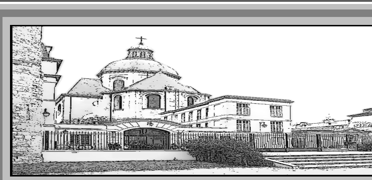
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 12 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

IS20

♡ 0 ♡ Montrez que si la suite réelle (a_n) converge, sa limite est unique. 2 pt.

◇ 0 ◇ On suppose que (a_n) est de Cauchy et que (a_{n^2}) converge vers α. Déduisez que (a_n) converge vers α (on pourra écrire $a_n - \alpha = a_n - a_n^2 + a_{n^2} - \alpha$ puis venir aux N_ε). 3 pt.

♡ 1 ♡ La suite arithmétique réelle (a_n) vérifie $a_2 = 10$ et $a_{10} = 2$. Calculez a_n pour tout n. 1 pt.

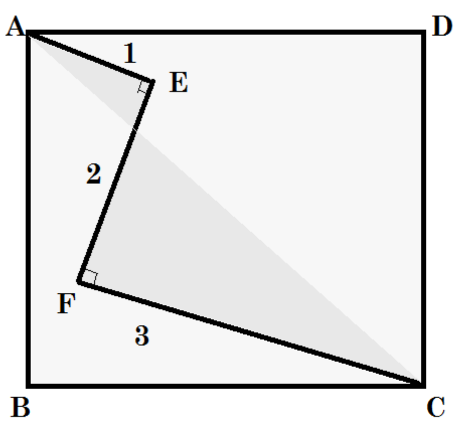
♡ 2 ♡ La suite géométrique réelle (b_n) vérifie $b_2 = 10$ et $b_{10} = 2$ et $b_{11} < 0$. Calculez b_n pour tout n. 2 pt.

◇ 1 ◇ La suite arithmético-géométrique (a_n) vérifie $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ et $c_{3'} = 2$. Calculez c_n pour tout n. 4 pt.

◇ 2 ◇ La suite récurrente homographique (u_n) vérifie $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $a_3 = -\dfrac{5}{7}$. Calculez u_n pour tout n. 5 pt.

◇ 3 ◇ On appelle homographie toute fonction h de $\mathbb{C}$ (moins un point) dans C de la forme $z \longmapsto \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ avec $a.d - b.c = 1$.
Montrez que les homographies forment un groupe pour la loi de composition. 2 pt.
Deux homographies h et k sont dites conjuguées si il existe une application affine t de la forme $z \longmapsto \alpha.z + \beta$ (avec α non nul), vérifiant $h \circ t = t \circ k$.
Montrez que la conjugaison est une relation d'équivalence. 3 pt.
$x \longmapsto \dfrac{2.x+3}{x+2}$ est elle conjuguée à $x \longmapsto -\dfrac{x+2}{2.x+3}$? 2 pt.

◇ 4 ◇ Quatre complexes distincts z_1 à z_4 sont dits cocycliques si et seulement si $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}.\dfrac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$ est un réel.[1]
Vérifiez que quatre complexes distincts de module 1 sont bien cocycliques (pensez à factoriser en arc moitié ou en moyenne des angles). 3 pt.
Vérifiez que quatre complexes alignés sont bien cocycliques. 2 pt.
h est une homographie. Montrez que $h(z_1)$ à $h(z_4)$ sont cocycliques si et seulement si z_1 à z_4 le sont. 2 pt.



(A, B, C, D) est un carré.
On sait AE = 1, EF = 2 et FC = 3.

Les angles en E et F sont droits.

Calculez l'aire du carré (A, B, C, D)

Écrivez la formule de Taylor avec reste intégrale d'ordre 5 pour une application F de classe C^4 entre a et $a+h$. 2 pt.
Montrez pour tout θ réel :
$\left|\sin(\theta) - \left(\theta - \dfrac{\theta^3}{6}\right)\right| \leqslant \dfrac{|\theta|^5}{120}$. 2 pt.

3 points pour le carré ci contre.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}.d\theta$. 3 pt.

♯ 0 ♯ Ces entiers sont particuliers : 10453 est premier, et son renversé 35401 aussi ; de même 74093 est premier et son renversé 39047 sont premiers.
Écrivez un programme qui trouve tous les entiers à cinq chiffres qui sont premiers de même que leur renversé

1. preuve non demandée, reposant sur le théorème de l'angle au centre

IS20 Questions de cours.

On va supposer que la suite (a_n) converge à la fois vers α et vers β avec α différent de β et on va obtenir une contradiction.
Sans perte de généralité, on va supposer $\alpha < \beta$ et poser alors $\varepsilon = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ dans les quantifications

$$\begin{array}{lllll} \forall \varepsilon > 0 & \exists N_\varepsilon & \forall n \in \mathbb{N} & (n \geqslant N_\varepsilon & \Rightarrow \quad |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists M_\varepsilon & \forall n \in \mathbb{N} & (n \geqslant M_\varepsilon & \Rightarrow \quad |u_n - \beta| \leqslant \varepsilon) \end{array}$$

A partir du rang $Max(N_{|\beta-\alpha|/3},\ M_{|\beta-\alpha|/3})$ (et même, à ce rang), on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\beta-\alpha}{3}$ et $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{\beta-\alpha}{3}$.
En version encadrements, ceci donne

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha - \dfrac{\beta-\alpha}{3} & \leqslant & u_n & \leqslant & \alpha + \dfrac{\beta-\alpha}{3} & & & & \\ & & & & \dfrac{2.\alpha+\beta}{3} & < & \dfrac{\alpha+\beta}{2} & < & \dfrac{\alpha+2.\beta}{3} \\ & & & & & & \beta - \dfrac{\beta-\alpha}{3} & \leqslant u_n \leqslant & \beta + \dfrac{\beta-\alpha}{3} \end{array}$$

et la contradiction vient avec$a_n \leqslant \dfrac{2.\alpha+\beta}{2} < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \dfrac{\alpha+2.\beta}{3} \leqslant a_n$.
En version inégalité triangulaire, ceci donne

$$|\beta - \alpha| = |\beta - a_n + a_n - \alpha| \leqslant |\beta - a_n| + |a_n - \alpha| \leqslant \frac{|\beta-\alpha|}{3} + \frac{|\beta-\alpha|}{3} = \frac{2}{3}.|\beta - \alpha|$$

tout aussi contradictoire (et utilisable dans $\mathbb{C}$).

IS20 Suite de Cauchy.

On écrit nos deux hypothèses

$$\begin{array}{lllll} \forall \varepsilon > 0 & \exists K_\varepsilon & \begin{array}{l}\forall p \in \mathbb{N} \\ \forall q \in \mathbb{N}\end{array} & \left(\begin{array}{l} p \geqslant K_\varepsilon \\ q \geqslant K_\varepsilon \end{array} \right. & \Rightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists M_\varepsilon & \forall n \in \mathbb{N} & (n \geqslant M_\varepsilon & \Rightarrow \quad |u_{n^2} - \alpha| \leqslant \varepsilon) \end{array}$$

Dans la seconde, c'est bien « $n \geqslant M_\varepsilon \Rightarrow$ » et pas « $n^2 \geqslant M_\varepsilon \Rightarrow$ » puisque la variable est n, et la suite est une composée $n \longmapsto n^2 \longmapsto u_{n^2}$.
On a un objectif $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon)$.
On se donne ε et on veut $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$, quitte à payer un certain prix.
On se laisse guider $|u_n - \alpha| = |u_n - u_{n^2} + u_{n^2} - \alpha| \leqslant |u_n - u_{n^2}| + |u_{n^2} - \alpha|$ et on voit qu'on peut rendre chacune des deux quantités « petites ». Disons qu'on va couper la mandarine en deux [2]. On prend n plus grand que $M_{\varepsilon/2}$ et on a $|u_{n^2} - \alpha| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ensuite, on prend n et n^2 plus grands que $K_{\varepsilon/2}$ (en fait, il suffit de prendre n plus grand que $K_{\varepsilon/2}$ puisque n^2 est encore plus grand que lui). On a cette fois $|u_n - u_{n^2}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Et en sommant on a bien ce qu'on voulait.
Résumé visuel

$$n \geqslant Max(M_{\varepsilon/2}, K_{\varepsilon/2}) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lllll} n \geqslant M_{\varepsilon/2} & & \Rightarrow & & |u_{n^2} - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geqslant M_{\varepsilon/2} & \Rightarrow & n^2 \geqslant n \geqslant M_{\varepsilon/2} & \Rightarrow & |u_{n^2 - u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |u_n - \alpha| \leqslant |u_n - u_{n^2}| + |u_{n^2} - \alpha| \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

2. c'est plus facile à partager qu'une poire, alors pourquoi l'expression serait « coupons la poire en deux »

IS20 Usite arithmétique.


Avec $a_2 = 10$ et $a_{10} = 2$, la raison vaut -1 et le terme général vaut $12 - n$.

IS20 Suite géométrique.


Avec $b_2 = 10$ et $b_{10} = 2$ la raison vérifie $r^8 = 1/5$. On a deux solutions dans $\mathbb{R}$. Mais l'information sur le signe de a_{11} donne la solution négative $-\Big(\dfrac{1}{5}\Big)^{1/8}$. Le terme général est alors $10.r^{n-2}$ ou encore $10.(-1)^n.(5^{\frac{-(n-2)}{8}})$.

IS20 Suite arithémtico-géométrique.


En posant $c_{n+1} = a.c_n + b$ on trouve $a + b = 3$ et $3.a + b = 2$. On résout et on n'a pas le choix : $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{7}{2}$.
On étudie la suite $c_{n+1} = \dfrac{7 - c_n}{2}$ en diagonalisant une matrice ou en soustrayant le point fixe. On cherche justement ce point fixe : $\gamma = \dfrac{7}{3}$.
On vérifie que la suite $\gamma_n = c_n - \dfrac{7}{3}$ et géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
On explicite son terme général $\gamma_n = \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}.\Big(1 - \dfrac{7}{3}\Big)$ (autant exploiter la valeur en $n = 1$). On revient à c_n

$$c_n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}.\Big(1 - \frac{7}{3}\Big) + \frac{7}{3}$$

IS20 Suite homographique.


Cette fois, on a quatre coefficients à trouver (en fait trois) : $u_{n+1} = \dfrac{a.u_n + b}{c.u_n + d}$ à l'aide des conditions initiales.

$u_0 = 2$	$u_1 = 0$	$u_2 = -\dfrac{1}{2}$	$a_3 = -\dfrac{5}{7}$	
	$2.a + b = 0$	$\dfrac{b}{d} = -\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\frac{-a}{2} + b}{\frac{-c}{2} + d} = -\dfrac{5}{7}$	
	$b = -2.a$	$d = -2.b = 4.a$	$-7.a + 14.b = 5.c - 10.d$	
			$c = a$	

On n'a pas assez d'équations ? Il nous reste a comme inconnue ? Mais si on écrit l'homographie $x \longmapsto \dfrac{a.x - 2.a}{a.x + 4.a}$ notre a se simplifie

$$x \longmapsto \frac{x-2}{x+4}$$

On crée la matrice qu'on diagonalise car c'est tout ce qu'on sait faire finalement (ou en tout cas, c'est ce qu'on fait le mieux)

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	trace 5	pol car	$\lambda_1 = 2$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
	déterminant 6	$X^2 - 5.X + 6$	$\lambda_2 = 3$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

On calcule explicitement la puissance de la matrice puis l'homographie itérée et enfin le terme de la suite

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ 3^n - 2^n & 2.3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

$$x \longmapsto \frac{(2^{n+1} - 3^n).x + (2^{n+1} - 2.3^n)}{(3^n - 2^n).x + 2.3^n - 2^n}$$

$$u_n = \frac{(2^{n+1} - 3^n).2 + (2^{n+1} - 2.3^n)}{(3^n - 2^n).2 + 2.3^n - 2^n} = \frac{-4.3^n + 4.2^n}{4.3^n - 3.2^n}$$

On pouvait deviner cette formule et la valider par récurrence ? On pouvait.

Pour la limite à l'infini,

on raisonne en physicien : 2^n ne compte plus face à 3^n $u_n \simeq \dfrac{-4.3^n}{4.3^n}$ et donc $u_n$tend vers -1

On raisonne en mathématicien de terminale $u_n = \dfrac{-4.3^n+4.2^n}{4.3^n-3.2^n} = \dfrac{-4+4.\left(\frac{2}{3}\right)^n}{4-3.\left(\frac{2}{3}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{-4}{4}$

On raisonne en mathématicien de L1 : le cours dit que la suite converge vers un des points fixes

On raisonne en mathématicien de Prépas : $u_n = \dfrac{-4.3^n+o(3^n)}{4.3^n+o(3^n)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{-4.3^n}{4.3^n} = -1$ donc $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} -1$

IS20 Homographies.

On se donne deux homographies au sens indiqué : $z \longmapsto \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ et $z \longmapsto \dfrac{a'.z+b'}{c'.z+d'}$ (avec $a.d-b.c$ et $a'.d'-b'.c'$ égaux à 1).

La composée est $z \longmapsto \dfrac{(a.a'+b.c').z+(a.b'+b.d')}{(c.a'+d.c').z+(c.b'+d.d')}$ (forme convenable obtenue par produit matriciel). Il reste à vérifier que le déterminant $(a.a'+b.c').(c.b'+d.d')-(c.a'+d.c').(a.b'+b.d')$ vaut aussi 1. Or, comme par hasard, il est égal au produit $(a.d-b.c).(a'.d'-b'.c')$ après simplifications. Et ce produit malproprement noté $(\pm 1)\times(\pm 1)$ vaut aussi 1.

La composition de fonctions est associative.

Le neutre est $z \longmapsto \dfrac{1.z+0}{0.z+1}$, c'est bien une homographie (associe à la matrice unité évidemment).

La réciproque de $z \longmapsto \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ est $z \longmapsto \dfrac{d.z-b}{-c.z+a}$, de même déterminant $a.d-b.c$.

Réflexivité On se donne une seule homographie h et on cherche t vérifiant $h\circ t = t\circ h$. On a envie de prendre $t = Id$. Il faut quand même vérifier que $t = Id$ est bien une application affine, de la forme $z \longmapsto \alpha.z+\beta$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Symétrie On se donne h et k. On suppose l'existence de t (de la forme $z \longmapsto \alpha.z+\beta$ avec α non nul) vérifiant $h\circ t = t\circ k$. On cherche alors une (autre) application linéaire τ vérifiant $k\circ\tau = \tau\circ h$. Il suffit de prendre $\tau = t^{-1}$ (c'est notre histoire de $k = t^{-1}\circ h\circ t$ qui donne $h = (t^{-1})^{-1}\circ k\circ t^{-1}$) et de vérifier que t^{-1} est encore une application affine, de la forme $z \longmapsto \dfrac{1}{\alpha}.z-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Transitivité On se donne cette fois trois applications [3]. On suppose qu'il existe t et τ vérifiant $h_1\circ t = t\circ h_2$ et $h_2\circ\tau = \tau\circ h_3$ (objectif : h_1 est conjugué à h_3). On compose

$$h_1\circ(t\circ\tau) = (h_1\circ t)\circ\tau = (t\circ h_2)\circ\tau = t\circ(h_2\circ\tau) = t\circ\tau\circ h_3$$

et la composée $t\circ\tau$ est encore une application affine.

IS20 Cocyclicité.

Dans la quantité $\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}.\dfrac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$ appelée birapport dans tout bon livre, on note qu'il est important que les quatre complexes soient distincts.

L'interprétation géométrique repose sur le théorème de l'arc capable ou de l'angle au centre.

On se donne quatre complexes de module 1 qu'on écrit $e^{i.\alpha_1}$ à $e^{i.\alpha_4}$. On doit donc vérifier si $\dfrac{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_3}}{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_4}}.\dfrac{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_4}}{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_3}}$ est réel. On ne va pas tout de suite mettre des cosinus et des sinus. ce serait lourd. On va utiliser l'arc moitié pour

---

3. trop tenté de les appeler h, h' et h'' mais on va confondre avec des dérivées

simplifier (espérons le)

$$\frac{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_3}}{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_4}}.\frac{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_4}}{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_3}}=\frac{e^{i.\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}.(e^{i.\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}})}{e^{i.\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}}.(e^{i.\frac{\alpha_1-\alpha_4}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_4-\alpha_1}{2}})}.\frac{e^{i.\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}.(e^{i.\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_4-\alpha_2}{2}})}{e^{i.\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}.(e^{i.\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}})}$$

On constate qu'on a, en haut comme en bas $e^{i.\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}$; ce terme s'en va.
Il reste des sinus

$$\frac{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_3}}{e^{i.\alpha_1}-e^{i.\alpha_4}}.\frac{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_4}}{e^{i.\alpha_2}-e^{i.\alpha_3}}=\frac{e^{i.\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}}}{e^{i.\frac{\alpha_1-\alpha_4}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_4-\alpha_1}{2}}}.\frac{e^{i.\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_4-\alpha_2}{2}}}{e^{i.\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}-e^{i.\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}}}=\frac{2.i.\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right)}{2.i.\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_4}{2}\right)}.\frac{2.i.\sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}\right)}{2.i.\sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)}$$

Qu'importe ce que valent ces sinus. Les $2.i$ s'en vont et il reste un quotient entre quatre réels. C'est un réel.

Prenons maintenant quatre complexes alignés. La mauvaise approche consiste à dire qu'ils vérifient tous l'équation d'une même droite. Ceci introduit des coefficients en plus.
La bonne approche est dynamique. Regardons déjà le quotient $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$.
Les trois points sont alignés. C'est donc que z_1-z_4 est un multiple réel de z_1-z_3 (les deux vecteurs $\overrightarrow{M_4M_1}$ et $\overrightarrow{M_3M_1}$, avec des notations évidentes, sont colinéaires). Le quotient est un réel.
Il en est de même de $\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$ par alignement.

On se donne quatre complexes distincts z_1 à z_4 et une homographie. Déjà, les images $h(z_1)$ à $h(z_4)$ sont distincts (application injective).
On suppose les quatre premiers cocycliques : $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}.\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}\in\mathbb{R}$.
On calcule les images et on regarde le nouveau quotient

$$\frac{\frac{a.z_1+b}{c.z_1+d}-\frac{a.z_3+b}{c.z_3+d}}{\frac{a.z_1+b}{c.z_1+d}-\frac{a.z_4+b}{c.z_4+d}}.\frac{\frac{a.z_2+b}{c.z_2+d}-\frac{a.z_4+b}{c.z_4+d}}{\frac{a.z_2+b}{c.z_2+d}-\frac{a.z_3+b}{c.z_3+d}}=\frac{\frac{(a.z_1+b).(c.z_3+d)-(c.z_1+d).(a.z_3+b)}{(c.z_1+d).(c.z_3+d)}}{\frac{(a.z_1+b).(c.z_4+d)-(c.z_1+d).(a.z_4+b)}{(c.z_1+d).(c.z_4+d)}}.\frac{\frac{(a.z_2+b).(c.z_4+d)-(c.z_2+d).(a.z_4+b)}{(c.z_2+d).(c.z_4+d)}}{\frac{(a.z_2+b).(c.z_3+d)-(c.z_2+d).(a.z_3+b)}{(c.z_2+d).(c.z_3+d)}}$$

Tous les $c.z_k+d$ des dénominateurs s'en vont. Il reste

$$\frac{(a.z_1+b).(c.z_3+d)-(c.z_1+d).(a.z_3+b)}{(a.z_1+b).(c.z_4+d)-(c.z_1+d).(a.z_4+b)}.\frac{(a.z_2+b).(c.z_4+d)-(c.z_2+d).(a.z_4+b)}{(a.z_2+b).(c.z_3+d)-(c.z_2+d).(a.z_3+b)}$$

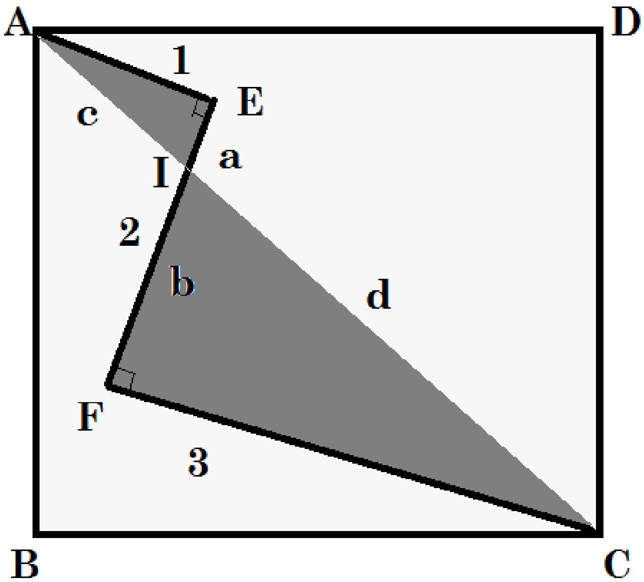
Chaque $(a.z+b).(c.z'+d)-(a.z'+b).(c.z+d)$ se développe et simplifie en $(a.d-b.c).(z-z')$.
Au final, les $a.d-bc$ (non nuls) se simplifient et il reste

$$\frac{\frac{a.z_1+b}{c.z_1+d}-\frac{a.z_3+b}{c.z_3+d}}{\frac{a.z_1+b}{c.z_1+d}-\frac{a.z_4+b}{c.z_4+d}}.\frac{\frac{a.z_2+b}{c.z_2+d}-\frac{a.z_4+b}{c.z_4+d}}{\frac{a.z_2+b}{c.z_2+d}-\frac{a.z_3+b}{c.z_3+d}}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}.\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

Avec cette parfaite égalité, le premier quotient est réel si et seulement si le second est réel.

IS20 Un carré et des triangles rectangles.

le théorème de Thalès (ou $tan = opp/adj$)	en A et en C	$b/3 = a/1$	$b = 3.a$
alignement E, I et F	$a+b=2$		donc $a=1/2$ et $b=3/2$
le théorème de Pythagore	IEA	$a^2+1=c^2$	donc $c=\sqrt{5}/2$
	IFC	$b^2+9=d^2$	$d=3.\sqrt{5}/2$
et la question...	$c+d=?$		$c+d=2.\sqrt{5}$



Le dessin nous incitait à tracer le diagonale AC du carré et à nommer quelques longueurs et un point d'intersection.

Il ne reste qu'à utiliser nos théorèmes (voir ci dessous).

La diagonale vaut $2.\sqrt{5}$.

Le côté du carré vaut $\dfrac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ et l'aire du carré vaut $\dfrac{5}{2}$ unités.

IS20 

Formule de Taylor.

$$F(a+h) = F(a) + h.F'(a) + \frac{h^2}{2}.F''(a) + \frac{h^3}{6}.F^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24}.F^{(4)}(a) + \frac{h^5}{24}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^4.F^{(5)}(a+t.h).dt$$

On l'applique au sinus entre 0 et θ ($a = 0$, $h = \theta$)

$$\sin(0+\theta) = \sin(0) + \theta.\cos(0) - \frac{\theta^2}{2}.\sin(0) - \frac{\theta^3}{6}.\cos(0) + \frac{\theta^4}{24}.\sin(0) - \frac{\theta^5}{24}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^4.\cos(0+t.\theta).dt$$

On isole ce qui regarde le physicien

$$\sin(\theta) - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = -\frac{\theta^5}{24}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^4.\cos(t.\theta).dt$$

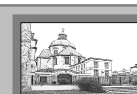
On met une valeur absolue et on majore l'intégrale par inégalité triangulaire $|\int_0^1 \varphi(t).dt| \leqslant \int_0^1 |\varphi(t)|.dt$

$$\left|\sin(\theta) - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\right| = \frac{|\theta|^5}{24}.\left|\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^4.\cos(t.\theta).dt\right| \leqslant \frac{|\theta|^5}{24}.\int_{t=0}^{t=1} \left|(1-t)^4.\cos(t.\theta)\right|.dt$$

On majore le cosinus par 1 et on garde $(1-t)^4$ qui est positif

$$\left|\sin(\theta) - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{|\theta|^5}{24}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^4.dt = \frac{|\theta|^5}{24}.\frac{1}{5}$$

(si vous avez encore besoin de prendre deux lignes pour calculer $\int_0^1 t^n.dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, je fais quoi de vous ?)
On a la majoration demandée.

IS20 

Entiers triplement premiers

On crée déjà un test de primalité brutal.
Et une procédure pour renverser un entier.

```
def isprime(n) :
....for k in range(2, n) :
........if n% k == 0 :
............return False
....return True
```

```
def renve(n) :
....ns = str(n)
....ns.reverse()
....return int(ns)
```

```
def renve(n) :
....r = 0
....while n != 0 :
........r = 10*r + (n%10)
........n = n//10
....return r
```

On crée une liste destinée à recevoir les nombres.
On passe en revue les entiers en question, et on fait des tests :

```
LL = [ ]
for n in range(10000, 100000) :
....if isprime(n) :
........r = renve(n)
........if isprime(r) :
............LL.append(n)
```

Sinon, on aura intérêt à créer tout simplement la liste des nombres premiers plus petits que 200000.

On n'a plus ensuite qu'à tester pour les n de cette liste (entre 10000 et 100000) si leur renversé est dans la liste.
Un teste d'appartenance à cette liste sera plus rapide qu'un test de primalité.

```
P = [2]
n = 1
while n < 100000 :
....n += 2
....boo = True
....for d in P :
........if n % d == 0 :
............boo = False
............break
....if boo :
........P.append(n)
```

IS20

Ca faisait longtemps qu'on n'avais pas calculé une intégrale.

L'intégrale existe par un argument de continuité.
Je propose un changement de variable tout ce qu'il y a de plus classique (on avait fini par oublier) : $t = \tan(\theta/2)$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}.d\theta = \int_{t=0}^1 \frac{\frac{2.t}{1+t^2}}{\frac{2.t}{1+t^2}+1}.\frac{2.dt}{1+t^2} = 4.\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}.\frac{dt}{1+t^2} = 2.\int_0^1 \Big(\frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2}\Big).dt$$

Il n'y a pas de terme en $\dfrac{t}{1+t^2}$ ni de terme en $\dfrac{1}{1+t}$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}.d\theta = 2.\Big[Arctan(t) + \frac{2}{1+t}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$