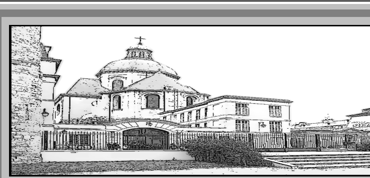
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 17 mars
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD21

◁ 0 ▷ Un réel α est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers α. Montrez que tout point de A est adhérent à A. Qui sont les points adhérents à $\mathbb{Z}$?
Montrez que tout points adhérent à A est adhérent à $A \cup B$. Montrez que tout point adhérent à $A \cup B$ est adhérent à A ou adhérent à B (d'une suite (c_n), *ne gardez soit que les points de A ou soit que les points de B)*.
Montrez par un contre-exemple que l'on peut être adhérent à A et à B sans être adhérent à $A \cap B$.

◁ 1 ▷ On rappelle les définitions :

$\mathring{A}$	intérieur de A	$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0,\ [a-\alpha,\ a+\alpha] \subset A)$
$\overline{A}$	adhérence de A	$c \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0,\ [c-\alpha,\ c+\alpha] \cap A \neq \emptyset$

Complétez

A	$]0,\ 1]$	$\mathbb{Q}$	$([0,\ 1] \cap \mathbb{Q} \cup ([1,\ 2] \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}))$	$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{A}$	$]0,\ 1[$	$\emptyset$		$]0,\ 1[$
$\overline{A}$	$[0,\ 1]$	$\mathbb{R} =]-\infty,\ +\infty[$		$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{\overline{A}}$	$]0,\ 1[$	$\mathbb{R}$		$]0,\ 1[$
$\overline{\mathring{A}}$	$[0,\ 1]$	$\emptyset$		$[0,\ 1]$
$\overline{A} - \mathring{A}$	$\{0,\ 1\}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{Z}$

Trouvez un ensemble pour lequel les six lignes sont toutes distinctes.

Pourquoi est ce que je ne demande rien sur $\overline{\overline{A}}$ ni sur $\mathring{\mathring{A}}$?

Montrez que le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A.
Trouvez une phrase avec complémentaire de l'adhérence.

Lesquelles sont vraies

l'adhérence	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'adhérence	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'intérieur	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B
l'intérieur	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B

◁ 2 ▷ Un peu de topologie, pour qui veut s'amuser à regarder les étoiles.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On définit intérieur et adhérence (notées aussi $\dot{A}$ et $\overline{A}$) :

$Int(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\subset A\}$	$Adh(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\cap A \neq \emptyset\}$

Montrez : $Int(A) \subset A \subset Adh(A)$.
Montrez qu'un réel a est dans $Adh(A)$ si et seulement si il est limite d'au moins une suite de points de A.
Complétez *(et expliquez pourquoi la colonne $*$ est impossible)* :

A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	$[0,\ 1[$	$\mathbb{Z} \cup]3/2,\ 5/2[$		$*$	
$Int(A)$						$]0,\ 1[$	$[0,\ 1]$	
$Adh(A)$						$[0,\ 2]$	$[0,\ 1]$	

Montrez $In(Int(A)) = Int(A)$ et $Adh(Adh(A)) = Adh(A)$.
Montrez : $Int(A^c) = (Adh(A))^c$ et $Adh(A^c) = (Int(A))^c$.
Montrez : $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$. Montrez $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, et donnez un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

◁ 3 ▷ ♡ On dit que α est une **valeur d'adhérence** de la suite u si il existe une sous-suite de u qui converge vers α.
1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.
2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.
3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.
4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.
5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v, alors $\alpha + \beta$ est valeur d'adhérence de $u + v$. Montrez qu'il a tort *(contre-exemple universel ?)*.
6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ alors elle est valeur d'adhérence de (u_n).
♣ Peut on montrer que si α est valeur d'adhérence de (u_n) alors elle est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ ou de

$(u_{2.n+1})$?
Montrez que 0 et 1 sont valeurs d'adhérence de $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$.
♠ Montrez que la suite $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$ a une infinité de valeurs d'adhérences.

◁ 4 ▷ On rappelle la définition de A est un ouvert de $\mathbb{R}$: $\forall \alpha \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon] \subset A$.
Montrez que si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont ouverts.
Montrez que chaque $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ est ouvert. Montrez que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ n'est plus un ouvert.
Montrez que si chaque A_i est un ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est encore un ouvert.
Soit A un ouvert et (b_n) une suite à valeurs dans A^c (complémentaire). On suppose que (b_n) converge vers β. Montrez (par l'absurde) que β est aussi dans A^c.

◁ 5 ▷ ♠ On appelle section ouverte finissante toute partie A non vide de $\mathbb{Q}$ majorée vérifiant

$$\big(\forall a \in A,\ \exists b \in A,\ a < b\big)\ et\ \big(\forall a \in A,\ \forall c \in \mathbb{Q},\ c \leqslant a \Rightarrow c \in A\big)$$

- 1 - Montrez que pour tout rationnel r, l'ensemble $]-\infty,\ r[$ est une coupure.
- 2 - Montrez que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\ ou\ x \leqslant 0\}$ est une section ouverte finissante.

- 3 - Montrez que l'inclusion est une relation d'ordre sur les sections ouvertes finissantes.
- 4 - Montrez que cet ordre est total.

Pour A et B sections, on définit $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Montrez que c'est une section ouverte finissante.
- 5 - Montrez que cette addition est commutative et associative et que $\mathbb{Q}^{-*}$ en est le neutre.
Soit A une section ouverte finissante. On définit

$$A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q},\ \forall a \in A,\ x < \alpha \leqslant -a\}$$

- 6 - Montrez que A' est une section ouverte finissante.
- 7 - Montrez : $A + A' = \mathbb{Q}^{-*}$.

On se donne une famille $(A_n)_{n \in I}$ de sections ouvertes finissantes toutes incluses dans une section ouverte finissante $\mathbb{A}$.
- 8 - Montrez que $\bigcup_{n \in I} A_n$ est encore une section ouverte finissante, contenant toutes les A_n.
- 9 - Montrez que toute section ouverte finissante contenant tous les A_n contient $Zdsp \bigcup_{n \in I} A_n$.
- 10 - L'ensemble des sections ouvertes finissantes est $\mathbb{R}$, et les questions au dessus montrent que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet un plus petit majorant.

◁ 6 ▷ Montrez qu'une suite vérifiant : $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\exists q,\ \forall n,\ a_n \geqslant a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.
Montrez qu'une suite vérifiant $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\forall n,\ \exists q,\ a_n < a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.

◁ 7 ▷ ♡ Montrez que si la suite (u_n) converge, alors la suite $(\sin(u_n))$ converge aussi. Montrez qu'on n'a pas de réciproque.

◁ 8 ▷

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Produits infinis

Déterminez la limite quand N tend vers l'infini de

$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$

Montrez pour tout t de $]0,\ 1[$: $t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1 + t) \leqslant t$.

x est un réel dans $]0,\ 1[$, le produit $\prod_{n=1}^{N} \left(1 + x^n\right)$ converge-t-il quand N tend vers l'infini ?

◁ 9 ▷

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Centrale PC

I∼0) On note UP l'ensemble des suites réelles ultimement périodiques ($\exists R \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant R,\ a_{n+p} = a_n$). Montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$.[1]
Est il de dimension finie ?[2]

II∼0) Montrez que toute suite ultimement périodique (a_n) est bornée.

II∼1) Déduisez que si (a_n) est ultimement périodique et x dans $[0,\ 1[$ alors la famille $(a_n.x^n)$ est sommable[3], et montrez que sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k$ est une fraction rationnelle en x (retrouvez les séries géométriques cachées).

III∼0) On définit la suite de Fivebonacci : $FV_0 = FV_1 = 1$ et $FV_{n+2} = (FV_{n+1} + FV_n)\%5$. Calculez ses vingt premier termes, et montrez qu'elle est ultimement périodique (période ?).

III∼1) Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} FV_k.x^k$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

IV∼0) On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$, $a_{2.n} = a_n$ et $a_{2.n+1} = -a_n$ pour tout n. Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 30}$.

IV∼1) Écrivez un script Python qui pour N donné retourne la liste $[a_0, \ldots a_N]$.

IV∼2) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$, la famille $(a_n.x^n)$ est sommable. On pose alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

IV∼3) Montrez que $S(x^2)$ existe aussi et prouvez : $S(x) = (1-x).S(x^2)$.

IV∼4) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$: $\left(\prod_{k=0}^{n}(1 - x^{(2^k)})\right)$ est décroissante, minorée, et convergente, et montrez que sa limite est justement $S(x)$.

IV∼5) Étudiez pour n donné $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{S(x)}{(1-x)^n}$.

IV∼6) Déduisez que a n'est pas ultimement périodique.

V∼0) On définit un opérateur : $f \longmapsto \phi(f) = \left(x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt\right)$ sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que ϕ est un endomorphisme de $(E, +, .)$ (ne vous trompez pas sur les étages).[4]

V∼1) Résolvez l'équation $\phi(f) = (x \longmapsto 0)$ en pensant à dériver.

V∼2) Déduisez que ϕ est injectif. ϕest il bijectif de $(E, +, .)$ dans $(E, +, .)$?

V∼3) Pour α réel, résolvez l'équation $\phi(f) = \alpha.f$ d'inconnue f. Donnez le spectre de ϕ.

VI∼0) Soit f continue et bornée, on pose $M = Sup(|f(t)|\ |\ t \in \mathbb{R})$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(f)(x)| \leqslant M.\dfrac{x^2}{2}$.

VI∼1) On définit (f_n) par $f_0 = f$ et $\forall n,\ f_{n+1} = \phi(f_n)$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.

VII∼0) On choisit à présent et jusqu'à la fin $f = \sin$. Explicitez f_1 et f_2.

VII∼1) Montrez sans récurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$.

VII∼2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$.

---

1. partie de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ contenant la suite nulle, et stable par combinaison linéaire $(\alpha.u + \beta.v)$.
2. existe-t-il une famille finie de suites de UP $(e_1, \ldots e_n)$ telle que toute suite de UP soit combinaison des e_k : $u = \sum_{k=1}^{n} a_k.e_k$
3. la famille des a_k (infinie pour que ceci ait de l'intérêt) est dit sommable si la somme (d'une infinité de termes) $\sum_{k\in K} |a_k|$ existe (« est majorée par un réel »), ce qui assurera par le cours que la somme $\sum_{k\in K} a_k$ existe aussi
4. application de E dans E, linéaire $(\alpha.\phi(f) + \beta.\phi(g) = \phi(\alpha.f + \beta.g))$

VII$\sim$3) Pour p entier donné, on note F_p l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et on définit $H = (P,\ Q) \longmapsto (P' - Q,\ P + Q')$. Montrez que H est un endomorphisme de $F_p \times F_p$. Donnez son noyau. Montrez que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

VII$\sim$4) Montrez : $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$ (où S_p désigne le sous-espace des fonctions paires de F_p et A_p le sous-espace des fonctions impaires de F_p).

VIII$\sim$0) Montrez que pour tout n il existe un unique couple $(P_n,\ Q_n)$ dans $S_n \times A_n$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(x) \times P_n(x) + \cos(x) \times Q_n(x)$.

VIII$\sim$1) Explicitez P_n et Q_n pour n de 0 à 2 (inclus).

VIII$\sim$2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$.

VIII$\sim$3) Déduisez que les P_n sont tous à coefficients entiers.

VIII$\sim$4) On suppose que π est rationnel d'écriture irréductible $\pi = \dfrac{p}{q}$. Montrez que la suite $\Big((2.q)^n.P_n\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$ est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

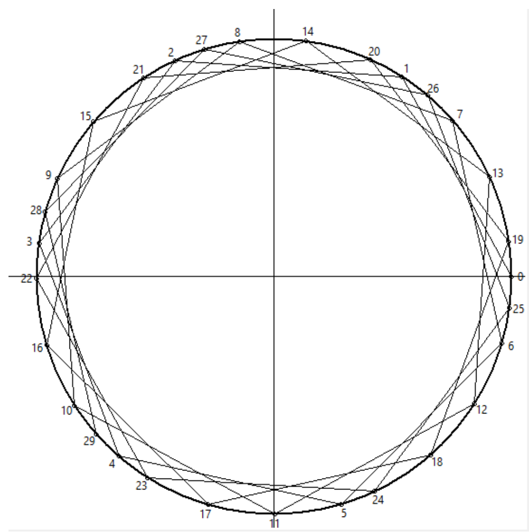
VIII$\sim$5) Déduisez que π est irrationnel.

IX$\sim$0) On définit à présent : $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, 0 sinon. Écrivez un script Python qui détermine les n premiers termes de cette suite (avec l'approche du physicien qui fait confiance au calcul avec des flottants).

Déterminez $(a_n)_{n \leqslant 20}$

IX$\sim$1) On suppose que cette suite est ultimement périodique. Montrez qu'il existe deux entiers N et T ($T > 0$) tels que $\sin(k.T)$ soit de signe constant pour k plus grand que N. Déduisez que $(\cos(k.T))_{k \geqslant N}$ est une suite positive.

IX$\sim$2) On pose $G = \{n.T + 2.k.\pi \mid (n,k) \in \mathbb{Z}^2\} = T.\mathbb{Z} + 2.\pi.\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ mais qu'il ne peut pas s'écrire $a.\mathbb{Z}$ même pour a bien choisi.



IX$\sim$3) On pose $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrez que G^+ admet une borne inférieure α. Montrez que si α est dans G^+ alors $G = \alpha.\mathbb{Z}$.

IX$\sim$4) α n'est donc pas dans G^+. On suppose $\alpha > 0$. Montrez qu'il existe g et g' dans G^+ vérifiant $\alpha < g' < g < 2.\alpha$. Déduisez $\alpha = 0$.

IX$\sim$5) Maintenant que l'on sait $\alpha = 0$, montrez que pour tout n il existe g_n dans G vérifiant $0 < g_n < 10^{-n}$.

IX$\sim$6) Soit x un réel. Montrez qu'il existe une suite d'éléments de G qui converge vers x.

IX$\sim$7) Montrez qu'il existe une suite (k_n) d'entiers positifs tels que $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

IX$\sim$8) Montrez que $\{\cos(k_n.T) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des termes de cette suite) n'est pas de cardinal fini.

IX$\sim$9) Construisez alors une suite (y_n) strictement croissante extraite de (k_n) telle que $\cos(y_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

IX$\sim$10) La suite (a_n) est elle ultimement périodique ?

◁ 10 ▷ Combien existe-t-il de suites géométriques (a_n) vérifiant $a_5 = 5$ et $a_6 = 10$? Calculez $a_n$pour tout n.
Combien existe-t-il de suites géométriques (b_n) vérifiant $b_5 = 5$ et $b_7 = 20$? Calculez (b_n) pour tout n.
Combien existe-t-il de suites arithmétiques (c_n) vérifiant $c_5 = 5$ et $c_7 = 10$? Calculez c_n pour tout n.
Combien existe-t-il de suites arithméticogéométriques (d_n) vérifiant $d_5 = 5$ et $d_6 = 10$?
Combien existe-t-il de suites arithméticogéométriques (e_n) vérifiant $e_5 = 5$ et $e_6 = 10$ et $e_7 = 25$? Exprimez e_n pour tout n.

◁ 11 ▷ ♡ On pose $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2.k^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{3.n^3}$ pour tout n. Montrez qu'elles forment un couple de suites adjacentes (limite non demandée).

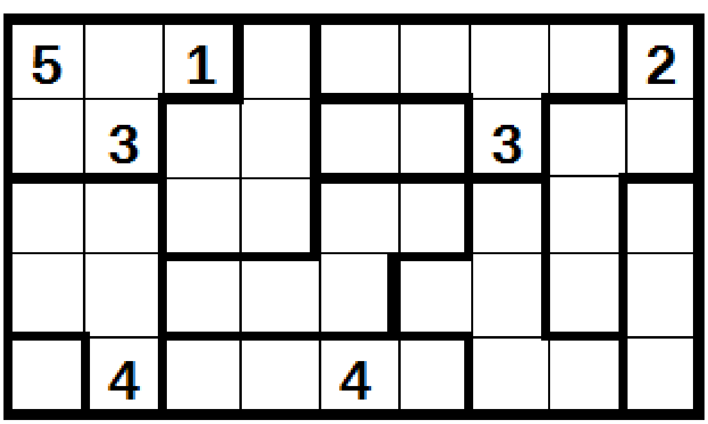
◁ 12 ▷ ♡ Montrez que $\left(2.\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\left(2.\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ sont adjacentes.

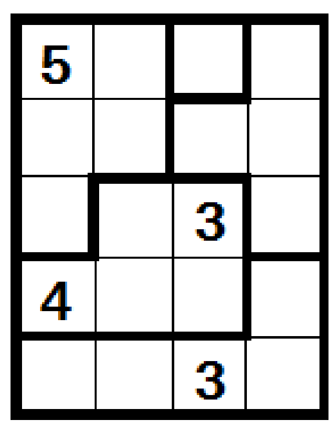
◁ 13 ▷ On pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}}$.
Montrez : $v_n - u_n \leqslant \frac{n}{2^{n-1}.\sqrt{(n-1)!}}$ *(conjuguez, conjuguez il en restera quelque chose).*
Déduisez que (u_n) et (v_n) forment un couple de suites adjacentes.
Écrivez un script `Python` qui pour ε donné calcule leur limite commune à ε près.

◁ 14 ▷ Montrez que $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ et $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$ forment un couple de suites adjacentes.

◁ 15 ▷ Prolongement d'un classique.
On pose $0 < a_0 \leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n = \frac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1} = \sqrt{\frac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda = \frac{\sqrt{(b_0)^2 - (a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n - a_n) \sim_{n\to+\infty} a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

◁ 16 ▷ Montrez que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ sont adjacentes.





◁ 17 ▷

◁ 18 ▷ Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge (séparez réel/imaginaire et soyez spécial).
Et calculez sa somme.

◁ 19 ▷
```
def Suite(n) :
....L = [2, 6, 7, 4, 2, *, 5, 4, 8, *, 3, 9, 3, 5, 5]
....return L[n%15]
```

Remplacez les * pour que `Suite` soit la somme d'une suite de période 3 et d'une suite de période 5.
(c'est un exercice d'algèbre linéaire, principalement).

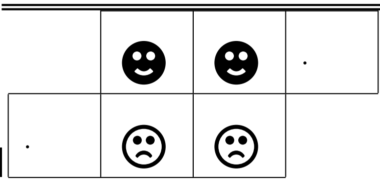
◁20▷ Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n-\alpha| \leqslant |\alpha|/2 \Rightarrow |a_n| \geqslant |\alpha|/2$ en passant par $\alpha - \alpha/2 \leqslant a_n \leqslant \alpha + \alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

◁21▷ Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1.
Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

◁22▷ ♣ Montrez : $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p.(\zeta(p)-1)=\frac{1}{2}$ (après en avoir prouvé l'existence ?).

Rappel $\zeta(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$.

◁23▷ Montrez que pour toute suite réelle (u_n) il existe au moins une extraction φ telle que $(\sin(u_{\varphi(n)})$ converge.

◁24▷ 

Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

◁25▷ Montrez que la suite $\left(\log_{(n!)}((n+1)!)\right)$ est décroissante, minorée et donnez sa limite.

◁26▷ $a_n=o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La relation « être un petit o de « est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur l'ensemble des suites réelles strictement positives ?

◁27▷ Montrez que la suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si $((u_n)^2)$ n'admet aucune sous-suite qui tend vers $+\infty$.

◁28▷ Montrez que si la suite (a_n) (jamais nulle) n'admet aucune sous-suite bornée, alors la suite $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ converge vers 0.

◁29▷ La suite u est périodique de période 4 à partir du rang 100 et vérifie $u_n=n^2$ pour $n\leq 100$ et $u_{100}=3$, $u_{101}=5$, $u_{102}=13$, $u_{103}=7$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne u_n.

◁30▷ Sachant que (a_n) est une suite arithmétique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}a_k=0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{200}a_k=20100$ calculez a_n pour tout n.

◁31▷ Vrai ou faux : de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement croissante.
de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement monotone.
de toute suite réelle non bornée on peut extraire une sous-suite monotone.

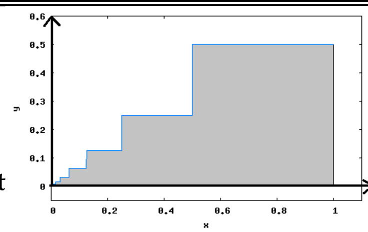
◁32▷ ◇ 0 ◇ Une suite réelle a vérifie la propriété P si et seulement si on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2 \sim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}$. Montrez qu'une suite vérifiant P est positive à partir d'un certain rang.

◇ 1 ◇ Quelles sont les suites géométriques qui vérifient la propriété P ?

◇ 2 ◇ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

◇ 3 ◇ La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

◇ 4 ◇ Montrez que la relation $u_0=1$ et pour tout n, "u_{n+1} est la racine positive de l'équation $x^3.u_n+x=u_n$ d'inconnue x" définit bien une suite réelle (prouvez l'existence de tous les termes). Montrez que cette suite est positive, décroissante. On note λ sa limite. Montrez qu'elle ne peut valoir que 0. Montrez que la suite (u_n) ainsi construite vérifie P.



◁ 33 ▷ ♡ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto 2^{[\ln(x)/\ln(2)]}$ et calculez son intégrale sur $[0,\ 1]$.

◁ 34 ▷ Montrez que pour tout choix de u_0 la suite $u_{n+1} = [e^{14.\cos(u_n/12)}]$ est périodique à partir d'un certain rang *(indication : principe des tiroirs)*.

Mon ex se tasse. Elle se dilate la rate en chicanant. On apprécie les actions des recteurs. Corneille veut voir son Clitandre bientôt. Vive les fêtes soutenues. Ils veulent des facs animées.

◁ 35 ▷ La quantification classique de notre cours est : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Il manque des niveaux de parenthèses.

Je propose de disposer ainsi les parenthèses :	$\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$
$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$	$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$

Est-ce correct ? Sinon, comment corriger ?
S'agit de la quantification de $((u_p)$ converge), de $((u_n)$ converge vers $\lambda)$, de $((\lambda)$ converge vers $(u_n))$, de $(u_n \simeq \lambda$ à εprès), (toutes les suites convergent vers λ) ?

◁ 36 ▷ ♡ Soit u une suite réelle. Montrez que si u converge, alors pour tout réel λ, $\lambda.u_{n+1} + u_n$ converge aussi.

♡ On suppose que $u_{n+1} + u_n$ converge quand n tend vers l'infini. Montrez *(par un contre-exemple)* que u ne converge pas forcément.
♣ On suppose que $2.u_{n+1} + u_n$ *(notée v)* converge vers 0.
Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}.2^k.v_k$. En utilisant le théorème de Cesàro généralisé (c'est celui de Cesarbi dans l'exercice plus haut), déduisez que u converge aussi vers 0.
Montrez que si v converge vers α alors u converge *(vers quoi ?)*.

Montrez que si $u_{n+1} + 2.u_n$ converge, alors u ne converge pas forcément.

◁ 37 ▷ ♡ Montrez que l'application $x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est somme de deux applications périodiques, mais n'est pas périodique (combien de fois prend elle la valeur 2 ?).
Montrez que la suite $(\cos(n))$ n'est pas périodique.

◁ 38 ▷ f et g sont croissantes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :
$\displaystyle\int_0^1 f(t).dt.\int_0^1 g(t).dt \leqslant \int_0^1 f(t).g(t).dt$ (indication $(x,\ y) \longmapsto (f(y) - f(x)).(g(y) - g(x))$ sur $[0,\ 1]^2$.

◁ 39 ▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de cette différence de radicaux $\sqrt{n+5} - \sqrt[4]{n^2 + 3.n + 4}$.

◁ 40 ▷ Trouvez une primitive de $t \longmapsto t.e^t.\cos(t)$ en intégrant par parties *(mais qui sont les deux parties ?)*.
Dérivez $t \longmapsto \big((a.t + b).\cos(t) + (c.t + d).\sin(t)\big).e^t\big)$. Retrouvez le résultat précédent avec un peu moins d'efforts.

◁ 41 ▷ Comparez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^N\right)$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^N\right)$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

◁ 42 ▷ Montrez pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.\frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t}.dt = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x-1}.dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (noté H_n).
Déduisez : $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{H_n}{n} = e.\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p.p!}$.

◁ 43 ▷ ♡ Étudiez la convergence de la suite $((-1)^n.(4.n^2+2.n+1))$, de sa moyenne de Cesàro, de la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro, et ainsi de suite.
Encore une fois un conseil (mais comme vous vous obstinez à croire que les maths sont des formules et du calcul, ne le lisez pas et retournez passer le bac) *: calculez déjà les premiers termes.*

◁ 44 ▷ ♠ Soient u et v deux suites. On suppose que $u.v$ tend vers 0 à l'infini. Montrez par un contre-exemple qu'on ne peut pas en déduire que u ou v tend vers 0 à l'infini.
On veut montrer qu'il existe une sous-suite de u ou une sous-suite de v qui tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'il existe N_0 vérifiant $|u_{N_0}.v_{N_0}| \leqslant 1$. Montrez qu'il existe N_1 plus grand que N_0 vérifiant $|u_{N_1}.v_{N_1}| \leqslant 1/4$. Montrez qu'il existe N_2 plus grand que N_1 vérifiant $|u_{N_2}.v_{N_2}| \leqslant 1/16$. Montrez l'existence d'une suite croissance (N_n) vérifiant $|u_{N_n}.v_{N_n}| \leqslant 1/4^n$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$. Montrez : $A^c \cap B^c = \emptyset$. Déduisez $A \cup B = \mathbb{N}$. Déduisez que A ou B est infini. Concluez.

◁ 45 ▷ Montrez que si a est une suite d'entiers naturels strictement positifs, croissante, non constante égale à 1, alors la série $\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$ converge. Montrez que la limite est rationnelle si la suite (a_n) est stationnaire.

◁ 46 ▷ Créez une classe où soixante pour cent des filles sont anglicistes et ou trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons.

◁ 47 ▷ Soit $E, \leqslant$ un ensemble ordonné. Montrez que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire (c'est à dire « constante à partir d'un certain rang »). Montrez que c'est le cas pour $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.

◁ 48 ▷ ♡ Montrez que la réunion de deux segments n'est pas forcément un segment.
Montrez que la réunion de deux segments ayant un point commun est encore un segment.
Montrez que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ n'est plus un segment.

◁ 49 ▷ ♡ On définit $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est négative. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) converge et calculez sa limite.
On définit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est positive. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) ne peut pas converger. Concluez.

◁ 50 ▷ Montrez que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ converge.
On note $A_N = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$. Montrez : $|A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1}| \geqslant \frac{2.N}{\sqrt{N^2}}$. Déduisez que (A_N) diverge.

◁ 51 ▷ ♡ Quels sont les complexes z pour lesquels au moins une des deux séries suivantes converge : $\left(\sum_{n=0}^{N} e^{n.z}\right)_N$, $\left(\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\right)_N$.

◁ 52 ▷ Montrez que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée admet une sous-suite périodique.

◁ 53 ▷ Prouvez que de toute suite de période 5 *(exactement)* on peut extraire une suite de période 11 *(exactement)*.

◁ 54 ▷ Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$		