



Trigo



Lycée Charlemagne

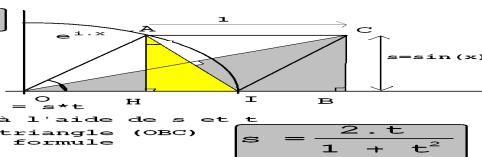
$$s = \sin(x) \\ t = \tan(x/2)$$

Montrez que les deux angles en O et en A valent $x/2$.

Montrez : $HI = s \cdot t$

Exprimez OB à l'aide de s et t

A l'aide du triangle (OBC) retrouvez la formule



$$s = \frac{2 \cdot t}{1 + t^2}$$

Arc moitié

De septembre à toujours



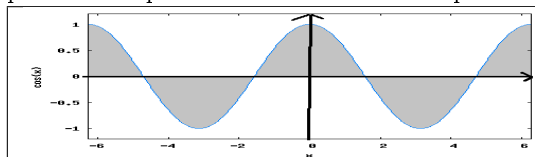
Somme/différence

Il n'y a que deux formules à retenir :

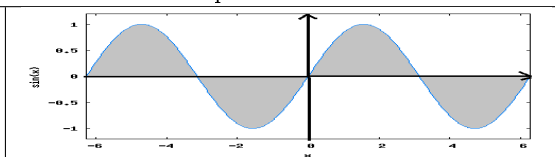
$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)$$

plus le fait que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire.



cosinus, pair



sinus, impair

On change b en $-b$:

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b)$$

Duplication

On prend b égal à a :

$$\cos(2.a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(2.a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$$

Par la formule de Pythagore, on peut transformer la première :

$$\cos(2.a) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2(\theta)$$

Duplication (encore)

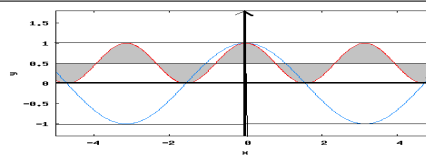
On renverse la formule précédente :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2.\theta)}{2} \text{ et } \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2.\theta)}{2}$$

On les vérifie en 0, on somme pour se convaincre.

On utilise ces formules pour intégrer $\cos^2$ et $\sin^2$.

Finalement, $\cos^2$ et $\sin^2$ sont des lignes trigonométriques, augmentées de 1 et accélérées.



Arc moitié

En posant $t = \tan(\theta/2)$ (dès lors que θ n'est pas un multiple impair de π), on montre géométriquement si on le veut :

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2} \quad d\theta = \frac{2 \cdot dt}{1 + t^2} \quad (\text{en évitant les valeurs } t = 1 \text{ et } t = -1 \text{ pour la tangente})$$

Ces formules servent pour les changements de variable, en particulier $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]_a^b$.

En utilisant un argument de géométrie simple : $\frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$

Produits en sommes

En additionnant $\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$ on trouve

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

On vérifie ces formules en prenant $b = 0$ ou $a = b$. Les produits peuvent varier entre -1 et 1 , les sommes varient entre -2 et 2 , d'où le facteur 2 .

Ce sont elles qui permettent de calculer des intégrales du type $\int_a^b \cos(p.t) \cdot \cos(q.t) . dt$.

On retient que pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) . dt$ la famille $\left(\frac{c_0}{2}, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, s_3, \dots \right)$ est orthonormée.

Sommes en produits

En développant $\cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$ par exemple, on trouve

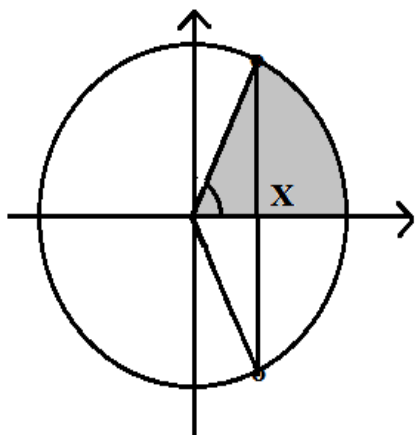
$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

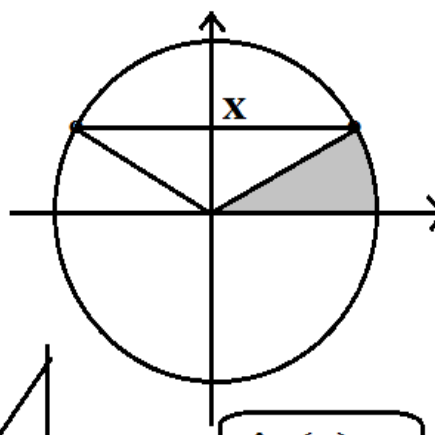
$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

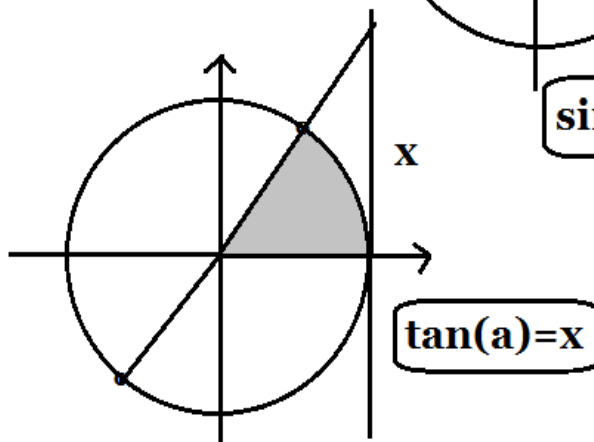
Ceci permet de simplifier par exemple : $\frac{\sin(a) - \sin(b)}{\cos(a) - \cos(b)}$



$$\cos(a) = x$$



$$\sin(a) = x$$



$$\tan(a) = x$$

Equations dans ce qui suit, l'inconnue est θ dans $\mathbb{R}$

Equation	Condition	Solutions	Graphique
$\tan(\theta) = a$	aucune	$\{ \text{Arctan}(a) + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$	
$\cos(\theta) = a$	$ a \leq 1$	$\{ \text{Arccos}(a) + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ $\cup \{ -\text{Arccos}(a) + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$	
$\sin(\theta) = a$	$ a \leq 1$	$\{ \text{Arcsin}(a) + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ $\cup \{ \pi - \text{Arcsin}(a) + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$	

On peut compacter inutilement en $(-1)^p.\text{Arccos}(a) + 2.k.\pi$ et aussi en $(-1)^n.\text{Arcsin}(a) + n.\pi$.

Les inéquations conduisent à des réunions d'intervalles.

Dérivation

$f(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
$f'(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ (retrouvez Pythagore)
$f''(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$2.\tan(\theta) + 2.\tan^3(\theta)$
$f^{(n)}(\theta)$	$\cos\left(\theta + n.\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\theta + n.\frac{\pi}{2}\right)$	polynôme (peu utilisé) en $\tan(\theta)$
$\int_a^b f(\theta).d\theta$	$[\sin(\theta)]_a^b$	$[-\cos(\theta)]_a^b$	$-\ln\left(\frac{\cos(b)}{\cos(a)}\right)$

Tchebitchev

La relation de récurrence est $\cos((n+1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta)$ et

donc $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$ En posant $c = \cos(\theta)$:

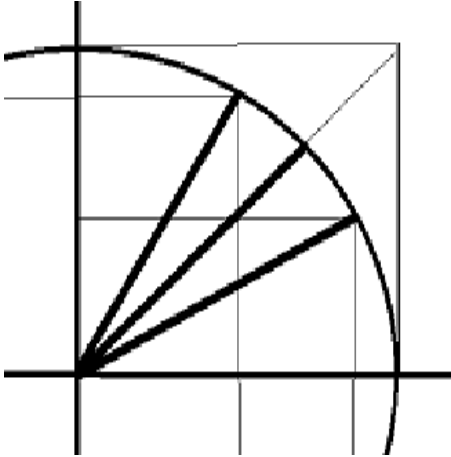
n	0	1	2	3	4	5
$\cos(n.\theta)$	1	c	$2.c^2 - 1$	$4.c^3 - 3.c$	$8.c^4 - 8.c^2 + 1$	$16.c^5 - 20.c^3 + 5.c$

On peut aussi exprimer les sinus, avec $\sin(n.\theta) = \sin(\theta).S_n(\cos(\theta))$ sachant en plus $S_n = \frac{T'_n}{n}$. On a ainsi

n	0	1	2	3	4	5
$\sin(n.\theta)$	0	s	$2.s.c$	$s.(4.c^2 - 1)$	$s.(8.c^3 - 2.c)$	inutile

Les polynômes de Tchebitchev de seconde espèce (ceux relatifs aux sinus) ne servent pas aux concours.

Valeurs classiques



θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(\theta)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Pour d'autres valeurs classiques, on ajoute quelques signes moins.

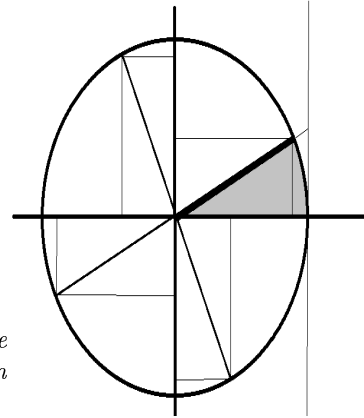
On pourra calculer aussi $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, mais c'est inutile pour les concours.

Complément/supplément

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$-\theta$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$
$\pi - \theta$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$
$\theta + \pi$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\theta + 2.\pi$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\theta + \frac{\pi}{2}$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-1/\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$1/\tan(\alpha)$

On n'apprend pas par coeur ces formules. On les visualise sur le cercle trigonométrique. On se souvient par exemple qu'avec $\pi/2 - \theta$, on échange sinus et cosinus.



Géométrie du triangle

Dans le triangle rectangle, on a bien sûr :

$\sinus = \frac{\text{oppose}}{\text{hypotenuse}}$	$\cosinus = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$	$\text{tangente} = \frac{\text{oppose}}{\text{adjacent}}$
--	--	---

et on retrouve l'angle α en différents endroits. Le centre du cercle circonscrit est bien sûr le milieu de l'hypothénuse.

Dans le triangle quelconque, on a la formule d'Euclide/Héron/Al Kashi/Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos(\alpha)$$

$$\text{On a aussi } \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{1}{2.R}$$

$$\text{L'aire se calcule naturellement par } \frac{2.a.b}{\sin(\gamma)} = \frac{2.b.c}{\sin(\alpha)} = \frac{2.c.a}{\sin(\beta)}$$

$$\text{mais aussi } \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}}{2}.$$

