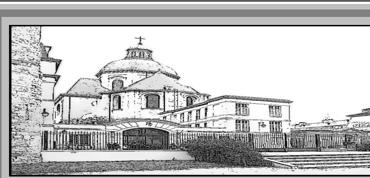
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 24 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

TD22

◃0▹ Vrai ou faux : si $((u_n)^5)$ et $((u_n)^7)$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^5)$ ou $((u_n)^7)$ diverge alors (u_n) diverge ?

◃1▹ Pour tout n, on note a_n le nombre de français ayant exactement n cheveux. Montrez que la suite (a_n) converge, en revenant aux ϵ.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$.

◃2▹ Montrez qu'il y a à tout instant deux points de l'équateur diamétralement opposés où la température est la même.
Est-ce encore vrai pour deux points de l'Équateur ?
C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

◃3▹ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe c_n dans $[0,\ 1]$ vérifiant $f(0) + n.f(1) = (n+1).f(c_n)$.

◃4▹ ♣ On suppose qu'il existe une application f continue injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Montrez que $t \longmapsto f(e^{i.t})$ va de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et a pour image un intervalle $[\alpha,\ \beta]$.
Montrez que $t \longmapsto f(e^{-i.t})$ de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ a pour image le même intervalle. Déduisez que f n'est finalement pas injective.
Montrez qu'en revanche que l'application qui à $x + i.y$ associe le réel formé en intercalant les deux développements décimaux de x et y va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sans être continue. Est elle injective ?

◃5▹ ♡ Montrez que toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ est de signe constant *(mots clefs : valeurs intermédiaires, absurde)*.

◃6▹ Soit f continue de I (intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), dans $\mathbb{R}$, injective.
On se donne u et v dans I vérifiant $u < v$. Montrez alors $f(u) < f(v)$ ou $f(v) < f(u)$.

On suppose ici $f(u) < f(v)$. On se donne t entre u et v. Montrez par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[u,\ t]$ ou sur $[t,\ v]$: $f(u) < f(t) < f(v)$.

Montrez que si en revanche on a $f(u) > f(v)$ alors on a $\forall t \in]u,\ v[,\ f(u) > f(t) > f(v)$.
Que répondez vous à l'élève qui prétend avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u\ v]$?
On se donne a et b avec $a < b$. On suppose pour cette étape $f(a) < f(b)$.
On se donne x et y vérifiant $a < x < y < b$. Montrez alors $f(a) < f(x) < f(b)$ puis $f(a) < f(x) < f(y)$ en faisant jouer à a, x, y et b les rôles de u, v et t de la question précédente.
Que répondez vous à l'élève qui dit avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u\ v]$?

Que pouvez vous déduire dans le cas $f(a) > f(b)$.

Déduisez que f est monotone sur l'intervalle I (même si I est de la forme $[a,\ +\infty[$ ou $]-\infty,\ +\infty[$ ou $]\alpha,\ \beta[$).

◃7▹ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 2$. Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x : $\displaystyle\int_0^x f(t).dt = 9$.

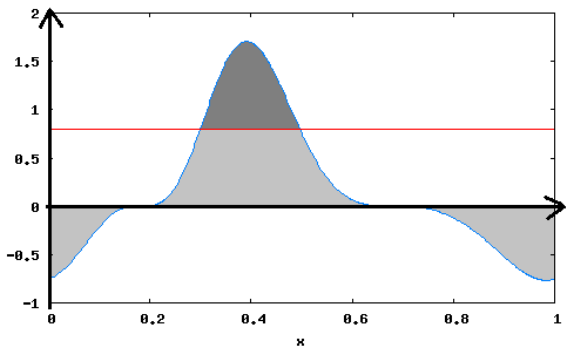
◃8▹ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ admet un unique point fixe α.
Montrez que $f - Id$ ne peut pas rester de signe constant. Concluez que f admet un point fixe., et montrez que c'est α.

◃9▹ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'a pas de point fixe et vérifie $f(0) > 0$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$. Déduisez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) > x$. Déduisez le résultat suivant : si $g \circ g$ admet au moins un point fixe, alors g admet au moins un point fixe.

◁ 10 ▷ Pour tout n, on note a_n la solution dans $]0,\ +\infty[$ de l'équation $\ln(x) = n.\pi + Arctan(x)$ (existence ? unicité ?).
Montrez que la suite (a_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
Montrez que la série de terme général $(a_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.

◁ 11 ▷ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans lui même. Montrez que pour tout n l'équation $f(x) = x^n$ admet au moins une solution (appliquez le théorème des valeurs intermédiaires).

◁ 12 ▷ Soient f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f^2 = g^2$. Montrez qu'on a $\forall x,\ f(x) = g(x)\ ou\ f(x) = -g(x)$.
Montrez qu'on n'a pas forcément $(\forall x,\ f(x) = g(x))\ ou\ (\forall x,\ \ f(x) = -g(x))$.
Montrez que si f et g continues vérifient $\forall x,\ f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ alors on a $f = g$ ou $f = -g$.

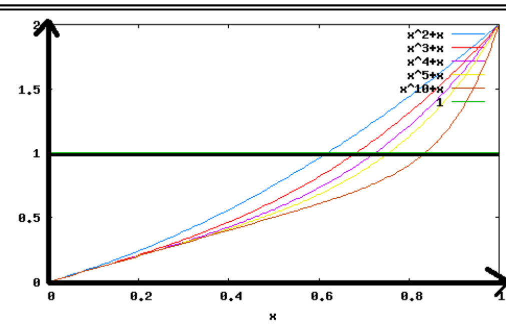


◁ 13 ▷ ♡ Soit f une application continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrez qu'il existe au moins un x de $[0,\ 1]$ vérifiant $f(x) = f(x + 1/5)$ *(supposez par l'absurde que* $x \longmapsto f(x+1/5) - f(x)$ *est de signe constant sur* $[0,\ 4/5]$*)*.
♣ Construisez une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$ mais telle qu'il n'existe aucun x vérifiant $f(x) = f(x + \sqrt{2}/2)$.

◁ 14 ▷ Montrez qu'il ne peut pas exister f continue et bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ (utiliser le T.V.I.).

◁ 15 ▷ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$. On pose $F = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ et $G = x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt$.
Montrez pour tout x de $[0,\ 1]$: $G(x) = \int_{t=0}^x (F(x) - F(t)).dt$.
Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0,\ 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0,\ 1]$.
On suppose $(a,\ b) \in]0,\ 1[^2$ et $F(a) > 0 > F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.
Déduisez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \int_0^c t.f(t).ft = 0$.
On suppose $F(a) > F(b) \geqslant 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \int_0^c t.f(t).ft = 0$.
On suppose $0 \geqslant F(a) \geqslant F(b)$. Montrez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \int_0^c t.f(t).dt = 0$.

◁ 16 ▷ Montrez qu'il existe un x entre 1 et 2 vérifiant $x^5 = 5^x$.
Montrez que pour tout a plus grand que e il existe un x entre 1 et e vérifiant $x^a = a^x$.



◁ 17 ▷ ♡ Montrez que pour tout n l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique racine sur $[0,\ 1]$ (on introduira l'application $x \longmapsto x^n + x$ que l'on pourra noter φ_n). La racine en question sera notée x_n.
Montrez $\varphi_{n+1}(x_n) < 0$. Déduisez que la suite (x_n) est croissante.
Montrez qu'elle converge.
On note α sa limite et on suppose $\alpha < 1$. Montrez alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. Déduisez $\alpha = 1$. Concluez.

◁ 18 ▷ On définit $S(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. Prouvez l'existence de $S(p)$ pour tout p de $\mathbb{N}^*$.
Sachant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculez $S(2)$ et $S(4)$.
Montrez que S est décroissante.

Pouvez vous calculer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} S(p)$.

Pouvez vous calculer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1}.S_p$?

◁19▷ Au Lycée Louis le Gland, cinquante pour cent des élèves sont en PCSI. Mais dans l'année, un sixième des élèves a démissionné *(pour venir à Magne-le-char)*. Le pourcentage de PCSI a augmenté de dix pour cent. Quel est le pourcentage de PCSI ayant démissionné ?

◁20▷ ♡ Montrez pour tout x réel : $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

◁21▷ Calculez la somme des coefficients de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -8 \\ 0 & 24 & -13 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n.

◁22▷ ♡ Résolvez dans $\mathbb{R}^{+*}$: $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ d'inconnue x .

◁23▷ Colonne 1 : quelles propriétés passent de la suite (u_n) aux deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$.
Colonne 2 : quelles propriétés passent des deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ à la suite (u_n).

propriété	colonne 1	colonne 2
croissante		
monotone		
périodique		
bornée		
convergente		
non convergente		
dont la série converge		
la différence de deux termes consécutifs tend vers 0		

◁24▷ ♡ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrez que cette suite est strictement croissante et ne peut pas converger.
Que déduisez vous ?

```
u, n = 1., 0
while u < 10 :
....u += 1 / u
....n += 1
```

Que fait ce script ? Pourquoi valait il mieux mettre `u = 1.` ?

◁25▷ ♡ Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite et que la suite (a_n) converge aussi.
On suppose que $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite mais que la suite (a_n) ne converge pas forcément.

◁26▷ ♡ On donne $a_n = n + 4 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to+\infty}$. Donnez la limite de $a_{2.n} - 2.a_n$ et de $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1})$ quand n tend vers l'infini.

◁27▷ ♡ Trouvez P vérifiant : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-3} + \frac{1}{X-2}$.
Trouvez Q vérifiant : $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X-3} + \frac{3}{X-2}$.

◁28▷ Si a est une suite réelle, on définit deux sur-suites *(mot non homologué)* :
$\ddot{a} = (a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \ldots)$ *(on voit les deux points au dessus ? en tout cas, chaque terme est cité deux fois)*
et $\ddddot{a} = (a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ a_3,\ a_4,\ a_4,\ a_{\prime},\ a_4,\ a_5 \ldots)$ *(le terme a_n est cité n fois)*.

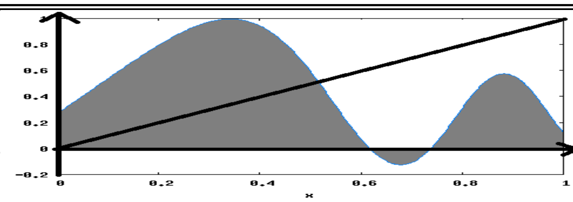
Quelles propriétés passent

	de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\ddddot{a}$	de $\ddddot{a}$ à a	de $\ddddot{a}$ et $\ddot{a}$ à a
croissante					
périodique					
convergente					
géométrique					
divergente vers $+\infty$					

◁29▷ ♣ Donnez le chiffre des unités et le premier chiffre derrière la virgule de $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2018}$.
Indication : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2018}$ et $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2018}$, suites $u_{n+2} = 10.u_{n+1} - u_n$.

◁30▷ Pour tout n, on pose $u_n = \dfrac{\cos(2.n.\pi/3)}{\sqrt[3]{[n/3]+1}}$. Calculez $u_{3.p} + u_{3.p+1} + u_{3.p+2}$ pour tout entier naturel p. Déduisez que la série de terme général u_n converge *(on distinguera pour $\sum_{n=0}^{N} u_n$ suivant la valeur de N modulo 3)*.
Montrez que la série de terme général $(u_n)^3$ diverge.

◁31▷ ♡ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$.
Montrez que f admet au moins un point fixe (en étudiant le signe de $f - Id$ et son intégrale).



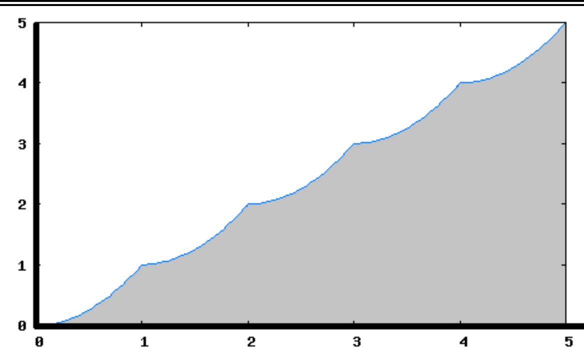
◁32▷ Calculez $\displaystyle\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$.

◁33▷ Montrez que pour tout a de $]-1,\ 1[$ les intégrales I_a et J_a existent

$I_a = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1+a.\cos(\theta)).d\theta$	$J_a = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1+a.\cos(\theta)}.d\theta$

Calculez J_a par le changement de variable habituel.
β est un réel de $]0,\ 1[$ fixé. On se donne a et $a+h$ dans $[-\beta,\ \beta]$, montrez $\left|\ln(1+(a+h).\cos(\theta)) - \ln(1+a.\cos(\theta)) - \dfrac{h.\cos(\theta)}{1+a.\cos(\theta)}\right| \leqslant \dfrac{h^2.\cos^2(\theta)}{2.(1-\beta)^2}$ (c'est Taylor (Lagrange ou intégrale) sur $a \longmapsto \ln(1+a.\cos(\theta))$).
Déduisez : $\left|\dfrac{I_{a+h}-I_a}{h} - J_a\right| \leqslant |h|.\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2}.d\theta$.
Déduisez $(a \longmapsto I_a)' = (a \longmapsto J_a)$.
Calculez I_0 puis I_a pour tout a.

◁34▷ ♣ On définit : $f = x \longmapsto (x-[x])^2 + [x]$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est elle dérivable ?
Calculez son intégrale de 0 à 5. Montrez qu'elle est lipschitzienne.



◁35▷ *Mario et Luigi font des courses en kart* (je suis influencé par les jeux de mon fils)*, à vitesse constante. Quand ils font la course sur un kilomètre, Mario arrive alors que Luigi est encore à cinquante mètres de l'arrivée. Ils recommencent, mais pour rendre le jeu équitable, Mario se recule de cinquante mètres par rapport à la ligne de départ. Qui gagne ? De combien ?*

◁35▷ **Rappel des règles :** sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects (ah, il y a un nombre en trop dans une grille ?).

3			$<$			5		
				$\vee$				$\vee$
						4	$>$	
		$\vee$		$\vee$				
4	$>$	2	$>$		$<$	3		
				$\wedge$		$\wedge$		
	$<$		$>$					

et

							$<$	
						$\vee$		
	$>$			4				
		$\wedge$						
	$<$			5				
		$\vee$						
	$>$		$<$			5		1
		$\wedge$		$\vee$				
5					$\simeq$	1		

◁36▷ On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.
Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E, on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}). Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?
Pour tout u dans E, on note $\varphi(u)$ la suite $(u_{2.n})$. Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire. Pour tout n, on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2.[n/2]}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n, on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite u : $(u_1, u_0, u_3, u_2, u_5, u_4, \ldots)$. Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ *(et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens)*. Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E. Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous espace propre.

$\overrightarrow{u}$ vecteur propre de f c'est $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\exists\lambda,\ f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
λ valeur propre de f c'est $\exists\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O},\ f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
La dimension d'un espace vectoriel, c'est le cardinal d'une base.
Une base d'un espace vectoriel c'est une famille de vecteurs telle que tout vecteur de l'espace se décompose d'une façon unique à l'aide des vecteurs de base.

◁37▷ ♡ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2.n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2.n})$?

◁38▷ ♡ Vers quoi convergent *(si elles convergent)* ?

1	2	3	4	5	6
$\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}\right)$	$\left(\dfrac{3^n+2^{2.n+1}}{3^n-4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\dfrac{e^{2.n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.k!\right)$

◁39▷ ♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ a_p \leqslant a_n\}$.
Déterminez A si (a_n) est croissante.
Déterminez A si (a_n) est décroissante.
On suppose A infini. On pose alors $n_0 = Min(n \mid n \in A\}$, $n_1 = Min(n \mid n \in A\ et\ n > n_0\}$ et plus généralement $n_{k+1} = Min(n \mid n \in A\ et\ > n_k\}$.
Montrez que chaque n_k existe.
Montrez que la suite $k \longmapsto n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.

On suppose A fini. Montrez $\exists K_0,\ \forall,,\ (n \geqslant K_0 \Rightarrow (\exists p > n,\ a_p > a_n)$.
Déduisez $\exists K_1 > K_0,\ a_{K_1} > a_{K_0}$ puis $\exists K_2 > K_1,\ a_{K_2} > a_{K_1}$.
Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n), strictement croissante.

◁40▷ On suppose $(a_n + b_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $(e^{a_n} + e^{b_n}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b. On a alors $a = -b$ et $e^a + e^b = 2$; on déduit $ch(a) = 1$ puis $a = 0$ et $b = 0$.
En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Aboutissez quand même au bon résultat.

◁41▷ Un élève donne les définitions suivantes de la convergence d'une suite :

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
c	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
d	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \leqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \geqslant \varepsilon$

trouvez l'erreur, et dites ce qu'on peut déduire.

◁ 42 ▷ On a donné à Léo les dix chiffres de 0 à 9. Il en a fait quatre nombres : un nombre à un chiffre, un nombre à deux chiffres, un à trois chiffres, un à quatre chiffres. Les quatre sont des carrés parfaits. Pouvez vous refaire la même chose ? Et si on veut toutes les solutions, on prend `Python` ?

◁ 43 ▷ Pour tout entier naturel n, on note $s(n)$ le nombre de chiffres premiers dans l'écriture de n (exemple : $s(2019) = 1$ [1], $s(1789) = 1$, $s(5435) = 3$). Montrez que la série de terme général $\dfrac{s(n)}{n^2}$ est croissante et majorée (intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$?). Écrivez un script Python qui pour N donne calcule la valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^2}$.

◁ 44 ▷ ♡ Donnez une formule explicite pour u_n définie par u_0 donné et $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3}{2}$ pour tout n.
Il existe une méthode en conjecturant, et sinon, on peut relier cette suite à un modèle classique de suites au programme.

◁ 45 ▷ ♡ Pour tout n, on définit $a_n = \dbinom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.

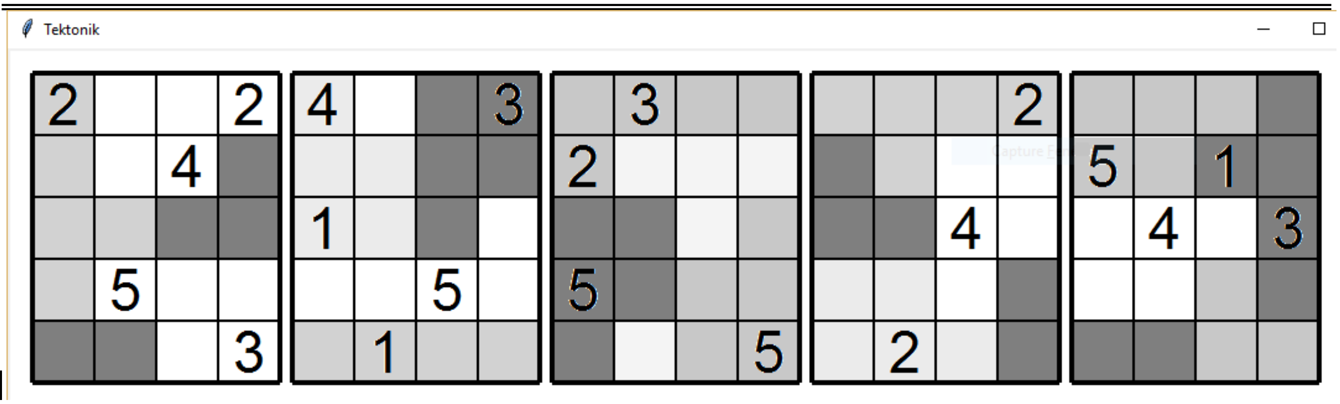
En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\dbinom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

◁ 46 ▷ Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ diverge. Indication : $A_{(2.p+1)^2} - A_{4.p^2}$tend il vers 0 ?

◁ 47 ▷ Soit (a_n) une suite bornée. Montrez que $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{2^n}\right)$ est alors une suite de Cauchy.

◁ 48 ▷ Montrez que si la suite (a_n) vérifie : $\forall n,\ \lvert a_n \rvert \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy. Réciproque ?

Montrez que si la suite (a_n) vérifie $\forall n,\ \lvert a_{n+1} - a_n \rvert \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy.

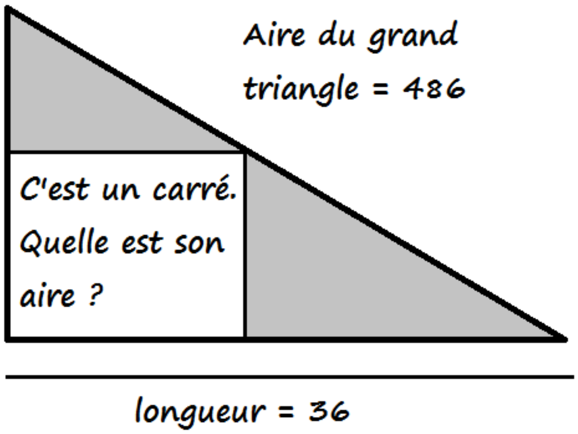


◁ 49 ▷

◁ 50 ▷ Montrez que $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ est un multiple de 30 (exercice sur le développement de déterminant en ligne/colonne).
Quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

nex

1. on rappelle que 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés)



Pour être tranquille, l'instituteur a écrit $a = 1,17\overline{857142}857142857\ldots$ et $b = 3,\overline{18}181818\ldots$ et a demandé « posez la multiplication ».
Votre petit frère est en train de calculer

	1,	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7	1
x	3,	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
	3,	5	3	5	7	1	4	2	8	5	7	1	4
	0,	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7
	0,	0	9	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5
	0,	0	0	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
=	3,	6											

Aidez le ![a]

[a]. moi je vous aide avec $117857025 = 3^4.5^2.11^2.13.37$ et $10^6 = 3^3.7.11.13.37+1$

◃51▹ Le colleur demande à Arthur : trouvez le maximum de x^y pour x et y dans $\mathbb{N}$ sachant $x+y=8$ (maximum noté μ).
Arthur qui assiste à la colle dit « pour x et y dans $\mathbb{R}$, j'ai mieux que votre μ, avec $x = 3,5$ » ; vérifiez l'affirmation d'Arthur (sachant $7^9 = 40353607$).
Mais Arthur qui passait par là cherche à faire encore mieux ? C'est jouable ?

◃52▹

Algorithme de Newton ($u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$) pour l'extraction de racines carrées (dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $M_2(\mathbb{R})$) et de solutions d'équations. Inspiré de plusieurs sujets de concours mélangés.

Algorithme dans $\mathbb{R}$ pour $\sqrt{a}$.

I∼0) a est un réel strictement positif donné. Représentez graphiquement $x \longmapsto \dfrac{1}{2}.\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ sur $]0,\ +\infty[$.

I∼1) On définit u_0 donné dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.\left(u_n+\dfrac{a}{u_n}\right)$ pour tout n. Montrez que la suite u est bien définie, supérieure ou égale à $\sqrt{a}$ à partir du rang 1, et décroissante à partir du rang 1, convergente. Donnez sa limite.

I∼2) Montrez pour tout n : $u_{n+1}-\sqrt{a} = \dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2.u_n}$, $u_{n+2}-u_{n+1} = \dfrac{a-(u_{n+1})^2}{2.u_{n+1}}$.

I∼3) Déduisez $0 \leqslant u_{n+1}-\sqrt{a} \leqslant \dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2.\sqrt{a}}$.

I∼4) Déduisez une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, u_0 et a.

I∼5) Dans le cas $a=5$ et $u_0=5$, à partir de quel rang u_n est il une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près ? Même question pour 10^{-15}. On pourra utiliser $\log_{10}\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2.\sqrt{5}}\right) \simeq 0,2$.

Algorithme dans $\mathbb{C}$ pour $\sqrt{a}$.

II∼0) Soit a dans $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ montrez qu'il existe un unique complexe α vérifiant $\alpha^2 = a$ et $\Re e(\alpha) > 0$.

II∼1) On définit la suite récurrente u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.\left(u_n+\dfrac{a}{u_n}\right)$ pour tout n. Montrez que tous ses termes existent et sont dans le demi plan d'équation $\Re e(z/\alpha) > 0$.

II∼2) Pour tout n, on pose $v_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n+\alpha}$ (existence ?). Exprimez v_n à l'aide de v_{n-1} puis à l'aide de v_0.

II∼3) Déduisez que (u_n) converge vers α.

Exemples dans $M_n(\mathbb{C})$ pour $\sqrt{A}$.

III∼0) On donne $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = N$ d'inconnue M. Montrez que si M est solution, alors on a $N.M = M.N$. Déduisez qu'il existe a, b et c vérifiant $M = a.I_3 + b.N + c.N^2$. Montrez $\det(M)^2 = \det(N)$ et déduisez $a = 0$. Trouvez toutes les solutions de $M^2 = N$.

III$\sim$1) Combien l'équation $M^2 = I_3 + N$ a-t-elle de solutions ?
III$\sim$2) Combien l'équation $M^2 = 0_{3,3}$ a-t-elle de solutions ?

Algorithme dans $S_d(\mathbb{C})$ pour $\sqrt{S}$.

IV$\sim$0) On note S_d^+ l'ensemble des matrices S réelles symétriques[2] de format d sur d, vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^d - \{0_d\}$, ${}^tX.S.X > 0$. Montrez que les éléments de S_d^+ sont inversibles.
IV$\sim$1) On se donne S dans S_d^+ et on suppose qu'elle admet une racine carrée R également dans S_d^+ vérifiant donc $R^2 = S$. On pose , $M_0 = I_d$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1}.S)/2$. Montrez que pour tout n M_n existe, vérifie $M_n.R = R.M_n$ et $M_n.S = S.M_n$ et est dans S_d^+. Conseil : $Z = R.(M_n)^{-1}.X$ pour l'une des étapes de la récurrence, mais je ne sais pas si ça vous aide vraiment.

Exemples

V$\sim$0) On prend $S = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifiez $S \in S_2^+$. Diagonalisez S (matrice de passage P et matrice diagonale D). Trouvez R vérifiant $R^2 = S$.

V$\sim$1) Combien l'équation $R^2 = S$ d'inconnue R a-t-elle de de solutions ? Calculez la somme des solutions.

V$\sim$2) On prend donc $M_0 = I_3$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1}.S)/2$ pour tout n. Montrez que $P^{-1}.M_n.P$ est diagonale pour tout n (on va la noter Δ_n) et converge vers une matrice que vous préciserez quand n tend vers l'infini.

V$\sim$3) On recommence avec $S = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Appartenance à S_2^+, existence et calcul de racines carrées.
On veut montrer que l'algorithme n'est pas stable et que si on part d'une valeur M_0 légèrement perturbée, la convergence n'est plus assurée. Écrivez un script Python qui prend en entrée une matrice A de taille 2 (liste de liste) et un entier N et calcule la matrice M_N de la suite $M_0 = A$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1}.A)/2$.

◃53▹ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \longrightarrow_{x\to-\infty} +\infty$ et $f(x) \longrightarrow_{x\to+\infty} +\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en au moins un point.
La méthode astucieuse consistera à définir $\varphi = \theta \longmapsto Arctan(f(\tan(\theta)))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ et même si possible $[-\pi/2,\ \pi/2]$.

◃54▹ Montrez que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $Arctan \circ f$ et $f \circ Arctan$ sont bornées.

◃55▹ ♡ Une application continue f de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrez qu'il existe au moins un réel a de $[0,\ 1/2]$ varifiant $f\Big(a + \frac{1}{2}\Big) = f(a) + \frac{1}{2}$ (on raisonnera sur le signe de l'application différence $a \longmapsto f\Big(a + \frac{1}{2}\Big) - f(a) - \frac{1}{2}$).
Vous avez parcouru six kilomètres en une heure. Montrez qu'il existe un intervalle de temps d'exactement une demi heure durant lequel vous avez parcouru exactement trois kilomètres.

◃56▹ ♡ Une application continue f de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, injective.
On veut montrer qu'elle est strictement croissante. L'élève dit « si elle était décroissante, on ne pourrait pas avoir $f(0) < f(1)$, elle est donc croissante, et comme elle est injective, elle est strictement croissante ». Pulverisez le.

On se donne a et b vérifiant $0 < a < b < 1$. On définit $t \longmapsto f\big((1-t) + t.b\big) - f(t.a)$ qu'on note $\varphi_{a,b}$. Montrez que l'équation $\varphi_{a,b}(t) = 0$ ne put pas avoir de solution pour t entre 0 et 1. Déduisez que $\varphi_{a,b,}(0)$ et $\varphi_{a,b}(1)$ sont de même signe.
Calculez $\varphi_{a,b,}(0)$ et $\varphi_{a,b}(1)$.
Concluez : φ est croissante.

---

2. $\forall(i,k),\ s_i^k = s_k^i$