite qui converge.

On prend une suite quelconque.
Si elle n'est pas majorée, alors on peut extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
En gros, il suffit de quantifier « non bornée » : $\forall A,\ \exists n,\ u_n > A$. On pend pour A des nombres de plus en plus grands et le tour est joué (il faut quand même construire $\varphi(n+1) = Inf(k \mid a_k \geqslant 2.a_{\varphi(n)})$).

Si elle n'est pas minorée, on fait de même (en changeant le signe) et on a une sous-suite qui diverge vers $-\infty$.

Dans le cas qui exclut les deux précédents, elle est majorée et minorée. Donc bornée. On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La suite $\left(\cos\left(n.\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ pend sans arrêt les valeurs 0, 1, -1 (et 0 c'est deux fois plus souvent que les autres).
Sa sous suite $\left(\cos\left((2.n+1).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers 0.
Sa sous suite $\left(\cos\left((4.n).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers 1.
Sa sous suite $\left(\cos\left((4.n+2).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers -1.

Et si vous voulez moins périodique : $\left(2^{-n} + \cos\left((2.n+1).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Toute suite complexe convergente est bornée, c'est tout !

◁21▷ Montrez : $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p.(\zeta(p)-1) = \frac{1}{2}$ après en avoir prouvé l'existence.

Chaque $\zeta(p)$ est une somme de série.
Et on calcule une série de séries.

Ce serait bien d'en faire une famille sommable, afin de n'avoir plus qu'une somme double, et de pouvoir permuter les sigmas.

Mais pour cela, il faut prouver l'existence de la somme de famille avec des valeurs absolues.
On va donc, le temps de la preuve d'existence), effacer le $(-1)^p$.

On veut prouver l'existence de $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{1}{n^p}\Big)$.
Par théorème de Fubini, il suffit qu'existe
$\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{1}{n^p}\Big)$, $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}\\ p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}}\frac{1}{n^p}$ ou $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{1}{n^p}\Big)$
Or, le denier se calcule :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{1}{n^p}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)$$

Calculons la dernière forme (télescopique) avec un retour à horizon fini

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{N} = 1$$

On a prouvé la sommabilité et trouvé la valeur sans les $(-1)^p$.

On a donc le droit d'appliquer le théorème de Fubini, même avec les $(-1)^p$

$$\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\Big)$$

Nos lecteurs auront reconnu une série géométrique de premier terme $\frac{1}{n^2}$et de raison $\frac{-1}{n}$ (plus petite que 1 en module).

$$\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

On refait le coupe de la somme télescopique et il reste juste $\frac{1}{2}$.

On note que la convergence de la série de séries $\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p.(\zeta(p)-1)$ pouvait se démontrer par critère spécial des séries alternées.
On pose $\alpha_p=\zeta(p)-1$. C'est une suite positive décroissante

$$\alpha_{p+1}-\alpha_p=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-n}{n^{p+1}}<0$$

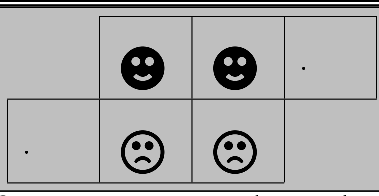
puisque chaque terme de la somme est négatif.
De plus, cette suite tend vers 0

$$\alpha_p=\frac{1}{2^p}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{2^p}+\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^p}=\frac{1}{2^p}+\Big[\frac{t^{1-p}}{1-p}\Big]_2^{+\infty}$$

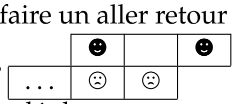
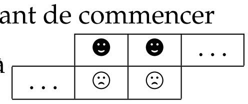
et on peut conclure par majoration.

◁22▷ Montrez que pour toute suite réelle (u_n) il existe au moins une extraction φ telle que $(\sin(u_{\varphi(n)}))$ converge.

La suite $(\sin(u_n))$ est bornée. Nul ne m'interdira de lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

◁23▷ 

Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

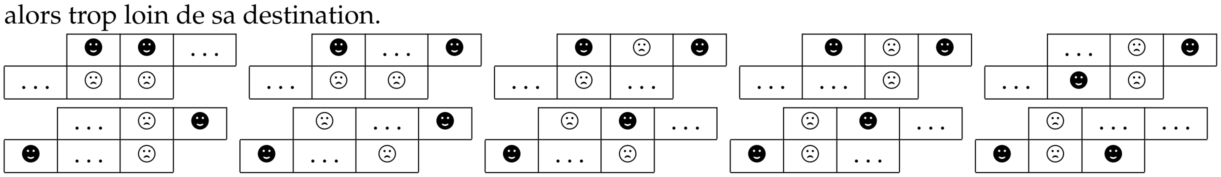
Comme quatre pions doivent bouger, le nombre de déplacements est forcément au moins égal à 4.
Si on a une solution en n mouvements, alors on a une solution en $n+2$ mouvements.
En effet, il suffit de faire faire un aller retour à un pion avant de commencer
 puis  puis retour à  et là on y va.
Et ceci compte pour deux déplacements.
Si on trouve une solution en N coups, alors tous les entiers de la forme $N+2.p$ sont aussi solutions.
On notera que si on trouve deux solutions de parité différente, alors on aura tous les entiers à partir d'un certain rang.
Mais les solutions ont forcément un nombre pair de déplacements.

En effet, si on numérote les cases ainsi :

	0	1	0
0	1	0	

- au départ, les deux cases libres ont pour total 0
- à la fin, les deux cases libres ont pour même total 0
- à chaque déplacement, on libère une case d'une parité, et on comble une case de la parité opposée (un pion de case 1 va sur une case 0, ou alors un pion de case 0 va sur une case 1).
- il s'ensuit que si on a déplace $2.p+1$ pions, la somme des deux cases libres est impaire, on ne peut pas avoir gagné.

On élimine donc tous les entiers impairs, ainsi que 0, 2 et 4. sauf à être daltonien et affirmer : c'est bon pour $n=0$.
On montre qu'en six coups, ce n'est pas possible : un pion doit quitter une place pour aller dans un coin, et il est alors trop loin de sa destination.



	...	☹	...
☻	☹	☻	

	☹	☹	...
☻		☻	

	☹	☹	...
...	☻	☻	

Cette solution en 12 déplacements convient.
Tous les entiers pairs plus grands que 12 conviennent.
Reste à trouver un argument pour éliminer 8 et 10.

◁ 24 ▷ Montrez que la suite $\left(\log_{(n!)}((n+1)!)\right)$ est décroissante, minorée et donnez sa limite.

◁ 25 ▷ $a_n = o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La relation « être un petit o de « est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur l'ensemble des suites réelles strictement positives ?

Réflexive Comment pourrait on avoir $\dfrac{a_n}{a_n}$tend vers 0 sachant que ce quotient vaut 1.
On se donne la suite $a_n = 1$ pour tout n et on a un contre-exemple.

Il fallait VRAIMENT donner un contre-exemple ?

Symétrique Si $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 0, alors $\dfrac{b_n}{a_n}$*tend*vers l'infini et nullement vers 0.
Contre-exemple : $1 = o(n)$, mais on n'a pas $n = o(1)$ quand n tend vers l'infini.

Anti-symétrique On se donne deux suites (a_n) et (b_n). On suppose qu'on a à la fois $\dfrac{a_n}{b_n}$et $\frac{b_n}{a_n}$ qui tendent vers 0.
C'est impossible (leur produit vaut 1 et il devrait tendre vers 0^2).
Mais si l'hypothèse est fausse, alors l'implication est vraie (que (a_n) soit ou on égale à (b_n).
On a donc bien $(a_n = o(b_n)\ et\ b_n = o(a_n)) \Rightarrow (\forall n,\ a_n = b_n)$.

Transitive On se donne trois suites strictement positives (a_n), (b_n) et (c_n).
On suppose que $\dfrac{a_n}{b_n}$ et $\dfrac{a_n}{b_n}$ tendent vers 0.
Leur produit tend aussi vers 0.
Et c'est la définition de $a_n = o(c_n)$.

◁ 26 ▷ Montrez que la suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si $((u_n)^2)$ n'admet aucune sous-suite qui tend vers $+\infty$.

$\Rightarrow$ Supposons la suite (u_n) bornée (disons par M). Alors $((u_n)^2)$ l'est aussi (par M^2).
Dès lors, touteles soussusites de $((u_n)^2)$ sont aussi bornées par M^2, et ne peuvent tendre vers $+\infty$.
(écrivez $\forall A,\ \exists G_A,\ \forall n,\ n \geqslant G_A \Rightarrow (u_n)^2 \geqslant A$ et prenez $A = M^2 + 1$)

$\Leftarrow$ On montre la contraposée.
Supposons (u_n) non bornée. On va alors construire une sous-suite de la forme $((u_{\varphi(n)})^2)$ qui diverge vers $+\infty$.
On quantifie « non bornée » : $\forall A,\ \exists k,\ |u_k| > A$.
On a envie de l'appliquer à $A = n$ pour chaque entier n.
On a alors que pour tout n il existe k vérifiant $|u_k| \geqslant n$.
On en prend un , qu'on nomme $\varphi(n)$ et on a $|u_{\varphi(n)}| \geqslant n$ d'où $(u_{\varphi(n)})^2 \geqslant n^2$.
Par minoration (le gendarme qui fuit vers l'infini), la suite $((u_{\varphi(n)})^2)$ diverge vers $+\infty$.

C'est presque bien, mais il y a un défaut. Pourquoi l'extraction φ serait elle croissante ? Rien ne nous l'assure (hormis une notion vague de « globalement, les $\varphi(n)$ sont forcément de plus en plus grands »).
E effet, si la suite (u_n) grimpe vite à une étape, et saute de 10 à 300, alors on risque d'avoir $u_{\varphi(10)} = u_{\varphi(11)} = u_{\varphi(12)} = \ldots u_{\varphi(99)}$.
C'est pourquoi on va construire l'extraction φ étape par étape.
On prend $A = 1$ et $\varphi(0) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 1)$ (Min ou Inf ou ppe c'est ici pareil, on est sur $\mathbb{N}$).

On poursuit avec $A = 2.|u_{\varphi(0)}|$ et $\varphi(0) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 2.|u_{\varphi(0)}|)$. On a forcément $\varphi(1) > \varphi(0)$.

Plus généralement : On poursuit avec $A = 2.|u_{\varphi(n)}|$ et $\varphi(n+1) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 2.|u_{\varphi(n)}|)$.
On a forcément $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et aussi $|u_{\varphi(n+1)}| \geqslant 2.|u_{\varphi(n)}| \geqslant 2^{n+1}$.

La difficulté parfois sur ce type d'exerccice : croire qu'on a démontré $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$ alors qu'on a démontré

$A \Rightarrow B$ et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (qui n'apporte rien de plus, voyez vous...).

◁27▷ Montrez que si la suite (a_n) (jamais nulle) n'admet aucune sous-suite bornée, alors la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ converge vers 0.

La suite (u_n) n'est jamais nulle, donc la suite $(1/u_n)$ existe.

◁28▷ La suite u est périodique de période 4 à partir du rang 100 et vérifie $u_n = n^2$ pour $n \leq 100$ et $u_{100} = 3$, $u_{101} = 5$, $u_{102} = 13$, $u_{103} = 7$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne u_n.

```
def Suite(n) :
....if n<101 :
........return n*n
....L = [3, 5, 13, 7]
....Index n = n%4
....return L[Index]
```

◁29▷ Sachant que (a_n) est une suite arithmétique, $\sum_{k=0}^{100} a_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 20100$ calculez a_n pour tout n.

Comme la suite (a_n) est arithmétique, on a juste à compter les termes : $\sum_{k=0}^{100} a_k = 101.\frac{a_0 + a_{100}}{2}$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 201.\frac{a_0 + a_{200}}{2}$.

On déduit donc tout de suite : $a_0 + a_{100} = 0$ et $a_0 + a_{200} = 200$.

On a donc un petit système : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a_0 & + & 100.r & = & 0 \\ 2.a_0 & + & 200.r & = & 200 \end{array}\right|$. Sans effort : $r = 2$ et $a_0 = -100$ et donc $\boxed{a_n = 2.n - 100}$

◁30▷ Vrai ou faux : de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement croissante.
de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement monotone.
de toute suite réelle non bornée on peut extraire une sous-suite monotone.

D'une suite constante, vous ne pourrez extraire que des sous-suites constantes, et donc pas strictement monotones. C'est donc réglé pour les deux premières.

La dernière est dans le cours pour une suite quelconque déjà.

◁31▷ ◇ 0 ◇ Une suite réelle a vérifie la propriété P si et seulement si on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2 \sim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n}$. Montrez qu'une suite vérifiant P est positive à partir d'un certain rang.

Prenons une suite vérifiant la propriété P. Le produit $a_n.\sum_{k+}^{n} (a_k)^2$ doit converger vers 1.

A partir d'un certain rang $N_{1/2}$, il est entre $1/2$ et $3/2$. Il est positif. On a donc a_n qui est du même signe que $\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2$. Mais la somme de carrés est positive. A partir du rang $N_{1/2}$ *(et même avant)*, a_n est positif.

◇ 1 ◇ Quelles sont les suites géométriques qui vérifient la propriété P ?

Prenons une suite géométrique de premier terme a_0 et de raison r a pour terme d'indice n le réel $a_n.r^n$.

La raison sera positive, de même que le premier terme, pour que la suite soit bien positive à partir d'un certain rang, sinon, on élimine.

On somme les carrés : $\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2 = (a_0)^2.\sum_{k=0}^{n} r^{2.k} = \frac{1 - r^{2.n+2}}{1 - r^2}.(a_0)^2$.

L'équivalence demandée se traduirait par un quotient tendant vers 1 :

$a_n.\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2 = (a_0)^3.\frac{1 - r^{2.n+2}}{1 - r^2}.r^n$.

On doit distinguer des cas (c'est là qu'on commence à faire des maths et pas juste du calcul ; c'est là qu'on commence à faire l'ingénieur) : tout dépend de la position de r par rapport à 1.

- Si r est entre 0 et 1, le produit tend vers 0 (le terme $(a_0)^3.\dfrac{1-r^{2.n+2}}{1-r^2}$ reste borné).
- Si r vaut 1, alors la formule est $a_n.\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k)^2 = 1.(n+1)$. Ce terme ne tend pas vers 1.
- Si r est plus grand que 1, le produit est égal à $(a_0)^3.\frac{r^{2.n+2}-1}{r^2-1}.r^n$, équivalent à $(a_0)^3.\frac{r^{3n+2}}{r^2-1}$. Encore raté.

Aucune suite géométrique ne convient.

Il faut penser à traiter à part (et donc à traiter) le cas où la raison vaut 1. C'est toujours le truc à ne pas oublier avec les suites géométriques...

◊ 2 ◊ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

Tentons la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. Le produit à étudier est $\dfrac{1}{n+1}.\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}$. Le terme devant la somme tend vers 0, et la somme converge *(oui, vers $\dfrac{\pi^2}{6}$)*. Le produit ne converge pas vers 1. Raté.

◊ 3 ◊ La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

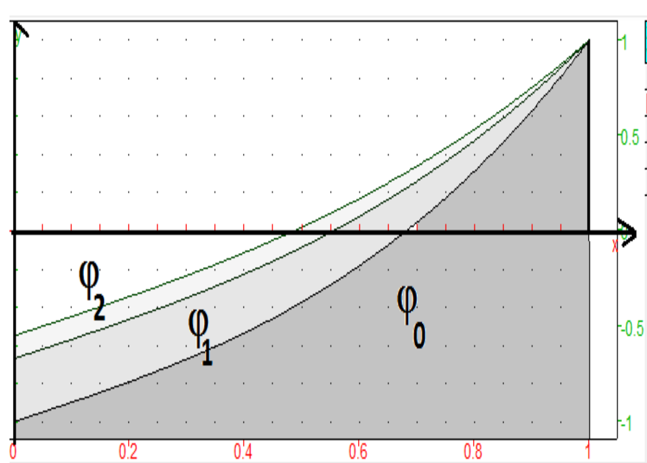
Tentons avec la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. Cette fois, le produit est $\dfrac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ avec (H_n) la série harmonique. On connaît son comportement de type logarithmique $\dfrac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Par croissances comparées, l'équivalent tend vers 0. Le produit tend aussi vers 0 *(attention, ne pas dire "est équivalent à 0", ceci n'a pas de sens)*.

◊ 4 ◊ Montrez que la relation $u_0 = 1$ et pour tout n, "u_{n+1} est la racine positive de l'équation $x^3.u_n + x = u_n$ d'inconnue x" définit bien une suite réelle (prouvez l'existence de tous les termes). Montrez que cette suite est positive, décroissante. On note λ sa limite. Montrez qu'elle ne peut valoir que 0. Montrez que la suite (u_n) ainsi construite vérifie P.

On se donne donc $u_0 = 1$. Le premier terme de la suite existe.
Pour u_1, on doit résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^3 + x = 1$. On introduit l'application $\varphi_0 = x \longmapsto x^3 + x - 1$. Elle est continue, strictement croissante, négative en 0. Et en 1 elle vaut 1. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois. Par stricte monotonie, elle ne s'annule qu'une fois. C'est en u_1.

Et seuls les élèves le nez collé à la feuille et toute emplis de naïveté termanalienne vont tenter de calculer u_1.

On note qu'on a $0 < u_1 < 1$.
On cherche s'il existe bien un u_2, unique, vérifiant $u_1.(u_2)^3 + u_2 = u_1$. On définit cette fois $\varphi_1 = x \longmapsto u_1.x^3 + x - u_1$. C'est une application croissante sur $\mathbb{R}^+$. En 0 elle est négative, en 1 elle vaut 1 : elle est positive. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de u_2 et la stricte monotonie donne son unicité.
Prenons n quelconque et supposons que u_n existe et est positif (racine positive d'une équation écrite au rang précédent). On doit montrer existence et unicité de u_{n+1} solution de l'équation $u_n.x^3 + x = u_n$. On définit l'application $\varphi_n = x \longmapsto u_n.x^3 + x - u_n$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ *(pardon ? oui, on dérive et on a une somme de termes tous positifs...)*. Elle est continue. En 0 elle est négative et en 1 elle vaut $1 + u_n - u_n$; elle dépasse donc 1.



Le théorème des valeurs intermédiaires donne existence de u_{n+1}. La stricte monotonie donne son unicité.
Le terme suivant existe, et la récurrence s'achève.

La suite u existe *(mais vous n'avez pas de formule explicite, c'est fini le bac à sable appelé Terminale)*.
Elle est positive par construction.
Étudions sa monotonie. On regarde ce qu'on a fait pour l'existence et unicité de u_{n+1}. On a appliqué le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0,\ 1]$ pour l'application $\varphi_n = x \longmapsto u_n.x^3 + x - u_n$. Mais si on l'applique sur $[0,\ u_n]$? On a alors $\varphi_n(0) = -u_n < 0$ et $\varphi_n(u_n) = (u_n)^4 > 0$.
C'est donc sur $[0,\ u_n]$ qu'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. u_{n+1} est dans $[0,\ u_n]$ (strict).
On reformule : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. C'est la décroissance attendue.

La suite u est décroissante minorée, elle converge.
Mais alors, en repartant de la relation $u_n.(u_{n+1})^3 + u_{n+1} = u_n$, on obtient par passage à la limite $\lambda^4 + \lambda = \lambda$.
La seule valeur possible pour la limite est 0.

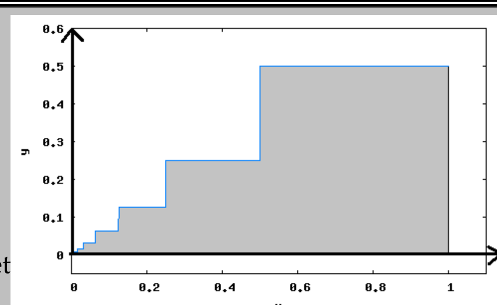
On a au rang 0 : $u.\sum_{k=0}^{0}(u_k)^2 = 1.(1^1) = 1$.

On calcule au rang 1 : $u_1.\sum_{k=0}^{1}(u_k)^2 = u_1.(1+(u_1)^2) = u_1 + (u_1)^3$. u_1 a été construit pour vérifier $1.(u_1)^3 + u_1 - 1 = 0$. Le produit vaut 1.
On a alors $1 + (u_1)^2 = \dfrac{1}{u_1}$ et on va s'en servir.
On regarde au rang 2 : $u_2.\sum_{k=0}^{2}(u_k)^2 = u_2.(1+(u_1)^2+(u_2)^2) = u_2.\Big(\dfrac{1}{u_1} + (u_2)^2\Big) = \dfrac{u_2 + u_1.(u_2)^3}{u_1} = \dfrac{u_1}{u_1} = 1$ puisque $u_1.(u_2)^3 + u_2 = u_1$.

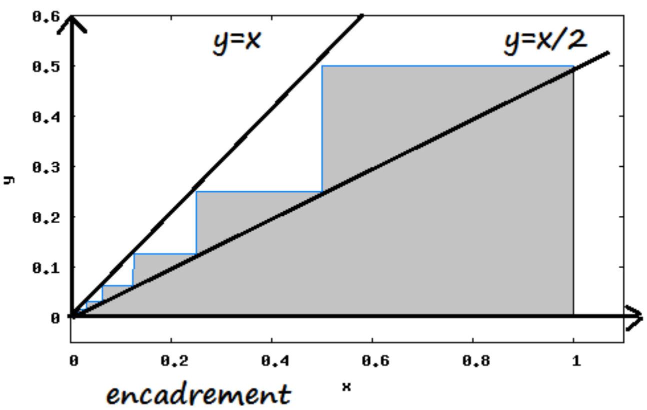
On suppose, pour un n quelconque donné : $u_n.\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2 = 1$.
On calcule au rang suivant : $u_{n+1}.\sum_{k=0}^{n+1}(u_k)^2 = u_{n+1}.\Big((u_{n+1})^2 + \sum_{k=0}^{n}(u_k)^2\Big) = u_{n+1}.\Big((u_{n+1})^2 + \dfrac{1}{u_n}\Big)$ par hypothèse de rang n.
On réduit au dénominateur commun $u_{n+1}.\sum_{k=0}^{n+1}(u_k)^2 = \dfrac{(u_{n+1})^3.u_n + u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n}$ par construction de u_{n+1}.
La récurrence s'achève.

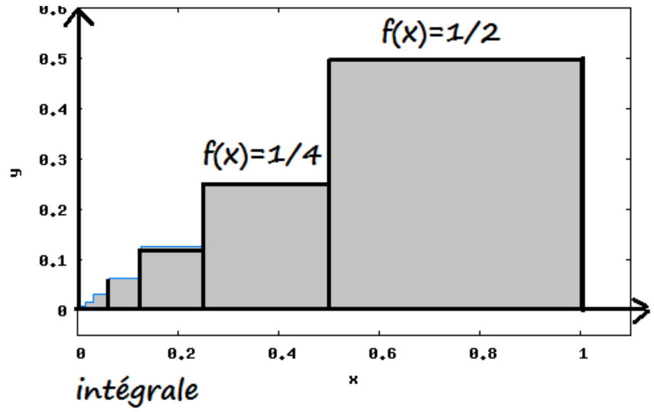
Pour tout n, on a $u_n.\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2 = 1$. On peut faire tendre n vers l'infini, il y a une limite et elle vaut 1

◁32▷ ♡ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto 2^{[\ln(x)/\ln(2)]}$ et calculez son intégrale sur $[0,\ 1]$.



A cause du logarithme elle n'est pas définie en 0. Et on ne va la prolonger qu'à droite. On n'en revient pas aux ε, eux, c'est pour la théorie. Ensuite, pour la pratique, on encadre, on utilise des équivalents.
Ici, comme il y a une partie entière, on fait comme toujours avec elle, on l'encadre : $t-1 < [t] \leqslant t$: $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - 1 \leqslant \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
On multiplie par $\ln(2)$ (positif), on passe à l'exponentielle (croissante) : $e^{\ln(x)-\ln(2)} \leqslant f(x) \leqslant e^{\ln(x)}$.
On reformule : $\dfrac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant x$. Quand x tend vers 0, les encadrants le font aussi, la fonction tend vers 0. On posera donc $f(0) = 0$. Sauf si on est con.





Pour l'intégrale, on utilise la relation de Chasles. On va découper $[0,\ 1]$ en intervalles où la partie entière du logarithme est constante. : $\left[\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] = n$ avec n négatif.

Plus précisément, c'est sur $[2^{-N},\ 1[$ qu'on va travailler, puis on fera tendre N vers 0.

Sut $[2^{-n},\ 2^{-n+1}[$, on a

$$\begin{gathered} 2^{-n} \leqslant x < 2^{1-n} \\ -n.\ln(2) \leqslant \ln(x) < (1-n).\ln(2) \\ -n \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < 1-n \\ -n = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] < 1-n \\ f(x) = 2^{-n} \end{gathered}$$

Chaque petite intégrale $\displaystyle\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f(t).dt$ vaut donc $(2^{1-n} - 2^{-n}).2^{-n}$.

Il reste à sommer jusqu'au rang n, puis jusqu'à l'infini : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (2^{1-n} - 2^{-n}).2^{-n} = \sum_{n=1}^{N} 2^{-2.n} = \frac{\frac{1}{4} - o(1)}{1 - \frac{1}{4}}$.

L'aire totale vaut $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ Un cadeau à qui le prouve géométriquement, par un simple puzzle *(avec deux pièces identiques de même aire qui recouvrent un carré de côté 1)*..

◁33▷ Montrez que pour tout choix de u_0 la suite $u_{n+1} = [e^{14.\cos(u_n/12)}]$ est périodique à partir d'un certain rang *(indication : principe des tiroirs)*.

A partir du rang 1, la suite ne peut prendre que 'un nombre fini de valeurs. En effet, $e^{14.\cos(u_n/12)}$ est entre 0 et e^{14}. Sa partie entière n'a qu'un nombre fini de valeurs possibles (en l'occurence $[e^{14}+1]$ qu'on va noter N).

Les $N+1$ entiers u_1 à u_{N+1} sont à placer dans N cases.
Il y en a donc deux qui prennent la même valeur.
$u_a = u_b$ avec $a < b$.
Mais alors $f(u_a) = f(u_b)$(en notant f l'application d'itération).
En recommençant $u_{a+2} = u_{b+2}$ puis $u_{a+n} = u_{b+n}$ pour tout n.
A partir de là, la suite est périodique de période $b-a$.

Mon ex se tasse. Elle se dilate la rate en chicanant. On apprécie les actions des recteurs. Corneille veut voir son Clitandre bientôt. Vive les fêtes soutenues. Ils veulent des facs animées.

◁34▷ La quantification classique de notre cours est : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Il manque des niveaux de parenthèses.

Je propose de disposer ainsi les parenthèses :	$\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(\lvert u_n - \lambda\rvert \leqslant \varepsilon\Big)$
$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(\lvert u_n - \lambda\rvert \leqslant \varepsilon\Big)$	$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(\lvert u_n - \lambda\rvert \leqslant \varepsilon\Big)$

Est-ce correct ? Sinon, comment corriger ?
S'agit de la quantification de ((u_p) converge), de ((u_n) converge vers λ), de ((λ) converge vers (u_n)), de ($u_n \simeq \lambda$ à εprès), (toutes les suites convergent vers λ) ?

◁35▷

♡ Soit u une suite réelle. Montrez que si u converge, alors pour tout réel λ, $\lambda.u_{n+1}+u_n$ converge aussi.

♡ On suppose que $u_{n+1}+u_n$ converge quand n tend vers l'infini. Montrez *(par un contre-exemple)* que u ne converge pas forcément.
♣ On suppose que $2.u_{n+1}+u_n$ *(notée v)* converge vers 0.
Calculez $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.v_k$. En utilisant le théorème de Cesàro généralisé (c'est celui de Cesarbi dans l'exercice plus haut), déduisez que u converge aussi vers 0.
Montrez que si v converge vers α alors u converge *(vers quoi ?)*.

Montrez que si $u_{n+1}+2.u_n$ converge, alors u ne converge pas forcément.

Première question facile : théorèmes algébriques : $\lambda.u_{n+1}+u_n$ converge vers $(1+\lambda).\alpha$ si αest la limite de la suite. [5].

Un exemple où que $(u_{n+1}+u_n)$ converge mais pas (u_n) ? Non, franchement, je ne vois pas... vouscroyez que ça sort tout seul les contre-exemeples ?
Bon, on va voir...

Passons à l'exercice un peu sympathique.
On pose donc $v_n=2.u_{n+1}+u_n$ et on calcule $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.v_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.2.(u_{k+1}+u_k)$
On sépare en $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^{k+1}u_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.u_k$.
On décalle en $\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p.2^p u_p+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.u_k$.
On soustrait même : $\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p.2^p u_p-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.2^k.u_k$.
On simplifie la partie commune : $(-1)^{n+1}.2^{n+1}.u_{n+1}-u_0$.

Que faire avec Cesaro ?
La suite $((-1)^{k+1}.v_k)$ tend vers 0 comme la suite (v_k).
Sa moyenne de Cesàro, avec pondération $(1,2,4,8,\dots 2^n,\dots)$ tend aussi vers 0.
On a donc $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.v_k}{\sum_{k=0}^{n}2^k}$ qui converge vers 0.
Avec nos simplifications : $\dfrac{(-1)^{n+1}.2^{n+1}.u_{n+1}-u_0}{2^{n+1}-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On simplifie, et voilà (u_n) qui converge aussi vers 0.

Que fait on si (v_n) converge vers β pas forcément nul ?
On translate pour avoir une suite (w_n) qui converge vers 0, en remplaçant u_n par $u_n-\dfrac{\beta}{3}$.

Trouvons un exemple où $(u_{n+1}+2.u_n)$ converge, mais pas (u_n).
Prenons $u_n=(-2)^n$ pour tout n. Cette suite diverge (non bornée, une extraction qui part vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$).
Mais quand on somme $(-2)^{n+1}+2.(-2)^n$ on trouve toujours 0 et là, cette suite converge.

◁36▷

♡ Montrez que l'application $x\longmapsto\cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$ est somme de deux applications périodiques, mais n'est pas périodique (combien de fois prend elle la valeur 2 ?).
Montrez que la suite $(\cos(n))$ n'est pas périodique.

$x\longmapsto\cos(x)$ est périodique de période $2.\pi$.
$x\longmapsto\cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période $\sqrt{2}.\pi$.

Si la somme était périodique de période p (pas plus connue que ça, allez la deviner !), elle reprendrait la même

5. et si on se dit que c'est juste le prof qui a oublié les parenthèses sans le faire exprès, confondant $(u_{n+1}+\lambda.u_n)$ et $u_{n+1}+\lambda.u_n$

valeur en 0 et en p.
On aurait donc $\cos(p)+\cos(\sqrt{2}.p)=1+1$.
Mais en écrivant $1\geqslant\cos(p)=\cos(p)+\cos(\sqrt{2}.p)-\cos(\sqrt{2}.p)=2-\cos(\sqrt{2}.p)\geqslant 2-1=1$
on arrive à $\cos(p)=1$ puis $\cos(\sqrt{2}.p)=1$.
Ceci force p à être à la fois de la forme $2.k.\pi$ avec k entier et de la forme $\sqrt{2}.q.\pi$ avec q entier.
En effaçant p, ceci donne $\sqrt{2}=\dfrac{k}{q}$. Ce qui est irrationnel !
p ne peut pas exister.

Si la suite $(\cos(n))$ était périodique, elle prendrait la même valeur en 0 qu'en p. Et p (entier) serait aussi multiple de $2.\pi$.
C'est impossible (sauf avec $p=0$ mais 0 n'est pas une période).

◁ 37 ▷

f et g sont croissantes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :

$$\int_0^1 f(t).dt.\int_0^1 g(t).dt\leqslant\int_0^1 f(t).g(t).dt$$

(indication $(x,\ y)\longmapsto(f(y)-f(x)).(g(y)-g(x))$ sur $[0,\ 1]^2$).

Quand x et y sont tous deux entre 0 et 1, le produit $(f(y)-f(x)).(g(y)-g(x))$ est toujours positif ou nul.
En effet, pour x plus petit que y on a la forme « plus fois plus »
et dans l'autre cas c'est « moins par moins ».

L'intégrale double $\int_{x=0}^1\int_{y=0}^1(f(y)-f(x)).(g(y)-g(x)).dy.dx$ est donc positive.

On développe et sépare en quatre termes par linéarité.
On en fait passer de l'autre côté :
$\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx+\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx\geqslant\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(x).dy\Big).dx+\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx$
Le temps de la preuve, notons H l'application $f\times g$ (c'est $x\longmapsto f(x).g(x)$).
Regardons par exemple $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 H(y).dy\Big).dx$.
Si on décide de noter S le nombre $\int_{y=0}^1 H(y).dy$, on a $\int_{x=0}^1 S.dx=S$.
Passons à $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 H(x).dy\Big).dx$. Chaque intégrale $\int_{y=0}^1 H(x).dy$ vaut $H(x).1$.
L'intégrale $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 H(x).dy\Big).dx$ vaut $\int_{x=0}^1 H(x).dx$ et c'est donc encore S.
Dans $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx$, on peut sortir $f(x)$ de l'intégrale dite « en y » :

$$\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx=\int_{x=0}^1 f(x).\Big(\int_{y=0}^1 g(y).dy\Big).dx$$

Le réel $\int_0^1 g(t).dt$ ne dépend plus de x, c'est une « constante » qu'on va pouvoir sortir :

$$\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx=\Big(\int_{y=0}^1 g(y).dy\Big).\int_{x=0}^1 f(x).dx$$

On a trouvé le produit de deux intégrales $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx=\Big(\int_{y=0}^1 g(y).dy\Big).\Big(\int_{x=0}^1 f(x).dx\Big)$.
Comme les variables sont muettes, on l'écrit aussi

$$\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx=\Big(\int_0^1 g(t).dt\Big).\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big)$$

L'intégrale $\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(x).dy\Big).dx$ se traite de la même façon et donne

$$\int_{x=0}^1\Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(x).dy\Big).dx=\Big(\int_{y=0}^1 f(y).dy\Big).\Big(\int_{x=0}^1 g(x).dx\Big)=\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big).\Big(\int_0^1 g(t).dt\Big)$$

Si on reporte dans l'inégalité à quatre intégrales, on trouve

$$2.\int_0^1 f(t).g(t).dt \geqslant 2.\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big).\Big(\int_0^1 g(t).dt\Big)$$

Et comme *é* est positif, on peut simplifier sans changer le sens des inégalités.

Bon, d'accord, pas besoin de l'argument « 2 est positif ».

◁38▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de cette différence de radicaux $\sqrt{n+5}-\sqrt[4]{n^2+3.n+4}$.

On n'écrit pas « limite » tant qu'on n'a pas prouvé l'existence, même si le sujet tend à signifier qu'il y en a une.
On conjugue en une seule fois relativement aux puissances 4 (ce à quoi vous joue au tableau...).

Conseil : | Donnez un nom aux quantités pour ne pas avoir un dénominateur indigeste :
$a = \sqrt{n+5}$ et $b = \sqrt[4]{n^2+3.n+4}$

$$\sqrt{n+5}-\sqrt[4]{n^2+3.n+4} = a-b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2.b+a.b^2+b^3} = \frac{(n+5)^2-(n^2+3.n+4)}{a^3+a^2.b+a.b^2+b^3}$$

Le numérateur est équivalent à $7.n$ et le dénominateur est fait de quatre termes tous équivalents à $n^{3/2}$.
Le quotient tend vers 0. C'est la valeur de la limite cherchée. Et on a un équivalent.

◁39▷ Trouvez une primitive de $t \longmapsto t.e^t.\cos(t)$ en intégrant par parties *(mais qui sont les deux parties ?)*.
Dérivez $t \longmapsto \big((a.t+b).\cos(t)+(c.t+d).\sin(t)).e^t\big)$. Retrouvez le résultat précédent avec un peu moins d'efforts.

On a plusieurs possibilités, qui tournent un peu en rond.
On va poser $A = \int^x t.e^t.\cos(t).dt$ et $B = \int^x t.e^t.\sin(t).dt$ car on a deviné que l'on allait croiser les quatre.
puis $C = \int^x e^t.\cos(t).dt$ et $D = \int^x e^t.\sin(t).dt$

$t.\cos(t)$	$\hookrightarrow$	$\cos(t)-t.\sin(t)$	$: A = [e^t.t.\cos(t)] - C + B$
e^t	$\hookleftarrow$	e^t	
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$	$A = [t.e^t.\sin(t)] - D - B$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t+t.e^t$	

On fait de même avec B par parties de deux façons

$t.\sin(t)$	$\hookrightarrow$	$\sin(t)+t.\cos(t)$	$: B = [e^t.t.\sin(t)] - D - A$
e^t	$\hookleftarrow$	e^t	
$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$	$B = [-t.e^t.\cos(t)] - C + A$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t+t.e^t$	

Ce sont les mêmes relations, on n'a rien de plus...

Il faut donc intégrer C et D par parties pour avoir des relations qui les lient ensemble.
On a cette fois $\int^x e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$ et $\int^x e^t.\sin(t).dt = \Big[\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$

On reporte : $\int^x t.e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{t.\cos(t)+t.\sin(t)-\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$
et $\int^x t.e^t.\sin(t).dt = \Big[\frac{-t.\cos(t)+\cos(t)+t.\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$

On peut aussi intégrer a priori sous la forme proposée : $t \longmapsto \big((a.t+b).\cos(t)+(c.t+d).\sin(t)).e^t\big)$.

On la dérive et on arrange tous les termes en

$$\begin{array}{llll} a.t.\cos(t).e^t & +a.\cos(t).e^t & -a.t.\sin(t).e^t & \\ & +b.\cos(t).e^t & & -b.\sin(t).e^t \\ c.t.\cos(t).e^t & & +c.t.\sin(t).e^t & +c.\sin(t).e^t \\ & +d.\cos(t).e^t & & +d.\sin(t).e^t \end{array}$$

On regroupe en on exige : $a+c=1$, $a+b+d=0$, $-a+c=0$ et $-b+c+d=0$.
On retrouve finalement nos $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$ et 0.

$$\boxed{\int^x t.e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{t.\cos(t)+t.\sin(t)-\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x}$$

◃40▹ ♡ Étudiez la convergence de la suite $((-1)^n.(4.n^2+2.n+1))$, de sa moyenne de Cesàro, de la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro, et ainsi de suite.
Encore une fois un conseil (mais comme vous vous obstinez à croire que les maths sont des formules et du calcul, ne le lisez pas et retournez passer le bac) *: calculez déjà les premiers termes.*

Calculons les premiers termes de la suite, de sa moyenne et de la moyenne de sa moyenne...

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	-7	21	43	73	111	157	211
Cesàro	1	-3	5	-7	9	-11	13	-15
Cesàro de Cesàro	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Aurait on une suite a telle que

a diverge
sa moyenne diverge c'est $(-1)^n.(2.n+1))$
la moyenne de sa moyenne diverge (c'est $((-1)^n)$
la moyenne de la moyenne de sa moyenne converge (vers 0)

On démontre alors par récurrence les formules : $c_n = (-1)^n.(2.n+1)$.
C'est initialisé ci dessus.
On suppose, pour un n donné quelconque :

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = (-1)^{n-1}.(2.n-1)$$

On passe au rang suivant :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1)\Big)$$

On remplace grâce l'hypothèse :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1)+n.(-1)^{n-1}.(2.n-1)\Big)$$

On factorise :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1-2.n^2+n)\Big)$$

On simplifie :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(2.n^2+3.n+1\Big)$$

On factorise :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.(n+1).(2.n+1)$$

On simplifie :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = (-1)^n.(2.n+1)$$

C'était la formule attendue.

Cet exercice est une belle récurrence, niveau Sup. C'est le type de travail qu'on attend de vous en MP et en PSI pour réussir à la base. Et après, il y aura aussi des théorèmes évidemment, mais ce type d'exercice est un bon début.

Je vous laisse montrer ensuite $\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(2.k+1) = (-1)^n$.

Ce que je cache derrière cet exercice : des ensembles emboités les uns dans les autres :
A_0 *: les suites convergentes*
A_1 *: les suites convergentes ou non mais dont la moyenne de Cesàro converge*
A_2 *: les suites qui ne convergent pas forcément mais dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge et ainsi de suite.*
Le théorème « si une suite converge, alors sa moyenne converge vers la même limite » dit : $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \ldots$.

◃ 41 ▹

♠ Soient u et v deux suites. On suppose que $u.v$ tend vers 0 à l'infini. Montrez par un contre-exemple qu'on ne peut pas en déduire que u ou v tend vers 0 à l'infini.
On veut montrer qu'il existe une sous-suite de u ou une sous-suite de v qui tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'il existe N_0 vérifiant $|u_{N_0}.v_{N_0}| \leqslant 1$. Montrez qu'il existe N_1 plus grand que N_0 vérifiant $|u_{N_1}.v_{N_1}| \leqslant 1/4$. Montrez qu'il existe N_2 plus grand que N_1 vérifiant $|u_{N_2}.v_{N_2}| \leqslant 1/16$. Montrez l'existence d'une suite croissance (N_n) vérifiant $|u_{N_n}.v_{N_n}| \leqslant 1/4^n$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$. Montrez : $A^c \cap B^c = \emptyset$. Déduisez $A \cup B = \mathbb{N}$. Déduisez que A ou B est infini. Concluez.

Prenons la suite $(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots)$ et son « complément » $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ldots)$.
Aucune ne tend vers 0, mais leur produit converge vers 0 (il est carrément nul).

On suppose que $(u_n.v_n)$ converge vers 0. On traduit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R_\varepsilon,\ \forall n \geqslant R_\varepsilon,\ |u_n.v_n| \leqslant \varepsilon$.
En particulier (pour ε), à partir du rang R_1 on a $|u_n.v_n| \leqslant 1$.
En particulier (pour n) on a $|u_{R_1}.v_{R_1}| \leqslant 1$. On posera donc $N_0 = R_1$.

On recommence avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. A partir du rang $R_{1/4}$ on a la majoration $|u_n.v_n| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Quel n choisir alors pour avoir non seulement $N_1 > N_0$ mais aussi $N_1 \geqslant R_{1/4}$?
Tout simplement $Max(R_{1/4},\ N_1 + 1)$.

Supposons construits les indices croissants $N_0 < N_1 < \ldots < N_n$ vérifiant $|u_{N_k}.v_{N_k}| \leqslant \frac{1}{4^k}$ pour tout k de 0 à n.
On sait qu'à partir du rang $R_{1/4^{n+1}}$ on a $|u_p.v_p| \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}}$. Mais on veut un rang plus grand que N_n.
On va donc choisir $N_{n+1} = Max(R_{1/4^{n+1}},\ N_n + 1)$.

Les ensembles $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ sont des ensembles d'entiers.
On a aussi $A^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| > 1/2^n\}$ et $B^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| > 1/2^n\}$.
On poursuit avec $A^c \cap B^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| > 1/2^n\ et\ |v_{N_n}| > 1/2^n\}$.
S'il y avait un entier n dans cet ensemble, il vérifierait $|u_{N_n}| > \dfrac{1}{2^n}$ et $|v_{N_n}| > \dfrac{1}{2^n}$ puis par produit entre réels positifs $|u_{N_n}.v_{N_n}| > \dfrac{1}{4^n}$.
Et par construction de la suite des indices (N_n) ceci est impossible.

On retient l'idée : si le produit de deux nombres est petit, alors au moins un des deux est petite.
Ce peut être les deux. Mais il se peut qu'il y en ait un « grand » mais alors l'autre est « très petit ».
Et en fait, l'idée est « si $a.b < \varepsilon$ alors $a \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ ou $b \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.
Et il suffit de raisonner par contraposée.

On passe au complémentaire par les lois de Morgan :

$$A^c \cap B^c = \emptyset\ donc\ (A \cup B)^c = \emptyset\ puis\ (A \cup B) = \mathbb{N}$$

Et vous savez quoi ? Si leur réunion fait $\mathbb{N}$ alors l'un au moins est infini (contraposée là encore).

Sans perte de généralité, on va dire que A est infini.

Il existe une infinité d'entiers n vérifiant $|u_{N_n}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

On indexe ces entiers par ordre croissant, et on a une sous-sous-suite $(u_{N_{\varphi(n)}})$ vérifiant $\forall n,\ |u_{N_{\varphi(n)}}| \leqslant \dfrac{1}{2^{\varphi(n)}}$.
Par encadrement, cette sous-suite de (a_p) tend vers 0.

◃ 42 ▹

Montrez que si a est une suite d'entiers naturels strictement positifs, croissante, non constante égale à 1, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$ converge. Montrez que la limite est rationnelle si la suite (a_n) est stationnaire.

On regarde ici ce qu'on appelle une série de Engel.
La suite est faite d'entiers strictement positifs. Aucun dénominateur $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$ ne va s'annuler.

La suite n'est pas constante égale à 1. Il existe donc au moins un terme a_{n_0} strictement plus grand que 1.
Mais alors, à partir du rang n_0 tous les termes sont plus grands que a_{n_0}.
dans le produit, on peut donc minorer par $(a_{n_0})^{truc}$.
Proprement, pour n plus grand que n_0

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).\Big(\prod_{k=n_0}^{n} a_k\Big) \geqslant \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).\Big(\prod_{k=n_0}^{n} a_{n_0}\Big) = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).(a_{n_0})^{n-n_0+1}$$

Pour me simplifier la vie, je pose $A = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).(a_{n_0})^{-n_0+1}$ (que je qualifie de constante car il ne dépend pas de n) et j'ai $\prod_{k=0}^{n} a_k \geqslant A.(a_{n_0})^n$.

Je passe à l'inverse $\dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \dfrac{1}{A.(a_{n_0})^n}$. Je reconnais une série géométrique de raison $\dfrac{1}{a_{n_0}}$.

La série à termes positif $\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$ est croissante avec N. On va la majorer pour la faire converger.

On somme avec N plus grand que n_0

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(a_{n_0})^n}$$

On effectue la somme et on majore

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\dfrac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}} - \dfrac{1}{(a_{n_0})^{-N}}}{1-\dfrac{1}{a_{n_0}}}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\frac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}}}{1-\dfrac{1}{a_{n_0}}}$$

Le joli majorant du membre de droite ne dépend pas de N. C'est un majorant.

La série croissante majorée converge.

Tout devient facile si la suite est constante à partir du rang n_0. Nos inégalités sont alors des égalités dans tout ce qui précède

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\dfrac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}} - \dfrac{1}{(a_{n_0})^{-N}}}{1-\dfrac{1}{a_{n_0}}}$$

et en sommant tout

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\dfrac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}}}{1-\dfrac{1}{a_{n_0}}}$$

Les sommes et produits finis du membre de droite donnent un rationnel.

Mais on ne trouve sa valeur simple.

◁ 43 ▷ Créez une classe où soixante pour cent des filles sont anglicistes et ou trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons.

Comme rien n'est précisé, on va dire qu'on a deux découpages : garçons/filles d'une part, anglicistes/germanistes de l'autre (tant pis pour les hispanophones ou autres).

On note les quatre effectifs et on traduit les deux informations :

	garçons	filles
anglicistes	a	b
germanophones	c	d

soixante pour cent des filles sont anglicistes	trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons
anglicistes : a, b ; germanophones : c, d (garçons, filles)	anglicistes : a, b ; germanophones : c, d (garçons, filles)
$\dfrac{b}{b+d} = \dfrac{60}{100}$	$\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{35}{100}$

On n'a donc que deux équations : $3.d = 2.b$ et $13.a = 7.b$.
On peut donc choisir c comme on veut, sans influence sur le reste, puis par exemple $b = 39$ pour avoir des effectifs entiers :

	garçons	filles	
anglicistes	21	39	60 anglicistes
germanophones	c	26	
		65 filles	

On vérifie : pourcentage d'anglicistes parmi les filles $\dfrac{39}{65} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{60}{100}$
et pourcentage de garçons parmi les anglicistes : $\dfrac{21}{60} = \dfrac{7}{20} = \dfrac{35}{100}$.

Et il peut y avoir trois mille garçons germanophones, ça ne changerait rien aux informations initiales.

◁ 44 ▷ Soit $E, \leqslant$ un ensemble ordonné. Montrez que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire (c'est à dire « constante à partir d'un certain rang »). Montrez que c'est le cas pour $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.

◁ 45 ▷ ♡ Montrez que la réunion de deux segments n'est pas forcément un segment.
Montrez que la réunion de deux segments ayant un point commun est encore un segment.
Montrez que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ \dfrac{n}{n+1}\right]$ n'est plus un segment.

$[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$ n'est pas un segment.

Si $[a,\ b]$ et $[\alpha,\ \beta]$ ont un point commun c, leur réunion est $[Min(\alpha, a),\ Max(\beta, b)]$.
Sans restreindre la généralité, on va supposer $a \leqslant \alpha$.
Tout point de $[Min(a,\alpha), c]$ est dans $[a,\ c]$ donc dans $[a,\ b]$ donc dans la réunion.
Tout point de $[c,\ Max(\beta, b)]$ est dans $[c,\ \beta]$ (ou $[c,\ b]$, sans perte de généralité). Il est donc dans $[c,\ \beta]$ donc dans la réunion $[a,\ b] \cup [\alpha,\ \beta]$.
Et on montre l'inclusion dans l'autre sens.
Ou on fait un dessin.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ \dfrac{n}{n+1}\right] = [0,\ 1[$. C'est un intervalle, mais pas un segment.
Les réels négatifs ne sont dans aucun intervalle, donc pas dans la réunion.
1 n'est dans aucun de ces intervalles, donc pas dans la réunion. De même, les réels plus grand que 1.
Tout réel α de $[0,\ 1[$ est dans au moins un de ces ensembles. Il suffit d'avoir $\dfrac{n}{n+1} \geqslant \alpha$.
C'est réalisé pour $n = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1$.

◁ 46 ▷ ♡ On définit $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est négative. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) converge et calculez sa limite.
On définit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est positive. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) ne peut pas converger. Concluez.

On commence par le cas $u_0 < 0$.

Par récurrence déjà initialisée, u_n est négatif pour tout n.
Si pour un n donnéu_n est négatif, alors e^{u_n}est plus petit que 1 et u_{n+1} est négatif.

On se donne n et on veut montrer $u_{n+1} \geqslant u_n$. Il suffit de comparer $e^x - 1$ et x.
Or, on sait $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout x.
On a donc $e^{u_n} \geqslant u_n + 1$ pour tout n ce qui est bien l'inégalité cherchée.

Comment a-t-on cette minoration ?
Le faux mathématicien (suivez mon regard) dira : par développement limité : $e^x = 1 + x + ...$ et trois petits points c'est positif.
Quelle arnaque ! Jamais personne ne vous croira.
Le mathématicien de lycée crée l'application $t \longmapsto e^t - t - 1$, la dérive, la trouve décroissante puis croissante.
Or, en 0 , quand elle atteint son minimum, elle est nulle.
C'est donc qu'elle est toujours positive.
C'est joli et on applaudit. Mais on dit que c'est lourd.
L'élève de Prépas sort la formule de Taylor à l'ordre 1 : $e^x = 1 + x + x^2.\int_0^1 (1-t).e^{t.x}.dt$. Le reste intégrale est l'intégrale d'une application positive (multiplié par x^2 positif). Il est donc positif.
Et il ne sera nul qu'en 0.
On constate que le faux matheux a presque trouvé la bonne réponse. mais il a confondu développement limité et formule de Taylor, ce qui prouve qu'il n'est pas matheux du tout alors qu'il a presque les bonnes intuitions. Quel gâchis !

La suite est croissante, négative, elle converge.

Par passage à la limite, sa limite λ vérifie $e^\lambda = 1 + \lambda$. Et la seule solution est $\lambda = 0$.

On était tenté de le dire, mais il fallait le prouve,r c'est vers 0 que converge (u_n).

Passons au cas positif. Cette fois, la récurrence passe aussi bien.
Si pour un n donné quelconque on suppose $u_n > 0$ alors e^{u_n}est plus grand que 1 et u_{n+1} est aussi positif.

L'inégalité $e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$ est vraie, quel que soit le signe de u_n.
La suite est encore croissante.

Étant croissante majorée, elle n'a que deux possibilités.
Diverger vers $+\infty$ (et ce sera le cas par élimination).
Converger vers son plus petit majorant. Mais dans ce cas, sa limite μ vérifie $e^\mu = 1 + \mu$ ce qui donne $\mu = 0$. Mais une suite croissante strictement positive ne peut converger vers 0.

On a donc bien $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

Attention, il fallait bien raisonner ici par élimination.

◁47▷ Montrez que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ converge.

On note $A_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$. Montrez : $|A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1}| \geqslant \frac{2.N}{\sqrt{N^2}}$. Déduisez que (A_N) diverge.

Le terme général $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Condition nécessaire validée.
Il est de signe quelconque (disons qu'il change parfois), on va regarder la série avec valeur absolue.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2} \right|$ est croissante. On majore terme à terme $\left| \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1).(n+2)}$.
La série de terme général $\dfrac{1}{(n+1).(n+2)}$ converge (avec une somme connue, par télescopage).
Par théorème de convergence absolue, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$existe.

Mais on ignore sa valeur.

Le terme général $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 0. on n'a pas la divergence dite grossière.
Mais rien ne permet de conclure.

Si on tente la convergence en valeur absolue, $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}\right|$ *est infini, et on ne peut pas conclure.*

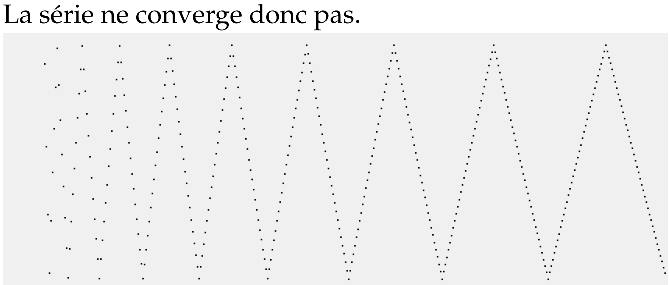
On calcule la différence proposée par relation de Chasles :

$$A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1} = \sum_{n=0}^{N^2+2.N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)} - \sum_{n=0}^{N^2-1}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)} = \sum_{n=N^2}^{N^2+2.N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)}$$

Mais tant que n est entre N^2 et $N^2+2.N$, il vérifie $N^2 \leqslant n < N^2+2.N+1$ puis $N \leqslant \sqrt{n} < N+1$.
On a donc $[\sqrt{n}] = N$ pour tous les termes de la somme en même temps.
On peut donc sortir le $(-1)^N$ et passer à la valeur absolue

$$|A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1}| = \left|(-1)^N.\sum_{n=N^2}^{N^2+2.N}\frac{1}{(n+1)}\right| = \sum_{n=N^2}^{N^2+2.N}\frac{1}{(n+1)}$$

Combien a-t-on de termes ? On en a $2.N+1$.
Le plus petit est le dernier, et il vaut $\dfrac{1}{\sqrt{N^2+2.N+1}}$.
On peut donc minorer cette somme par $\dfrac{2.N+1}{\sqrt{N^2+2.N+1}}$.
Ce minorant a pour limite 2 quand N tend vers $+\infty$.
Si la série convergeait vers une somme S, les deux quantités $A_{N^2+2.N}$ et A_{N^2-1} devraient converger vers la même limite, et la différence tendrait vers 0.
Tout en étant minorée par 2. C'est contradictoire.
La série ne converge donc pas.



◁48▷ ♡ Quels sont les complexes z pour lesquels au moins une des deux séries suivantes converge : $\left(\sum_{n=0}^{N} e^{n.z}\right)_N$, $\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\right)_N$.

$\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si $|z|$ est strictement plus petit que 1.

C'est du cours, mais si vous y tenez. On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$.

On calcule $S_N - S_{N-1} = z^N$. Si $|z|$ est supérieur ou égal à 1, la différence $S_N - S_{N-1}$ ne converge pas vers 0, la suite ne peut donc pas converger.

Sinon, on peut calculer $S_N = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}$. Avec la condition maintenant suffisante $|z| < 1$, la convergence est assurée vers $\dfrac{1}{1-z}$.

On a donc : $\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Cette phrase me déplait, car on y mélange phrase en français $\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si (avec un nom propre $\sum_{n=0}^{N} z^n$) et phrase en langage mathématique $|z| < 1$.
Si vous comprenez l'incohérence langagière, vous êtes matheux.
Si elle ne vous choque pas, vous êtes physicien oui, on peut être les deux).
Si elle vous choque, vous êtes vraiment matheux.

Passons à $\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\Big)_N$ où on traite à part le cas $z = 1$.

Pour z égal à 1, on a $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$, la série diverge.

Sinon, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1-z}{1-z^{n+1}}$ si tout va bien.

Oui, je dis « si tout va bien », car si z est une racine de l'unité (complexe de la forme $e^{2.i.k.\pi/p}$ pour au moins un couple $(k,\ p)$, c'est à dire de la forme $e^{i.r.\pi}$avec r rationnel), l'un des termes de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}$ n'existe même pas.

On simplifie $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = (z-1).\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z^{n+1}-1}$ et on s'intéresse à la série de terme général $\frac{1}{z^{n+1}-1}$ et aussi à celle de terme général $\frac{1}{|z^{n+1}-1|}$.
Condition nécessaire : le terme général doit tendre vers 0.
Il faut donc que z^{n+1} tend vers l'infini : $|z| > 1$.

Est elle suffisante ? Pour $|z| > 1$, on a $|z^{N+1}-1| \sim |z|^{N+1}$ quand N tend vers l'infini.
Le critère de comparaison sur les séries à termes positifs dit :
$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z^{n+1}-1|}$ et $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z|^{n+1}}$ sont de même nature.Or, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z|^{n+1}}$ converge (géométrique, de raison plus petite que 1 en valeur absolue.
On a donc la convergence de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z^{n+1}-1|}$.

Le théorème de convergence en valeur absolue donne la convergence de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z^{n+1}-1}$ et de la série proposée.

Bilan :

	$|z| < 1$	$z = 1$	$|z| = 1$	$z = -1$	$|z| > 1$
$\Big(\sum_{n=0}^{N} e^{n.z}\Big)_N$	converge	diverge	diverge	diverge	diverge
$\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\Big)_N$	diverge	diverge	existence ?	n'existe pas	converge

◃49▹ Montrez que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée admet une sous-suite périodique.

Par principe des tiroirs déjà croisé dans un autre exercice, si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est bornée, il existe une valeur qui est atteinte une infinité de fois.
On construit alors une suite constante.
Et une suite constante est périodique. De période 1.

◃50▹ Prouvez que de toute suite de période 5 *(exactement)* on peut extraire une suite de période 11 *(exactement)*.

La suite est périodique non constante. Elle prend donc au moins deux valeurs différentes.

De la forme $(a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots)$.

On construit une sous-suite qui prend dix fois de suite la valeur a, puis la valeur b (différente de a, sinon, c, ou d ou e). Puis à nouveau onze fois a, puis b. Et ainsi de suite.

Si la suite initiale s'appelle (u_n), il suffit de dire $V_n = \begin{matrix} u_{5.n} & si & n \neq 0\ [11] \\ u_{5.n+1} & si & n = 0\ [11] \end{matrix}$.

L'erreur des élèves est de vouloir extraire une sous-suite selon un critère $b_n = a_{2.n}$ ou $b_n = a_{3.n+1}$ ou $b_n = a_{5.n+7}$ ou toute autre formule d'une rigidité cadavérique, qui n'accepte aucune fantaisie...

◁ 51 ▷ Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$		

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$	$u_n = v_n = 1$	$u_n = n$ et $v_n = n + 1$
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$	$u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$	$u_n = n$ et $v_n = n^2$