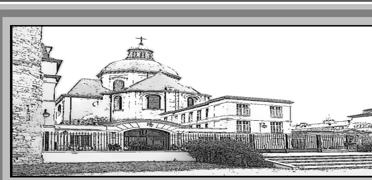
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 14 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

DS07

Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = \cos(\sqrt{3}.\pi.n)$, $s_n = \sin(\sqrt{3}.\pi.n)$ et $t_n = \tan(\sqrt{3}.\pi.n)$.

♡ 0 ♡ Justifiez que t_n existe pour tout n. Exprimez t_{n+1} à l'aide de t_n. Montrez que si (t_n) converge, alors sa limite λ vérifie $\dfrac{\lambda + t_1}{1 - t_1.\lambda} = \lambda$. Concluez : (t_n) diverge. 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez pour tout n : $c_{n-1} - c_{n+1} = 2.s_1.s_n$. Déduisez que si (c_n) converge, alors (s_n) converge vers 0. 2 pt.

♡ 2 ♡ Montrez aussi que si (s_n) converge, alors (c_n) converge vers 0. 1 pt.

♡ 3 ♡ Vers quoi converge $((c_n)^2 + (s_n)^2)$? Déduisez que ni (c_n) ni (s_n) ne converge. 2 pt.

♢ 0 ♢ On définit la suite (a_n) par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{2.a_n + 3}{a_n + 2}$. Montrez que (a_n) est bien définie, minorée par $\sqrt{3}$, strictement décroissante. Déduisez que (a_n) converge et donnez sa limite. 3 pt.

♢ 1 ♢ Montrez que la suite (a_n) est une suite de rationnels qu'on écrira sous la forme $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec $p_{n+1} = 2.p_n + 3.q_n$ (complétez pour q_{n+1}).
Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}$. Calculez $(p_n)^2 - 3.(q_n)^2$. Déduisez que p_n et q_n sont toujours premiers entre eux. 3 pt.

♢ 2 ♢ Montrez que p_n est strictement croissante. Montrez : $c_{p_{2.n}} = \cos(p_{2.n}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n}.\pi)$ et déduisez $c_{p_{2.n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$. Montrez $c_{p_{2.n+1}} \longrightarrow_{n\to+\infty} -1$. 3 pt.

♢ 3 ♢ Montrez : $\dfrac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{n+1} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. 2 pt.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

CCINP PC 1982

Dans tout le problème, G_0 désigne le groupe multiplicatif des matrices carrées à coefficients réels, d'ordre deux et inversibles. A tout élément $x = (x_1,\ x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on associe le carré de sa norme euclidienne, c'est-à-dire le nombre réel noté $||x||^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$. Enfin, $\mathbb{Z}^{2*}$ désigne l'ensemble des couples d'entiers relatifs différents de $(0,\ 0)$: $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$.

I∼0) *Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G_0. Pour tout élément $x = (x_1,\ x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on note $g(x)$ le couple $(y_1,\ y_2)$ défini par $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et l'on désigne par $m(g)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$;* préciser pourquoi cette borne existe. 1 pt.

On se propose de montrer la proposition (p) suivante : $m(g)$ est un minimum, c'est-à-dire il existe un élément x de $\mathbb{Z}^{2*}$ tel que $\|\ g(x)\ \|^2 = m(g)$.

I∼1) *On examine d'abord le cas où g est triangulaire supérieure ($c = 0$).* Montrer que l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^{2*}$ tels que $\|\ g(x)\ \|^2$ soit inférieur ou égal à un nombre positif donné est un ensemble fini. En déduire que la proposition (p) est vérifiée dans ce cas. 3 pt. Montrez $m(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2$ et calculez $m(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. 3 pt.

I∼2) *On examine le cas général.* Montrez qu'il existe un nombre réel α tel que la matrice g_1 définie par $g_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.g$ soit triangulaire supérieure ; montrez $m(g_1) = m(g)$ et achevez la démonstration de la proposition (p). 3 pt. Déduisez que $m(g)$ est toujours strictement positive. 1 pt.

II∼0) *Désignant par a un nombre réel non nul, on étudie dans cette question le cas particulier où $g = \begin{pmatrix} a & a/2 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$.* Soit $(x_1,\ x_2)$ un élément de $\mathbb{Z}^{2*}$; en examinant successivement les cas où x_2 est nul, impair, pair non nul, montrez que l'on a : $m(g) = \inf\left(a^2,\ \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{a^2},\ \dfrac{4}{a^2}\right)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

II∼1) Tracez sur un même graphique les courbes représentatives, pour $u > 0$, des fonctions $u \to u$, $u \to \dfrac{4}{u}$, $u \longmapsto \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$ puis et $u \longmapsto Min\left(u,\ \dfrac{4}{u},\ \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}\right)$ et déduisez : $m(g) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ en précisant les valeurs de a pour lesquelles $m(g) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

III∼0) *Soit G l'ensemble des éléments de G_0 de déterminant égal à 1 ; G est un sous-groupe de G_0* (on rappellera pourquoi). $\boxed{\text{1 pt.}}$ *On se propose de montrer que, pour toute matrice g de G, l'on a :$m(g) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.*

III∼1) *Soit $\mathbb{C}^+$ l'ensemble des nombres complexes m dont la partie imaginaire (fonction notée $\Im m$), est strictement positive : $\mathbb{C}^+ = \{z \mid \Im m(z) > 0\}$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G et soit z un nombre complexe tel que : $c.z + d \neq 0$.* Montrez $\Im m\left(\dfrac{a.z+b}{c.z+d}\right) = \frac{\Im m(z)}{|c.z+d|^2}$ et déduisez que l'on peut définir une application, notée T_g, de $\mathbb{C}^+$ dans lui-même par : $T_g = z \longmapsto \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

III∼2) Montrez que, si g_1 et g_2 sont des éléments de G, on a : $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

III∼3) *Soit Γ l'ensemble des éléments de G dont les quatre coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.* Vérifiez que Γ est un sous-groupe de G. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼4) On pose : $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit z un élément donné de $\mathbb{C}^+$. Montrez que l'ensemble $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à $\Im m(z)$. Déduisez que cet ensemble admet un maximum que l'on note $M(z)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

III∼4) Soit γ_0 un élément de Γ tel que $\Im m(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$. Montrez (en considérant $T_{s\gamma_0}$) : $|T_{\gamma_0}(z)| \geqslant 1$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼5) Montrez, en considérant $T_{t\gamma_0}$ qu'il existe un élément γ_1 de Γ tel que $T_{\gamma_1}(z)$ ait sa partie imaginaire égale à $M(z)$ et sa partie réelle dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼6) Déduisez : $M(z) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

IV∼0) Soit g un élément de G. Montrez, en appliquant le dernier résultat ci-dessus au nombre $z = T_{g^T}(i)$ (g^T désigne la transposée de g), que l'on a : $m(g) \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

IV∼1) Proposez, en se ramenant au cas précédent, un majorant de $m(g)$ lorsque g appartient à G_0. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V∼0) *On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble $\{T_g \mid g \in G\}$ d'applications de $\mathbb{C}^+$ dans lui-même.* Montrez que $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe ; quelle est l'application T_g^{-1} ? Quels sont les éléments g de G tels que T_g soit l'application identique de $\mathbb{C}^+$? Étant donné un élément g de G, quels sont les éléments g' de G tels que $T_{g'} = T_g$? $\boxed{\text{4 pt.}}$

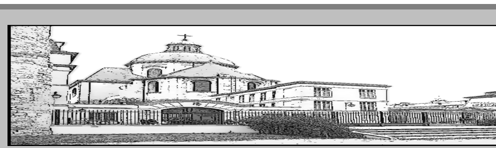
V∼1) *A tout nombre réel α, on associe les matrices $h_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et $k_\alpha = \begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$. A tout nombre réel λ strictement positif, on associe la matrice $\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1/\lambda \end{pmatrix}$.* Vérifiez que les ensembles $H = \{h_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $K = \{k_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $L = \{\ell_\lambda \mid \lambda > 0\}$ sont des sous-groupes de $(G, \circ)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

V∼2) Quel est l'ensemble des matrices g de G telles que $T_g(i) = i$? $\boxed{\text{1 pt.}}$

V∼3) Soit z un élément de $\mathbb{C}^+$: $z = x + i.y$. Montrez qu'il existe un élément (α, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ et un seul tel que $z = T_{\ell(\lambda)k(\alpha)}(i)$ On exprimera α et λ en fonction de x et y. $\boxed{\text{2 pt.}}$

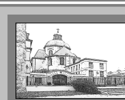
V∼4) Déduisez qu'étant donné un élément g de G, il existe un élément (h, k, ℓ) de $H \times K \times L$ et un seul tel que $g = l.k.h$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 14 mars
M.P.S.I.2



2024 2025
DS07
CORRECTION

DS07 Suite (t_n).



Comment un t_n ne pourrait pas exister ? Il faudrait que $\sqrt{3}.n.\pi$ soit un multiple impair de $\dfrac{\pi}{2}$.
Mais peut on avoir $\sqrt{3}.n.\pi = (2.k+1).\dfrac{\pi}{2}$. Ceci conduirait à $\sqrt{3} = \frac{2.k+1}{2.n} \in \mathbb{Q}$. C'est impossible (on ne peut pas avoir non plus $n = 0$ car le second membre ne s'annule pas).

Pour n donné, on calcule avec les formules sur les tangentes

$$t_{n+1} = \tan(n.\sqrt{3}.\pi + \sqrt{3}.\pi) = \frac{\tan(n.\sqrt{3}.\pi) + \tan(\sqrt{3}.\pi)}{1 - \tan(n.\sqrt{3}.\pi).\tan(\sqrt{3}.\pi)} = \frac{t_n + t_1}{1 - t_n.t_1}$$

C'est une récurrence homographique.

Supposons que la suite (t_n) converge vers une limite qu'on note λ.
Alors, en passant à la limite dans la formule (produits, quotients), on a $\lambda = \dfrac{\lambda + t_1}{1 - \lambda.t_1}$.
On fait un produit en croix : $\lambda - \lambda^2.t_1 = \lambda + t_1$. On simplifie par λ puis on divise par t_1 (non nul, c'est $\tan(\sqrt{3}.\pi)$ et $\sqrt{3}.\pi$ n'est pas un multiple de π), et il reste $\lambda^2 = -1$. Dans $\mathbb{R}$ j'ai du mal.

DS07 Divergence de (c_n) et (s_n).

On va sortir nos formules de trigonométrie

$$\begin{array}{ccccccc}
\cos(a+b) & & & = & \cos(a).\cos(b) & - & \sin(a).\sin(b) \\
 & & \cos(a-b) & = & \cos(a).\cos(b) & + & \sin(a).\sin(b) \\
\cos(a+b) & - & \cos(a-b) & = & & & -2.\sin(a).\sin(b)
\end{array}$$

Il reste juste

$$c_{n-1} - c_{n+1} = \cos((n-1).\sqrt{3}.\pi) - \cos((n+1).\sqrt{3}.\pi) = 2.\sin(n.\sqrt{3}.\pi).\sin(\sqrt{3}.\pi)$$

C'est la formule demandée.

Supposons que (c_n) converge vers un réel γ. Alors, par soustraction $c_{n-1} - c_{n+1}$ converge vers $\gamma - \gamma$.
$2.s_n.s_1$ converge vers 0. On divise par $2.s_1$ (non nul) et s_n converge vers 0.

On recommence avec (s_n) en calculant $s_{n+1} - s_{n-1}$

$$s_{n+1} - s_{n-1} = \sin((n+1).\sqrt{3}.\pi) - \sin((n+1).\sqrt{3}.\pi) = 2.\cos(n.\sqrt{3}.\pi).\sin(\sqrt{3}.\pi)$$

Cette fois, si (s_n) converge (que ce soit vers 0 ou même vers un réel σ), on déduit que $\dfrac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2.s_1}$ converge aussi vers 0.

Bilan provisoire

(c_n) converge	$\Rightarrow$	(s_n) converge vers 0
(s_n) converge	$\Rightarrow$	(c_n) converge vers 0

Mais en mettant bout à bout

<table>
<tr><td rowspan="2">(c_n) converge</td><td rowspan="2">$\Rightarrow$</td><td rowspan="2">(s_n) converge vers 0</td><td rowspan="2">$\Rightarrow$</td><td>(c_n) converge vers 0</td></tr>
<tr><td>(s_n) converge vers 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(s_n) converge</td><td rowspan="2">$\Rightarrow$</td><td rowspan="2">(c_n) converge vers 0</td><td rowspan="2">$\Rightarrow$</td><td>(s_n) converge vers 0</td></tr>
<tr><td>(c_n) converge vers 0</td></tr>
</table>

Dans tous les cas, si l'une des deux converge, alors les deux convergent vers 0.

Et là, on sort le calcul : $((c_n)^2+(s_n)^2)$ converge vers 0^2+0^2 ce qui fait 0.
Et on sort la trigonométrie : $((c_n)^2+(s_n)^2)$ vaut toujours 1 ($\cos^2+\sin^2$) et converge vers 1.
On tient notre contradiction.

Il est donc impossible que l'une ou l'autre converge.

DS07 Suite de limite $\sqrt{3}$.

On va propager par récurrence la propriété a_n existe et est strictement positif.
C'est vrai au rang 1.
Si à un rang n quelconque donné, $a_n$existe et est strictement positif, alors $\dfrac{2.a_n+3}{a_n+2}$ existe (dénominateur non nul) et est strictement positif (stabilités de $\mathbb{R}^{+*}$).

On propage aussi par récurrence sur n $a_n \geqslant \sqrt{3}$.
Mieux encore, je vais propager $(a_n)^2-3$ est positif.
C'est vrai au rang 0.
Supposons la propriété vraie pour un rang n quelconque donné et calculons

$$(a_{n+1})^2-3=\frac{(2.a_n+3)^2}{(a_n+2)^2}-3=\frac{4.(a_n)^2+12.a_n+9-3.((a_n)^2+4.a_n+4)}{(a_n+2)^2}=\frac{(a_n)^2-3}{(a_n+2)^2}\geqslant 0$$

C'est mieux que le calcul avec des $\sqrt{3}$, ici tout reste rationne, et c'est mieux que les histoires de sens de variations qui font appel à des résultats sur le signe de la dérivée.

On n'a plus besoin de récurrence pour établir pour tout n $a_{n+1}\leqslant a_n$; en effet

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2.a_n+3}{a_n+2}=\frac{(a_n)^2-3}{(a_n+2)}\geqslant 0$$

Décroissante et minorée, la suite $a(_n)$ converge (vers sa borne inférieure, dont on ignore encore la valeur).

Mais maintenant qu'elle a une limite, nommons la et passons à la limite dans $a_{n+1}=\dfrac{2.a_n+3}{a_n+2}$: $\lambda=\dfrac{2.\lambda+3}{\lambda+2}$.
Après produit en croix et simplification λ^2 vaut 3.
On élimine la valeur $\lambda=-\sqrt{3}$ car λ (plus grand minorant) doit être plus grand que $\sqrt{3}$(minorant).
La suite converge et c'est vers $\sqrt{3}$.

DS07 Forme rationnelle de la suite (a_n).

On écrit $a_1=\dfrac{2}{1}$ (forme irréductible).
En reportant $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ dans $a_{n+1}=\dfrac{2.a_n+3}{a_n+2}$ on trouve $a_{n+1}=\dfrac{2.p_n+3.q_n}{p_n+2.q_n}$.
On va donc poser $\begin{array}{rcrcr} p_{n+1} & = & 2.p_n & + & 3.q_n \\ q_{n+1} & = & p_n & + & 2.q_n \end{array}$. Ce sont bien à chaque fois des entiers (récurrence évidente) positifs (j'aurais dû le dire dans la récurrence évidente), premiers entre eux (ah non,ce n'est pas sûr).

Pour la relation $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}$ on peut certes diagonaliser et faire plein de calculs pour montrer qu'on a appris son cours.
Mais ici, pour une fois, on peut faire une récurrence, initialisée à $n=1$.

L'initialisation à $n=0$ conduirait à $p_0=1$ et $q_0=0$. J'ai du mal à considérer alors $a_0=\infty$. Mais ça donne bien $a_n=\dfrac{2.\infty+3}{\infty+2}=2$.

On se donne n quelconque et on suppose $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}$. On multiplie

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.p_n+3.q_n & 3.p_n+6.q_n \\ 2.q_n+p_n & 3.q_n+2.p_n \end{pmatrix}$$

on reconnaît bien $\begin{pmatrix} p_{n+1} & 3.q_{n+1} \\ q_{n+1} & p_{n+1} \end{pmatrix}$ (alors même qu'on n'a pas calculé explicitement ces deux entiers).

Réflexe déterminant : $\det(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n) = \det(\begin{pmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix})$ et comme on a un morphisme multiplicatif

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} p_n & 3.q_n \\ q_n & p_n \end{vmatrix}$$

Cette relation $(-1)^n = (p_n).p_n - (3.q_n).q_n$ est une identité de Bézout qui permet de dire que $p_n$et $q_n$sont premiers entre eux.

> Seule difficulté : savoir à quel moment on fait une récurrence et à quel moment on fait un petit calcul de rien.

La relation $p_{n+1} = 2.p_n + 3.q_n$ et la positivité de $p_n$et q_n nous assurent que la suite (p_n) est croissante.

Pour n donné, la formule $c_{p_{2.n}} = \cos(p_{2.n}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n}.\pi)$ sent la périodicité du cosinus puisque normalement $c_{p_{2.n}} = \cos(p_{2.n}.\sqrt{3}.\pi)$.
Encore faut il que $3.q_{2.n}.\pi$ soit un multiple pair de π.

On calcule les premiers $p_n$et q_n

$p_1 = 2$	$p_2 = 7$	$p_3 = 26$	$p_4 = 97$
$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 15$	$q_4 = 56$

On se dit qu'on va prouver

n impair	n pair
p_n pair	p_n impair
q_n impair	q_n pair

par récurrence sur n, avec disjonction de cas.
L'initialisation est faite.
On se donne n quelconque, et on fait une hypothèse, il faut la propager au rang $n+1$. On disjoncte donc

n pair	n impair
p_n pair q_n impair	p_n impair q_n pair
$p_{n+1} = 2.p_n + q_n = pair + impair = impair$	$p_{n+1} = 2.p_n + q_n = pair + pair = pair$
$q_{n+1} = p_n + 2.q_n = pair + pair = pair$	$q_{n+1} = p_n + 2.q_n = impair + pair = impair$

> *Mais il y a plus efficace. Déjà, comme seule la parité nous intéresse, on pose $P_n = (p_n\%2)$ et $Q_n = (q_n\%2)$.*
> *La formule $p_{n+1} = 2.p_n + q_n$ donne modulo 2 : $P_{n+1} = 0 + Q_n$.*
> *La formule $q_{n+1} = p_n + 2.q_n$ donne modulo 2 : $Q_{n+1} = 0 + P_n$.*
> *En imbriquant les deux, on a $P_{n+2} = P_n$ et $Q_{n+2} = Q_n$.*
> *Comme Q_1 vaut 1 et Q_2 vaut 2, on a $Q_{2.n} = 0$ et on reconnaît que $q_{2.n}$ est pair.*

On a donc bien $c_{p_{2.n}} = \cos(p_{2.n}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n}.\pi)$.
Mais que faire de ceci ?

Intuitivement, p_n/q_ntend vers $\sqrt{3}$. Le physicien va remplacer p_n par $\sqrt{3}.q_n$ et dire $p_{2.n}.\sqrt{3}.\pi \simeq 3.q_{2.n}.\pi$. Il en déduit qu'il ne reste plus rien. Et le cosinus de 0 vaut &.
Mais on ne soustrait pas des équivalents. On regarde ce qu'il reste derrière. Ou on utilise de vrais outils de matheux.

Comme toujours, on conjugue

$$(p_{2.n}.\sqrt{3} - 3.q_{2.n}).\pi = \frac{(p_{2.n})^2.3 - (q_n)^2.9}{p_{2.n}.\sqrt{3} + q_{2.n}.3}.\pi = \frac{3.((p_n)^2 - 3.(q_n)^2)}{p_{2.n}.\sqrt{3} + q_{2.n}.3}.\pi = \frac{3}{p_{2.n}.\sqrt{3} + q_{2.n}.3}.\pi$$

Cette fois, le numérateur est constant mais le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient tend vers 0 et son cosinus tend vers 1.

Pour $c_{p_{2.n+1}} = \cos(p_{2.n+1}.\sqrt{3}.\pi)$, qu'est ce qui change ?
Cette fois, $3.q_{2.n+1}.\pi$ est un multiple impair de π. On a donc

$$\cos(p_{2.n+1}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n+1}.\pi) = -\cos(p_{2.n+1}.\sqrt{3}.\pi) = -c_{2.n+1}$$

Ensuite, le coup de la quantité conjuguée donne la même chose

$$p_{2.n+1}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n+1}.\pi \to_{n\to+\infty} 0 \ et\ \cos(p_{2.n+1}.\sqrt{3}.\pi - 3.q_{2.n+1}.\pi) \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$$

On re-confirme que $(\cos(n.\sqrt{3}.\pi))$ ne peut pas converger puisqu'on a extrait deux sous-suites de limites distinctes (1 et -1).

DS07 Moyenne de Cesàro.

Oui, c'est bien elle, c'est la moyenne arithmétique des $n+1$ premiers termes.

Mais c'est un autre nom qu'il faut associer ici : Dirichlet

$$\frac{1}{2}+\cos(\sqrt{3}.\pi)+\cos(2.\sqrt{3}.\pi)+\ldots+\cos(n.\sqrt{3}.\pi)=\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\sqrt{3}.\pi\right)}{2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}.\pi}{2}\right)}$$

(obtenu par produit en croix et somme télescopique, ou comme partie réelle de $\sum_{k=-n}^{n} e^{i.k.\sqrt{3}.\pi}$)

On ajoute $\frac{1}{2}$ pour retrouver c_0 et surtout, on divise par $n+1$

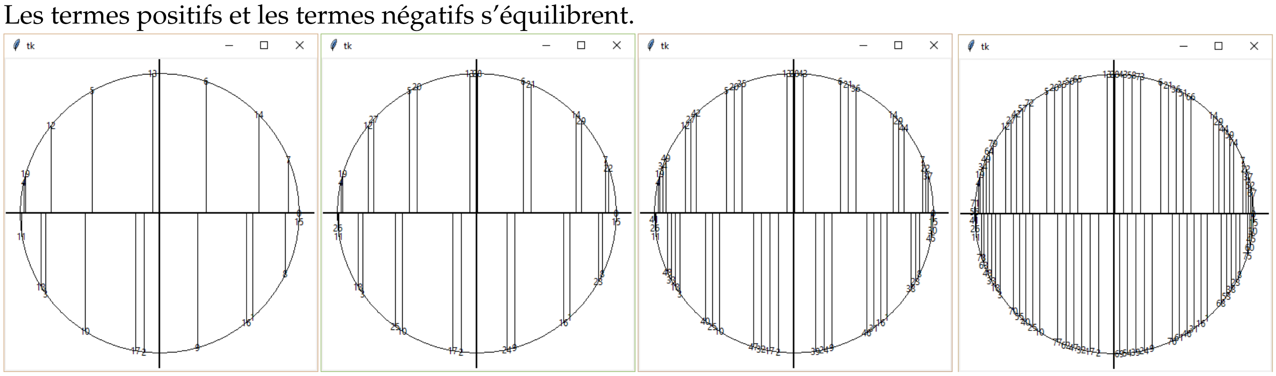
$$\frac{1+\cos(\sqrt{3}.\pi)+\cos(2.\sqrt{3}.\pi)+\ldots+\cos(n.\sqrt{3}.\pi)}{n+1}=\frac{1}{n+1}.\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\sqrt{3}.\pi\right)}{2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}.\pi}{2}\right)}\Big)$$

Le terme $\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\sqrt{3}.\pi\right)$ n'a pas de limite lui non plus. Mais il reste borné. Le quotient le reste aussi.

Bref, le terme $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\sqrt{3}.\pi\right)}{2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}.\pi}{2}\right)}\right)$ entre parenthèses reste borné.

Et la division fait tendre l'ensemble vers 0.

Notre suite (c_n) diverge, mais en moyenne elle tend vers 0.
Les termes positifs et les termes négatifs s'équilibrent.



DS07 Existence de $M(g)$.

L'ensemble $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (on a trouve $||g(1,0)||^2$ si vraiment on doit le dire), minorée. Par 0 puisque les carrés de norme sont positifs.

Elle admet donc une borne inférieure, atteinte ou non, on ne sait pas encore.

DS07 Cas d'une matrice triangulaire.

On se donne donc juste trois coefficients, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Notre ensemble $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ est donc formé des $(a.x+b.y)^2+(d.y)^2$ avec x et y entiers, ne pouvant pas

être tous les deux nuls..
On y trouve entre autres a^2, $(a+b)^2+(d)^2$, $(2.a+3.b)^2+(9.d)^2$ et encore d'autres réels positifs.

Comme indiqué, on se donne un nombre positif A et on regarde l'ensemble $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ A]$ (les éléments de l'ensemble entre 0 et A).
On cherche donc des éléments de la forme $(a.x+b.y)^2+(d.y)^2$ (avec x et y entiers) plus petits que A.
Une contrainte : $(d.y)^2$ doit être plus petit que A (nécessaire, mais pas suffisant).
Donc y est entre $-\dfrac{\sqrt{A}}{|d|}$ et $\dfrac{\sqrt{A}}{|d|}$ (d est non nul, puisque le déterminant $a.d$ de la matrice est non nul).
Mais comme y est entier, il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour y (de l'ordre de $\left[\dfrac{2.\sqrt{A}}{|d|}+1\right]$ si on y tient, mais ça n'a aucune importance).

Mais si on poursuit, on a aussi $|a.x+b.y|$ plus petit que $\sqrt{A}$.
Ceci donne $a.x$ entre $\sqrt{A}-|b.y|$ et $\sqrt{A}+|b.y|$.
Comme a est aussi non nul, ceci donne (pour chaque y) un nombre fini de valeurs possibles pour x (là encore majoration grossière par $\left[\dfrac{2.(\sqrt{A}+|b.y|)}{|a|}+1\right]$).

Chaque y donne une nombre fini de valeurs de x et il n'y a qu'un nombre fini de y possibles.
Ceci conduit à un nombre fini de couples.

> *Si je vous dis $(2.x+3.y)^2+(5.y)^2 \leqslant 124$ avec x et y entiers, saurez vous trouver un majorant rapide du nombre de couples possibles ?*

Maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans l'ensemble, il y en a un d'entre eux qui est le plus petit.

Mais ce n'est pas $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ qui est fini, mais chaque $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ A]$.

Toutefois, comme c'est la borne inférieure qu'on cherche, il suffit de regarder un de ces ensembles.

Une idée qui peut venir à l'esprit

$$Inf\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}\Big) = Inf\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ 10]\Big) = Min\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0, 10]\Big)$$

La première égalité c'est parce que les éléments plus grands que 1$\grave{a}$ n'ont pas de rôle dans la détection de la borne inférieure.
La seconde, c'est parce que la borne inférieure d'un ensemble fini est atteinte (et s'appelle ici minimum).

Défaut de cette idée : $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ A]$ est peut être vide, et n'a donc plus de borne inférieure.
En effet, si la borne inférieure de $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ est 100, regarder $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ 10]$ ne nous apporte rien.

Pour affiner, on reprend

$$Inf\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}\Big) = Inf\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ m(g)+1]\Big) = Min\Big(\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\} \cap [0,\ m(g)+1]\Big)$$

En prenant $m(g)+1$ (la borne inférieure plus 1), on est sûr d'avoir des éléments de l'ensemble, et notre résultat précédent en donne un nombre fini.

Prenons comme demandé le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On doit minimiser $(2.x+3.y)^2+(1.y)^2$ avec x et y entiers non tous deux nuls.
On a une somme de deux entiers naturels (carrés d'entiers). Ils ne peuvent pas être nuls tous les deux (on interdit $(0,\ 0)$).
La somme dépasse au moins 1.
Mais peut elle valoir 1 ? Il faudrait qu'un des entiers soit nul et l'autre égal à 1 $\begin{array}{rrcl} 2.x & +3.y & = & 0 \\ & y & = & \pm 1 \end{array}$ ou $\begin{array}{rrcl} 2.x & +3.y & = & \pm 1 \\ & y & = & 0 \end{array}$. Les deux sont impossibles dans $\mathbb{Z}^{2*}$.
La somme dépasse au moins 2.

Mais peut elle valoir 2 ? Il faudrait que les deux entiers à élever au carré soient égaux à 1 $\begin{array}{rrcr} 2.x & +3.y & = & \pm 1 \\ & y & = & \pm 1 \end{array}$.
C'est jouable avec le couple $(-1,\ 1)$. C'est donc lui qui réalise le minimum.

Prenons cette fois la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On doit minimiser $(5.x+3.y)^2+(1.y)^2$ avec x et y entiers non tous deux nuls.
On élimine un à un les entiers non atteignables.
0 impossible car il donne $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & 0 \\ & y & = & 0 \end{array}$ et c'est interdit.
1 impossible car $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & \pm 1 \\ & y & = & 0 \end{array}$ et $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & \pm 1 \\ & y & = & 0 \end{array}$ sont impossibles dans $\mathbb{Z}^{2*}$.
2 impossible car $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & \pm 1 \\ & y & = & \pm 1 \end{array}$ est impossible dans $\mathbb{Z}^{2*}$.
3 est impossible avec une somme de deux carrés d'entiers.
4 impossible car il donne $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & \pm 2 \\ & y & = & 0 \end{array}$ et $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & 0 \\ & y & = & \pm 2 \end{array}$, sans solution dans $\mathbb{Z}^{2*}$.
5 possible avec $\begin{array}{rrcr} 5.x & +3.y & = & 1 \\ & y & = & 2 \end{array}$ (prendre $(-1,\ 2)$. C'est la borne inférieure.

DS07 Cas d'une matrice quelconque.

On se donne $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On ne sait rien de ces quatre réels, si ce n'est $a.d-b.c\neq 0$.
On cherche α (c'est lui l'inconnu) pour que le terme de ligne 1 colonne 1 soit nul dans le produit

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a une équation trigonométrique : $c.\cos(\alpha)=a.\sin(\alpha)$.
L'élève qui n'est pas matheux dit $\alpha=Arctan\Big(\dfrac{c}{a}\Big)$.

> *En quoi a-t-il tort ? Non pas à cause des modulo qui ne changent rien à la matrice obtenue.*
> *Mais à cause du cas $a=0$!*

On ne peut pas définir $Arctan(c/0)$ quand même.
Et rien n'interdit d'avoir $a=0$: par exemple $g=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais dans ce cas, on demande juste $c.\cos(\alpha)=0$. Et là, avec $\alpha=\pi/2$ tout passe bien.

> *Je vous en convainc avec* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On doit comparer $m(g)$ et $m(g_1)$.
Qu'est ce qui change ?
Dans $m(g)$ on calcule des $(a.x+b.y)^2+(c.x+d.y)^2$ avec $(x,\ y)$ dans $\mathbb{Z}^{2*}$.
Dans $m(g_1)$ la matrice a changé et on calcule

$$\Big((a.\cos(\alpha)+c.\sin(\alpha)).x+(b.\cos(\alpha)+d.\sin(\alpha)).y\Big)^2+\Big((-a.\sin(\alpha)+c.\cos(\alpha)).x+(-b.\sin(\alpha)+d.\cos(\alpha)).y\Big)^2$$

On arrange en regroupant les termes

$$\begin{array}{ccllllll} x^2 & : & a^2.\cos^2(\alpha) & +2.a.c.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +c^2.\sin^2(\alpha) & +a^2.\sin^2(\alpha) & -2.a.c.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +c^2.\cos^2(\alpha) \\ y^2 & : & b^2.\cos^2(\alpha) & +2.b.d.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +d^2.\sin^2(\alpha) & +b^2.\sin^2(\alpha) & -2.b.d.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +d^2.\cos^2(\alpha) \\ 2.x.y & : & a.b.\cos^2(\alpha) & +a.d.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +b.c.\sin(\alpha).\cos(\alpha) & +c.d.\sin^2(\alpha) & & \\ & & +a.b.\sin^2(\alpha) & -a.d.\sin(\alpha).\cos(\alpha) & -b.c.\cos(\alpha).\sin(\alpha) & +c.d.\sin^2(\alpha) & & \end{array}$$

Si on pousse le calcul jusqu'au bout, il ne reste que $x^2.(a^2+c^2)+y^2.(b^2+d^2)+2.x.y.(a.b+c.d)$.
C'est exactement $(a.x+b.y)^2+(c.x+d.y)^2$.

Et la valeur de α n'a aucune importance.

Bref, les deux ensembles $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ et $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ sont égaux « terme à terme ».
Les deux bornes inférieures sont les mêmes.

Et dans les deux cas, il s'agit bien d'un minimum.
Atteint pour un couple que je n'irai pas préciser ni chercher. Il existe, c'est tout !

DS07 Stricte positivité de $m(g)$.

On a montré que pour g donnée, la borne inférieure $m(g)$ de l'ensemble $\{||g(x)||^2 \mid x \in \mathbb{Z}^{2*}\}$ était atteinte en un point.
Il existe donc un couple $(x,\ y)$ dans $\mathbb{Z}^{2*}$ vérifiant $m(g) = (a.x_0 + b.y_0)^2 + (c.x_0 + d.y_0)^2$.
Cette quantité est évidemment positive.

Pourrait elle être nulle ? Il faudrait pour cela que les deux réels $a.x_0 + b.y_0$ et $c.x_0 + d.y_0$ soient nuls.
Mais la résolution de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$conduit à $x_0 = y_0 = 0$ (matrice inversible). Et ceci est refusé par l'hypothèse $\mathbb{Z}^{2*}$.La borne inférieure (ou minimum) est strictement positive.

DS07 Cas de la matrice avec des a.

On calcule l'image d'un couple d'entiers relatifs $\begin{pmatrix} a.x_1 + \frac{a}{2}.x_2 \\ \frac{x_2}{a} \end{pmatrix}$ et on en calcule le carré de la norme : $\left(a.x_1 + \frac{a}{2}.x_2\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2$.
On a juste une exigence : x_1 et x_2 sont entiers et ils ne sont pas nuls simultanément.
L'ensemble des carrés de normes est alors formé comme proposé par disjonction de cas de la réunion de trois ensembles

$$\begin{array}{ccccc} & \Big\{ & (a.x_1)^2 & \mid & x_1 \in \mathbb{Z}^* \Big\} \\ \cup & \Big\{ & (a.x_1 + \frac{a.(2.k+1)}{2})^2 + (\frac{2.k+1}{a})^2 & \mid & x_1 \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z} \Big\} \\ \cup & \Big\{ & (a.x_1 + \frac{a.(2.k))}{2})^2 + (\frac{2.k}{a})^2 & \mid & x_1 \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^* \Big\} \end{array}$$

Le premier de ces ensemble a pour minimum a^2 (atteint pour $x_1 = \pm 1$).

Le second ensemble a pour minimum $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{a^2}$.
En effet, comme il y a toujours le terme $(\left(\dfrac{2.k+1}{a}\right)^2$, qui vaut $\dfrac{1}{a^2}$ ou $\dfrac{9}{a^2}$ ou $\dfrac{25}{a^2}$ ou pire, on le minimise pour $k = 0$.
Il nous reste ensuite $\left(a.x_1 + \dfrac{a.(2.k+1)}{2}\right)^2$ qui vaut alors $\left(a.x_1 + \dfrac{a}{2}\right)^2$ et qu'on minimise pour $x_1 = 0$ (ou $x_1 = -1$ par « symétrie).

Le dernier ensemble a pour minimum $\dfrac{4}{a^2}$.
En effet, il y a déjà le terme $\left(\dfrac{2.k}{a}\right)^2$ qui vaut toujours au moins $\left(\dfrac{2}{a}\right)^2$, et il y a l'autre terme, $(a.x_1 + \frac{a.(2.k))}{2})^2$ qui est positif, mais qu'on peut annuler dans le cas $k = 1$ et $x_1 = -1$.

Le minimum de la réunion est le plus petit des trois minima (formule $Min(A \cup B) = Min(Min(A),\ Min(B))$ généralisée à trois ensembles.

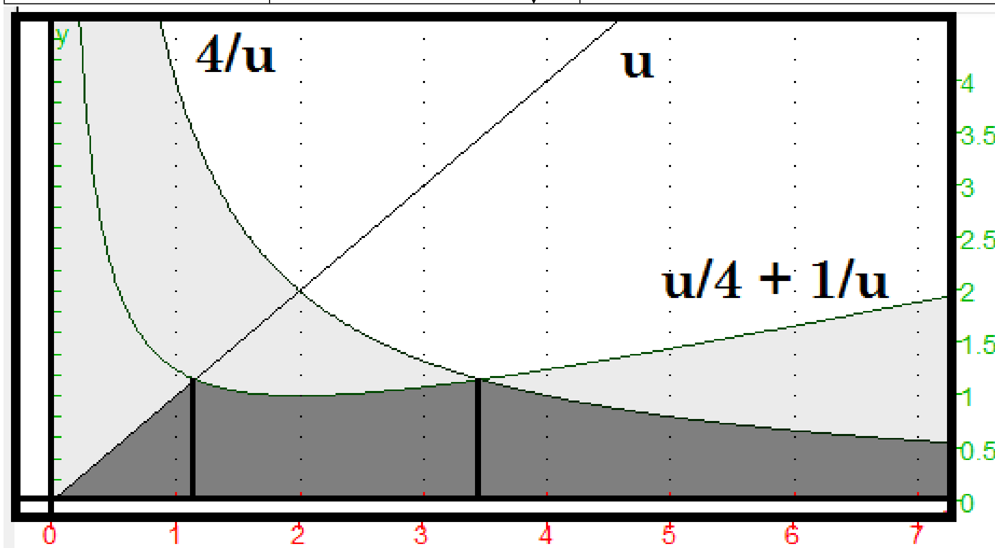
Il faut voir suivant la valeur de a (et en fait de a^2) lequel de ces trois nombres est le plus petit.
On retombe en enfance ou en amphi[1] et on trace trois graphes (avec tableau de variations et recherche des intersections) :

1. j'adore cette formulation, je la ferai breveter

Variations		
$u \longmapsto u$ décroissante. Limite infinie en $+\infty$	$u \longmapsto \dfrac{4}{u^2}$ décroissante. Limite nulle en $+\infty$	$u \longmapsto \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$ décroissante puis croissante. Minimum en $u = 2$, égal à 1.
Intersections		
$u = \dfrac{4}{u}$ en $u = 2$	$u = \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$ en $u = 2/\sqrt{3}$	$\dfrac{4}{u} = \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$ en $u = 2.\sqrt{3}$

On trace donc ensuite le graphe du minimum par intervalles

intervalle	de 0 à $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	de $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ à $2.\sqrt{3}$	de $2.\sqrt{3}$ à $+\infty$
$Min\left(u,\ \dfrac{4}{u},\ \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}\right)$	u	$\dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$	$\dfrac{4}{u}$
	croissant	décroissant puis croissant	décroissant
	maximum en $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	maximum à une des bornes	maximum en $2.\sqrt{3}$



Le maximum de l'application $u \longmapsto Min\left(u,\ \dfrac{4}{u},\ \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}\right)$ est donc atteinte en $2/\sqrt{3}$ ou en $2.\sqrt{3}$.
Et c'est d'ailleurs la même valeur en ces deux points

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2/\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2/\sqrt{3}} = \frac{4}{2.\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2.\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Le maximum de $a \longmapsto Min\left(a^2,\ \dfrac{4}{a^2},\ \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{a^2}\right)$ est donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Il est atteint ddans deux cas pour $u = a^2$ donc en quatre points pour a

$$-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},\ \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},\ -\sqrt{2.\sqrt{3}},\ \sqrt{2.\sqrt{3}}$$

Que des mathes élémentaires, avec des représentations graphiques, aucun gros théorème.
Mais il faut être méthodique.
Rappel : en 1982, année où a été posé ce sujet, il n'y avait pas de calculatrices graphiques, donc « calkculatrice autorisée ou pas » ne changeait rien par rapport à vous.

DS07 Demi-plan de Poincaré.

L'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive (« demi plan supérieur ») est appelé « demi-plan de Poincaré » ou « plan hyperbolique ».https ://fr.wikipedia.org/wiki/Demi-plan_de_Poincar%C3%A9
On y fait de la géométrie de manière déroutante, mais ici, on ne va pas faire des choses trop compliquées. Il va de soi que le génial Henri Poincaré n'a pas fait que définir des métriques sur ce demi-plan.

On pose $z = x + i.y$ avec x et y réels (toujours préciser) et même ici y strictement positif. On calcule alors l'image par homographie

$$\frac{a.(x+i.y)+b}{c.(x+i.y)+d} = \frac{(a.x+b)+i.a.y}{(c.x+d)+i.c.y} = \frac{((a.x+b)+i.a.y).((c.x+d)-i.c.y)}{(c.x+d)^2+(c.y)^2}$$

Le dénominateur est un réel positif, et seule la partie imaginaire du numérateur nous intéresse. Elle se calcule :

$$(c.x+d).a.y - (a.x+b).c.y = (a.d-b.c).y$$

Le déterminant de la matrice vaut 1 ; la formule $\Im m(T_g(z)) = \dfrac{\Im m(z)}{|c.z+d|^2}$ est validée.
Comme $\Im m(z)$ est strictement positive, ce quotient de réels positif l'est aussi.

On confirme donc $z \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow T_g(z) \in \mathbb{C}^+$ « si $T_g(z)$ existe ».

On tient « de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathbb{C}^+$ mais il nous manque « application ».

Il faut en effet vérifier que $T_g(z)$ existe bien pour z dans $\mathbb{C}^+$.
Serait il possible que $c.z + d$ soit nul. Ceci reviendrait à avoir $(c.x + d) = 0$ et $c.y = 0$.
Mais le réel y est strictement positif (hypothèse $z \in \mathbb{C}^+$).
Toutefois, rien ne dit que c n'est pas nul.
On doit traiter à part le cas où la matrice a été mal choisie avec $c = 0$. Mais alors on aurait (par l'autre équation) : $0.x + d = 0$ et donc $d = 0$.
Dans ce cas, le déterminant $a.d - b.c$ ne peut plus valoir 1.

On a donc bien $\begin{matrix} (a.d-b.c)=1 \\ et \\ \Im m(z) > 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c.z+d \neq 0 \\ et \\ \dfrac{\Im m(z)}{|c.z+d||^2} > 0 \end{matrix}$. On a bien une application de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathbb{C}^+$.

Et l'élève qui ne sait pas lire les questions (donc le non-matheux) a montré « de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathbb{C}^+$ » mais n'a pas montré « application ».
Et toc, c'est terrible un vendredi après midi sur trois comme on se rend compte qu'on perd des points juste parce qu'on calcule et passe à la suite sans se dire « je devais montrer quoi ? ».

La formule $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$ est considérée par le MPSI2 comme une question de cours.
Composer les homographies, c'est multiplier les matrices.
Sinon, on introduit plein de lettres

$$z \longmapsto \frac{a.z+b}{c.z+d} \longmapsto \frac{a'.\dfrac{a.z+b}{c.z+d}+b'}{c'.\dfrac{a.z+b}{c.z+d}+d'}$$

et on reconnaît $z \longmapsto \dfrac{(a'.a+b'.c).z+(a'.b+b'.d)}{(c'.a+d'.c).z+(c'.b+d'.d)}$ comme pour le produit matriciel.

Tout au plus, on dira que pour z dans $\mathbb{C}^+$ et g dans G, on a simplifié par $c.z + d$, non nul.

Le fait que Γ soit un sous-groupe de $(G, .)$ rappelle un devoir précédent. On ne perd pas de points.
Les éléments de Γ sont des éléments de G (l'énoncé le dit).

Le neutre de G est dans Γ (I_2 est à coefficients entiers).

Si deux matrices sont dans Γ, leur produit y est aussi car $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau.

Si une matrice M est dans Γ (coefficients entiers et déterminant 1 car dans G), elle est inversible (ça, le prof de maths sait que vous l'avez écrit) et son inverse est dans Γ (ça, le prof de maths regarde si vous l'avez écrit et donne ou non les points). En effet, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ car on a dit « de déterminant 1 ».

Bref, si vous avez juste dit « M^{-1} existe » sans ajouter « et est dans Γ », vous n'avez aucun point.

DS07 | Le maximum $M(z)$.

Pour l'ensemble $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$, il faut voir que z est fixé (dans $\mathbb{C}^+$, de la forme $x + i.y$ si nécessaire).
C'est γ qui bouge dans Γ (on écrira $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d entiers et $a.d - b.c = 1$. Le réel positif $\Im m(T_\gamma(z))$ a été calculé et vaut $\dfrac{y}{(c.x+d)^2 + (c.y)^2}$.
Les éléments plus grands que $\Im m(z)$ sont ceux pour lesquels on a $(c.x+d)^2 + (c.y)^2 \leqslant 1$.
On a nécessairement $|c| \leqslant \dfrac{1}{y^2}$ d'où un nombre fini de valeurs pour l'entier c (encore une formule avec « deux fois partie entière plus 1 »).
De même, l'entier d ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments dans $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap [\Im m(z),\ +\infty[$.

On veut alors le maximum de l'ensemble $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$, éventuellement infini.
Prouvons déjà son existence en disant que $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (prendre $\gamma = I_2$), majoré.
En effet, si $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap]\Im m(z),\ +\infty[$ est vide, alors l'ensemble est majoré par $\Im m(z)$.
Si $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap]\Im m(z),\ +\infty[$ est non vide, alors le plus grand élément de cet ensemble fini existe, et c'est un majorant de l'ensemble global $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

On a donc une borne supérieure. Pourquoi a-t-on un maximum ?
Si $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap]\Im m(z),\ +\infty[$ est vide, alors l'ensemble $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ est majoré par $\Im m(z)$, mais contient aussi $\Im m(z)$ (avec $\gamma = I_2$). Son maximum est Imm(z) (atteint pour I_2).
Si $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap]\Im m(z),\ +\infty[$ est non vide, alors le maximum de $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$est le plus grand élément de cet ensemble.

Dans les deux cas, le plus grand élément est effectivement atteint.

On peut (pour z fixé) nommer γ_0 une matrice qui réalise ce maximum.

Comme c'est un maximum, pour tout autre élément g de Γ (en particulier pour $g = s.\gamma_0$ puisqu'on a vérifié que s est dans Γ, en tut cas moi), on a $\Im m(T_g(z)) \leqslant \Im m(T_{\gamma_0}(z))$.
On a donc $\Im m(T_s(T_{\gamma_0}(z))) \leqslant \Im m(T_{\gamma_0}(z))$ (en remplaçant $T_{s.\gamma_0}$par $T_s \circ T_{\gamma_0}$).
En écrivant $T_{\gamma_0} = \alpha + i.\beta$, cette information dit $\Im m\Big(\dfrac{-1}{\alpha + i.\beta}\Big) \leqslant \beta$ c'est à dire $\dfrac{\beta}{|\alpha + i.\beta|^2} \leqslant \beta$.
Comme β est un réel strictement positif, on déduit $\dfrac{1}{|\alpha + i.\beta|^2} \leqslant 1$ et en passant à l'inverse et en revenant à la définition : $|T_{\gamma_0}(z)| \geqslant 1$.

Comme au raisonnement précédent, sachant que t est aussi dans Γ, on a

$$\beta = \Im m(T_{\gamma_0}(z)) \geqslant \Im m(T_{t.\gamma_0}(z)) = \Im m\Big(T_t(T_{\gamma_0}(z))\Big) = \Im m\Big(\frac{\alpha + 1 + i.\beta}{1}\Big) = \beta$$

Celui que j'ai appelé β est $M(z)$. Par double inégalité, on a donc non seulement $\Im m(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$ mais aussi $\Im m(T_{t.\gamma_0}(z)) = M(z)$.

Ce qu'on a fait pour t, on peut le refaire pour t^2 et chaque t^n par récurrence sur n.
On peut aussi le faire pour t^{-1}

$$M(z) = \beta = \Im m(T_{\gamma_0}(z)) \geqslant \Im m(T_{t^{-1}.\gamma_0}(z)) = \Im m\Big(T_{t^{-1}}(T_{\gamma_0}(z))\Big) = \Im m\Big(\frac{\alpha - 1 + i.\beta}{1}\Big) = \beta = M(z)$$

Et avec une nouvelle récurrence, tous les $\alpha + n + i.\beta$ (n dans $\mathbb{Z}$) sont encore dans $\{\Im m(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ et vérifient $\Im m(T_{t^n.\gamma_0}(z)) = \beta = M(z)$.

Tous ces complexes ont la même partie imaginaire, mais des parties réelles qui avancent et reculent de 1 en 1.
On va choisir n pour que cette partie réelle $\alpha + n$ tombe comme demandé entre $-1/2$ et $1/2$.

C'est un coup de partie entière ou d'arrondi à l'entier le plus proche.

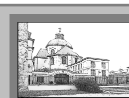
Pour être rigoureux, on choisit $n = -\Big[\alpha + \dfrac{1}{2}\Big]$.

On choisit donc l'élément $T_{t^n.\gamma_0}(z)$ qui réalise ce maximum avec la contrainte de partie entière.
Mais $T_{t^n.\gamma_0}(z)$ est de la forme $\alpha + i.M(z)$ avec $\alpha^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Et on a montré aussi $|T_{t^n.\gamma_0}(z)| \geqslant 1$ puisque c'est un élément qui atteint le maximum.

Pour que le carré du module dépasse 1, avec une partie réelle entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, il faut que la partie imaginaire dépasse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (rappelons qu'elle est positive).

On a donc bien obtenu $M(z) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

DS07 Passage de $M(z)$ à $m(g)$.



On se donne donc une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G (déterminant 1, c'est tout).

On nous recommande de faire intervenir $z = T_{g^T}(i)$: $g^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $T_{g^T} = z \longmapsto \dfrac{a.z+c}{b.z+d}$ et $z = \dfrac{a.i+c}{b.i+d}$. Pourquoi pas.

Mais est il dans $\mathbb{C}^+$ ce complexe ? Calculons sa partie imaginaire sinon ça ne sert à rien :

$$\Im m(z) = \Im m(T_{g^T}(i)) = \Im m\Big(\frac{a.i+c}{b.i+d}\Big) = \Im m\Big(\frac{(a.i+c).(-b.i+d)}{|b.i+d|^2}\Big) = \frac{a.d-b.c}{|b.i+d|^2} = \frac{1}{|b.i+d|^2} > 0$$

Si vous appliquez à z des résultats qui ne sont valables que pour les éléments de $\mathbb{C}^+$ sans vérifier que ce z est dans $\mathbb{C}^+$, vous faites quoi ?
Pas un raisonnement mathématique mais un assemblage de formules sans réfléchir.
C'est un profil d'ingénieur ça ?

On sait alors que la maximum des $\Im m(T_g(z))$ (g décrivant Γ) est supérieur ou égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.