

◀0▶ Vrai ou faux : si $((u_n)^5)$ et $((u_n)^7)$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^5)$ ou $((u_n)^7)$ diverge alors (u_n) diverge ?

Le quotient $\frac{(u_n)^7}{(u_n)^5}$ converge vers le quotient des limites.

Donc maintenant, $((u_n)^2)$ converge.

On l'élève au carré $((u_n)^4)$ converge (et on se moque de savoir vers quoi).

On passe au quotient $\frac{(u_n)^5}{(u_n)^4}$ converge. C'est fini.

Tout raisonnement commencement par « notons α la limite de la suite (u_n) est... tout sauf un raisonnement. Rien ne dit que la suite a une limite justement.

Rappelons que « converger », c'est « avoir une limite »...

qu'il existe une quantité incommensurable de suites qui ne convergent même pas

Il y a plus rapide, avec directement $\frac{((u_n)^7)^3}{((u_n)^5)^4}$. Et c'est inspiré d'une identité de Bézout : $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$.

Il faut penser à traiter à part le cas « si $((u_n)^5)$ converge vers 0 ».

En effet, on ne peut alors pas le mettre au dénominateur.

Mais si $((u_n)^5)$ converge vers 0 alors sa racine cinquième converge aussi vers 0.

D'ailleurs le coup de la racine cinquième marche très bien... sauf si on est sur \mathbb{C} où un complexe a cinq racines cinquièmes.

◀1▶ Pour tout n , on note a_n le nombre de français ayant exactement n cheveux. Montrez que la suite (a_n) converge, en revenant aux ϵ .
 $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon \Rightarrow |a_n - \lambda| \leq \epsilon)$.

La suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang. Elle converge vers 0.

$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon \Rightarrow |a_n| \leq \epsilon)$

Et pour tout ϵ , il suffit de prendre $N_\epsilon = 10^{12}$ par exemple.

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 10^{12} \Rightarrow |a_n| = 0 \leq \epsilon)$

Nul individu n'a plus de 10^{12} cheveux. Et j'en connais pour qui ce n'est pas plus de $10 * 12$ d'ailleurs.

◀2▶ Montrez qu'il y a à tout instant deux points de l'équateur diamétralement opposés où la température est la même. Est-ce encore vrai pour deux points de l'Équateur ?
C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

L'équateur va être assimilé à un grand cercle (le grand cercle de Sucrì), sur lequel on se repère par un angle θ entre 0 et 2π (latitude ou longitude ?).

On définit la fonction $\theta \mapsto T(\theta)$ qui mesure la température au point de longitude θ .

On crée alors la fonction $f = \theta \mapsto T(\theta) - T(\theta + \pi)$ (différence de température entre le point et son antipodal).

Cette application est continue (on va supposer en effet que T est continue, non ?).

Sa valeur en 0 est $T(0) - T(\pi)$ dont je n'ai pas grand chose à dire.

Et sa valeur en π est $T(\pi) - T(2\pi)$. Mais $T(2\pi)$ a fait un tour complet, c'est $T(0)$.

On a donc $f(0\pi) - f(0)$.

L'application continue f prend des valeurs opposées en 0 et en π . Elle s'annule au moins une fois en un θ_0 entre 0 et π . On a donc $T(\theta_0) = T(\theta_0 + \pi)$. C'était notre objectif.

En revanche, pour l'Équateur, qui est un pays et non plus le grand cercle, le résultat n'est plus forcément valable...

◀3▶ Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Montrez que pour tout n de \mathbb{N} il existe c_n dans $[0, 1]$ vérifiant $f(0) + n \cdot f(1) = (n + 1) \cdot f(c_n)$.

C'est directement le théorème des valeurs intermédiaires.

Le réel $\frac{f(0) + n.f(1)}{n+1}$ est entre $f(0)$ et $f(1)$ (moyenne pondérée de coefficients 1 et n).

Il est atteint au moins une fois entre 0 et 1.

◀4▶

♣ On suppose qu'il existe une application f continue injective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
 Montrez que $t \mapsto f(e^{i.t})$ va de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} et a pour image un intervalle $[\alpha, \beta]$.
 Montrez que $t \mapsto f(e^{-i.t})$ de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} a pour image le même intervalle. Déduez que f n'est finalement pas injective.
 Montrez qu'en revanche que l'application qui à $x + i.y$ associe le réel formé en intercalant les deux développements décimaux de x et y va de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} sans être continue. Est elle injective ?

$t \mapsto e^{i.t}$ est continue, comme combinaison de deux applications continues célèbres.

On compose avec f , on retrouve une application continue.

L'image continue d'un intervalle est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

C'est même un segment (continue sur un segment implique bornée et atteint ses bornes).

Donc, sans tableau de variations (surtout si on transite sur \mathbb{C}), on sait que $t \mapsto f(e^{i.t})$ va de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} et a pour image un intervalle $[\alpha, \beta]$ qui contient $f(e^{i.0})$ et $f(e^{i.\pi})$.

Il serait naïf de prétendre $t \mapsto f(e^{i.t})$ va de $[0, \pi]$ dans $[f(1), f(-1)]$.

L'intervalle image peut être plus grand, tout va dépendre de « où cette application atteint son maximum et son minimum ».

De la même façon, $t \mapsto f(e^{-i.t})$ de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} a pour image un intervalle $[\gamma, \delta]$ contenant aussi $f(1)$ et $f(-1)$.

Mais alors, le réel $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$ est atteint au moins une fois par la première application.

$$\exists r \in [0, \pi], f(e^{i.r}) = \frac{f(1) + f(-1)}{2}.$$

Le même théorème des valeurs intermédiaires sur la seconde donne $\exists s \in [0, \pi], f(e^{-i.s}) = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$.

Les deux complexes $e^{i.r}$ et $e^{-i.s}$ ont la même image. Mais ils ne peuvent pas être égaux...

En fait, on a tourné de deux façons autour de l'origine pour passer aux mêmes endroits.

◀5▶

♡ Montrez que toute application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^* est de signe constant (*mots clefs : valeurs intermédiaires, absurde*).

C'est du cours. On le fait ici par l'absurde.

Si f n'est pas de signe constant, il existe au moins un point a où elle est positive (car elle n'est pas partout négative), et au moins un point b où elle est négative (car elle n'est pas partout positive).

Elle change de signe sur l'intervalle $[a, b]$, inclus dans \mathbb{R} , domaine sur lequel elle est continue.

Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois, d'où contradiction.

◀6▶

Soit f continue de I (intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point), dans \mathbb{R} , injective.
 On se donne u et v dans I vérifiant $u < v$. Montrez alors $f(u) < f(v)$ ou $f(v) < f(u)$.

Comme f est injective, $f(u)$ et $f(v)$ sont distincts.

Et comme l'ordre sur \mathbb{R} est total, il y en a un qui est le plus petit et un le plus grand.

On suppose ici $f(u) < f(v)$. On se donne t entre u et v . Montrez par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[u, t]$ ou sur $[t, v]$: $f(u) < f(t) < f(v)$.

Si $f(t)$ n'est pas entre $f(u)$ et $f(v)$ il est alors dans l'un des cas suivants (*on a éliminé la case du milieu*)

$f(t) < f(u) < f(v)$	$f(t) = f(u) < f(v)$	$f(u) < f(v) = f(t)$	$f(u) < f(v) < f(t)$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

On élimine encore deux cases par injectivité.

Que donne alors le cas $f(t) < f(u) < f(v)$? Que $f(u)$ est un réel entre $f(t)$ et $f(v)$. Il est donc atteint au moins une fois en un z de $[t, v]$.

Mais alors on a $f(z) = f(u)$ avec $u < t < z$. La valeur $f(u)$ est atteinte deux fois.

Faites un dessin, c'est en fait hyper simple.

Et si on suppose $f(u) < f(v) < f(t)$, alors le réel $f(v)$ est atteint au moins une fois en un point z entre u et t . On a alors $f(z) = f(v)$ avec z différent de v . C'est impossible.

Montrez que si en revanche on a $f(u) > f(v)$ alors on a $\forall t \in]u, v[, f(u) > f(t) > f(v)$.
Que répondez vous à l'élève qui prétend avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u, v]$?

La démonstration est la même, je ne la refais pas.

L'élève s'est trompé. il n'a pas démontré la croissance de f . Il a prouvé que $f(t)$ restait entre $f(u)$ et $f(v)$.
Pour la monotonie, il aurait fallu prendre deux réels t et t' entre u et v , supposer $t \leq t'$ et comparer $f(t)$ et $f(t')$. Les variables....

On se donne a et b avec $a < b$. On suppose pour cette étape $f(a) < f(b)$.
On se donne x et y vérifiant $a < x < y < b$. Montrez alors $f(a) < f(x) < f(b)$ puis $f(a) < f(x) < f(y)$ en faisant jouer à a, x, y et b les rôles de u, v et t de la question précédente.
Que répondez vous à l'élève qui dit avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u, v]$?

On a donc établi un lemme : pour tout triplet u, t et v , si $u < t < v$ alors on a $f(u) < f(t) < f(v)$ ou $f(u) > f(t) > f(v)$.

On a maintenant quatre réels

	a	$< x$	$< y$	$< b$			
choix de triplet	u	t	v		$f(a) < f(x) < f(y)$	ou	$f(a) > f(x) > f(y)$
choix de triplet		u	t	v	$f(x) < f(y) < f(b)$	ou	$f(x) > f(y) > f(b)$

A cause des *ou*, on a quatre cas. Mais on va en exclure trois grâce à l'hypothèse $f(a) < f(b)$

	$f(a) < f(x) < f(y)$	$f(a) > f(x) > f(y)$
$f(x) < f(y) < f(b)$	oui	$f(x) > f(y) > f(x)$ contradiction
$f(x) > f(y) > f(b)$	$f(x) < f(y) < f(x)$ contradiction	$f(a) > f(x) > f(y) > f(b)$ contradiction

Ayant éliminé Toul, Toulouse et Nice, il ne reste que le coin de Dunkerque qui donne $f(a) < f(x) < f(y) < f(b)$.

Cette fois, on a bien prouvé que f est croissante sur $[a, b]$ si on a $f(a) < f(b)$.

Rappelons que l'hypothèse $f(a) < f(b)$ ne dit pas que f croît sur $[a, b]$, juste entre les deux bornes. Mais dans l'intervalle, elle pourrait faire des bosses. Soyez précis...

Une fois encore, les variables.

La croissance c'est $\forall (a, b), a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ et pas juste $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Vous avez de la chance d'être confinés, sinon, j'irais parfois vous botter les fesses...

Que pouvez vous déduire dans le cas $f(a) > f(b)$.

Mais si on a $f(a) > f(b)$, on renverse le raisonnement.

Et on trouve que f est décroissante sur $[a, b]$.

En fait, on a montré que f est monotone sur tout segment qu'on regarde.

Il faut se convaincre que c'est le même sens de variation sur tous les segments.

Déduisez que f est monotone sur l'intervalle I (même si I est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ ou $]\alpha, \beta]$).

Le sens de variation va être donné par deux éléments quelconques choisis arbitrairement dans l'intervalle.

Disons qu'ici, l'intervalle de définition est \mathbb{R} .

On calcule $f(0)$ et $f(1)$.

On va supposer qu'on a par exemple $f(0) < f(1)$.

Il reste à prouver que f est alors croissante sur tout \mathbb{R} .

Entre 0 et 1, c'est acquis par le résultat précédent.

On prend a et b quelconques, on se ramène à $[0, 1]$ par changement de variable en $t \mapsto (1-t).a + t.b$ ou

$$x \mapsto \frac{x-a}{b-a}.$$

◀7▶ \heartsuit Soit f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{Q} vérifiant $f(0) = 2$. Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x : $\int_0^x f(t).dt = 9$.

On n'a pas assez d'hypothèses ! On ne connaît f qu'en un point !

Mais ça, c'est ce qui dit l'élève qui lit mal. On a dit continue de \mathbb{R} dans \mathbb{Q} .

C'est loche, f n'a le droit qu'aux images rationnelles.

En fait, f n'a d'autre choix que d'être constante.

Si elle ne l'est pas, elle prend une valeur image $f(x_0)$ autre que 2.

Mais alors tout rationnel entre $f(0)$ et $f(x_0)$ devrait être atteint au moins une fois, par continuité de f de $[0, x_0]$ dans \mathbb{R} .

Ceci contredit la requête de \mathbb{R} dans \mathbb{Q} .

f est constante. L'équation $\int_0^x f(t).dt = 9$ se ramène à la longueur du rectangle d'aire 9 et de hauteur 2.

L'unique solution est donc $x = 9/2$

◀8▶

Soit f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f \circ f$ admet un unique point fixe α . Montrez que $f - Id$ ne peut pas rester de signe constant. Concluez que f admet un point fixe, et montrez que c'est α .

On crée donc l'application $f - Id$. Elle est continue.

Supposons qu'elle ne s'annule jamais. Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle reste alors de signe constant.

Traitons le cas où $f - Id$ est de signe positif.

On a alors pour tout $x : f(x) > x$.

On applique ce résultat non pas seulement à x mais aussi à $f(x)$ (mais oui !) : $f(f(x)) > f(x)$. et toujours $f(x) > x$.

Par transitivité : $f(f(x)) > x$ pour tout x .

$f \circ f$ ne peut pas avoir de point fixe.

On a prouvé $f - Id$ ne s'annule pas implique $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Par contraposée : $f \circ f$ a un point fixe implique f a un point fixe.

Traitons le cas où $f - Id$ est de signe négatif.

On a alors pour tout $x : \forall x, f(x) < x$.

On refait le même coup :

$f(f(x)) < f(x)$. et toujours $f(x) < x$.

Cette fois : $f(f(x)) < x$ pour tout x .

$f \circ f$ ne peut pas avoir de point fixe.

Il reste à prouver que c'est celui de $f \circ f$? On note α le point fixe débusqué pour f . il vérifie $f(\alpha) = \alpha$ puis $f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$. Il est aussi point fixe de $f \circ f$. Il est donc aussi le point fixe de $f \circ f$.

Attention, si $f \circ f$ a plusieurs points fixes, le point fixe de f est l'un d'entre eux, mais on ne sait pas lequel.

Par exemple $f = -Id : f \circ f$ a beaucoup de points fixes, et f n'en a qu'un.

◀9▶

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f n'a pas de point fixe et vérifie $f(0) > 0$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$. Déduisez $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) > x$. Déduisez le résultat suivant : si $g \circ g$ admet au moins un point fixe, alors g admet au moins un point fixe.

Pour l'autre sens, on suppose donc $f(0) > 0$ et f sans point fixe. On définit l'application $f - Id$. Elle est continue. Si il existait un point a où elle serait négative, on appliquerait le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, a]$ et on aurait un point où elle s'annulerait, ce qui contredirait « f n'a pas de point fixe ».

On vient de montrer par l'absurde ou par contraposée : $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) > a$.

On applique alors, pour a donné, ce résultat à a mais aussi à $f(a) : f(a) > a$ et $f(f(a)) > f(a)$.

On met bout à bout : $f \circ f(a) > a$. Comme l'inégalité est stricte, $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

On a montré : f continue et $f(0) > 0$ \Rightarrow $f \circ f$ n'a pas de point fixe

Prouvons la même conclusion dans le cas $f(0) < 0$, et on aura obtenu si f n'a pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'en a pas non plus.

En contra-posant, on a le résultat : si $f \circ f$ a un point fixe, alors f en a un.

Supposons donc $f(0) < 0$. L'application $f - Id$ est continue. Elle ne peut jamais être positive, sinon elle s'annulerait sur l'intervalle \mathbb{R} . On a donc $\forall a, f(a) < a$. Mais alors on a aussi (pour $f(a)$) : $f(f(a)) < f(a)$, et par transitivité : $f(f(a)) < a$. $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Les deux cas ayant été traités, si f continue n'a pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'en a pas.

Sans la continuité, on peut créer des contre-exemples.

L'élève qui a conclu sans étudier le cas $f(0) < 0$ sait peut être mener des calculs mais ne sait pas mener un raisonnement. estimez les risques encourus par son employeur si il devient ingénieur.

◀10▶ Pour tout n , on note a_n la solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $\ln(x) = n.\pi + \text{Arctan}(x)$ (existence ? unicité ?).
 Montrez que la suite (a_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
 Montrez que la série de terme général $(a_n)_{n \geq 0}$ diverge.

On introduit très simplement l'application $x \mapsto \ln(x) - \text{Arctan}(x)$ sur $]0, +\infty[$.¹

La question devient : résoudre $f(x) = n.\pi$.

f est continue. En 0^+ elle tend vers $-\infty$ (c'est le logarithme qui fait le travail, Arctan reste bornée).

En $+\infty$ elle tend vers l'infini (même argument).

Déjà par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble image de $]0, +\infty[$ est un intervalle allant de $-\infty$ à $+\infty$. C'est \mathbb{R} .

Pour chaque n , l'équation $f(x) = n.\pi$ admet au moins une solution.

C'est le T.V.I., c'est de l'analyse fine, et ça garantit l'existence.

Passons à l'incité en étudiant la monotonie de $f : f' = x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$.

Pour tout x , $f'(x)$ est égal à $\frac{x^2 - x + 1}{x(1+x^2)}$ et le numérateur est un trinôme de signe constant. f' reste positive (on le voyait aussi en écrivant $1 + x^2 \geq x$ sur \mathbb{R}^{+*}).

Par théorème fin d'analyse, f est strictement croissante.

Par théorème bidon sur la monotonie, f est injective.

L'équation n'a qu'une racine.

Graphiquement, tout tient en une ligne. Certes courbe, mais une ligne.

Par le calcul de malade, on a l'air idiot, car on ne sait pas résoudre l'équation. Mais il est loin le temps où tout se résout explicitement. Ça s'appelle le D.N.B.

Aisément, le théorème de l'homéomorphisme dit que f continue strictement croissante, surjective de $]0, +\infty[$ dans $] -\infty, +\infty[$ admet une réciproque continue strictement croissante de $] -\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

le plus facile là dedans, c'est la croissance stricte.

Et donc $f^{-1}((n+1).\pi)$ est plus grand que $f^{-1}(n.\pi)$.

La suite (a_n) est croissante.

Elle n'a que deux possibilités : converger ou filer vers l'infini.

Mais comme f^{-1} tend vers l'infini en $+\infty$, la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

On peut aussi montrer : $f(e^{n.\pi}) = n.\pi - \text{Arctan}(e^{n.\pi}) < n.\pi$ et $f(e^{(n+1).\pi}) = (n+1).\pi - \text{Arctan}(e^{n.\pi}) > (n+1).\pi - \frac{\pi}{2} < n.\pi$.

Ceci permet d'encadrer a_n par $e^{n.\pi}$ et $e^{(n+1).\pi}$. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

Le terme général ne tend même pas vers 0. Pire encore, il tend vers $+\infty$.

Quand on additionne tout ça, on fait sauter la banque !

Il serait plus intéressant de regarder $\sum_n \frac{1}{a_n}$.

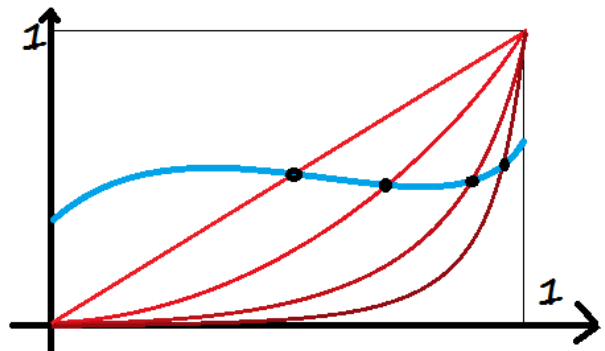
◀11▶ Soit f continue de $[0, 1]$ dans lui même. Montrez que pour tout n l'équation $f(x) = x^n$ admet au moins une solution (appliquez le théorème des valeurs intermédiaires).

Pour n donné, on définit $g_n = x \mapsto f(x) - x^n$.

En 0, elle vaut $f(0)$, donc elle est positive.

En 1, elle vaut $f(1) - 1$, donc elle est négative.

Elle est continue et change de signe sur l'intervalle. Elle s'annule au moins une fois.



1. donnez un nom aux objets, vous ferez déjà un bon bout du chemin

2. oui, j'ai bien écrit $f' = x \mapsto \dots$ et pas $f'(x) = \dots$, je suis matheux, pas étudiant en hiéroglyphes, les maths sont des objets qui bougent, pas des formules mortes

12 Soient f et g continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose $f^2 = g^2$. Montrez qu'on a $\forall x, f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$.
 Montrez qu'on n'a pas forcément $(\forall x, f(x) = g(x))$ ou $(\forall x, f(x) = -g(x))$.
 Montrez que si f et g continues vérifient $\forall x, f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ alors on a $f = g$ ou $f = -g$.

Pour chaque x on a $(f(x))^2 = (g(x))^2$ et ceci conduit bien par intégrité à $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$.

Mais le choix du signe dépend de chaque x .

Ce n'est pas forcément le même choix pour tous.

Par exemple : $\forall x, (x)^2 = (|x|)^2$, et on sait bien qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x \text{ ou } |x| = -x$$

Mais on n'a pas $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$ (contre-exemple $x = -1$),
 ni $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x$ (contre-exemple $x = 1$).

Mais si on ajoute l'hypothèse que f et g ne s'annulent jamais, on ne peut pas passer de $f(x) = g(x)$ pour un x à $f(y) = -g(y)$ pour d'autres y .

La solution ? On va considérer l'application $\frac{f}{g}$ (définie partout).

Elle vérifie $\left(\frac{f}{g}\right)^2 = 1$ et donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ vaut 1 ou -1 pour tout x .

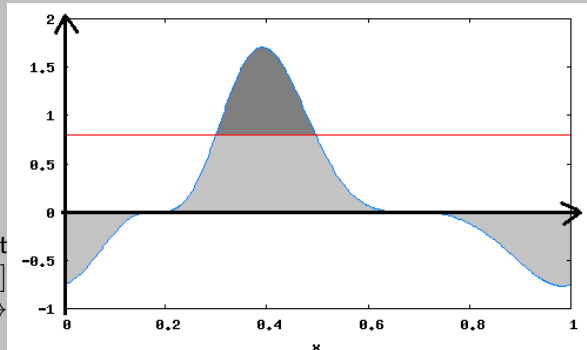
Si elle prenait changeait de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle devrait s'annuler au moins une fois, ce qui est impossible.

Elle est donc de signe constant, c'est donc qu'elle vaut soit toujours 1, soit toujours -1 .

Un des cas conduit à $f = g$ et l'autre à $f = -g$.

13 Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrez qu'il existe au moins un x de $[0, 1]$ vérifiant $f(x) = f(x + 1/5)$ (supposez par l'absurde que $x \mapsto f(x + 1/5) - f(x)$ est de signe constant sur $[0, 4/5]$).

♣ Construisez une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$ mais telle qu'il n'existe aucun x vérifiant $f(x) = f(x + \sqrt{2}/2)$.



C'est le théorème de la corde. On va montrer le résultat général : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1], f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ qu'on appliquera ensuite à $n = 5$.

On se donne donc n et on définit $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

C'est une application continue de $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ dans \mathbb{R} (composition, différence).

Si elle ne s'annule pas, elle reste de signe constant, strictement positif ou strictement négatif (contraposée du théorème des valeurs intermédiaires).

La somme $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ est alors soit strictement positive, soit strictement négative. Si on la met sous forme télescopique, elle vaut $f(1) - f(0)$, c'est à dire 0.

C'est donc contradictoire.

Quelle est la seule hypothèse faite à tort sur laquelle on peut revenir : g ne s'annule pas. C'est donc que g s'annule.

Il existe une corde reliant $(x_0, f(x_0))$ et $\left(x_0 + \frac{1}{n}, f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right)$ qui est horizontale.³

3. oui, le résultat n'est pas une égalité en l'air, c'est une histoire géométrique de corde horizontale

Attention, ce qui est vrai pour les cordes de longueur 1 (ça c'est $f(0) = f(1)$), $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et ainsi de suite n'est pas forcément vrai pour des cordes irrationnelles comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Mais comment construire un contre-exemple ?

◁ 14 ▷ Montrez qu'il ne peut pas exister f continue et bijective de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} (utiliser le T.V.I.).

Supposons qu'une telle application f existe.

Elle est donc continue et injective de $] - \infty, 0[$ dans \mathbb{R} . Elle est donc strictement monotone (théorème du cours, corolaire du T.V.I.).

Elle est donc continue et injective de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Elle est donc strictement monotone aussi.

$f(] - \infty, 0[)$ est donc un intervalle non vide.

$f(]0, +\infty[)$ est aussi un intervalle non vide.

Quitte à remplacer f par $-f$ qui serait aussi bijective et continue, on va supposer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On ne sait pas alors si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'autre intervalle (et on ne peut pas changer à nouveau le signe, elle changerait de sens de variations sur $]0, +\infty[$).

A terminer.

◁ 15 ▷ Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$. On pose $F = x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ et $G = x \mapsto \int_0^x t.f(t).dt$.

Montrez pour tout x de $[0, 1]$: $G(x) = \int_{t=0}^x (F(x) - F(t)).dt$.

Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0, 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0, 1]$.

On suppose $(a, b) \in]0, 1[$ et $F(a) > 0 > F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.

Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

On suppose $F(a) > F(b) \geq 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

On suppose $0 \geq F(a) \geq F(b)$. Montrez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

L'hypothèse de départ nous dit juste « f est continue et sa moyenne est nulle sur $[0, 1]$ ». Les parties positives compensent les parties négatives.

L'application F de la forme $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ est une primitive de f (la primitive nulle en 0).

Partons de $G(x) = \int_0^x t.f(t).dt$ et intégrons par parties $\begin{matrix} f(t) & \leftrightarrow & F(t) \\ t & \leftrightarrow & 1 \end{matrix}$

$$G(x) = \left[t.F(t) \right]_0^x - \int_0^x 1.F(t).dt = x.F(x) - \int_0^x F(t).dt$$

$$D'autre part, \int_0^x (F(x) - F(t)).dt = \int_0^x F(x).dt - \int_0^x F(t).dt = x.F(x) - \int_0^x F(t).dt.$$

Il y a bien égalité.

Et je colle trois baffes à qui écrira des $\int_0^x \left(\int_0^x f(t).dt - \int_0^t f(t).dt \right).dt$ qui l'ont plus aucun sens.

F est continue (et même dérivable), sur un segment. Elle est bornée et atteint ses bornes.

Sa borne inférieure en b et sa borne supérieure en a . C'est directement le théorème de compacité.

On calcule $G(a) = \int_{t=0}^a (F(a) - F(t)).dt$. Comme $F(a)$ est la maximum, la fonction intégrée est positive, l'intervalle est dans le bon sens. L'intégrale est positive.

$G(b) = \int_{t=0}^b (F(b) - F(t)).dt$ Cette fois, l'application intégrée est négative ($F(t) \geq F(b)$). L'intégrale est négative.

Avec $G(a) \geq 0 \geq G(b)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b et trouver que G s'annule au moins une fois.

Comme a et b sont strictement entre 0 et 1, c y est aussi.

On suppose cette fois que F est de signe constant sur $[0, 1]$: $F(a) \geq F(x) \geq F(b) \geq 0$. On note que comme on sait qu'on a $F(0) = 0$, $F(b)$ vaut vraiment 0 (0 est une valeur atteinte par F).

D'ailleurs, on a aussi $F(1) = 0$.

On a toujours $G(a)$ positif.

On calcule ensuite $G(1)$ (et pas $G(b)$). Mais $G(1) = \int_0^1 (F(1) - F(t)).dt = - \int_0^1 F(t).dt$ puisque $F(1)$ est négatif.

Mais comme F est positive, $G(1)$ est donc strictement négatif.

Il y a donc là encore (T.V.I.) un c entre a et 1 vérifiant $G(c) = 0$.

L'autre cas est celui où F est négative. On applique le résultat à $-F$, et c'est fini.

Il pourrait rester le cas où F est constante, nulle. mais alors f est nulle aussi, et c peut être mis n'importe où pour avoir $\int_0^1 t.f(t).dt = 0$.

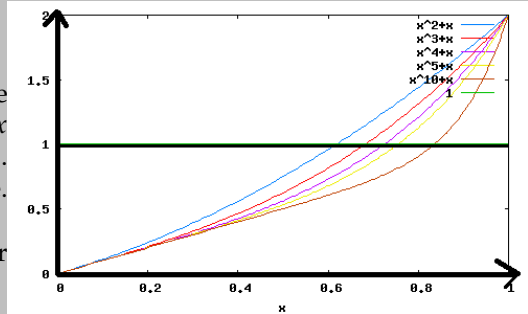
◀16▶

Montrez qu'il existe un x entre 1 et 2 vérifiant $x^5 = 5^x$.

Montrez que pour tout a plus grand que e il existe un x entre 1 et e vérifiant $x^a = a^x$.

♥ Montrez que pour tout n l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique racine sur $[0, 1]$ (on introduira l'application $x \mapsto x^n + x$ que l'on pourra noter φ_n). La racine en question sera notée x_n . Montrez $\varphi_{n+1}(x_n) < 0$. Déduisez que la suite (x_n) est croissante. Montrez qu'elle converge.

On note α sa limite et on suppose $\alpha < 1$. Montrez alors par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = 0$. Déduisez $\alpha = 1$. Concluez.



◀17▶

◀18▶

On définit $S(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. Prouvez l'existence de $S(p)$ pour tout p de \mathbb{N}^* .

Sachant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculez $S(2)$ et $S(4)$.

Montrez que S est décroissante.

Pouvez vous calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} S(p)$.

Pouvez vous calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \cdot S_p$?

Pour p strictement positif, la série répond au critère des séries alternées.

Le terme général est de la forme $(-1)^n \cdot a_n$ avec a_n qui tend vers 0 en décroissant.

Sinon, pour p plus grand que 2, la série est même absolument convergente.

Ayant l'absolue convergence pour S_2 et $\zeta(2)$ (ou la sommabilité, dites comme vous voulez), on peut fusionner, regrouper, réarranger les termes.

$$\zeta(2) + S(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{1 \leq n < +\infty \\ n \text{ pair}}} \frac{2}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2 \cdot p)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Ayant $S(2) + \zeta(2) = \frac{\zeta(2)}{2}$ on trouve $S(2) = -\frac{\zeta(2)}{2}$.

Le même type de raisonnement avec un facteur $\frac{2}{(2)^4}$ donne $S(4) = \frac{-7 \cdot \pi^4}{120}$.

Pour la décroissance, on se donne p et on calcule $S(p+1) - S(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{n^p} \right)$ (somme de séries).

On factorise

$$S(p+1) - S(p) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n^{p+1}} \right)$$

(le terme $n = 1$ est parti).

Tiens, ne serait ce pas encore une série vérifiant le critère spécial ?

Cette fois, la variable est n et on regarde si $\frac{n-1}{n^{p+1}}$ décroît avec n (qu'il tend vers 0, c'est normal).

On dérive la fonction de n (vu comme variable réelle), on trouve que la dérivée $n \mapsto \frac{p+1-n \cdot p}{n^{p+2}}$ s'annule et change de signe en $n = \frac{p+1}{p}$ donc avant 2.

Pourquoi avoir appliqué le critère spécial ? Parce que la somme $S(p+1) - S(p)$ est alors encadrée par ses sommes partielles, donc

$$(-1)^{2+1} \cdot \left(\frac{2-1}{2^{p+1}}\right) \leq S(p+1) - S(p) \leq (-1)^{2+1} \cdot \left(\frac{2-1}{2^{p+1}}\right) + (-1)^{3+1} \cdot \left(\frac{3-1}{3^{p+1}}\right)$$

Attention, S est décroissante, mais négative. Elle s'éloigne donc de 0.

Pour descendre en direction de -1 je le sais.

Pour $\sum_{p=1}^{+\infty} S(p)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \cdot S_p$ le terme général ne tend pas vers 0.

En revanche, en exercice je vous laisse $\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \cdot \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$ par théorème de Fubini après justification.

◀ 19 ▶

Au Lycée Louis le Gland, cinquante pour cent des élèves sont en PCSI. Mais dans l'année, un sixième des élèves a démissionné (pour venir à Magne-le-char). Le pourcentage de PCSI a augmenté de dix pour cent. Quel est le pourcentage de PCSI ayant démissionné ?

On note $2.N$ l'effectif total. On le découpe

P.C.S.I.	autres
N	N

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	N	N	$2.N$	
On laisse des élèves démissionner				
démissions	a	b	$2.N - a - b$	$a + b = \frac{2.N}{6}$
nouvel effectif	$N - a$	$N - b$	$2.N - a - b$	$\frac{N - b}{2.N - a - b} = \frac{40}{100}$

On a juste un système à résoudre : $a = 0$ et $b = \frac{N}{3}$.

Oui, seuls des P.C.S.II. ont démissionné. Exemple

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	60	60	120	$\frac{60}{120} = 50\%$
démissions	0	20	20	$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$
nouvel effectif	60	40	100	$\frac{40}{100}$

Ah oui, ambiguïté : si un pourcentage initialement de 50 pour cent baisse de 10 pour cent, faut il dire qu'il vaut 40 pour cent (cinquante pour cent moins dix pour cent) ou faut il dire qu'il vaut 45 pour cent (cinquante pour cent moins dix pour cent de cinquante pour cent)

Si vous considérez des pourcentages cumulés, alors

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	60	60	120	$\frac{60}{120} = 50\%$
démissions	5	15	20	$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$
nouvel effectif	55	45	100	$\frac{45}{100}$

◀ 20 ▶

♥ Montrez pour tout x réel : $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

x donné, on écrit la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle à l'ordre 3 entre 0 et x :

$$e^{0+x} = \sum_{k=0}^3 \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{x^4}{3!} \cdot \int_0^1 (1-t)^3 \cdot \exp^{(4)}(t \cdot x) \cdot dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3} \cdot \int_0^1 (1-t)^3 \cdot e^{t \cdot x} \cdot dt$$

Le reste intégrale est positif (exposant pair). On a la minoration.

C'est le même modèle que $e^x \geq 1+x$.

On aurait pu aussi, masochistement, définir $f = x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

L'application $f^{(4)}$ est l'exponentielle, positive.

$f^{(3)}$ est donc croissante, et elle est nulle en 0 ($f^{(3)} = x \mapsto e^x - 1$).

$f^{(3)}$ est donc d'abord négative, puis positive.

Il s'ensuit que f'' est décroissante puis croissante.

f'' admet un minimum en 0. Et il vaut 0.

f'' est donc positive.

f' est donc croissante. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative puis positive.

f est donc décroissante puis croissante.

f admet en 0 un minimum, égal à 0 (simple calcul).

f est donc positive. C'est ce qu'on voulait.

◀21▶

Calculez la somme des coefficients de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -8 \\ 0 & 24 & -13 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n .

On ne sait pas diagonaliser les matrices 3 sur 3 ? Mais on sait diagonaliser $\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix}$.

$X^2 - 2X - 3$ a pour racines 3 et -1

$$\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On écrit sans effort :

$$\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ 6 \cdot 3^n - 6 \cdot (-1)^n & 4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

On montre alors si nécessaire par récurrence sur n :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -8 \\ 0 & 24 & -13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ 0 & 6 \cdot 3^n - 6 \cdot (-1)^n & 4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Et la somme des coefficients vaut $5 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n + 2^n$

◀22▶

♥ Résolvez dans \mathbb{R}^{+*} : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ d'inconnue x .

1 est solution évidente, on va la voir venir « naturellement ».

Par injectivité du logarithme, l'équation est équivalente à $\ln(x^{(x^x)}) = \ln((x^x)^x)$.

Elle équivaut à $x^x \cdot \ln(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

On l'écrit judicieusement $(x^x - x^2) \cdot \ln(x) = 0$.

Ceci nous permet d'avoir d'une part la solution $\ln(x) = 0$ et d'autre part la solution $x^x = x^2$.

Cette seconde branche donne $x \cdot \ln(x) = 2 \cdot \ln(x)$.

Encore une fois, la solution $x = 0$ et en plus la solution $x = 2$.

Bilan : $S = \{1, 2\}$

Conseil : Face à $x^x \cdot \ln(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, on n'a pas les mauvais réflexes.
 Le très très très mauvais réflexe est de simplifier par $\ln(x)$ sans se poser de questions.
 Dans ce cas, vous retournez au collège, et on reparle de votre passage en Sup dans trois ans.
 Le réflexe moins mauvais mais pas génial est de dire « je simplifie par $\ln(x)$ si $\ln(x)$ est non nul, et donc j'étudie à part le cas $\ln(x) = 0$ ».
 Le bon réflexe est de tout faire passer d'un même côté et de factoriser. Comme ça, la solution $\ln(x) = 0$ est une solution « comme les autres ».

En règle générale si vous voulez éviter la catastrophe, ne simplifiez pas par une quantité qui dépend de l'inconnue.

◀23▶

Colonne 1 : quelles propriétés passent de la suite (u_n) aux deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 Colonne 2 : quelles propriétés passent des deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) à la suite (u_n) .

propriété	colonne 1	colonne 2
croissante		
monotone		
périodique		
bornée		
convergente		
non convergente		
dont la série converge		
la différence de deux termes consécutifs tend vers 0		

◀24▶

♥ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrez que cette suite est strictement croissante et ne peut pas converger.

Que déduisez vous ?

u, n = 1., 0

while u < 10 :

...u += 1 / u

...n += 1

Que fait ce script ? Pourquoi valait il mieux mettre u = 1. ?

Il faut montrer que tous les termes de la suite existent. On va montrer qu'ils sont tous positifs.

Pour cela, on effectue une récurrence :

MP_n : u_n existe et est strictement positif.

C'est vrai pour u_0 .

Et si u_n existe et est strictement positif, alors son inverse existe, est positif, et la somme $u_n + \frac{1}{u_n}$ est strictement positive.

La récurrence ne pouvait se contenter d'essayer de propager « u_n existe », car l'existence de u_n ne prouve pas que u_{n+1} existera aussi.

De même, $u_n \neq 0$ ne garantira pas $u_{n+1} \neq 0$.

Tous les u_n sont positifs. Mais alors pour tout n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

On reconnaît que la suite est croissante.

Là, raisonnement classique, par élimination.

Peut elle converger ?

Si elle converge vers une limite L , alors par passage à la limite dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient $L = L + \frac{1}{L}$.

La suite ne peut pas converger.

Mais elle pourrait diverger sans pour autant tendre vers $+\infty$. En oscillant.

Mais elle est croissante.

Et une suite croissante n'a qu'une alternative : converger ou tendre vers $+\infty$.

Par élimination, elle diverge vers $+\infty$.

Ce script calcule de proche en proche les termes de la suite, et cherche le premier indice pour lequel la suite va dépasser 10.

On initialise avec $u = 1$. au lieu de $u = 1$ afin d'être sûr que les divisions ne seront pas des divisions euclidiennes (on force à dire « u est un flottant »). Sinon, suivant la version de Python, on a $u = 2$ puis $u = 2 + (1//2) = 2+0$ et la suite stagne à 2.

Atteindre 2 à 9 se fait assez rapidement :

Pour 10 c'est un peu plus long. Mais pas trop :

dépasser 2	à partir de $n = 1$	dépasser 7	à partir de $n = 23$
dépasser 3	à partir de $n = 4$	dépasser 8	à partir de $n = 31$
dépasser 4	à partir de $n = 7$	dépasser 9	à partir de $n = 39$
dépasser 5	à partir de $n = 12$	dépasser 10	à partir de $n = 49$
dépasser 6	à partir de $n = 17$	dépasser 20	à partir de $n = 198$

◀25▶ ♡ Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite et que la suite (a_n) converge aussi.
On suppose que $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite mais que la suite (a_n) ne converge pas forcément.

On note α , β et γ les limites des trois sous-suites $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$.

On va montrer qu'elles sont égales, en trouvant une sous-suite commune à $(a_{2.n+20})$ et $(a_{13.n^2})$
une sous-suite commune à $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$

La suite $(a_{13.(2.p+2)^2})$ est extraite de $(a_{2.n+20})$ avec $n = 26.p^2 + 52.p + 16$
elle converge donc vers α
est extraite de $(a_{13.n^2})$ avec $n = 2.p + 2$
elle converge donc vers γ

Par unicité de la limite : $\alpha = \gamma$.

Pour les autres, la suite $(a_{13.(2.p+1)^2})$ permet d'obtenir $\beta = \gamma$.

Par transitivité de l'égalité : $\alpha = \beta$.

Or, avec $(a_{2.n+20})$ et $(a_{2.n+9})$ on couvre tous les entiers à partir d'un certain rang.

Par recollement, la suite globale converge (ici, ce n'est pas la limite d'une somme, mais du recollement de deux suites).

H_0	$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon, \forall n, n \geq P_\varepsilon \Rightarrow a_{2.n+20} - \alpha \leq \varepsilon$
H_1	$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon, \forall n, n \geq I_\varepsilon \Rightarrow a_{2.n+9} - \alpha \leq \varepsilon$
(?)	$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon, \forall k, k \geq T_\varepsilon \Rightarrow a_k - \alpha \leq \varepsilon$

Il suffit, pour ε donné, de prendre $T_\varepsilon = \text{Max}(2.P_\varepsilon + 10, 2.I_\varepsilon + 9)$ et de vérifier, en écrivant k sous la forme $2.n + 20$ ou $2.n + 9$ suivant sa parité.

Avec $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$ on ne couvre pas toute la suite.

Certains termes (et même carrément une sous-suite) nous échappent.

Avec des *p.p.c.m.*, on peut relier ces suites entre elles.

Mais cherchons les entiers	congrus à 1	modulo 2
	congrus à 0	modulo 3
	congrus à 0	modulo 5
	congrus à 0	modulo 11
	congrus à 0	modulo 13

Ils sont de la forme $(3 \times 5 \times 11 \times 13).k$ avec k impair.

On décide donc de poser

$a_n = p$	si $\exists p, n = 3.5.11.13.(2.p + 1)$
$= 0$	sinon

Les six sous-suites convergent vers 0. Mais la suite globale ne converge pas, car au moins une de ses sous-suites tend vers l'infini.

◀26▶ ♡ On donne $a_n = n + 4 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$. Donnez la limite de $a_{2.n} - 2.a_n$ et de $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1})$ quand n tend vers l'infini.

On écrit $a_{2.n} = 2.n + 4 + \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{2.n}\right)$ puisque $2.n$ tend bien vers l'infini.

On compare avec $2.a_n = 2.n + 8 + \frac{1}{n} + 2.o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On soustrait : $a_{2.n} - 2.a_n = -4 - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les deux termes $\frac{1}{2.n}$ et $o\left(\frac{1}{n}\right)$ tendent vers 0.
la différence a une limite, et elle vaut -4 .

	$a_{n+1} =$	$n + 1$	$+4$	$+\frac{1}{n+1}$	$+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$
On recommence	$-2.a_n =$	$-2.n$	-8	$-\frac{2}{n}$	$+o\left(\frac{1}{n}\right)$
	$a_{n-1} =$	$n - 1$	$+4$	$+\frac{1}{n-1}$	$+o\left(\frac{1}{n-1}\right)$

On combine $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1}) = n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ en fusionnant les trois o en un seul.

Le terme en $n.o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 par définition même.

Et $n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ aussi.

Bref, la forme indéterminée tend vers 0.

◀27▶

♥ Trouvez P vérifiant : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-3} + \frac{1}{X-2}$.

Trouvez Q vérifiant : $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X-3} + \frac{3}{X-2}$.

Est il judicieux d'intégrer comme le proposerait spontanément le physicien : $\ln\left(\frac{P(x)}{P(0)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{-1}\right) + \ln\left(\frac{x-3}{-3}\right) + \ln\left(\frac{x-2}{-2}\right)$.

Je n'en suis pas sûr. mais au moins, ça permet de deviner un polynôme : $P(X) = (X-1).(X-2).(X-3)$.

Il ne reste qu'à jouer au matheux : on propose/on vérifie.

On dérive : $P'(X) = 1.(X-2).(X-3) + (X-1).1.(X-3) + (X-1).(X-2).1$.

On divise :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{(X-2).(X-3) + (X-1).(X-3) + (X-1).(X-2)}{(X-1).(X-2).(X-3)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X-3}$$

La même idée donne le second : $Q(X) = (X-1).(X-3)^2.(X-2)^3$.

On dérive :

$$Q'(X) = 1.(X-2)^3.(X-3)^2 + (X-1).3.(X-2)^2.(X-3) + (X-1).(X-2).2.(X-3)$$

La division donne tout ce qu'on veut...

◀28▶

Si a est une suite réelle, on définit deux sur-suites (mot non homologué) :

$\ddot{a} = (a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ (on voit les deux points au dessus ? en tout cas, chaque terme est cité deux fois)

et $\ddot{\ddot{a}} = (a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_4, a_4, a_5, \dots)$ (le terme a_n est cité n fois).

		de a à \ddot{a}	de \ddot{a} à a	de a à $\ddot{\ddot{a}}$	de $\ddot{\ddot{a}}$ à a	de $\ddot{\ddot{a}}$ et \ddot{a} à a
Quelles propriétés passent	croissante					
	périodique					
	convergente					
	géométrique					
	divergente vers $+\infty$					

C'est un exercice « esprit MPSI2 ». On n'en trouve pas souvent des comme ça dans les livres ou aux concours, mais normalement, ça permet de comprendre les notions avec des petits questions pas trop compliquées.

	de a à \ddot{a}	de \ddot{a} à a	de a à $\ddot{\ddot{a}}$	de $\ddot{\ddot{a}}$ à a	de $(\ddot{\ddot{a}}$ et $\ddot{a})$ à a
croissante	oui	oui	oui	non (1)	oui
périodique	oui (2)	oui	non (3)	oui (4)	oui
convergente	oui	oui	oui	oui	oui
géométrique	non	oui (4)	non	oui (4)	oui
divergente vers $+\infty$	oui	oui	oui	oui	oui

Pour la dernière colonne, si la propriété passe de \ddot{a} à a , alors elle passe de $(\ddot{\ddot{a}}$ et $\ddot{a})$ à a en n'utilisant même pas \ddot{a} .

Le (1) contenait un piège. Si

$$(a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4 \dots)$$

est croissante, la suite extraite

$$(a_1, a_2, a_3, a_4 \dots)$$

est croissante. mais qu'en est-il de $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots)$.

Pour (2), la période va en général doubler. Et pour la case d'à côté, elle réduit d'autant.

Pour (3), un contre-exemple classique peut nous servir : $((-1)^n)$. mais il faut détailler la démonstration si on veut vraiment être rigoureux..

Pour (4), la seule possibilité pour qu'une suite \ddot{a} soit périodique est qu'elle soit constante, et la suite initiale l'est aussi, donc périodique.

J'ai numéroté aussi (4) le phénomène

$$(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$$

géométrique implique

$$(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$$

constante et ceci entraîne que (a_n) est géométrique de raison 1.

Pour la convergence, par exemple, un sens est facile.

En effet, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ est une sous-suite de $(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ (elle prend un terme sur deux).

das l'autre sens, si $|a_n - \alpha|$ est plus petit que ε pour N plus grand que N_ε alors le $p^{\text{ième}}$ terme de la suite $(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ est proche de α à ε près pour p plus grand que $2.N_\varepsilon$.

Et le le $p^{\text{ième}}$ terme de la suite

$$\ddot{a} = (a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_4, a_4, a_5 \dots)$$

est proche de α à ε près pour p plus grand que $N_\varepsilon.(N_\varepsilon + 1)/2$.

◀ 29 ▶

♣ Donnez le chiffre des unités et le premier chiffre derrière la virgule de $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2018}$.

Indication : $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2018}$ et $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2018}$, suites $u_{n+2} = 10.u_{n+1} - u_n$.

En fait, la clef est que $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2018}$ est « presque un entier ».

Son premier chiffre derrière la virgule doit être un 0 (si il dépasse l'entier), et sinon un 9 (si on est dessous).

Et la différence à l'entier le plus proche sera $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{2018}$.

Posons $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{3})^n$ et $b_n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$ (une sorte de conjugué).

Seul a_n nous intéresse apriori, mais la somme $a_n + b_n$ est utile, ou $a_n - b_n$, ou $a_{2.n} - b_{2.n}$ car elle reste entière.

(a_n) et (b_n) sont des suites géométriques de raisons $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Les extractions $(a_{2.n})$ et $(b_{2.n})$ sont géométriques de raisons $5 + 2.\sqrt{6}$ et $5 - 2.\sqrt{6}$ (oui, les carrés).

Elles sont dans l'espace vectoriel de dimension 2 qu'elles engendrent, celui des suites de la forme $\alpha.(\lambda_+)^n + \beta.(\lambda_-)^n$ avec λ_+ et λ_- racines d'une équation caractéristique $\lambda^2 - 10.\lambda + 1 = 0$ (somme des racines, produits des racines).⁴

Toute combinaison telle que $(a_{2.n} + b_{2.n})$ ou $(a_{2.n} - b_{2.n})$ vérifie $u_{n+2} = 10.u_{n+1} - u_n$.

Si ses premiers termes sont entiers, les suivants le restent (récurrence à double hérédité).

	$a_{2.n} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2.n}$	$b_{2.n} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2.n}$	$a_{2.n} + b_{2.n}$
$n = 0$	1	1	2
$n = 1$	$5 + 2.\sqrt{6}$	$5 - 2.\sqrt{6}$	10
$n = 2$	$5 + 2.\sqrt{6}$	$5 - 2.\sqrt{6}$	98
$n = 3$	$485 + 196.\sqrt{6}$	$485 - 196.\sqrt{6}$	970
$n = 4$	$4801 + 1960.\sqrt{6}$	$4801 - 1960.\sqrt{6}$	9602

La relation $u_{n+2} = 10.u_{n+1} - u_n$ nous assure que $a_{2.n} + b_{2.n}$ est toujours un entier. Ou la formule du binôme sur $(5 + \sqrt{6})^n + (5 - \sqrt{6})^n$.

Mais la relation $u_{n+2} = 10.u_{n+1} - u_n$ nous permet de dire « une fois sur 2 se termine par 0 »

« une fois sur deux se termine par 2 »

« une fois sur deux se termine par 8 »

4. on se rapproche de l'indication de l'énoncé

puisque $u_{n+2} = -u_n \pmod{10}$.

On en déduit que u_{1009} est un entier se terminant par un 0.

On a donc $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2 \cdot 1009} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2 \cdot 1009}$ est un multiple de 10.

Et donc, il ne reste qu'à enlever le tout petit nombre $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2 \cdot 1009}$ pour avoir $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2 \cdot 1009}$.

On est donc bien « juste avant un multiple de 10 ».

Le chiffre des unités est un 9.

Et pas mal de chiffres derrière la virgule sont des 9.

◀30▶ Pour tout n , on pose $u_n = \frac{\cos(2.n.\pi/3)}{\sqrt[3]{\lfloor n/3 \rfloor + 1}}$. Calculez $u_{3,p} + u_{3,p+1} + u_{3,p+2}$ pour tout entier naturel p . Déduisez que la série de terme général u_n converge (on distinguera pour $\sum_{n=0}^N u_n$ suivant la valeur de N modulo 3).
Montrez que la série de terme général $(u_n)^3$ diverge.

Réflexe élémentaire : le terme général tend vers 0. Le numérateur est borné, le dénominateur tend vers l'infini.

On n'a pas de divergence grossière, mais pas encore de convergence.

Dans la somme $u_{3,p} + u_{3,p+1} + u_{3,p+2}$, les termes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ sont tous égaux : $\left\lfloor \frac{3,p}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3,p+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3,p+2}{3} \right\rfloor = p$.

La somme vaut donc $\frac{\cos\left(\frac{6,p.\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{6,p.\pi}{3} + \frac{2,\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{6,p.\pi}{3} + \frac{4,\pi}{3}\right)}{\sqrt[3]{p+1}}$. le numérateur est... nul. (vous avez reconnu $1 + j + j^2$?)

On a envie de dire « quand on somme par paquets de trois, il ne reste rien ».

Mais la définition de la convergence de la série, c'est $\sum_{n=0}^N u_n$ converge quand N tend vers l'infini.

Et N qui tend vers l'infini prend des valeurs qui ne sont pas forcément des multiples de 3.

On va donc distinguer les cas.

$N = 3.P - 1$	$\sum_{n=0}^{3.P-1} u_n = \sum_{p=0}^{P-1} u_{3,p} + u_{3,p+1} + u_{3,p+2} = 0$
$N = 3.P$	$\sum_{n=0}^{3.P} u_n = u_{3,P} + \sum_{p=0}^{P-1} u_{3,p} + u_{3,p+1} + u_{3,p+2} = u_{3,P}$
$N = 3.P + 1$	$\sum_{n=0}^{3.P+1} u_n = u_{3,P} + u_{3,P+1} + \sum_{p=0}^{P-1} u_{3,p} + u_{3,p+1} + u_{3,p+2} = u_{3,p} + u_{3,P+1}$

Comme le terme général tend vers 0, les trois sommes partielles extraites $(U_{3,P-1})$, $(U_{3,P})$ et $(U_{3,P+1})$ convergent vers la même limite nulle.

Par recouvrement, la série converge (vers 0).

On élève au cube cette fois. Le terme général continue à tendre vers 0.

$n =$	$3,p$	$3,p+1$	$3,p+2$
$(u_n)^3 =$	$\frac{1}{p+1}$	$\frac{-1}{4.(p+1)}$	$\frac{-1}{4.(p+1)}$

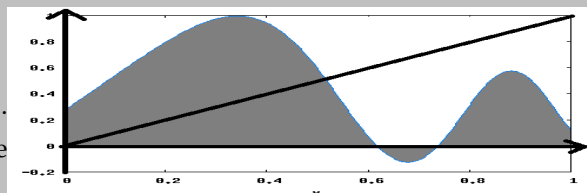
Cette fois, le regroupement $(u_{3,p})^3 + (u_{3,p+1})^3 + (u_{3,p+2})^3$ donne $\frac{1}{2.(p+1)}$.

Les sommes partielles extraites $\sum_{n=0}^{3.P-1} (u_n)^3$ donnent $\sum_{p=0}^{P-1} \frac{1}{2.(p+1)}$.

On identifie la série harmonique, qui diverge.

Inutile de regarder aussi $(U_{3,p})$ et $(U_{3,p+1})$; si déjà $(U_{3,p-1})$ diverge, la série diverge.

♥ Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$.
Montrez que f admet au moins un point fixe (en étudiant le signe de $f - Id$ et son intégrale).



◁31▷

Un classique. Un point fixe, c'est une solution de $f(x) = x$ (« fixe » car f n'a aucun effet sur lui). Mais il faut le voir comme une intersection du graphe avec la bissectrice (encore un dessin, encore un dessin !).

On va donc tout naturellement étudier $f - Id$. Ou ce que vous appelez $f(x) - x$. A tort, puisque $f(x) - x$ est un pauvre nombre et pas un graphe ni une fonction.

On pose $g = f - Id$ et on calcule

$$\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Cette intégrale est nulle. La fonction g ne peut pas être toujours positive (son intégrale serait positive) ni toujours négative (son intégrale serait négative).

Elle change donc de signe.

Et en tant que fonction continue qui change de signe sur un intervalle, elle s'annule au moins une fois. Et toc ! Zéro calcul, juste de l'intuition et un dessin.

Si si, un dessin. Si le graphe de f était toujours sous la bissectrice, son intégrale ne pourrait pas valoir $1/2$. De même si il était toujours au dessus. Donc, g est vraiment la bonne fonction...

◁32▷

Calculez $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$.

Comme indiqué en cours, il ne faut pas qu'il se niche le moindre multiple de $\frac{\pi}{2}$ entre a et b . Par exemple, a et b sont tous deux entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ strictement.

On identifie vite $\int_a^b \frac{4.d\theta}{\sin^2(2.\theta)}$ et on intègre en cotangente.

$$\int_a^b \frac{4.d\theta}{\sin^2(2.\theta)} = \left[\frac{-2}{\tan(2.\theta)} \right]_a^b$$

Sinon, que disait Bioche ?

θ donne	$-\theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$
$\sin^2(\theta)$ donne	$\sin^2(-\theta) = \sin^2(\theta)$	$\sin^2(\pi - \theta) = \sin^2(\theta)$	$\sin^2(\pi + \theta) = \sin^2(\theta)$
$\cos^2(\theta)$ donne	$\cos^2(-\theta) = \cos^2(\theta)$	$\cos^2(\pi - \theta) = \cos^2(\theta)$	$\cos^2(\pi + \theta) = \cos^2(\theta)$
$d\theta$ donne	$-d\theta$	$-d\theta$	$d\theta$
$\frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$ donne	$\frac{-d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$	$\frac{-d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$	$\frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$
on prend ?	non	non	oui

On va donc poser $t = \tan(\theta)$ et tout exprimer à l'aide de t .

$$\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = dt \text{ et } \cos^2(\theta) = \frac{1}{1+t^2} \text{ puis } \sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

L'intégrale (sans bornes⁵ pour être tranquille) :

$$\int \frac{1+t^2}{t^2}.dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int dt = t - \frac{1}{t}$$

Question bonus : vous voyez le rapport entre $\frac{-2}{\tan(2.\theta)}$ et $\tan(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)}$?

Vous avez vingt secondes.

Sinon, on peut aussi remplacer 1 au numérateur par $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$.

$$\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)} = \int_a^b \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}.d\theta = \int_a^b \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} + \int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta)}$$

5. cent bornes ? Je préfère « mille bornes », coup fourré

Il ne reste plus qu'à intégrer en $\tan(\theta)$ et $-\cotan(\theta)$.

◀33▶

Montrez que pour tout a de $] -1, 1[$ les intégrales I_a et J_a existent

$$I_a = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta \quad J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$$

Calculez J_a par le changement de variable habituel.

β est un réel de $]0, 1[$ fixé. On se donne a et $a + h$ dans $[-\beta, \beta]$, montrez $\left| \ln(1 + (a + h) \cdot \cos(\theta)) - \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) - \frac{h \cdot \cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \right| \leq \frac{h^2 \cdot \cos^2(\theta)}{2 \cdot (1 - \beta)^2}$ (c'est Taylor (Lagrange ou intégrale) sur $a \mapsto \ln(1 + a \cdot \cos(\theta))$).

Déduisez : $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right| \leq |h| \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1 - \beta)^2} \cdot d\theta$.

Déduisez $(a \mapsto I_a)' = (a \mapsto J_a)$.

Calculez I_0 puis I_a pour tout a .

Les intégrales I_a et J_a sont des intégrales dont la valeur dépend de a .
 θ est la variable d'intégration. En revanche, a est fixé pour le calcul de chaque intégrale.
 On les appelle intégrales à paramètres et le paramètre c'est a .

L'élève qui poserait simplement $I = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ sans marquer la dépendance en a aurait tort.

L'élève qui écrirait $I_\theta = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ n'aurait vraiment rien compris aux variables.

L'élève qui écrit $I_a = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ prépare le terrain pour rendre ses raisonnements rigoureux.

Quand a est en valeur absolue plus petit que 1, $a \cdot \cos(\theta)$ reste entre -1 et 1 pour tout θ , et $1 + a \cdot \cos(\theta)$ reste strictement positif.

Les applications $\theta \mapsto \frac{1}{1 + a \cdot \cos(\theta)}$ et $\theta \mapsto \ln(1 + a \cdot \cos(\theta))$ sont définies et continues. les intégrales existent.

On pourrait essayer de trouver leurs signes, et leur sens de variation en fonction de θ , mais ce n'est pas demandé.

On va calculer $J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$ par le changement de variable universel $t = \tan(\theta/2)$ ou $\theta = 2 \cdot \text{Arctan}(t)$.

Certes ce n'est un C^1 difféomorphisme que sur l'intervalle semi ouvert $[0, \frac{\pi}{2}[$ mais on va s'autoriser ces approximations et intégrer jusqu'à $+\infty$ sans crainte.

$$J_a = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)} \cdot dt$$

On décompose en éléments simples $\frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)}$.

Le numérateur est de degré plus faible que le dénominateur, il n'y a pas de « partie entière polynomiale devant » (celle qui correspond au comportement en $+\infty$).

Le dénominateur est de degré 4, on attend quatre coefficients $\frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)} = \frac{\alpha \cdot t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma \cdot t + \delta}{(1+a) + (1-a) \cdot t^2}$ (avec des termes qui s'intégreront en logarithme et d'autres en arctangente).

Mais en fait, c'est une fraction en la variable $t^2 = X$:

$\frac{1-X}{(1+X) \cdot (1+a+(1-a) \cdot X)} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+a) + (1-a) \cdot X} \right)$ qu'on obtient par la méthode des pôles ou par réduction au dénominateur commun.

On intègre donc en gardant dans une seule intégrale pour ne pas créer deux termes qui explosent ensemble) :

$$J_a = \frac{1}{a} \cdot \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+a) \cdot \left(1 + \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot t \right)^2 \right)} \right) \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \left[\text{Arctan}(t) - \frac{1}{1+a} \cdot \frac{\text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot t \right)}{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}$$

Les termes sont simples en 0, et à l'infini, les arctangentes tendent vers $\frac{\pi}{2}$.

Tous calculs faits : $J_a = \frac{\pi}{2.a} - \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ (voyez les $\sqrt{1-a}$ et $\sqrt{1+a}$ et $1+a$ se simplifier).

Cette partie du problème est elle estimée par vous comme « d'une technicité excessive » ?

Aurait on pu être plus futé ? Oui, avec

$$a.J_a = \int_0^\pi \frac{a \cdot \cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta = \int_0^\pi \frac{1+a \cdot \cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta - \int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$$

Le changement de variable sur $\int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$ donnait $\int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$ avec moins d'éléments simples, et plus simples...

A quoi sert il d'avoir calculé J_a ? Parce que ce sera la dérivée de I_a . Mais ça ne va pas se faire tout seul. Même si vous avez envie de dire

$$\left(a \mapsto \ln(1+a \cdot \cos(\theta)) \right)' = \left(a \mapsto \frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \right) \text{ donc } \left(a \mapsto \int_{\theta=0}^\pi \ln(1+a \cdot \cos(\theta)) \right)' = \left(a \mapsto \int_{\theta=0}^\pi \frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta \right)$$

Pour θ fixé, considérons l'application $a \mapsto \ln(1+a \cdot \cos(\theta))$. Elle est continue, dérivable, et même plutôt deux fois qu'une (et même trois et plus).

	$f_\theta(a)$	$f'_\theta(a)$	$f''_\theta(a)$
On la dérive deux fois	$\ln(1+a \cdot \cos(\theta))$	$\frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)}$	$-\frac{\cos^2(\theta)}{(1+a \cdot \cos(\theta))^2}$

On va utiliser la formule de Taylor Lagrange entre a et $a+h$

$$f_\theta(a+h) = f_\theta(a) + h \cdot f'_\theta(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''_\theta(a + \lambda \cdot h)$$

pour un λ de $]0, 1[$ et même

$$f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a) = \frac{h^2}{2} \cdot f''_\theta(a + \lambda \cdot h)$$

puis $|f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a)| \leq \frac{h^2}{2} \cdot M_2$ où M_2 est un majorant de f''_θ sur le domaine d'étude.

On ne touche pas au cosinus, même si on peut le majorer par 1.

On regarde quand le dénominateur s'approche le plus près de 0 : quand $(a + \lambda \cdot h) \cdot \cos(\theta)$ est le plus proche de -1 .

On dit que $|a + \lambda \cdot h|$ reste dans $[-\beta, \beta]$ puisque a et $a+h$ y sont. Et le cosinus n'ira pas plus loin que 1 et -1 .

Bref, le plus petit dénominateur envisageable est $1 - \beta$ (strictement positif).

On peut donc prendre $M_2 = \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2}$ et obtenir la formule proposée.

Démarche classique pour estimer l'erreur entre un graphe et sa tangente.

On a cet encadrement pour tout θ :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot M_2 \leq f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a) \leq \frac{h^2}{2} \cdot M_2$$

On intègre pour θ de 0 à π :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta \leq \int_0^\pi f_\theta(a+h) \cdot d\theta - \int_0^\pi f_\theta(a) \cdot d\theta - h \cdot \int_0^\pi f'_\theta(a) \cdot d\theta \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

(attention, trois variables : a fixé, h destiné à tendre vers 0 et θ qui vient de jouer son rôle de 0 à π).

Et par définition des f_θ et autres :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta \leq I_{a+h} - I_a - h \cdot J_a \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

On revient à une forme « majoration en valeur absolue » (qu'on aurait pu garder tout le temps) :

$$\left| I_{a+h} - I_a - h \cdot J_a \right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

On divise par h non nul, un taux d'accroissement commence à venir : $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right| \leq \frac{|h|}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} d\theta$.

Quand h tend vers 0, le majorant qui dépend linéairement de h tend vers 0.

Par encadrement⁶, $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right|$ tend vers 0.

Par définition, $\frac{I_{a+h} - I_a}{h}$ tend vers J_a

(pas de boulette, on tend vers quelquechose qui ne dépend pas de h , juste de a (et θ est variable d'intégration qui a fait le job)).

Mais ceci est juste la définition de « les taux d'accroissement de I autour de a ont une limite.

$a \mapsto I_a$ est dérivable de dérivée $a \mapsto J_a$

C'est ce dont on s'était douté en « dérivant sous le signe intégrale ». mais il fallait le prouver, ici avec les moyens du bord. En Spé vous aurez des outils plus puissants, mais avec des hypothèses précises

On connaît I' et sa valeur en 0 est rapide à trouver : $I_0 = \int_0^\pi \ln(1) \cdot d\theta = 0$.

Il suffit donc d'intégrer I' pour retrouver I .

Ah oui, $J_a = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a \cdot \sqrt{1-a^2}}$, ça s'intègre ça ?

Le premier terme en logarithme. Et l'autre ? $\int \frac{da}{a \cdot \sqrt{1-a^2}}$?

Pas facile. On aurait préféré $\int \frac{da}{\sqrt{1-a^2}}$ qui donne Arcsin .

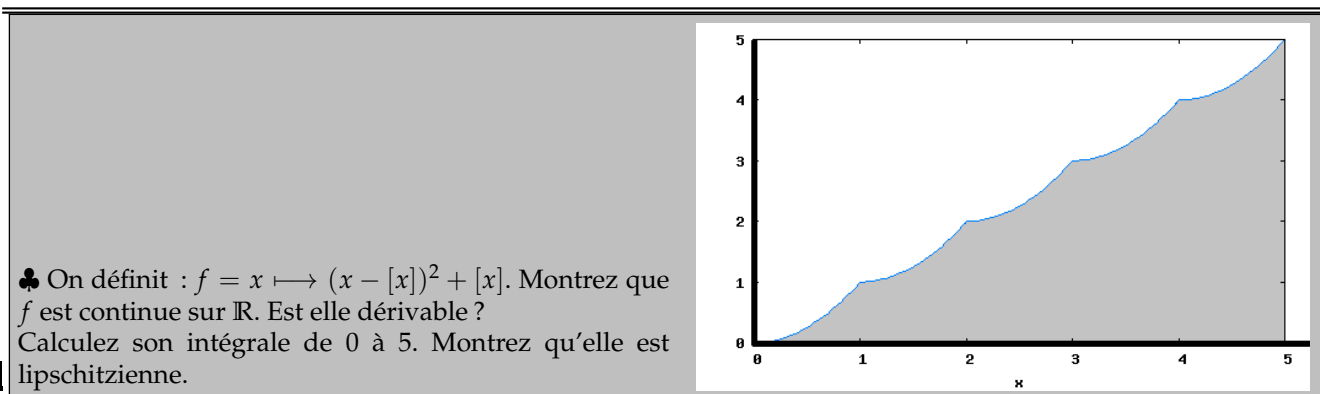
ou $\int \frac{a \cdot da}{\sqrt{1-a^2}}$ qui donne $-\sqrt{1-a^2}$

Que dit le cours ? $a = \sin(\alpha)$. L'intégrale devient

$$\int \frac{\cos(\alpha) \cdot d\alpha}{\sin(\alpha) \cdot \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \int \frac{d\alpha}{\sin(\alpha)} = \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right]$$

On assemble les morceaux : $\pi \cdot \left(\ln(a) - \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right) \right)$ Ce serait donc ça I_a !

De bons exemples de calculs d'intégrales !



◀ 34 ▶

Pour la continuité en tout point a , on va séparer deux types de points a .

Si a n'est pas entier, $[x]$ est une constante sur un voisinage de a (en posant $[a] = n$, n a encore $[x] = n$ pour tout x de $]n, n+1[$, et l'application $x \mapsto (x-n) + n$ est continue car polynômiale.

Si a est un entier, tout est conçu avec la partie entière pour que ça se passe mal.

Il faut séparer droite et gauche :

	$]a-1, a[$	a	$[a, a+1[$
formule	$(x - (a-1))^2 + (a-1)$	$(a-a)^2 + a = a$	$(x-a)^2 + a$
limite quand x tend vers a	a	a	a

6. et pas « par passage à la limite » puisque on ne sait pas encore que la limite existe !

7. rappelons que vous ne serez pas juste jugés sur votre capacité à calculer, mais surtout sur votre capacité à citer les bons théorèmes, avec les bonnes hypothèses à vérifier et valider, bref à raisonner juste, avec argumentation solide.

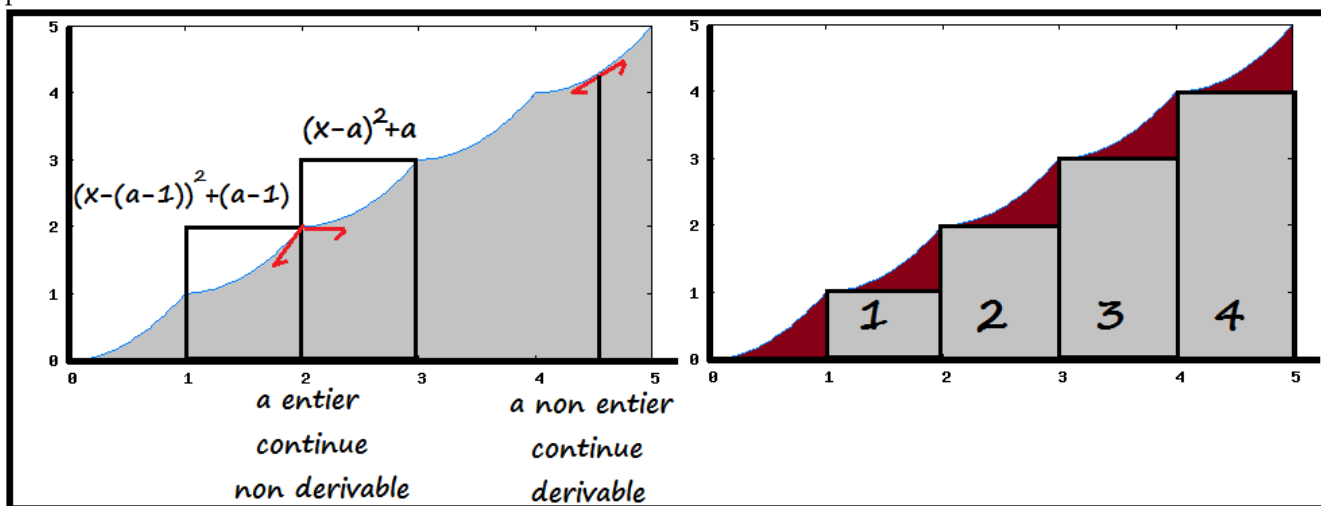
L'application est continue en a .

En tout point, on a la continuité.

En revanche, elle n'est pas dérivable en a entier, avec deux demi-tangentes distinctes.

	$]a-1, a[$	a	$[a, a+1[$
formule	$(x - (a-1))^2 + (a-1)$	$(a-a)^2 + a = a$	$(x-a)^2 + a$
taux d'accroissement	$\frac{(x-a-1)^2 + (a-1) - a}{x-a}$		$\frac{(x-a)^2 + a - a}{x-a}$
limite des taux quand x tend vers a	$\frac{0}{0}$		$\frac{0}{0}$

Les taux n'ont pas la même limite à droite et à gauche, la fonction a deux demi tangentes non alignées, elle n'est pas dérivable.



Pour l'intégrale de 0 à 5, on applique la relation de Chasles pour découper en cinq intégrales.

En effet, on a $[x+1] = [x] + 1$ pour tout x .
On en déduit $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout x .

Chacune des intégrales $\int_k^{k+1} f(t).dt$ est d'ailleurs faite d'un rectangle et d'un morceau qui revient à chaque fois.

Purement géométrique : $\int_0^5 f(t).dt = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. $\int_0^1 f(t).dt = 10 + 5 \cdot \int_0^1 x.dx = \frac{35}{3}$.

Montrons maintenant qu'elle est lipschitzienne de rapport 2 (le maximum de la dérivée croisée).
A faire.

◀35▶

Mario et Luigi font des courses en kart (je suis influencé par les jeux de mon fils), à vitesse constante. Quand ils font la course sur un kilomètre, Mario arrive alors que Luigi est encore à cinquante mètres de l'arrivée. Ils recommencent, mais pour rendre le jeu équitable, Mario se recule de cinquante mètres par rapport à la ligne de départ. Qui gagne ? De combien ?

On peut tout mettre en équation, avec deux vitesses v_m et v_l , une distance 1 et un temps T .

On peut aussi dire que pour la seconde course, après un temps égal à celui de la première, Mario a parcouru un kilomètre, et Luigi cinquante mètres de moins... Ils sont à égale distance de la ligne : cinquante mètres.

Mais Mario continue à aller le plus vite. Il va gagner.
De combien ?

Sur un kilomètre, il mettait cinquante mètres dans la vue à Luigi.

Sur cinquante mètres (vingt fois moins), il va lui mettre vingt fois moins...

Ce qui fait deux mètres cinquante...

Mario - Départ première course
Luigi - Arrivée première course

Après un temps T

Mario - Départ deuxième course
Luigi - Arrivée deuxième course

Après un temps T il leur reste 50 mètres

et Mario est toujours plus rapide que Luigi

Arrivée de la deuxième course. Mario gagne de...

Et si vous aimez • l'univers de Mario Bros

• les films réalistes et sociaux des frères Dardenne et du cinéma français

• le travail de Yes Vous aime (Broute, Bertrand Uslat et ici studio Bagel) dans le domaine du pastiche :

<https://www.youtube.com/watch?v=jnGftcdnIB4>

◀35▶

Rappel des règles : sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4 et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects (ah, il y a un nombre en trop dans une grille ?).

3		<		5						<			
				4	>				4				
4	>	2	>		<	3	et		<		5		
	<		>						>		<	5	1
								5		≈	1		

◀0▶

On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E , on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}) . Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait-on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?

Pour tout u dans E , on note $\varphi(u)$ la suite (u_{2n}) . Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire.

Pour tout n , on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n , on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite $u : (u_1, u_0, u_3, u_2, u_5, u_4, \dots)$. Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ (et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens). Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E . Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous-espace propre.

\vec{u} vecteur propre de f c'est $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\exists \lambda, f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

λ valeur propre de f c'est $\exists \vec{u} \neq \vec{0}, f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Pour extraire une suite convergente d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ périodique de période p , il suffit de prendre la suite $(a_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Ou d'utiliser le théorème de Bolzano Weierstrass, mais il y a de l'abus là.

Si (a_n) est périodique de période p , alors (a_{n+1}) est périodique, de même période.

La linéarité s'écrit en travaillant au bon étage : On se donne deux suites (a_n) et (b_n) . On doit juste comparer $(a_{n+1} + b_{n+1})$ et $(a_{n+1}) + (b_{n+1})$.

On prend une valeur propre λ et un vecteur propre associé : une suite a vérifiant $\sigma(a) = \lambda \cdot a$.

On traduit $a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$ pour tout n .

Ceci signifie que la suite a est une suite géométrique de raison λ .

Mais comme elle doit être périodique, il y a comme un petit problème.

Sauf si elle est constante ou géométrique de raison -1 .

Sur Con aurait pu prendre des suites géométriques dont la raison soit une racine p -ème de l'unité.

◀1▶

♥ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2,n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2,n})$?

Faux.

	$c_0 = a_0$	$c_2 = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}$	$c_4 = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_5}{5}$
(a_n) a pour moyenne de Cesàro	$c_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}$	$c_3 = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{4}$	

Déjà, (c_2) n'a rien à avoir avec γ_1 qui vaut $\frac{a_0 + a_2}{2}$ (si c'est la moyenne de Cesàro de $(a_{2,n})$).

<2>

♥ Vers quoi convergent (si elles convergent) ?

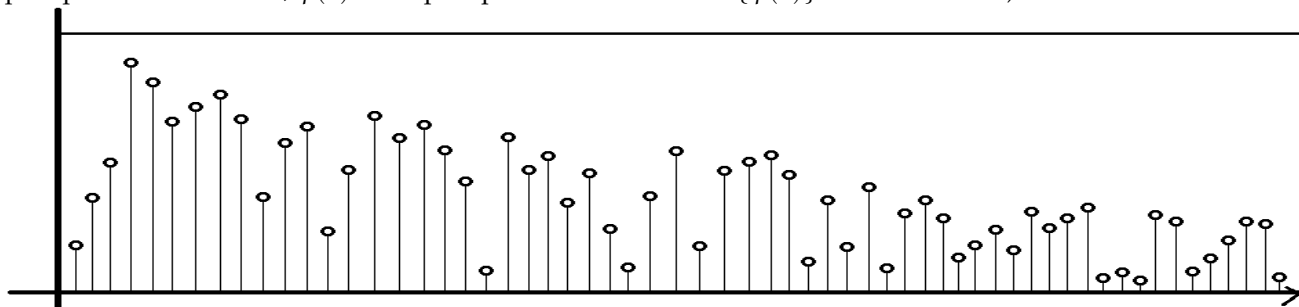
1	2	3	4	5	6
$\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}\right)$	$\left(\frac{3^n + 2^{2n+1}}{3^n - 4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\frac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\frac{e^{2n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot k!\right)$

<3>

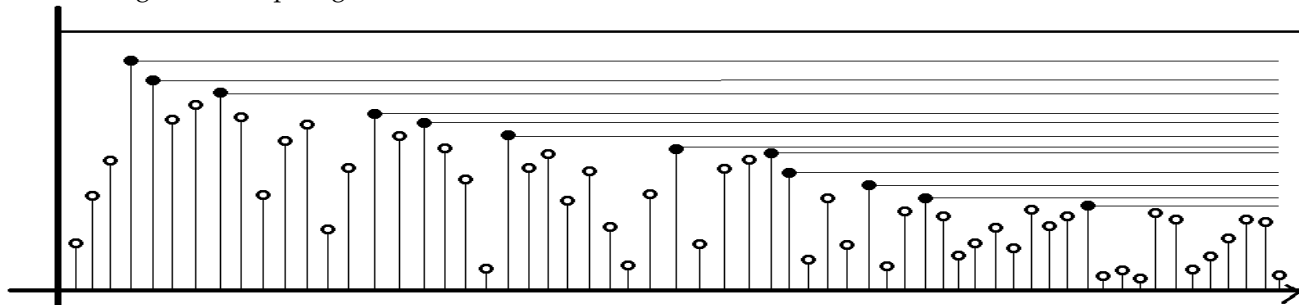
♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, a_p \leq a_n\}$.Déterminez A si (a_n) est croissante.Déterminez A si (a_n) est décroissante.On suppose A infini. On pose alors $n_0 = \text{Min}(n \mid n \in A)$, $n_1 = \text{Min}(n \mid n \in A \text{ et } n > n_0)$ et plus généralement $n_{k+1} = \text{Min}(n \mid n \in A \text{ et } n > n_k)$.Montrez que chaque n_k existe.Montrez que la suite $k \mapsto n_k$ est strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.On suppose A fini. Montrez $\exists K_0, \forall n, (n \geq K_0 \Rightarrow (\exists p > n, a_p > a_n))$.Déduez $\exists K_1 > K_0, a_{K_1} > a_{K_0}$ puis $\exists K_2 > K_1, a_{K_2} > a_{K_1}$.Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n) , strictement croissante.

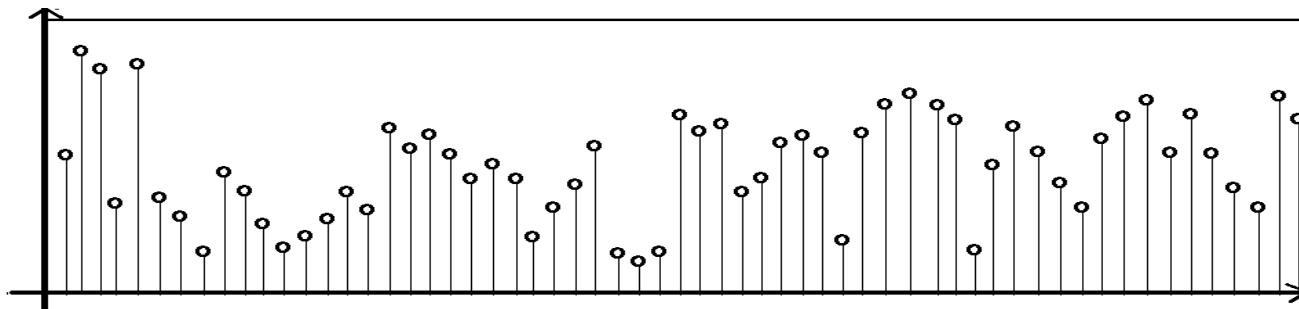
Je vous renvoie au cours.

Ou au fascicule « beaux théorèmes de Sup » :

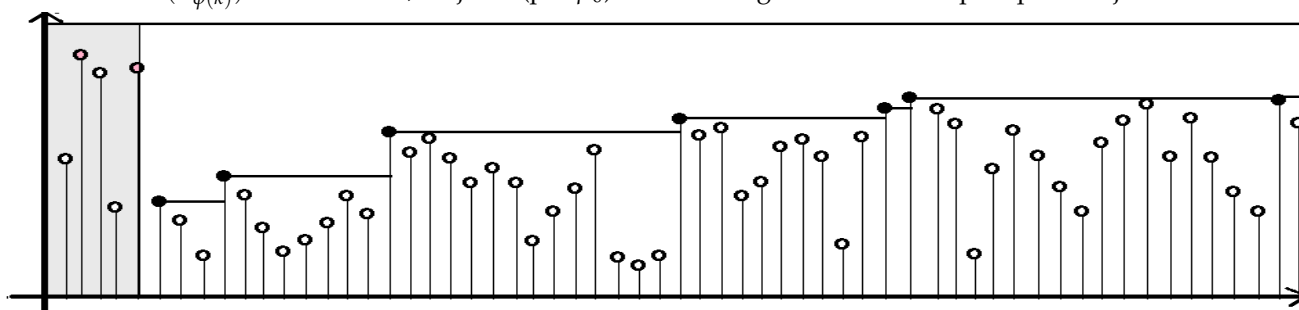
On définit l'ensemble d'indices suivant : $\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, u_p \leq u_n\}$ (il s'agit des indices des termes qui majorent tous les termes qui suivent). \mathbb{A} est une partie de \mathbb{N} qui est soit infinie, soit finie.Premier cas : si \mathbb{A} est infini, alors on en indexe les éléments par ordre croissant : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$ ($\varphi(0)$ est le plus petit élément de \mathbb{A} , $\varphi(1)$ est le plus petit élément de $\mathbb{A} - \{\varphi(0)\}$ et ainsi de suite).Par construction, chaque indice $\varphi(k)$ vérifie $\forall p \geq \varphi(k), u_p \leq u_{\varphi(k)}$; en particulier $u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)}$.La suite $(u_{\varphi(k)})$ est décroissante. Elle est extraite de la suite (a_n) , donc elle est minorée.

Elle converge vers son grand minorant.

Second cas : si \mathbb{A} est fini, alors au delà d'un certain entier M , tous les entiers sont dans \mathbb{A}^c .On pose alors $\varphi(0) = M + 1$. Par définition de $\varphi(0) \notin \mathbb{A}$, il existe au moins un élément p plus grand que $\varphi(0)$ vérifiant $u_p > u_{\varphi(0)}$. On prend le premier d'entre eux (qui ne peut pas être égal à $\varphi(0)$ par inégalité stricte) et on le note $\varphi(1)$.On recommence : $\varphi(1)$ n'est pas dans \mathbb{A} , il existe donc au moins un indice p vérifiant $u_p > u_{\varphi(1)}$. Le premier d'entre eux sera noté $\varphi(2)$.



De proche en proche, on construit φ vérifiant $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ pour tout k (ainsi que $\varphi(k+1) > u_{\varphi(k)}$). La sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ est croissante, majorée (par β_0). Elle converge donc vers son plus petit majorant.



Dans les deux cas, on a construit une sous-suite monotone bornée, donc convergente.

◀4▶ On suppose $(a_n + b_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(e^{a_n} + e^{b_n}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b . On a alors $a = -b$ et $e^a + e^b = 2$; on déduit $\text{ch}(a) = 1$ puis $a = 0$ et $b = 0$. En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Abouissez quand même au bon résultat.

Le raisonnement proposé est une monstrueuse connerie, dès sa première ligne.
Qui vous a dit que les suites avaient une limite ? Personne.

Rappelons au passage l'ânerie suivante : si $(a_n + b_n)$ et $(a_n \times b_n)$ convergent vers λ et μ , vers quoi convergent (a_n) et (b_n) ?

On note α la limite de (a_n) et β celle de (b_n) .

Par passage à la limite : $\alpha + \beta = \lambda$ et $\alpha \cdot \beta = \mu$.

On retrouve fièrement α et β par les formules de Viète.

Et on est un fieffé connard.

En effet, il se peut que ni a ni b ne converge.

Prenons $((-1)^n)$ et son opposé. Leur produit vaut -1 (converge) et leur somme vaut 0 (converge).

◀5▶ Un élève donne les définitions suivantes de la convergence d'une suite :

a	$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
c	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
d	$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \leq N_\varepsilon) \Rightarrow u_n - a \geq \varepsilon$

trouvez l'erreur, et dites ce qu'on peut déduire.

a $\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$

On autorise $\varepsilon = 0$. Et ça change tout.

En effet, à partir du rang N_0 on a $|u_n - a| \leq 0$ c'est à dire $u_n = a$.

La suite est constante à partir du rang N_0 .

Et évidemment elle converge. Mais quand même, il y a des suites qui convergent vers a sans valoir a .

b $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$

Vu l'ordre des quantificateurs, N_ε a aussi le droit de dépendre de n .

Et comme on demande juste qu'une implication soit vraie, je choisis $N_\varepsilon = n + 1$.

L'implication $(n \geq n + 1) \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$ est donc vraie (« faux implique... »).

Toutes les suites (convergentes ou non) vérifient cette quantification).

c $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$

A partir du rang N , on a pour tout $\varepsilon : |u_n - a| \leq \varepsilon$.

Mais ceci ne laisse pas le choix : $|u_n - a|$ est nul.

Si vous voulez convaincre le physicien dites « comme c'est vrai pour tout ε , je fais tendre ε vers 0, et par passage à la limite, $|a_n - a|$ est plus petit que 0.

Si vous voulez convaincre le mathématicien, dites « si a_n n'était pas égal à a , alors $a_n - a$ serait non nul et pour le particulier $\varepsilon = \frac{|u_n - a|}{2}$, on aurait une contradiction.

La suite est constante à partir du rang N .

d	$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \leq N_\varepsilon) \Rightarrow u_n - a \geq \varepsilon$
---	--

C'est avant le rang N_ε qu'elle est loin de a .

A finir.

◀6▶

On a donné à Léo les dix chiffres de 0 à 9. Il en a fait quatre nombres : un nombre à un chiffre, un nombre à deux chiffres, un à trois chiffres, un à quatre chiffres. Les quatre sont des carrés parfaits. Pouvez vous refaire la même chose ? Et si on veut toutes les solutions, on prend Python ?

On doit prendre dix chiffres et fabriquer une liste de carrés parfaits $a, \overline{bc}, \overline{def}$ et \overline{ghij} .

Les valeurs possibles pour a sont 0, 1, 4 et 9.

Les valeurs possibles pour b sont 16, 25, 36, 49, 64 et 81. Certaines sont incompatibles avec a .

Pour c la liste s'allonge, même si on élimine 100, 121 et quelques autres qui utilisent plusieurs chiffres en double.

On trouve les douze solutions suivantes :

0, 16, 784, 5329	0, 25, 784, 1369	0, 25, 784, 1936	0, 25, 841, 7396
0, 36, 729, 5184	0, 81, 324, 7569	0, 81, 576, 3249	0, 81, 729, 4356
1, 36, 784, 9025	9, 16, 784, 3025	9, 81, 324, 7056	9, 81, 576, 2304

```
Carres = [ ] for long in range(5) #on va créer la liste des carrés
for k in range(100) : #le plus grand 992
... carre=str(k*k) #on en fait une chaîne
... long=len(carre) #on va voir dans quelle liste l'insérer
... Carres[long].append(carre) #on l'insère
print(Carres) #on vérifie
Tout = list('0123456789') #l'anagramme à trouver
for a in Carres[1] : #on l'appelle a
...for b in Carres[2] : #et il y a b
.....for c in Carres[3] : #puis c
.....for d in Carres[4] : #et enfin d
.....Mot=a+b+c+d #on met les quatre carrés bout à bout
.....if sorted(Mot) == Tout : #on teste si c'est un anagramme de 0123456789
.....print(a,b,c,d) #si oui, on l'affiche
print('Fini')
```

◀7▶

Pour tout entier naturel n , on note $s(n)$ le nombre de chiffres premiers dans l'écriture de n (exemple : $s(2019) = 1^a$, $s(1789) = 1$, $s(5435) = 3$). Montrez que la série de terme général $\frac{s(n)}{n^2}$ est croissante et majorée

(intégrale $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t^2} .dt$?). Écrivez un script Python qui pour N donne calcule la valeur approchée de $\sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^2}$.

a. on rappelle que 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
premier			x	x		x		x		
composé					x		x		x	x
ni premier ni composé	x	x								

Bon, les chiffres, c'est de 0 à 9.

Bref, on doit compter combien il y a de 2, de 3, de 5 et de 7 dans l'écriture de n .

On va prendre n , le faire fondre en divisant par 10, et pour chaque chiffre extrait, on regarde si il vaut 2, 3, 5 ou 7.


```
def ComptePrem(n) :
...nn = n #on travaille sur copie
...compt
...while nn > 0 :
.....chiffre = nn%10
.....nn = nn/10
.....if chiffre in [2, 3, 5, 7] :
.....compte += 1
...return compt
```

```
def ComptePrem(n) :
...compt = 0
...Mot = str(n)
...for chiffre in Mot :
.....if chiffre in ['2','3','5','7'] :
.....compt += 1
...return compt
```

Si on travaille sur des entiers, le test est `chiffre in liste de chiffres`, si on travaille sur `string`, le test est sur `chiffre in liste de caractères`.

On a créé la petite procédure utile. Il vaut mieux découper le travail, et éviter l'étirement du programme.

La série est à termes positif, elle croît. Pour la faire converger, il suffit de la majorer.

```
def Somme(N) :
...S = 0
...for n in range(1, N+1) : #gare aux bornes
.....S += ComptePrem(n)/(n*n)
...return S
```

Mais on ne peut pas majorer $\frac{s(n)}{n^2}$ par $\frac{K}{n^2}$ puisque le nombre de chiffres de n peut être grand, et pas mal de ses chiffres peuvent être premiers (et même tous (écrivez des 2323235323...7, ce n'est pas ce qui manque)).

Mais $s(n)$ est au maximum égal au nombre de chiffres de n . Et ce nombre de chiffres, c'est $\log(n)$. Ou plus précisément : $\left\lceil \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$.

On est face à une série majorée par $\frac{\ln(n)}{n^2}$. Cette fois, c'est mieux.

Si on majore $\ln(n)$ par n , on ne peut rien faire : $\frac{s_n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'est pas pertinent, puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Si en revanche on écrit $\ln(n) = o(\sqrt{n})$, on a $\frac{s(n)}{n^2} = \frac{o(\sqrt{n})}{n^2} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

La série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (exposant strictement plus grand que 1). par domination, la série de terme général $\frac{s(n)}{n^2}$ converge.

Pour avoir posé l'exercice en I.S., j'ai le souvenir de trop nombreux élèves qui ont créé une procédure de test de primalité classique,

```
def Premier(c) :
...for j in range(2, c) :
.....if c % j == 0 :
.....return False
...return True
```

c'est certes une procédure correcte.

Mais à quoi bon la créer et l'utiliser si c'est juste pour vérifier ensuite qui de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 est premier..

8 > Donnez une formule explicite pour u_n définie par u_0 donné et $u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{2}$ pour tout n .

On calcule les premiers termes : u_0 $u_1 = \frac{(u_0)^3}{2}$ $u_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(u_0)^3}{2}\right)^3 = \frac{(u_0)^9}{2^4}$ $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(u_0)^9}{2^4}\right)^3 = \frac{(u_0)^{27}}{2^{13}}$ $u_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(u_0)^{27}}{2^{13}}\right)^3$

L'exposant de u_0 est facile à trouver : 3^n .

Celui de 2 que l'on va noter α_n obéit à une règle simple : $\alpha_{n+1} = 1 + 3\alpha_n$: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(u_0)^{3^n}}{2^{\alpha_n}}\right)^3 = \frac{(u_0)^{3^{n+1}}}{2^{1+3\alpha_n}}$.

Quitte à tâtonner, on trouve vite $\alpha_n = \frac{3^n - 1}{2}$ et on le prouve par récurrence sur n .

Sinon, et si on suivait le cours ? Ou si on le précédait ?

On soustrait à α_n le point fixe caractérisé par $\omega = 1 + 3\omega$.

La suite $\left(\alpha_n + \frac{1}{2}\right)$ est alors géométrique de raison 3 : $\alpha_{n+1} + \frac{1}{2} = 1 + 3\alpha_n + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\alpha_n + \frac{1}{2}\right)$

On a donc $\left(\alpha_n + \frac{1}{2}\right) = 3^n \cdot \left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\right)$ d'où $\alpha_n = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$.

On résume : $u_n = (u_0)^{(3^n)} \cdot 2^{\frac{1-3^n}{2}} = \frac{(u_0)^{(3^n)}}{\sqrt{2}^{3^n-1}}$

◀ 9 ▶

♥ Pour tout n , on définit $a_n = \binom{3 \cdot n}{n}$. Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.

En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\binom{3 \cdot n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

La suite (a_n) est bien définie, jamais nulle : $a_n = \frac{(3 \cdot n)!}{(2 \cdot n)! \cdot n!}$.

On effectue un quotient : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3 \cdot n + 3)!}{(3 \cdot n)!} \cdot \frac{(2 \cdot n)!}{(2 \cdot n + 2)!} \cdot \frac{n!}{(n + 1)!} = \frac{(3 \cdot n + 1) \cdot (3 \cdot n + 2) \cdot (3 \cdot n + 3)}{1} \cdot \frac{1}{(2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot n + 2)} \cdot \frac{1}{n + 1}$.

L'ensemble a une limite : $\frac{27}{4}$.

Par passage au logarithme, $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ converge vers $\ln(27/4)$.

Par théorème de Cesàro, $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)$ converge vers $\ln(9/4)$ quand n tend vers l'infini.

Par télescope, $\frac{\ln(a_n) - \ln(a_0)}{n}$ converge vers $\ln(27/4)$.

Par retour à l'exponentielle (continue), $\sqrt[n]{a_n}$ converge vers $\frac{27}{4}$.

◀ 10 ▶

Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ diverge. Indication : $A_{(2 \cdot p + 1)^2} - A_{4 \cdot p^2}$ tend il vers 0 ?

Oui, bon, la suite tend vers 0 puisque le numérateur vaut 1 ou -1 tandis que le dénominateur tend vers l'infini.

Mais la série $A_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n} \dots$

Son terme général tend vers 0. C'est bon signe, mais ça ne prouve rien de rien.

D'ailleurs, ça va mal se passer.

On va donc étudier $\frac{-1}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$

Aucune monotonie, puisque parfois, l'accroissement est positif, parfois il est négatif.

Comme suggéré, regardons $A_{(2 \cdot p + 1)^2} - A_{4 \cdot p^2}$.

Par relation de Chasles, c'est une somme $\sum_{n=4 \cdot p^2 + 1}^{(2 \cdot p + 1)^2} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$.

On est entre deux carrés d'entiers. On se dit que l'exposant doit être le même pour tous.

En fait, on va prendre plutôt $A_{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} - A_{4 \cdot p^2 - 1}$. Cette fois, c'est vraiment $\sum_{n=4 \cdot p^2}^{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$.

Si n est entre $4 \cdot p^2$ et $(2 \cdot p + 1)^2$, on a $2 \cdot p \leq \sqrt{n} < (2 \cdot p + 1)$ puis $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2 \cdot p$ et $(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = 1$.

On a donc $A_{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} - A_{4 \cdot p^2 - 1} = \sum_{n=4 \cdot p^2}^{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} \frac{1}{n}$.

On va comparer avec une intégrale, classiquement, pour encadrer ce terme.

Ou alors on va commencer par plus simple.

On compte le nombre de termes et on encadre par le plus petit et le plus grand :

$$A_{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} - A_{4 \cdot p^2 - 1} = \sum_{n=4 \cdot p^2}^{(2 \cdot p + 1)^2 - 1} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4 \cdot p^2} \cdot ((2 \cdot p + 1)^2 - 4 \cdot p^2)$$

$$A_{(2.p+1)^2-1} - A_{4.p^2-1} = \sum_{n=4.p^2}^{(2.p+1)^2-1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{(2.p+1)^2} \cdot ((2.p+1)^2 - 4.p^2)$$

Finalement, oui, cette « différence de Cauchy » tend vers 0 avec p .

◀ 11 ▶

Soit (a_n) une suite bornée. Montrez que $\left(\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2^n}\right)$ est alors une suite de Cauchy.

On dit A est un majorant de (a_n) (en valeur absolue même).

On se donne ε . On doit rendre $\left|\sum_{n=0}^p \frac{a_n}{2^n} - \sum_{n=0}^q \frac{a_n}{2^n}\right|$ plus petit que ε juste en jouant sur p et q assez grands.

Par symétrie des rôles, prenons $p \leq q$.

La différence vaut $\left|\sum_{n=p+1}^q \frac{a_n}{2^n}\right|$ (relation de Chasles).

Elle se majore par $\sum_{n=p+1}^q \left|\frac{a_n}{2^n}\right|$ puis $A \cdot \sum_{n=p+1}^q \left|\frac{1}{2^n}\right|$.

Ce majorant (qu'on peut espérer rendre petit, c'est quand même ça la règle jeu) vaut $A \cdot \frac{1}{2^{p+1} - \frac{1}{2}}$ ce qui fait

$$\frac{A}{2^p} - \frac{A}{2^q}$$

Comme on ne sait pas si q sera « grand ou pas » (plus grand que p en tout cas), on continue à majorer : par $\frac{A}{2^p}$.

On a donc

$$\exists K_\varepsilon, \forall (p, q), K_\varepsilon \leq p \leq q \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^p \frac{a_n}{2^n} - \sum_{n=0}^q \frac{a_n}{2^n}\right| \leq \frac{A}{2^p} \leq \varepsilon$$

Explicitement : $K_\varepsilon = \left\lceil \frac{\ln(A/\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$ convient.

Au fait, dans $C_\varepsilon = \frac{\ln(K) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ il y a un signe moins, mais il ne faut pas être surpris, ε est

Remarque : « petit », il va se rapprocher de 0, et donc $-\ln(\varepsilon)$ va pousser C_ε vers l'infini sur l'axe des abscisses.

Quelques remarques en plus :

Comme on ignore le signe des a_n on ne peut rien dire sur la monotonie de la suite (A_N) . En fait, elle peut varier dans les deux sens.

Certes, on peut écrire des choses (intéressantes) sans rien comprendre :

$$|A_N| = \left|\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n} \leq K \cdot \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = K \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq K \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.K$$

La suite (A_N) est bornée.

Jusque là, je ne proteste pas, et je suis même content de voir la majoration $K \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq K \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.K$ plutôt qu'un

réflexe idiot $K \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{K}{1 - \frac{1}{2}}$ qui n'apporte rien ou presque. On veut « majorer », et pas « calculer la limite d'un majorant ».

De même, la simple formule $|A_N| = \left|\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n} \leq K \cdot \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = K \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$ n'est pas appelée une majoration de la suite (A_N) puisque le « majorant » dépend encore de N .

On calcule ensuite : $A_{N+1} - A_N = \frac{a_{N+1}}{2^{N+1}}$.

« On » distingue alors deux cas :

- $a_{N+1} \geq 0$, alors la suite (A_N) est croissante. Comme on l'a majorée, elle converge.
- $a_{N+1} \leq 0$, alors la suite (A_N) est décroissante. Comme on l'a minorée, elle converge.

J'ose espérer que vous avez compris que ce « raisonnement » est du méga-foutage de gueule, de l'arnaque pur jus.

En effet, on travaille à N fixé dans la discussion.

Et la croissance ou la décroissance nécessiteraient $\forall N, a_{N+1} \geq 0$ ou $\forall N, a_{N+1} \leq 0$. Avec un capital $\forall N$. On en est loin quand on ne regarde ici qu'un indice à la fois.

Je rappelle que la définition de la croissance n'a jamais été et ne sera jamais $a_{n+1} \geq a_n$.

C'est $\forall n, a_{n+1} \geq a_n$. Et j'insiste pour la dix mille ième fois face à des élèves qui confondent raisonnements mathématiques et formules magiques qu'on apprend par cœur.

La formule au bout d'une ligne de maths, c'est juste la couleur de la peau, pour faire joli. Mais l'essentiel est dans le squelette, dans le début, dans les $\forall \epsilon, \exists \dots$

◀ 12 ▶

Montrez que si la suite (a_n) vérifie : $\forall n, |a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy. Réciproque ?

Montrez que si la suite (a_n) vérifie $\forall n, |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy.

Elle converge vers 0. Donc elle est de Cauchy.

La réciproque est fautive.

La suite $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0. Elle est donc de Cauchy. D'ailleurs, on a

$$\left| \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} \right| \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \epsilon$$

dès qu'on a p et q plus grands que $\frac{2}{\epsilon}$.

Mais on n'a pas $\frac{1}{2^n}$.

L'exercice plus intéressant : $\forall n, |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ implique « de Cauchy ».

On se donne ϵ et on veut $|a_p - a_q| \leq \epsilon$, juste en jouant sur p et q sont assez grands.

Sans perte de généralité, on suppose $q > p$.

On écrit la différence comme somme des accroissements : $a_q - a_p = \sum_{k=p}^{q-1} (a_{k+1} - a_k)$.

On utilise l'inégalité triangulaire : $|a_q - a_p| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |a_{k+1} - a_k|$.

On utilise l'hypothèse : $|a_q - a_p| \leq \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k}$.

On utilise nos connaissances :

$$|a_q - a_p| \leq \frac{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{2^{q-1}}$$

Comme on ignore où se situe q par rapport à p (le plus petit) : $|a_q - a_p| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$

(c'est comme si on y allait « au pire » avec q très très grand dirait le physicien).

La majoration n'est pas mauvaise, puisque $\frac{1}{2^{p-1}}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Explicitement, on peut imposer $\frac{1}{2^{p-1}} = \epsilon$ ou plutôt $\frac{1}{2^{p-1}} \leq \epsilon$ car en analyse, on regarde des inégalités.

On peut tout remettre dans l'ordre : pour p et q plus grands que $-\log_2(\varepsilon) + 1$, on a $|a_q - a_p| \leq \varepsilon$.
La suite est de Cauchy.

Et comme on est dans \mathbb{R} elle converge.

Sinon, on peut aussi écrire

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

La famille des $a_{k+1} - a_k$ est dominée (majorée en valeur absolue) par $\frac{1}{2^k}$.

La famille des $\frac{1}{2^k}$ est sommable (somme explicite égale à a série géométrique, de somme 2).

Par convergence en valeur absolue, $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ converge.

Tektonik

2			2	4			3		3						2				
		4														5		1	
				1				2							4		4		3
	5					5		5											
			3		1						5		2						

<13>

<14>

Montrez que $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ est un multiple de 30 (exercice sur le développement de déterminant en ligne/colonne).
Quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

Développez par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ 44 & 71 & 17 \\ 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 9 & 27 \\ 35 & 71 & 17 \\ 70 & 0 & 41 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 3 & 27 \\ 35 & 44 & 17 \\ 70 & 9 & 41 \end{vmatrix} - 34 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 3 & 9 \\ 35 & 44 & 71 \\ 70 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Tous les déterminants 3 sur 3 sont entiers. Le grand déterminant est pair.

$$\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ 44 & 71 & 17 \\ 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} - 15 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 12 & 34 \\ 44 & 71 & 17 \\ 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} + 35 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 12 & 34 \\ 3 & 9 & 27 \\ 9 & 0 & 41 \end{vmatrix} - 70 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 12 & 34 \\ 3 & 9 & 27 \\ 44 & 71 & 17 \end{vmatrix}$$

Cette fois, le déterminant est multiple de 5.

On développe par rapport à la deuxième ligne, et le voilà multiple de 3.

Étant multiple de 2, de 5 et de 3, c'est un multiple de 30.

Enfin, $\begin{vmatrix} & & 12 \\ 35 & & 27 \\ & 9 & \end{vmatrix}$ est bien présent dans le déterminant.

On veut son coefficient : $\begin{vmatrix} 12 & & & & \\ & 9 & & & \\ & & 35 & & \\ & & & 27 & \\ & & & & \end{vmatrix}$ un signe moins
 puis $\begin{vmatrix} & & & & 12 \\ & & & & 9 \\ & & & & 27 \\ & & & & 35 \\ & & & & 9 \end{vmatrix}$ un deuxième signe moins

Total : deux signes moins, ce qui fait un signe plus (signature de $(1\ 3) \circ (2\ 4)$).

nex

Pour être tranquille, l'instituteur a écrit $a = 1,17857142857142857\dots$ et $b = 3,\overline{18181818\dots}$ et a demandé « posez la multiplication ».

Votre petit frère est en train de calculer

1,	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7	1	
x	3,	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
	3,	5	3	5	7	1	4	2	8	5	7	1	4
	0,	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7
	0,	0	9	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5
	0,	0	0	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8

	=	3,	6										

Aidez le !^a

a. moi je vous aide avec $117857025 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 37$ et $10^6 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 + 1$

x

$x = 108 / 7$

Bon, on ne va pas poser une multiplication infinie.

On va déjà reconnaître qui sont ces deux rationnels donnés par leur écriture décimale.

On va suivre deux méthodes, pour varier les plaisirs

$10^6 \cdot a$	1	1	7	8	5	7	1,	4	2	8	5	7	1	4	2
a							1,	1	7	8	5	7	1	4	2
$10^6 \cdot a - a$	1	1	7	8	5	7	0,	2	5	0	0	0	0	0	0

On a donc

$$a = \frac{1\ 178\ 570,25}{999\ 999} = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 37}{(2 \cdot 5)^2} \cdot \frac{1}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{33}{28}$$

De la même façon, $b - 3 = 0,181818\dots$ et donc $100 \cdot (b - 3) = 18 + (b - 3)$ et $b - 3 = \frac{2}{11}$. On a donc $b = \frac{35}{11}$.

L'autre méthode, c'est une série géométrique de termes $18 \cdot 10^{-2k}$ (raison 10^{-2})

$$b = 3 + \sum_{k=1}^{+\infty} 18 \cdot 10^{-2k} = 3 + \frac{18 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{35}{11}$$

Et la troisième méthode est « on propose/on vérifie ».

La fin de l'exercice, c'est

$$a.b = \frac{33}{28} \cdot \frac{35}{11} = \frac{3.11.7.5}{7.4.11} = \frac{15}{4} = 3.75$$

C'est un décimal avec seulement deux chiffres derrière la virgule.

◀ 15 ▶	Le colleur demande à Arthur : trouvez le maximum de x^y pour x et y dans \mathbb{N} sachant $x + y = 8$ (maximum noté μ).								
	Arthur qui assiste à la colle dit « pour x et y dans \mathbb{R} , j'ai mieux que votre μ , avec $x = 3,5$ » ; vérifiez l'affirmation d'Arthur (sachant $7^9 = 40353607$).								
	Mais Arthur qui passait par là cherche à faire encore mieux ? C'est jouable ?								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	
8	7	6	5	4	3	2	1	0	
8^0	7^1	6^2	5^3	4^4	3^5	2^6	1^7	0^8	
1	7	36	125	256	243	64	1	0	
↗	↗	↗	↗		↘	↘	↘	↘	

Le maximum sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc 4^4 .

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'élève propose $x = 3,5 = \frac{7}{2}$, et donc $y = 4,5 = \frac{9}{2}$.

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose donc $y = 8 - x$ et on étudie $(8 - x)^x$ comme fonction de x .

Quelle est cette valeur ? $x^y = \left(\frac{7}{2}\right)^{9/2} = \sqrt{\frac{7^9}{2^9}}$?

On doit comparer 4^4 et $\sqrt{\frac{7^9}{2^9}}$. On va calculer leur quotient ou même le quotient de leurs carrés

$$\frac{7^9}{(4^4)^2} = \frac{7^9}{4^8 \cdot 2^9} = \frac{7^9}{2^{10} \cdot 2^9} = \frac{40\,353\,607}{2^{19}}$$

à la louche, le dénominateur est juste un peu plus grand que $10^3 \cdot 10^3 \cdot 32$ alors que le numérateur dépasse clairement $40 \cdot 10^6$.

Quitte à poser $f = x \mapsto x^{8-x}$, on a donc

$$f(3,5) > f(4) > f(3)$$

Le sens de variations de l'application f est le même que celui de $x \mapsto (8 - x) \cdot \ln(x)$.

On dérive cette application et on trouve $x \mapsto \frac{8-x}{x} - \ln(x)$.

On ne trouve pas de formule pour l'endroit où la dérivée s'annule et change de signe.

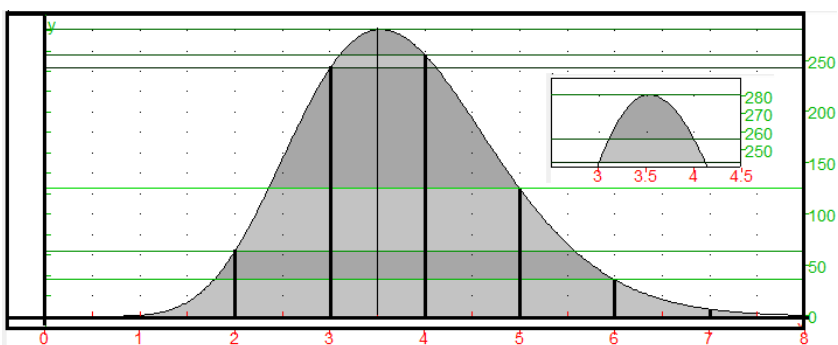
En tout cas, pas à l'aide des fonctions usuelles.

Le signe de la dérivée est celui de $x \mapsto 8 - x - x \cdot \ln(x)$, application dont on peut mesurer elle aussi le sens de variations.

On calcule le signe de la dérivée en $7/2$. On n'a pas 0.

Le maximum n'est pas en 3,5.

Pour information, il est en 3.535 à 10^{-3} près et vaut à peu près 281.



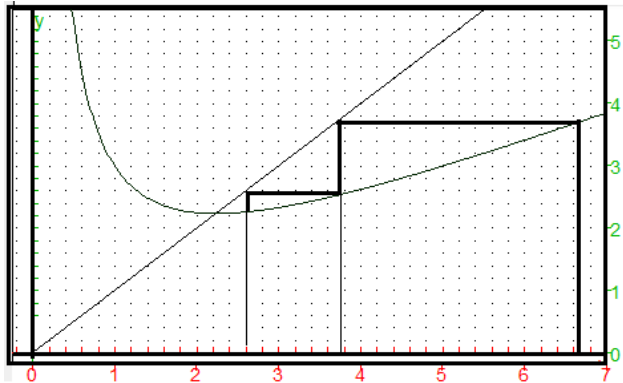
$x =$	2	3	3.535	3,5	4	5
			280,9			
				280,7		
					256	
		243				125
	64					

Algorithme de Newton ($u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$) pour l'extraction de racines carrées (dans \mathbb{R} , dans \mathbb{C} , dans $M_2(\mathbb{R})$) et de solutions d'équations. Inspiré de plusieurs sujets de concours mélangés.

Algorithme dans \mathbb{R} pour \sqrt{a} .

I~0)

a est un réel strictement positif donné. Représentez graphiquement $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.



L'application $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)$ est définie, continue, dérivable, de $]0, +\infty[$ dans lui-même.

On la dérive : $f' = x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$.

f est décroissante, puis croissante, avec un minimum en \sqrt{a} égal d'ailleurs à \sqrt{a} .

I~1) On définit u_0 donné dans \mathbb{R}^{+*} et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ pour tout n . Montrez que la suite u est bien définie, supérieure ou égale à \sqrt{a} à partir du rang 1, et décroissante à partir du rang 1, convergente. Donnez sa limite.

Par récurrence sur n , on montre la propriété P_n très précise : u_n existe et il est strictement positif.

Rédaction : $\forall n \in \mathbb{N}, (P_n) = (u_n > 0)$: oui.

(P_n) : $(\forall n, u_n > 0)$: non, aucun sens sur le rôle de n .

C'est vrai au rang 0.

Si pour un rang n donné, u_n existe et est strictement positif, alors u_{n+1} existe (dénominateur non nul), et il est strictement positif (moyenne de deux réels positifs).

En fait : $]0, +\infty[$ est stable par f .

On montre ensuite $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout n sans même une récurrence. On a en effet $u_n = f(u_{n-1}) \geq \sqrt{a}$ d'après le tableau de variations.

Pour la décroissance, on peut calculer

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n - \frac{a}{u_n}\right)$$

et justement, comme u_n est plus grand que \sqrt{a} cette différence est négative.

La suite décroît à partir du rang 1.

On peut avoir $u_1 > u_0$ (pour u_0 trop petit), mais ensuite $\dots \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \dots \leq u_3 \leq u_2 \leq u_1$.

La suite est décroissante, minorée, elle converge.

Sa limite est forcément un point fixe, et l'unique point fixe positif est \sqrt{a} .

I~2) Montrez pour tout n : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2 \cdot u_n}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{a - (u_{n+1})^2}{2 \cdot u_{n+1}}$.

On calcule pour n donné

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{a}{u_n} - 2 \cdot \sqrt{a}\right) = \frac{(u_n)^2 + a - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot u_n}{2 \cdot u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2 \cdot u_n}$$

Il était d'ailleurs plus simple de partir du membre de droite (le plus compliqué) et d'essayer d'y retrouver celui de gauche.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_{n+1} + \frac{a}{u_{n+1}} - 2 \cdot u_{n+1}\right) = \frac{(u_{n+1})^2 + a - 2 \cdot (u_{n+1})^2}{2 \cdot u_{n+1}} = \frac{a - (u_{n+1})^2}{2 \cdot u_{n+1}}$$

I~3) Déduisez $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2 \cdot \sqrt{a}}$.

La première inégalité garantit que $u_{n+1} - \sqrt{a}$ est positif, en tant que carré de réel.

D'autre part, comme u_n est plus grand que \sqrt{a} on a $\frac{1}{2.u_n} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}}$. L'égalité $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2.u_n}$ devient la majoration $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2.\sqrt{a}}$.

I~4) Déduisez une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ en fonction de n , u_0 et a .

On va mettre en boucle le résultat précédent. Posons pour la simplicité de lecture $d_n = u_n - \sqrt{a}$. On a alors

$$0 \leq d_{n+1} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot (d_n)^2 \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot (d_{n-1})^2 \right)^2 \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot (d_{n-2})^2 \right)^2 \right)^2$$

On voit que l'exposant va vite grimper et que les $\frac{1}{2.\sqrt{a}}$ vont aussi avoir un exposant imposant.

Soit qu'on y va proprement, doucement et qu'on ne rate rien.

Soit qu'avec prudence, on écrit qu'on va obtenir $d_n \leq \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{\alpha_n} \cdot (d_0)^{\beta_n}$ avec α_n et β_n à déterminer.

Et justement, la majoration $d_{n+1} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot (d_n)^2$ donne

$$\left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{\alpha_{n+1}} \cdot (d_0)^{\beta_{n+1}} = \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot \left(\left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{\alpha_n} \cdot (d_0)^{\beta_n} \right)^2$$

puis $\alpha_{n+1} = 1 + 2.\alpha_n$ et $\beta_{n+1} = 2.\beta_n$. Immédiatement, on a $\beta_n = 2^n$ puis un peu moins rapidement $\alpha_n = 2^n - 1$.

On peut alors re-partir du bon pied et prouver

$$0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{2^n - 1} \cdot (u_0 - \sqrt{a})^{2^n}$$

par récurrence sur n . Pour n égal à 0, c'est une égalité, et ensuite, la majoration $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{u_n - \sqrt{a}}{2.\sqrt{a}}$ donne bien

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{u_n - \sqrt{a}}{2} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{2.(2^n - 1)} \cdot (u_0 - \sqrt{a})^{2.2^n} = \left(\frac{1}{2.\sqrt{a}} \right)^{2^{n+1} - 1} \cdot (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$$

I~5) Dans le cas $a = 5$ et $u_0 = 5$, à partir de quel rang u_n est-il une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près ?
Même question pour 10^{-15} . On pourra utiliser $\log_{10} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2.\sqrt{5}} \right) \simeq 0,2$.

Avec cette formule, on a la vitesse de convergence. u_n sera une approximation de $\sqrt{5}$ à $\left(\frac{1}{2.\sqrt{5}} \right)^{2^n - 1} \cdot (5 - \sqrt{5})^{2^n}$ près,

c'est à dire à $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2.\sqrt{5}} \right)^{2^n} \cdot \frac{1}{2.\sqrt{5}}$.

On veut que $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2.\sqrt{5}} \right)^{2^n} \cdot \frac{1}{2.\sqrt{5}}$ soit plus petit que 10^{-10} ? Ceci revient à exiger

$$2^n \cdot \log_{10} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2.\sqrt{5}} \right) \leq -10 + \log_{10}(2.\sqrt{5})$$

On nous adonné à la louche $\log_{10} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2.\sqrt{5}} \right) \simeq -0,2$. On demande donc $2^n \geq \frac{10 - \log_{10}(2.\sqrt{5})}{0,2}$.

Allez : $2^n \geq 200$? On prend $n = 8$ (et avec la calculatrice, c'est même $n = 6$).

Et pour 10^{-15} ? $n = 9$ suffit.

En fait, à partir de $n = 7$, on a déjà 28 chiffres exacts derrière la virgule, et pour $n = 8$ on en a 54.

Dans la pratique, on dit que le nombre de chiffres exacts double à chaque itération.

La méthode de Newton est quand même quelquechose de fantastique.

Algorithme dans \mathbb{C} pour \sqrt{a} .

II~0) Soit a dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ montrez qu'il existe un unique complexe α vérifiant $\alpha^2 = a$ et $\Re(\alpha) > 0$.

On a deux approches possibles.

Polaire. Le complexe 0 a pour racine carrée 0 . Sinon, le complexe $\rho.e^{i\theta}$ (avec θ dans $] -\pi, \pi[$ car a n'est pas réel négatif) a deux racines carrées : $\sqrt{\rho}.e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{\rho}.e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi}$ (d'ailleurs égale à $-\sqrt{\rho}.e^{i\frac{\theta}{2}}$). Seule la première a une partie réelle positive (c'est $\sqrt{\rho}.\cos(\theta/2)$ avec $\theta/2$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).

Cartésienne. On résout $(x^2 - y^2) + i.(2xy) = \Re(a) + i.\Im(a)$ avec $\Re(a) + i.\Im(a)$ qui n'est pas un réel négatif. Avec l'information $x^2 + y^2 = |a|$, on trouve deux solutions :

$$\sqrt{\frac{\Re(a) + |a|}{2}} + i.\frac{\sqrt{2}.\Im(a)}{\sqrt{\Re(a) + |a|}}$$

et son opposé, sachant que justement $\Re(a) + |a|$ est strictement positif.

On garde celle qui est écrite ci dessus.

II~1) On définit la suite récurrente u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ pour tout n . Montrez que tous ses termes existent et sont dans le demi plan d'équation $\Re(z/\alpha) > 0$.

On initialise avec $u_0 = 1$: il est dans le demi plan d'équation $\Re(z/\alpha) > 0$ puisque $\Re\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\Re(\alpha)}{|\alpha|^2}$.

Ensuite, si u_n/α a une partie réelle strictement positive, il est non nul, u_n l'est aussi et on peut le mettre au dénominateur.

Déjà, u_{n+1} existe.

Regardons alors si la partie réelle de $\frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2\alpha}$ est strictement positive.

Le facteur 2 n'y change rien, on étudie donc $\frac{u_n}{\alpha} + \frac{a}{\alpha.u_n}$. Et ceci s'écrit $\frac{u_n}{\alpha} + \frac{\alpha}{u_n}$ puisque a est le carré de α .

A finir.

II~2) Pour tout n , on pose $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}$ (existence ?). Exprimez v_n à l'aide de v_{n-1} puis à l'aide de v_0 .

Le complexe $u_n + \alpha$ au dénominateur de v_n pourrait il s'annuler ?

Il faudrait alors $\frac{u_n}{\alpha} = -1$ ce qui est interdit par $\Re\left(\frac{u_n}{\alpha}\right) > 0$.

On remplace dans la formule :

$$v_{n+1} = \frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{\alpha^2}{u_n} \right) - \alpha}{\frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{\alpha^2}{u_n} \right) + \alpha} = \frac{(u_n)^2 + \alpha^2 - 2\alpha.u_n}{(u_n)^2 + \alpha^2 + 2\alpha.u_n} = \frac{(u_n - \alpha)^2}{(u_n + \alpha)^2} = (v_n)^2$$

Il suffit ici de penser à remplacer a par α^2 , c'est tout.

On aurait pu suivre aussi cette méthode dans le cas réel.

Ayant $v_n = (v_{n-1})^2 = ((v_{n-2})^2)^2$, on met en boucle et on arrive à $v_n = (v_0)^{2^n}$ (lisez $(v_0)^{(2^n)}$ si vous n'avez pas fait assez d'exercices avec des exposants dans les I.S.).

II~3) Dédisez que (u_n) converge vers α .

Si ce majorant part vers $+\infty$ on ne pourra rien en faire. Mais si il tend vers 0 , ce sera parfait.

Étudions donc v_0 ou plutôt son module. On calcule

$$|v_0| = \left| \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right| = \left| \frac{1 - c - i.d}{1 + c + i.d} \right| = \sqrt{\frac{(1 - c)^2 + d^2}{(1 + c)^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{1 + c^2 + d^2 - 4.c}{1 + c^2 + d^2 + 2.c}} = \sqrt{1 - \frac{4.c}{(1 + c)^2 + d^2}}$$

On nous a imposé $\Re(\alpha) > 0$. La quantité sous la racine est donc plus petite que 1 (« 1 moins un terme positif »). La racine est plus petite que 1 .

Visuellement, le complexe α est plus proche du complexe 1 que du complexe -1 .

On a donc $|v_0| < 1$ et, avec soulagement, $|v_0|^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Maintenant qu'on a $|v_0| < 1$, on déduit que $(v_0)^{2^n}$ tend (très vite) vers 0 quand n tend vers l'infini.

On remonte à $u_n = \alpha \cdot \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$ par inversion de l'homographie. Et par théorème algébrique u_n tend vers $\alpha \cdot \frac{0+1}{1-0}$ ce qui fait bien α .

Mais mieux encore, on a la vitesse de convergence.

Rapport du jury que je serai en lisant vos copies :

Des élèves ont parlé de suite croissante, alors qu'on est dans \mathbb{C} .
Des élèves ont écrit des inégalités dans \mathbb{C} ce qui rappelle le n'a aucun sens.

Exemples dans $M_n(\mathbb{C})$ pour \sqrt{A} .

III~0) On donne $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = N$ d'inconnue M . Montrez que si M est solution, alors on a $N.M = M.N$. Déduisez qu'il existe a, b et c vérifiant $M = a.I_3 + b.N + c.N^2$. Montrez $\det(M)^2 = \det(N)$ et déduisez $a = 0$. Trouvez toutes les solutions de $M^2 = N$.

On suppose que M vérifie $M^2 = N$. On a alors sans se fatiguer

$$M.N = M.M^2 = M^3 = M^2.M = N.M$$

Mais alors, en revenant aux coefficients pour cette condition qui n'est que nécessaire

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve que certains sont nuls et que d'autres se retrouvent. la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ce qui s'écrit $a.I_3 + b.N + c.N^2$ (et même $a.N^0 + b.N^1 + c.N^2$ pour qui aime les idées claires).

Évidemment, la forme $a.I_3 + b.N + c.N^2$ est une condition suffisante pour avoir $M.N = N.M$, mais il ne sautait pas aux yeux qu'elle était nécessaire.

On n'a cependant pas le choix pour le coefficient a : $a^3 = \det(M)$ et $(\det(M))^2 = \det(M^2) = \det(N) = 0$.
On déduit que M est non inversible et que a vaut 0.

Il nous reste $M = b.N + c.N^2$ (nécessaire mais pas encore suffisant). On reporte dans l'équation : $(b.N + c.N^2)^2 = N$.

En développant et en observant que N^3 est nulle (comme N^4) il reste $b.N^2 + 0_{3,3} = N$. Et c'est impossible.

L'équation n'a pas de solution.

*Le élèves adorant les calculs idiots et inutiles auront résolu un bon gros système non linéaire mais abordable de neuf équations à neuf inconnues, et auront gagné un ticket d'aller simple pour une école de presque ingénieurs, où il suffit de savoir calculer comme un bourrin pour entrer, même sans rien comprendre.
J'en connais. Ne me demandez pas les noms, je ne vous les donnerai pas. Et je vous avouerai que je suis quand même fier quand d'anciens MPSI2 y entrent.*

III~1) Combien l'équation $M^2 = I_3 + N$ a-t-elle de solutions ?

On se lance dans neuf coefficients pour l'équation $M^2 = I_3 + N$?

Non, on recommence avec le même schéma mental. Déjà $M.N = M.(M^2 - I_3) = M^3 - M = (M^2 - I_3).M = N.M$
La matrice sera encore permutable avec N . Elle sera donc de la forme $a.I_3 + b.N + c.N^2$.

Mais cette fois, le déterminant donne $a^3 = \det(M)$ et $\det(M^2) = \det(I_3 + N) = 1$.

Si l'on est dans \mathbb{R} on dira que ceci impose $a = 1$ ou $a = -1$. Dans \mathbb{C} ce sera différent.

En tout cas, avec $(a.I_3 + b.N + c.N^2)^2 = I + N$ (écrivons le $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$) on a le système par identification des coefficients $a^2 = 1$, $2.a.b = 1$ et $2.a.c + b^2 = 0$.

On a deux choix pour a , puis b et c sont imposées.

On a deux solutions : $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

III~2) Combien l'équation $M^2 = 0_{3,3}$ a-t-elle de solutions ?

Algorithme dans $S_d(\mathbb{C})$ pour \sqrt{S} .

IV~0) On note S_d^+ l'ensemble des matrices S réelles symétriques^a de format d sur d , vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^d - \{0_d\}, {}^tX.S.X > 0$. Montrez que les éléments de S_d^+ sont inversibles.

$$a. \forall (i, k), s_i^k = s_k^i$$

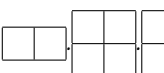
On commence par « toute matrice de S_d^+ est inversible ».

Je vous livre un raisonnement qui n'en est pas un.

Pour tout X , on a ${}^tX.S.X > 0$. On passe au déterminant : $\det({}^tX.S.X) > 0$.

On exploite les propriétés : $\det({}^tX) \cdot \det(S) \cdot \det(X) > 0$ puis $\det(X) \cdot \det(S) \cdot \det(X) > 0$ et enfin $(\det(X))^2 \cdot \det(S) > 0$ et on arrive bien à $\det(S) > 0$ et c'était notre objectif.

Mais ceci n'a aucun sens, car le vecteur X est une colonne et n'a pas de déterminant.

Avant de calculer, on vérifie les formats : . C'est un réel. Un réel a certes un déterminant (lui même), mais ensuite, seule la matrice du milieu en a un.

La bonne démarche consiste à raisonner par l'absurde.

Si la matrice n'est pas inversible, alors il existe une combinaison linéaire qui lie les colonnes. On a donc un vecteur colonne U vérifiant $S.U = 0_n$ (certains diront « oui, un vecteur dans le noyau », et ils auront raison.

Exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est liée par $5.C_1 - 2.C_2 = C_3$. Et on a bien $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais alors pour ce vecteur non nul U , on a alors ${}^tU.S.U = {}^tU.O_d = 0$. Et ceci contredit la stricte positivité de tous les ${}^tX.S.X$.

On notera d'ailleurs que le pseudo raisonnement avec les déterminants ne tient pas la route, car il suffirait d'un vecteur vérifiant ${}^tX.S.X > 0$ pour que la matrice soit inversible, ce qui est une exigence très faible.

IV~1) On se donne S dans S_d^+ et on suppose qu'elle admet une racine carrée R également dans S_d^+ vérifiant donc $R^2 = S$. On pose, $M_0 = I_d$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1}.S)/2$. Montrez que pour tout n M_n existe, vérifie $M_n.R = R.M_n$ et $M_n.S = S.M_n$ et est dans S_d^+ . Conseil : $Z = R.(M_n)^{-1}.X$ pour l'une des étapes de la récurrence, mais je ne sais pas si ça vous aide vraiment.

On va montrer par récurrence sur n que toutes les matrices M_n sont dans S_d^+ et commutent avec S et R .

Pour I_d , sa symétrie et le fait qu'elle soit permutable avec S et D est acquis.

Et pour tout vecteur colonne X de composantes x_1 à x_d , on a ${}^tX.I_d.X = (x_1)^2 + \dots + (x_d)^2$ et c'est strictement positif.

On se donne un entier n et on suppose que M_n est dans S_d^+ et « commute avec R et S ».

Comme M_n est dans S_d^+ , elle est inversible, et M_{n+1} existe (on a juste à écrire que $(M_n)^{-1}.S$ a un sens par compatibilité des formats et existence de l'inverse).

On vérifie $M_{n+1}.R = (M_n + (M_n)^{-1}.S).R/2 = M_n.R/2 + (M_n)^{-1}.S.R/2$ et $R.M_{n+1} = R.M_n/2 + R.(M_n)^{-1}.S/2$. On doit vérifier $(M_n)^{-1}.S.R = R.(M_n)^{-1}.S$. Je propose de vérifier déjà $S.R = M_n.R.(M_n)^{-1}.S$ et il suffira de multiplier à gauche par $(M_n)^{-1}$ pour avoir ce qui est demandé. Mais comme M et R sont permutables, je dois juste prouver $S.R = R.M_n.(M_n)^{-1}.S$ c'est à dire $S.R = R.S$. Et ceci est acquis parce que S est le carré de R (donc $S.R$ et

$R.S$ sont égales à R^3).

$$\text{Proprement : } S.R = R^2.R = R.R^2 = R.S$$

$$\text{puis } S.R = R.(M.M^{-1}).S$$

$$\text{puis } S.R = (R.M).M^{-1}.S = M.(R.M^{-1}.S)$$

$$\text{et donc } M^{-1}.S.R = R.M^{-1}.S$$

$$\text{et en divisant par 2 et en ajoutant } M.R = R.M : \frac{M.R + M^{-1}.S.R}{2} = \frac{R.M + R.M^{-1}.S}{2}.$$

Comme on a $M_{n+1}.R = R.M_{n+1}$, en l'appliquant deux fois, on a

$$M_{n+1}.R.R = (R.M_{n+1}).R = R.(M_{n+1}.R) = R.R.M_{n+1}$$

La matrice M_{n+1} est elle alors symétrique (sachant que M_n l'est) ?

On transpose avec les règles que l'on connaît (somme, produit ${}^t(A.B) = {}^t B.{}^t A$) :

$${}^t(M_{n+1}) = \frac{{}^t(M_n) + {}^t S.{}^t((M_n)^{-1})}{2} = \frac{M_n + S.(M_n)^{-1}}{2}$$

On a montré lors d'un devoir précédent ${}^t(M^{-1}) = ({}^t M)^{-1}$ pour toute matrice inversible.

Il nous manque juste $(M_n)^{-1}.S = S.(M_n)^{-1}$, mais ceci vient directement de $S.M_n = M_n.S$ qu'on multiplie par $(M_n)^{-1}$ à droite et à gauche.

Allez, on termine avec la positivité des ${}^t X.M.X$.

On se donne un vecteur non nul X et on calcule ${}^t X.M_{n+1}.X$.

Le facteur 2 ne pose pas de problème. Le réel ${}^t X.M_n.X$ est positif.

C'est ${}^t X.(M_n)^{-1}.S.X$ qui va être plus problématique.

Pour ma part, je pose déjà $Y = (M_n)^{-1}.X$ ce qui permet d'avoir ${}^t Y = {}^t X.{}^t(M_n)^{-1} = {}^t X.(M_n)^{-1}$.

J'allège donc la question avec le signe de ${}^t Y.S.M_n.Y$.

Mais j'écris $S = R^2$ puis $S.M_n = R^2.M_n = R.M_n.R$.

La question se pose alors pour ${}^t Y.R.M_n.R.Y$.

Et cette fois, je pose $Z = R.Y$. La quantité est de la forme ${}^t Z.M_n.Z$, et elle est strictement positive par hypothèse de rang n .

Exemples

$V \sim 0$) On prend $S = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifiez $S \in S_2^+$. Diagonalisez S (matrice de passage P et matrice diagonale D). Trouvez R vérifiant $R^2 = S$.

La matrice $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est évidemment symétrique.

Mais qu'en est il de la condition ${}^t X.S.X > 0$?

On se donne un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qu'on note X et on calcule

$${}^t X.S.X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 8.x^2 + 4.x.y + 5.y^2$$

Les élèves les plus pressés diront que si x et y sont positifs, c'est gagné.

De même si x et y sont tous deux négatifs.

Ensuite, ils prendront x et y de signes opposés et étudieront différents cas : $|x| > |y|$ ou $|x| < |y|$.

Mais les habitués du programme de Terminale utiliseront la factorisation canonique

$$8.x^2 + 4.x.y = 8.\left(x^2 + \frac{x.y}{2}\right) = 8.\left(x + \frac{y}{4}\right)^2 - \dots$$

et finalement

$$8.x^2 + 4.x.y + 5.y^2 = 8.\left(x + \frac{y}{4}\right)^2 + \left(5 - \frac{8}{16}\right).y^2 \geq 0$$

On peut aussi écrire plus « terminalesquement » :

$$8.x^2 + 4.x.y + 5.y^2 = x^2 \cdot \left(8.\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4.\left(\frac{x}{y}\right) + 5\right) \geq 0$$

et dire que le trinôme $8.t^2 + 4.t + 5$ est de signe constant positif (ce qui, soit dit en passant cache encore une factorisation canonique).

Bref, $8.x^2 + 4.x.y + 5.y^2$ est toujours positif.

On diagonalise la matrice réelle symétrique $S = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

trace : 13	déterminant : 36	polynôme caractéristique : $X^2 - 13.X + 36$
$\lambda_1 = 4$	$\lambda_2 = 9$	matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	
$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$	$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Les élèves masochistes résoudront $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Les autres se diront qu'en écrivant

$$S = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

on déplace le problème par P . On va donc chercher une racine de $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. J'en ai au moins une : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (au moins, car on peut aussi écrire malproprement $\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$). On constate que l'on a bien

$$(P \cdot \Delta \cdot P^{-1})^2 = P \cdot \Delta \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \Delta \cdot P^{-1} = P \cdot \Delta^2 \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} = S$$

On tient donc quatre racines carrées

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et leurs deux opposées.

Attention, deviner, proposer, vérifier, c'est bien, mais ça ne garantit pas que ce sont les seules.

Tiens, d'ailleurs, pourquoi sont-ce les seules ?

Soit R une matrice vérifiant $R^2 = S$.

On a alors $R^2 = P \cdot D \cdot P^{-1}$ puis $P^{-1} \cdot R^2 \cdot P = D$ et enfin $P^{-1} \cdot R \cdot P \cdot P^{-1} \cdot R \cdot P = D$.

En posant $\Delta = P^{-1} \cdot R \cdot P$, on est amené à résoudre $\Delta^2 = D$, qui est plus simple.

On fait d'ailleurs comme plus haut, et la condition $\Delta^2 = D$ implique déjà $\Delta \cdot D = D \cdot \Delta$.

On trouve que Δ est forcément diagonale. Et ses deux termes diagonaux sont les racines carrées de 4 et 9.

V~1) Combien l'équation $R^2 = S$ d'inconnue R a-t-elle de solutions ? Calculez la somme des solutions.

Ensuite, même si on n'a pas trouvé les quatre racines, il est facile d'en connaître la somme. Chaque fois qu'il y a une solution R il y a son opposé. En les regroupant deux à deux, la somme est nulle.

V~2) On prend donc $M_0 = I_3$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1} \cdot S) / 2$ pour tout n . Montrez que $P^{-1} \cdot M_n \cdot P$ est diagonale pour tout n (on va la noter Δ_n) et converge vers une matrice que vous préciserez quand n tend vers l'infini.

La suite M_n vérifie $M_0 = I_2$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1} \cdot S) / 2$.

Déjà, $P^{-1} \cdot M_0 \cdot P$ est diagonale, c'est I_2 qu'on note Δ_0 .

M_1 est égale à $(I_2 + S) / 2$. Et si on calcule $P^{-1} \cdot \frac{I_2 + S}{2} \cdot P$ on trouve comme par hasard $\frac{I_2 + D}{2}$. Cette matrice est

diagonale.

On se donne n et on suppose que $P^{-1}.M_n.P$ est diagonale (on la note Δ_n).

On remplace : $M_n = P.\Delta_n.P^{-1}$ puis $(M_n)^{-1} = P.(\Delta_n)^{-1}.P^{-1}$ (en utilisant $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ et $(P^{-1})^{-1} = P$).

On remplace : $M_{n+1} = \frac{P.D_n.P^{-1} + P.D_n^{-1}.P^{-1}.S}{2}$ et donc

$$2.P^{-1}.M_{n+1}.P = P^{-1}.(P.D_n.P^{-1} + P.D_n^{-1}.P^{-1}.S).P = \Delta_n + \Delta_n^{-1}.D$$

Cette combinaison de matrices diagonales est encore diagonale.

En fait, la matrice diagonale Δ_n est $\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ où (a_n) et (b_n) sont les deux suites complexes qui convergent vers les racines carrées des deux valeurs propres.

V~3) On recommence avec $S = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Appartenance à S_2^+ , existence et calcul de racines carrées.
On veut montrer que l'algorithme n'est pas stable et que si on part d'une valeur M_0 légèrement perturbée, la convergence n'est plus assurée. Écrivez un script Python qui prend en entrée une matrice A de taille 2 (liste de liste) et un entier N et calcule la matrice M_N de la suite $M_0 = A$ et $M_{n+1} = (M_n + (M_n)^{-1}.A)/2$.

Si on doit travailler sur des matrices de taille 2, autant créer deux petits utilitaires

```
def inverse(M) : #inverse d'une matrice inversible
...det = M[0][0]*M[1][1]-M[1][0]*M[0][1]
...return [[M[1][1]/det, -M[0][1]/det], [-M[1][0]/det, M[0][0]/det]]
```

Attention, si M est une matrice, la notation $M/2$ n'a aucun sens.

On doit diviser soi même chaque coefficient par 2.

Et $M*2$ aura un effet catastrophique, en dédoublant la matrice au lieu d'en multiplier les coefficients par 2.

```
def moyenne(A, B) : #demi somme de deux matrices
```

```
....a = (A[0][0]+B[0][0]) / 2
....b = (A[0][1]+B[0][1]) / 2
....c = (A[1][0]+B[1][0]) / 2
....d = (A[1][1]+B[1][1]) / 2
....return [[a, b], [c, d]]
```

```
def produit(A, B) : #produit de deux matrices
```

```
....a = A[0][0]*B[0][0] + A[0][1]*B[1][0]
....b = A[0][0]*B[0][1] + A[0][1]*B[1][1]
....c = A[1][0]*B[0][0] + A[1][1]*B[1][0]
....d = A[1][0]*B[0][1] + A[1][1]*B[1][1]
....return [[a, b], [c, d]]
```

Je ne parlerai pas ici des propositions loufoques en $A*B$ avec l'espoir que Python sache multiplier tout seul des matrices.

```
def newton(A, N) :
```

```
....M = [[A[0][0], A[0][1]], [A[1][0], A[1][1]] #on travaille sur une copie par sécurité
....for k in range(n+1) : #le terme M_n est bien le n+1ieme
.....M = moyenne(M, produit(inverse(M), S))
....return M
```

Effectivement, si on ne part pas exactement de la matrice unité, on peut avoir une suite M_n qui ne converge pas et oscille entre plusieurs valeurs.