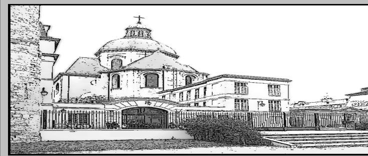
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 28 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

IS22

♡ 0 ♡ Montrez que si f est contractante de rapport k et g contractante de rapport k' alors $g \circ f$ est contractant. 2 pt.

♡ 1 ♡ Résolvez $sh(x) = 5$ d'inconnue réelle x ($Argsh$ n'est pas au programme officiel). 2 pt.

♡ 2 ♡ Rappelez la première inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ (sans preuve) et déduisez la seconde *(qui commence par $|a| = |a - b + b|$...)*. 2 pt.

♡ 3 ♡ En admettant que toute suite réelle bornée admet au moins une sous-suite convergente, montrez que toute suite complexe bornée admet au moins une sous-suite convergente. 2 pt.

♡ 4 ♡ Appliquez l'algorithme d'Euclide à 8610 et 1043 *(pas la remontée de Bézout)*. 2 pt.

♢ 0 ♢ Complétez la division euclidienne :
$$\begin{array}{rrrrr|rrrr} X^4 & -X^3 & -14.X^2 & -22.X & -12 & X^3 & +4.X^2 & +5.X & +2 \\ -(X^4 & +4.X^3 & +\dots & +\dots) & & - & - & - & - \\ & -5.X^3 & \dots & \dots & -12 & X & \dots & & \\ & -(\dots & \dots & \dots & \dots) & & & & \\ & & \dots & +X & \dots & & & & \end{array}$$
et poursuivez l'algorithme d'Euclide jusqu'à avoir le p.g.c.d. de $X^4 - X^3 - 14.X^2 - 22.X - 12$ et $X^3 + 4.X^2 + 5.X + 2$. 3 pt.

♢ 1 ♢ Calculez $\displaystyle\int_0^2 \frac{5.dx}{\sqrt{x+1} + x - 5}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{2.dx}{\sqrt{x^2+1} + x}$ *(changement de variable radical puis éléments simples, conjugaison, changement de variable hyperbolique)*. 9 pt.

I∼0) *L'application f est définie par $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant 1/2$ et f est périodique de période 1.*

Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Représentez graphiquement f sur $[-2,\ 2]$ et justifiez que f est continue en tout point. Calculez $\displaystyle\int_0^{1.7} f(t).dt$. 4 pt.

I∼1) Montrez pour a et b dans $[-1/2,\ 1/2]$: $|f(b) - f(a)| \leqslant |b - a|$. 1 pt.

Déduisez pour tout couple $(x,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$: $|f(y) - f(x)| \leqslant |y - x|$ *(on pourra écrire $x = \left[x + \dfrac{1}{2}\right] + a$ et $y = \left[y + \dfrac{1}{2}\right] + b$ et vérifier $|a| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et justifier $|x - y| \geqslant |a - b|$)*. 2 pt.

II∼0) *On se donne p (entier naturel) et on prend x dans $[-2^{p-1},\ 2^{p-1}]$.* Montrez : 3 pt.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n \geqslant p) \Rightarrow \left(0 \leqslant 2^n.f(x.2^{-n}) \leqslant 2^n.\left(\frac{x}{2^n}\right)^2 \leqslant 2^{2.p-2-n}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n < p) \Rightarrow \left(0 \leqslant 2^n.f(x.2^{-n}) \leqslant 2^{n-2}\right)$$

Pour tout N de $\mathbb{N}$, on pose $F_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} 2^n.f(x.2^{-n})$.

II∼1) Montrez que $(F_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. 1 pt.

II∼2) Montrez : $F_N(x) \leqslant F_p(x) + 2^{2.p}.\displaystyle\sum_{n=p+1}^{N} 2^{-n-2} + \sum_{k=p+1}^{N} 2^{-k-2}$. 2 pt.

II∼3) Déduisez que $F_N(x)$ converge quand N tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $F(x)$. 2 pt.

Comme chaque x de $\mathbb{R}$ peut être mis dans un intervalle du type $[-2^{p-1},\ 2^{p-1}]$ (avec $p = [\ln(x)/\ln(2)] + 2$), on déduit donc que $F(x)$ existe pour tout x (et peut s'écrire $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(x.2^{-n})$.

III∼0) Comparez $F(x)$ et $F(-x)$. 1 pt.
III∼1) Montrez pour tout x de $\mathbb{R}$: $F(2.x) = 2.F(x)$. 2 pt.
III∼2) *On se donne x dans* $[0,\ 1]$. Montrez : $F(x+1) - F(x) = 1$ (on séparera trois cas pour $2^n.\big(f(2^{-n} + 2^{-n}.x) - f(2^{-n}.x)\big)$: $n \leqslant 0$, $n = 1$ et $n \geqslant 2$). 3 pt.

III∼3) Déduisez $F(1) = 1$. Pouvez vous en déduire $F(2) = 2$? Montrez : $\forall n \in \mathbb{Z},\ F\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big) = \dfrac{1}{2^n}$. Justifiez $F\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = \dfrac{3}{4}$. 4 pt.

III∼4) Déduisez pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout p de $[0,\ 2^n] \cap \mathbb{N}$: $F\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = \dfrac{p}{2^n}$. 2 pt.

IV∼0) *On se donne x et y dans* $[0,\ 1]$ *et ε strictement positif.* Montrez qu'il existe au moins un entier naturel p vérifiant $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k-2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. 1 pt.

IV∼1) Déduisez alors $|F(y) - F(x)| \leqslant |F_p(y) - F_p(x)| + \dfrac{2.\varepsilon}{3}$. 3 pt.

IV∼2) Montrez $\forall (a,\ b) \in [0,\ 1]^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |2^n.f(a.2^{-n}) - 2^n.f(b.2^{-n})| \leqslant |b-a|$. 1 pt.

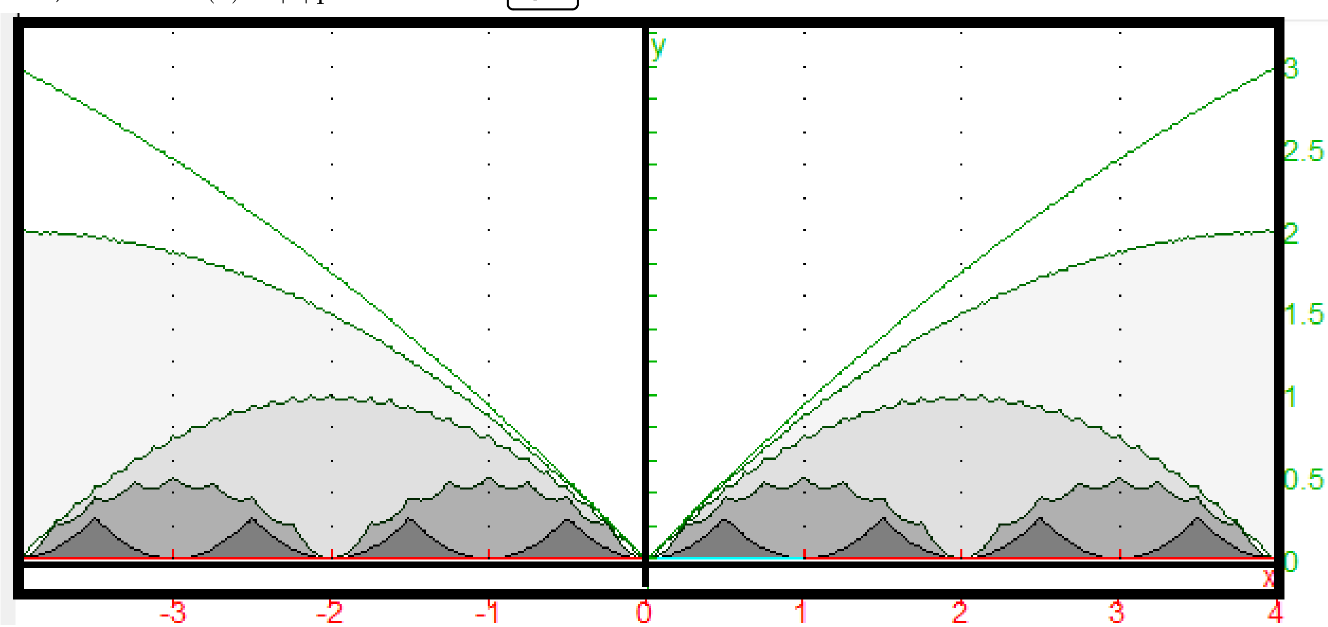
IV∼3) Déduisez $|y - x| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{6.p+3} \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leqslant \varepsilon$. 2 pt.

IV∼4) Déduisez : F est continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. 1 pt.

V∼0) Soit x un réel de $[0,\ 1]$, montrez que la suite $\left(\dfrac{[2^n.x]}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et vérifie $F\Big(\dfrac{[2^n.x]}{2^n}\Big) = \dfrac{[2^n.x]}{2^n}$ pour tout n. 2 pt.

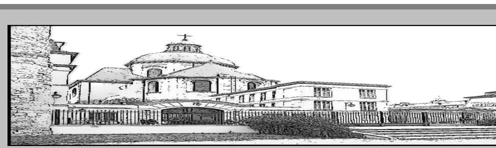
V∼1) Déduisez $F(x) = x$. 1 pt.

V∼2) Déduisez $F(x) = |x|$ pour tout x réel. 3 pt.



Source : Oral de Polytechnique, avec mention « Mais où vont ils chercher tout ça ? ».

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 28 mars
M.P.S.I.2



2024 2025
IS22
CORRECTION

IS22 Questions de cours.

On suppose f et g contractantes et on traduit en prenant des notations qui préparent le terrain pour la démonstration

$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$$
$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ |g(a) - g(b)| \leqslant k'.|a - b|$$

On se donne alors x et y et on a

$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leqslant k'.|f(x) - f(y)| \leqslant k'.k.|x - y|$$

et le nouveau rapport $k'.k$ est bien plus petit que 1.

Pour résoudre $sh(x) = 5$ on résout $e^x - e^{-x} = 10$ et on ajoute l'information $e^x.e^{-x} = 1$.
Les deux réels (de signes opposés) e^x et $-e^{-x}$ ont pour somme 10 et pour produit 1. Ce sont les deux racines de l'équation $t^2 - 10.t - 1 = 0$.
On trouve deux racines : $5 + \sqrt{26}$ et $5 - \sqrt{26}$. e^x est la racine positive.
Il ne reste qu'à passer au logarithme : $x = \ln(5 + \sqrt{26})$.

On peut aussi proposer et vérifier

$$sh(\ln(5 + \sqrt{26})) = \frac{e^{\ln(5+\sqrt{26})} - e^{-\ln(5+\sqrt{26})}}{2} = \frac{5 + \sqrt{26} - \frac{1}{5+\sqrt{26}}}{2} = \ldots = 5$$

Comme le sinus hyperbolique est croissant, il n'y a que cette solution.

On sait $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
On se donne a et b dans $\mathbb{C}$ et on applique le résultat précédent

$$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

$$|b| = |b - a + a| \leqslant |b - a| + |a|$$

En faisant passer de l'autre côté on a

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \ et\ |a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Or, le réel $\big||a| - |b|\big|$ est un des deux réels $|a| - |b|$ ou $|b| - |a|$. Que ce soit l'un ou l'autre, on a donc

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$$

On se donne une suite complexe (z_n) qu'on écrit $\forall n,\ z_n = x_n + i.y_n$ avec (x_n) et (y_n) suites réelles.
On suppose (z_n) bornée (par K). Par majoration, on a

$$\forall n,\ |x_n| \leqslant \sqrt{(x_n)^2 + (y)^2} = |z_n| \leqslant K$$

De la suite réelle bornée (x_n) on extrait une sous-suite borne $(x_{\varphi(n)})$ qui converge (vers un réel α).

La suite extraite $(y_{\varphi(n)})$ est aussi bornée par K (même modèle de majoration $|\Im m(z)| \leqslant |z|$). On en extrait une sous-suite $(y_{\varphi(\phi(n))})$ qui converge (vers un réel β).
La sous-sous-suite $(x_{\varphi(\phi(n))})$ continue de converger vers α et par combinaison, la suite $(z_{\varphi(\phi(n))})$ converge vers $\alpha + i.\beta$.

IS22 Euclide et ses premières divisions.

$$\begin{array}{ccccccccc}
8610 & = & 8 & \times & 1043 & + & 266 \\
 & & \swarrow & & & \swarrow & \\
1043 & = & 3 & \times & 266 & + & 245 \\
 & & \swarrow & & & \swarrow & \\
266 & = & 1 & \times & 245 & + & 21 \\
 & & \swarrow & & & \swarrow & \\
245 & = & 11 & \times & 21 & + & 14 \\
 & & \swarrow & & & \swarrow & \\
21 & = & 1 & \times & 14 & + & 7 \\
 & & \swarrow & & & \swarrow & \\
14 & = & 2 & \times & 7 & + & 0
\end{array}$$

Les divisions euclidiennes ne sont pas trop monstrueuses.

Le dernier reste non nul est 7.
C'est lui le p.g.c.d. et on vérifie que les nombres donnés (et même les nombres intermédiaires) sont des multiples de 7 :

$$8610 = 7 \times 1230 \textit{ et } 1043 = 7 \times 149$$

Passons aux polynômes avec une brave division

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
X^4 & -X^3 & -14.X^2 & -22.X & -12 & & X^3 & +4.X^2 & +5.X & +2 \\
-(X^4 & +4.X^3 & +5.X^2 & +2.X) & & & - & - & - & - \\
 & -5.X^3 & -19.X^2 & -24.X & -12 & & X & -5 & & \\
 & -(-5.X^2 & -20.X^2 & -25.X & -10) & & & & & \\
 & & X^2 & +X & -2 & & & & &
\end{array}$$

Et appliquons l'algorithme d'Euclide en passant le diviseur $X^3 + 4.X^2 + 5.X + 2$ dans le rôle du dividende et le reste $8.X^2 + 16.X$

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
X^3 & +4.X^2 & +5.X & +2 & & X^2 & +X & -2 \\
-(X^3 & +X^2 & -2.X) & & & - & - & - \\
 & 3.X^2 & +7.X & +2 & & X & +3 & \\
 & -(3.X^2 & +3.X & -6) & & & & \\
 & & 4.X & +8 & & & &
\end{array}$$

Encore une division (la dernière ?)

$$\begin{array}{cccc|ccc}
X^2 & +X & -2 & & 4.X & +8 & \\
-(X^2 & +2.X) & & & - & - & - \\
 & -X & -2 & & X/4 & -1/4 & \\
 & -(-X & -2) & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Le reste est ici nul (la division tombe juste).
Le dernier reste non nul est $4.X + 8$. C'est lui le p.g.c.d. cherché.

Et on peut même diviser et dire que le dernier reste non nul est $X + 2$ car les constantes numériques n'ont pas d'importance.

On note que les deux polynômes initiaux sont bien des multiples de $X + 2$:

$$(X^4 - 2.X^3 - 11.X^2 - 12.X - 12) = (X + 2).(X - 4.X^2 - .X + 6)$$

$$X^3 + 4.X^2 + 5.X + 2) = (X + 2).(X^2 + 2.X + 1)$$

C'est ce que le non matheux écrira $\dfrac{X^4 - 2.X^3 - 11.X^2 - 12.X - 12}{X + 2} = X - 4.X^2 - .X + 6$ *et* $\dfrac{X^3 + 4.X^2 + 5.X + 2}{X + 2} = X^2 + 2.X + 1$.
C'est totalement correct, mais ça nous fait quitter un univers à trois opérations ($+$, $-$ et $\times$) pour en ajouter une nouvelle qui ne set à rien).

IS22 Intégrales.

Chaque intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{5.dx}{\sqrt{x+1} + x - 5}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} + x}$ existe par continuité.
Pour la première, on doit quand même vérifier que $\sqrt{x+1} + x - 5$ ne s'annule pas quand x décrit $[0,\ 2]$.
Mais l'équation $\sqrt{x+1} + x - 5 = 0$ conduit à $\sqrt{x+1} = 5 - x$ puis (condition seulement nécessaire) $x + 1 =$

$(5-x)^2$. Cette équation du second degré n'a pour racine que 3 et 8. Donc aucun point de $[0,\ 2]$.[1].

Pour le première, posons $u=\sqrt{x+1}$. On traduit $x=u^2-1$ et $dx=2.u.du$. On change la fonction, les bornes et l'élément différentiel

$$\int_{x=0}^{x=2}\frac{5.dx}{\sqrt{x+1}+x-5}=\int_{u=1}^{u=\sqrt{3}}\frac{5.2.u.du}{u+(u^2-1)-5}=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{10.u.du}{u^2+u-6}$$

On met sous forme canonique le dénominateur jamais nul sur notre intervalle et on décompose simplement (haussement des pôles)

$$\frac{2.u}{u^2+u-6}=\frac{10.u}{(u-2).(u+3)}=\frac{4}{u-2}+\frac{6}{u+3}$$

$$\int_{x=0}^{x=2}\frac{10.dx}{\sqrt{x+1}+x-5}=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{4}{u-2}.du+\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{6}{u+3}.du$$

Le crétin dira qu'il y a un problème avec $\ln(\sqrt{3}-2)$ *et* $\ln(1-2)$.

L'élève qui se souvient du cours dira

$$\int_{x=0}^{x=2}\frac{10.dx}{\sqrt{x+1}+x-5}=4.\ln\Big(\frac{\sqrt{3}-2}{1-2}\Big)+6.\ln\Big(\frac{\sqrt{3}+3}{1+3}\Big)$$

On pourra simplifier si on y tient.

La seconde est mine de rien la plus gentille si on pense à conjuguer

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(x+1)-(x+2)}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$$

On va séparer en deux intégrales par linéarité

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\int_0^1\sqrt{x+2}.dx-\int_0^1\sqrt{x+1}.dx=\Big[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}-\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1$$

L'application numérique donne $\dfrac{2+6.\sqrt{3}-8.\sqrt{2}}{6}$ *mais finalement, on s'en fout.*

Pour la dernière, je pose $x=sh(t)$ et donc $t=Argsh(x)$.On a alors $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+sh^2(t)}=\sqrt{ch^2(t)}=ch(t)$. L'intégrale prend une forme plus simple... quoique

$$\int_{x=0}^{x=1}\frac{4.dx}{\sqrt{x^2+1}+x}=\int_{t=0}^{t=\ln(1+\sqrt{2})}\frac{4.ch(t).dt}{ch(t)+sh(t)}=\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}2.\frac{(e^t+e^{-t}).dt}{e^t}$$

On sépare finalement en deux termes rapides à intégrer

$$\int_{x=0}^{x=1}\frac{4.dx}{\sqrt{x^2+1}+x}=2.\int_{t=0}^{t=\ln(1+\sqrt{2})}dt+\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}2.e^{-2.t}.dt$$

La première intégrale vaut $2.\ln(1+\sqrt{2})$ et la seconde vaut $\Big[-e^{-2.t}\Big]_{t=0}^{t=\ln(1+\sqrt{2})}$.

Le total donne $2.\sqrt{2}-2+2.\ln(1+\sqrt{2})$. Et là encore, on s'en fout.

IS22 Application périodique f.

Sur $]-1/2,\ 1/2[$, f est continue, en tant que polynôme.

Si on doit le faire à la main, on se donne a et on vérifie la continuité en a.
On se donne ε et on veut passer de $|x-a|\leqslant\eta$ *à* $|x^2-a^2|\leqslant\varepsilon$.
Sachant $|x^2-a^2|=|x-a|\times|x+a|\leqslant|x-a|\times(|x|+|a|)\leqslant|x-a|.\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)$, *on va juste prendre* $\eta=\varepsilon$.

---

1. 3 donne bien $\sqrt{x+1}=5-x$ tandis que 8 donne d'ailleurs $\sqrt{x+1}=x-5$

Mais qu'en est il de la continuité en $-1/2$ et $1/2$?
On regarde en $1/2$ à droite et à gauche (car c'est un point où la formule de la fonction dépend du côté choisi).

$$\lim_{\substack{x\to 1/2\\ x<1/2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1/2\\ x<1/2}} x^2 = \frac{1}{4} = f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

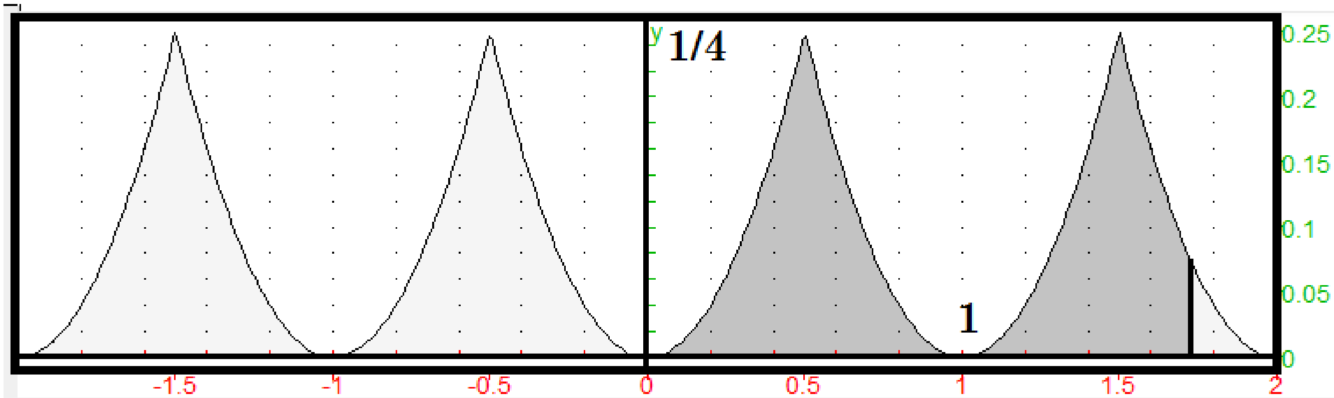
$$\lim_{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}} f(x-1) = \lim_{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}} (x-1)^2 = \frac{1}{4} = f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

De la même façon, f est continue en -1 (ou même par périodicité).
On reporte cette continuité à tout $\mathbb{R}$ par périodicité.

Ce qu'il fallait avant tout : comprendre que le seul problème était en -1 et en 1 et se traitait par périodicité.

La meilleure approche est d'ailleurs le graphe.
On trace sur $[-1/2,\ 1/2]$ et on prolonge par périodicité.

On notera au passage que l'énoncé est ambigu. Si on avait dit f est périodique de période 1 et $f(x) = \sin(x)$ pour x dans $|x| \leqslant 1/2$, on aurait eu $f(1/2) = \sin(1/2)$, $f(-1/2) = \sin(-1/2)$ avec la périodicité demandant aussi $f(-1/2) = f(1/2)$ d'où contradiction.



Pour le calcul d'intégrale, c'est une vision géométrique qui nous sert (et la relation de ce bon vieux et candide Michel Chasles)

$$\int_0^{1.7} f(x).dx = \int_0^{1/2} f(x).dx + \int_{1/2}^{3/2} f(x).dx + \int_{3/2}^{1.7} f(x).dx = \int_0^{1/2} f(x).dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(x).dx + \int_{-1/2}^{-0.3} f(x).dx$$

$$\int_0^{1.7} f(x).dx = \int_0^{1/2} x^2.dx + \int_{-1/2}^{1/2} x^2.dx + \int_{-1/2}^{-0.3} x^2.dx$$

On voit d'ailleurs trois fois le terme $\Big[\frac{x^3}{2}\Big]_0^{1/2}$ et un brave $\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1/2}^{-0.3}$.L'application numérique donne $\frac{373}{3000}$ (et on s'en fout).

Pour le caractère lipschitzien, on se donne donc a et b entre $-1/2$ et $1/2$ et on recopie un calcul déjà rédigé plus haut

$$|b^2 - a^2| = |b-a| \times |b+a| \leqslant |b-a| \times (|b| + |a|) \leqslant |b-a|.\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = |b-a|$$

Mais pour x et y quelconques dans $\mathbb{R}$?
L'énoncé propose d'écrire $x = p + a$ avec $p = \Big[x + \frac{1}{2}\Big]$ (partie entière translatée) et $a = x - p$ (partie décimale décalée aussi).
On fait de même pour y : $y = \Big[y + \frac{1}{2}\Big] + \Big(y - \Big[y + \frac{1}{2}\Big]\Big)$.
p est bien entier, et surtout, on encadre : $\Big(x + \frac{1}{2}\Big) - 1 < \Big[x + \frac{1}{2}\Big] \leqslant x + \frac{1}{2}$ et donc $-x + \frac{1}{2} > -\Big[x + \frac{1}{2}\Big] \geqslant -x - \frac{1}{2}$.
On a donc bien

$$x - x + \frac{1}{2} > x - \Big[x + \frac{1}{2}\Big] \geqslant x - x - \frac{1}{2}$$

Le réel a est bien entre $-1/2$ et $1/2$. Il en va de même pour b.

Maintenant, par périodicité de période 1 (puis tout entier relatif)

$$|f(x) - f(y)| = |f(p+a) - f(q+b)| = f(b) - f(a)|$$

Mais par caractère lipschitzien sur $[-1/2,\ 1/2]$

$$|f(x) - f(y)| = |f(b) - f(a)| \leqslant |b-a| = |(y-q) - (x-p)| = |(y-x) + (p-q)|$$

Malheureusement, la majoration $|(y-x)+(p-q)| \leqslant |y-x| + |q-p|$ ne permet pas de conclure à moins que de prétendre faire quelquechose de

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |(y-x)+(p-q)| \leqslant |y-x| + |q-p| \geqslant |y-x|$$

avec des inégalités dans les deux sens.

Mais il faut montrer que $|b-a|$ est plus petit que $|x-y|$.
Et ce n'est pas forcément le cas (pensez à x et y de part et d'autre de $\dfrac{1}{2}$.
En fait, on va distinguer des cas/.

•$p = q$ (x et y sont dans le même intervalle de longueur 1) :
on a alors $|a-b| = |x-y|$ et c'est gagné.

• $|p-q| \geqslant 2$: x et y sont dans des intervalles « loin l'un de l'autre » :
on a $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant |x-y|$ car $|x-y|$ vaut au moins 1.

• $|p-q| = 1$: x et y sont de art et d'autre d'un demi entier, comme justement $x = 0,7$ et $y = 0,4$:
on transite pa ce demi entier (on va dire qu'ici c'est $p + \dfrac{1}{2}$ par symétrie des rôles) :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(p+0,5) + f(p-0,5) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(p+0,5)| + |f(p-0,5) - f(y)|$$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - (p+0,5)| + |(p-0,5) - y| = x - (p+0,5) + (p-0,5) - y = x - y = |x-y|$$

Par disjonction de cas, on a toujours $|Jf(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$.

On aura une démonstration possible avec la fonction « distance à l'entier le plus proche » dont on montrera par jeu sur les bornes inférieures qu'elle est lipschitziene et bornée, et il ne restea plus qu'à l'élever au carré.

IS22 Majoration de $2^n.f(x.2^{-n})$.

2

p est fixé, pourquoi pas. On a ensuite x entre -2^{p-1} et 2^{p-1} et n plus grand que p.
On calcule $\left|\dfrac{x}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{2^{p-1}}{2^n} = \dfrac{2^{p-n}}{2}$. Mais comme n est plus grand que p, le numérateur est plus petit que 1.
Le réel $\dfrac{x}{2^n}$ est entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, son image se calcule par formule directe

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left(\frac{x}{2^n}\right)^2 = \frac{x^2}{2^{2.n}} \leqslant \frac{(2^{p-1})^2}{2^{2.n}} = 2^{2.p-2-2.n}$$

On multiplie par 2^n (positif)

$$0 \leqslant 2^n.f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant 2^n.2^{2.p-2-2.n} = 2^{2.p-2-n}$$

(la minoration par 0 est toujours acquise, puisque f est positive).

Prenons à présent n plus petit que p. Le réel $\dfrac{x}{2^n}$ est peut être hors de $[-1/2,\ 1/2]$, il devient difficile de calculer explicitement, même avec la périodicité.
Mais on a montré que f était majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur tout $\mathbb{R}$. On a donc $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \leqslant \dfrac{1}{4}$ puis

IS22 Existence de $F(x)$.

x est fixé, et on regarde $\displaystyle\sum_{-N}^{N} 2^n.f(x.2^{-n})$ comme « série » en la variable N.

Je mets des guillemets à « série », car N est présent aux deux bouts. Mais de là à dire « série-série ».

On se fixe N et on calcule la différence (faite donc de deux termes)

$$\sum_{-(N+1)}^{N+1} 2^n.f(x.2^{-n}) - \sum_{-N}^{N} 2^n.f(x.2^{-n}) = 2^{N+1}.f(x.2^{-N+1}) + 2^{-N-1}.f(x.2^{N+1})$$

Par positivité de F, cette différence est positive. $(F_N(x))$ est croissante (x fixé, N variable).

Sommons pour n allant de $-N$ à N et comparons à une somme de $-p$ à p.
Je pense tout à coup à un cas : $N \leqslant p$. Il faut quand même le traiter, lui.
Mais la somme de $-N$ à N n'est qu'une partie de la somme de $-p$ à p, et les termes en plus sont positifs

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} 2^n.f(x.2^{-n}) \leqslant \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) \leqslant \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) + positifs$$

En effet, les termes de la formule demandée sont positifs. La majoration est validée.

Ah, au fait, qui a perdu son temps à essayer de faire une récurrence juste parce qu'il y avait du N dans $\mathbb{N}$ *?*

Passons au cas « général » où N est plus grand que p et découpons par relation de Chasles

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} 2^n.f(x.2^{-n}) = \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{n=p+1}^{N} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{n=-N}^{-p-1} 2^n.f(x.2^{-n})$$

Or, à la question précédente, on a majoré un par un les $2^n.f(x.2^{-n})$ pour n plus grand que p.

$$F_N(x) \leqslant \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{n=p+1}^{N} 2^{2.p-2-n} + \sum_{n=-N}^{-p-1} 2^n.f(x.2^{-n})$$

Dans le dernier morceau, les indices sont plus petits que $-p$ donc plus petits que p (puisque p est positif). On peut faire appel à l'autre majoration

$$F_N(x) \leqslant \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{n=p+1}^{N} 2^{2.p-2-n} + \sum_{n=-N}^{-p-1} 2^{n-2}$$

Ce n'est pas très probant, car majorer par 2^{n-2} ça semble beaucoup. On pose donc $k = -n$

$$F_N(x) \leqslant \sum_{n=-p}^{p} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{n=p+1}^{N} 2^{2.p-2-n} + \sum_{k=p+1}^{N} 2^{-k-2}$$

La fausse bonne idée par rapport à l'esprit des concours aurait été de calculer les deux séries $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{N} 2^{2.p-2-n}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{N} 2^{-k-2}$
et de vouloir ensuite obtenir la majoration.
Si il reste un sigma, c'est qu'il a son utilité dans la preuve.

Maintenant, on peut calculer ces deux sommes, car on se dit bien qu'on va prouver que $N \longmapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} 2^n.f(2^{-n}.x)$ est croissante et majorée. On a des séries géométriques, les sommes se calculent (et surtout se majorent)

$$F_N(x) \leqslant F_p(x) + \frac{2^{2.p-2-p-1} - 2^{2.p-2-N-1}}{1-2^{-1}} + \frac{2^{-p-1-2} - 2^{-N-1-2}}{1-2^{-1}}$$

La majorant dépend encore de N, mais majorons le encore (non pas avec un argument bidon de passage à la limite, juste avec le fait qu'il y a un signe moins)

$$F_N(x) \leqslant F_p(x) + \frac{2^{2.p-2-p-1}}{1-2^{-1}} + \frac{2^{-p-1-2}}{1-2^{-1}}$$

Le majorant ne dépend plus de N (certes il dépend de x et de p, mais la variable qui définit la suite/série est N). La suite converge vers son plus petit majorant (lequel consiste à sommer de $-\infty$ à $+\infty$ effectivement).

C'est bon, la fonction F existe sur $[-2^{p-1},\ 2^{p-1}]$.
En fait, elle existe donc partout, puisque la réunion de ces intervalles fait $]-\infty,\ +\infty[$.

IS22 Premières formules sur la fonction F.

On se donne x et on doit comparer deux quantités

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(x.2^{-n}) \text{ et } F(-x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(-x.2^{-n})$$

Or, f est paire, il y a donc égalité des deux sommes.

On se donne encore x et on doit comparer deux quantités

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(x.2^{-n}) \text{ et } F(2.x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(2.x.2^{-n})$$

Si on ne se préoccupe pas des étrangetés des sommes infinies, on effectue un changement d'indice dans la seconde

$$F(2.x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(x.2.2^{-n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^n.f(x.2^{1-n}) = \sum_{k=-\infty-1}^{k=+\infty-1} 2^{k+1}.f(x.2^{-k})$$

Les bornes restent infinies, et le facteur 2 peut sortir.

C'est bien parti pour avoir $F = x \longmapsto |x|$: les deux vérifient $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et $\varphi(2.x) = 2.\varphi(x)$. Mais ce ne sont pas les seules, alors...

Proprement, on travaille à horizon fini avec $F_N(x)$ et $F_N(2.x)$. Le décalage d'indices donne

$$F_N(2.x) = \sum_{n=-N}^{n=+N} 2^n.f(x.2.2^{-n}) = \sum_{k=-N-1}^{k=+N-1} 2^{k+1}.f(x.2^{-k})$$

On a donc $F_N(2.x) = 2.\Big(F_N(x) + 2^{-N-1}.f(x.2^{N+1}) - 2^N.f(x.2^{-N})\Big)$.
Quand N tend vers l'infini, chaque limite existe :

$F_N(2.x) \longrightarrow F(2.x)$	par définition
$F_N(x) \longrightarrow F(x)$	par définition
$2^{-N-1}.f(x.2^{N+1}) \longrightarrow 0$	car $f(x.2^{N+1})$ borné et $2^{-N} \longrightarrow 0$
$2^N.f(x.2^{-N}) \longrightarrow 0$	par encadrement $0 \leqslant 2^n.f(x.2^{-n}) \leqslant 2^{2.p-2-n}$ pour n assez grand

IS22 Relation $F(x+1) - F(x) = 1$ pour x entre 0 et 1.

On se donne x dans $[0,\ 1]$ et on calcule la différence

$$F(x+1) - F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n.\big(f(2^{-n} + 2^{-n}.x) - f(2^{-n}.x)\big)$$

On sépare comme proposé suivant le signe de n. Pour n négatif ou nul, 2^{-n} est entier. Et f est $1-$périodique. On a donc carrément $\sum_{n=-\infty}^{n=0} 2^n.\big(f(2^{-n} + 2^{-n}.x) - f(2^{-n}.x)\big) = 0$.

Il reste le terme $n=1$: $2^n.\big(f(2^{-n}+2^{-n}.x)-f(2^{-n}.x)\big)$ et les termes de 2 à l'infini

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n.\big(f(2^{-n}+2^{-n}.x)-f(2^{-n}.x)\big)$$

Le terme $n=1$ vaut $2.\big(f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})-f(\frac{x}{2})\big)$.
$\frac{x}{2}$ est entre 0 et $\frac{1}{2}$, le calcul est direct : $f\Big(\frac{x}{2}\Big)=\Big(\frac{x}{2}\Big)^2$.
$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ est entre $\frac{1}{2}$ et 1, le calcul repose sur la périodicité : $f\Big(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)=f\Big(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\Big)=\Big(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\Big)^2$.
On simplifie

$$2.\big(f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})-f(\frac{x}{2})\big)=2.\Big(\Big(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{x}{2}\Big)^2\Big)=\frac{1}{2}-x$$

Pour n plus grand que 1, c'est plus simple, $\frac{x}{2^n}$ et $\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2^n}$ sont dans $\Big[0,\ \frac{1}{2}\Big]$:

$$2^n.\big(f(\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2^n})-f(\frac{x}{2^n})\big)=2^n.\Big(\Big(\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2^n}\Big)^2-\Big(\frac{x}{2^n}\Big)^2\Big)=2^n.\Big(\frac{1}{2^{2.n}}-\frac{2.x}{2^{2.n}}\Big)=\frac{2.x+1}{2^n}$$

Il est temps de tout sommer

$\sum_{n=-\infty}^{0} 2^n.\big(f(2^{-n}+2^{-n}.x)-f(2^{-n}.x)\big)$	$2^1.\big(f(2^{-1}+2^{-1}.x)-f(2^{-1}.x)\big)$	$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n.\big(f(2^{-n}+2^{-n}.x)-f(2^{-n}.x)\big)$
0	$\frac{1}{2}-x$	$(2.x+1).\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=(2.x+1).\frac{1}{2}$
Total : 1		

Même si cette question vous a résisté, admettez la et retournez à la suite. C'est la démarche attendue de vous pour un concours.

On calcule $F(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n.f(0)=0$ car tous les termes de la somme sont nuls.

Avec la relation $F(x+1)-F(x)=1$ on déduit $F(1)=1$.

Peut on déduire $F(2)=2$ avec $F(1+1)-F(1)=1$?
Non, car la relation $F(x+1)-F(x)=1$ n'a été établie que sous hypothèse $x\in[0,\ 1]$, ce qui n'est pas le cas ici.

Ne pas réussir à démontrer $\forall x\in[0,\ 1],\ F(x+1)-F(x)=1$, c'est dommage. Ça veut dire qu'il vous manque de la pratique. Écrire $F(x+1)-F(x)=1$ pour un x hors de $[0,\ 1]$, c'est grave. Cela prouve que vous manquez de cerveau. Cela signifie que vous lisez des formules mais vous en oubliez les hypothèses. Vous pensez qu'un ingénieur qui fait ça est

☐	*con*	☐	*dangereux*
☐	*incapable*	☐	*à licencier*

Cochez la/les cases valides (indication : il y en a quatre).

Mais la relation à utiliser est alors $F(2.x)=2.F(x)$, et on a bien $F(2)=2$.

En revanche, on peut écrire $F\Big(2.\frac{1}{2}\Big)=2.F\Big(\frac{1}{2}\Big)$ ce qui permet d'obtenir $F\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}$.

La récurrence pour $F\Big(\frac{1}{2^n}\Big)=\frac{1}{2^n}$ est bien amorcée. Sauf qu'il y a deux récurrences. Car on doit travailler sur $\mathbb{Z}$.

Côté n négatif, on pose $n=-p$ et on veut montrer $F(2^p)=2^p$ pour tout p de $\mathbb{N}$. C'est initialisé.
Et l'hérédité utilise $F(2.2^p)=2.F(2^p)$.

Côté n positif. On a initialisé.
Supposons la formule vraie pour un n naturel donné, et écrivons à la fois $F\Big(2.\frac{1}{2^{n+1}}\Big)=2.F\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)$ et $F\Big(2.\frac{1}{2^{n+1}}\Big)=F\Big(\frac{1}{2^n}\Big)=\frac{1}{2^n}$. On obtient bien $F\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)=\frac{1}{2^{n+1}}$ par division par 2.

Comme $\dfrac{1}{2}$ est dans $[0,\ 1]$, on peut appliquer le résultat $F(x+1) - F(x) = 1$

$$F\Big(\frac{3}{2}\Big) = 1 + F\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Avec $2.F\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = F\Big(2.\dfrac{3}{4}\Big) = F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \dfrac{3}{2}$ on trouve $F\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = \dfrac{3}{4}$.

A présent, on doit calculer $F\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big)$ avec n entier naturel et p entier entre 0 et 2^n (ces réels $\dfrac{p}{2^n}$ sont des cas particuliers des réels de $[0,\ 1]$, des nombres dyadiques, c'est à dire des nombres dont l'écriture de base 2 n'a qu'un nombre fini de chiffres).

Proprement, on va établir par récurrence sur n la propriété suivante

$$(P_n)\ :\ \forall p \in [0,\ 2^n] \cap \mathbb{N},\ F\Big(\frac{p}{2^n}\Big) = \frac{p}{2^n}$$

On tient

P_0	$F\Big(\frac{0}{1}\Big) = \frac{0}{1}$				$F\Big(\frac{1}{1}\Big) = \frac{1}{1}$
P_1	$F\Big(\frac{0}{2}\Big) = \frac{0}{2}$		$F\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}$		$F\Big(\frac{2}{2}\Big) = \frac{2}{2}$
P_2	$F\Big(\frac{0}{4}\Big) = \frac{0}{4}$	$F\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{4}$	$F\Big(\frac{2}{4}\Big) = \frac{2}{4}$	$F\Big(\frac{3}{4}\Big) = \frac{3}{4}$	$F\Big(\frac{4}{4}\Big) = \frac{4}{4}$

On se donne un entier n et on suppose qu'on a la relation $F\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = \dfrac{p}{2^n}$ pour tous les entiers p de 0 à 2^n.
On se donne alors un entier q de 0 à 2^{n+1} et on calcule $F\Big(\dfrac{q}{2^{n+1}}\Big)$.
Si q est pair, on n'a rien à regarder. Il suffit d'écrire $q = 2.p$ (avec p entier entre 0 et 2^n) et on a bien

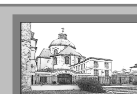
$$F\Big(\frac{q}{2^{n+1}}\Big) = F\Big(\frac{2.p}{2^{n+1}}\Big) = F\Big(\frac{p}{2^n}\Big) = \frac{p}{2^n} = \frac{q}{2^{n+1}}$$

Mais si q est impair, on l'écrit $2.p + 1$ avec p justement plus petit que 2^n :

$$F\Big(\frac{q}{2^{n+1}}\Big) = F\Big(\frac{2.p+1}{2^{n+1}}\Big) = F\Big(\frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\Big) = \frac{p}{2^n} = \frac{q}{2^{n+1}}$$

On distingue alors deux cas : $p \leqslant 2^{n-1}$ et $2^{n-1} < p \leqslant 2^n$.
A terminer.

IS22 Continuité de F.



Pour p donné et q fixé plus grand que p, on calcule

$$\sum_{n=p+1}^{q} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{q} 2^{-k-2} = \frac{2^{-p-1} - 2^{-q-1}}{1 - 2^{-1}} + \frac{2^{-p-3} - 2^{-q-3}}{1 - 2^{-1}}$$

On fait tendre q vers l'infini pour avoir des séries géométriques

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{q} 2^{-k-2} = 2^{-p} + 2^{-p-2} = 2^{-p}.\frac{5}{4}$$

On nous demande de rendre ceci plus petit que $\varepsilon/3$, on passe au logarithme (croissant) et l'équation devient

$$-p.\ln(2) + \ln(5/4) \leqslant \ln(\varepsilon/3)$$

et après division par $-\ln(2)$, on demande $p = \left[\dfrac{\ln(5/4) - \ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\right] + 1$ si on tient à avoir un entier.

Pour comparer $|F(y) - F(x)|$ et $|F_p(y) - F_p(x)| + \dfrac{2.\varepsilon}{3}$, on va déjà travailler sans valeurs absolues et extraire $F_p(x)$ de $F(x)$

$$F(x) = F_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^n.f(x.2^{-n}) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k}.f(x.2^k)$$

(on a ré-indexé la somme $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=-p-1}$ en posant $k = -n$ par habitude des indices positifs).

Comme x est dans $[0,\ 1]$, $2^{-n}.x$ y est aussi, et on peut remplacer

$$F(x) = F_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^n.(x.2^{-n})^2 + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k}.f(x.2^k) = F_p(x) + x^2.\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k}.f(x.2^k)$$

Les termes sont positifs et on majore là encore les $f(x.2^k)$ par $\dfrac{1}{4}$

$$F(x) \leqslant F_p(x) + x^2.\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k-2}$$

On majore aussi x^2 par 1, puis on tient compte du choix de p

$$F(x) \leqslant F_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{-n} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k-2} \leqslant F_p(x) + \frac{\varepsilon}{3}$$

On ajoute de l'autre côté une minoration car tous les termes de $p+1$ à l'infini sont positifs, de même que ceux avant $-p-1$

$$F_p(x) \leqslant F(x) \leqslant F_p(x) + \frac{\varepsilon}{3}$$

On écrit la même pour y (également entre 0 et 1) $F_p(x) \leqslant F(x) \leqslant F_p(x) + \dfrac{\varepsilon}{3}$ puis on passe à l'opposé car on veut soustraire les termes.

Rappel : quand on a $\begin{array}{ccccc} \alpha & \leqslant & a & \leqslant & A \\ \beta & \leqslant & b & \leqslant & B \end{array}$ *on ne soustrait pas.*

Mais on écrit $\alpha \leqslant a \leqslant A$ *et* $-\beta \geqslant -b \geqslant -B$. *Et même* $\begin{array}{ccccc} \alpha & \leqslant & a & \leqslant & A \\ -B & \leqslant & -b & \leqslant & -\beta \end{array}$ *et enfin on peut encadrer* $a - b$.

Avec $\begin{array}{ccccc} F_p(x) & \leqslant & F(x) & \leqslant & F_p(x) + \frac{\varepsilon}{3} \\ -F_p(y) + \frac{\varepsilon}{3} & \leqslant & -F(y) & \leqslant & -F_p(x) \end{array}$ on obtient

$$F_p(x) - F_p(y) - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant F(x) - F(y) \leqslant F_p(x) - F_p(y) + \frac{\varepsilon}{3}$$

On reconnaît un encadrement du type $-U \leqslant v \leqslant U$ qui donne

$$|F(x) - F(y)| \leqslant |F_p(x) - F_p(y) + \frac{\varepsilon}{3}| \leqslant |F_p(x) - F_p(y)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Comme on a montré $|f(b) - f(a)| \leqslant |b - a|$ pour tout couple $(a,\ b)$ on a en particulier

$$|f(x.2^{-n}) - f(y.2^{-n})| \leqslant |x.2^{-n} - y.2^{-n}|$$

puis $2^n.|f(x.2^{-n}) - f(y.2^{-n})| \leqslant 2^n.|x.2^{-n} - y.2^{-n}| = |x - y|$.

On suppose $|y - x| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{6.p+3}$ et on applique l'inégalité précédente à tous les n de $-p$ à p (il y en a $2.p+1$)

$$|F_p(y) - F_p(x)| = \Big|\sum_{n=-p}^{n} 2^n.\big(f(2^{-n}.x) - f(2^{-n}.y)\big)\Big| \leqslant \sum_{n=-p}^{n} \Big|2^n.\big(f(2^{-n}.x) - f(2^{-n}.y)\big)\Big|$$

$$|F_p(y) - F_p(x)| \leqslant \sum_{n=-p}^{n} \frac{\varepsilon}{6.p+3} = (2.p+1).\frac{\varepsilon}{6.p+3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

On a finalement prouvé $|y-x| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{6.p+3} \Rightarrow |F(y)-F(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + 2.\dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout couple $(x,\ y)$ de $[0,\ 1]$.

En mettant dans l'ordre :

$$\forall x \in [0,\ 1],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon,\ \forall y \in [0,\ 1],\ |x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |F(y)-F(x)| \leqslant \varepsilon$$

C'est la continuité « en tout point » (et même la continuité uniforme car $\mu_\varepsilon$dépend de ε seulement et pas de x.

IS22 — Final : F est la valeur absolue.

Pour x entre 0 et 1, on reconnaît les approximations par défaut en base 2 de x.
On rappelle $t-1 \leqslant [t] \leqslant t$ pour tout réel t. On en déduit avec le cas particulier $t = x.2^n$ et division par 2^n (positif)

$$\frac{x.2^n - 1}{2^n} \leqslant \frac{[x.2^n]}{2^n} \leqslant x$$

Le théorème d'encadrement permet de dire que la suite au milieu converge, et il donne sa limite : x.

Ensuite, chaque $[x.2^n]$ est un entier naturel plus petit que 2^n (hypothèse $x \leqslant 1$) qu'on peut mettre dans le rôle de p dans $F\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = \dfrac{p}{2^n}$.

Comme F est continue, $F\Big(\dfrac{[2^n.x]}{2^n}\Big)$ converge vers $F(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
Mais comme c'est aussi la suite $\Big(\dfrac{[2^n.x]}{2^n}\Big)$ elle converge aussi vers x.
Par unicité de la limite : $F(x) = x$.

Attention, on n'a cette égalité que pour les réels de $[0,\ 1]$.
Mais avec la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ F(2.x) = 2.F(x)$ on a aussi $F(y) = y$ pour tous les y de $[0,\ 2]$.

On recommence et on a cette fois $F(t) = t$ pour tous les t de $[0,\ 4]$.

Par récurrence sur n, on a $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in [0,\ 2^n],\ F(a) = a$.

Comme chaque réel positif a est dans un de ces intervalles, on a $F(a) = a$.

Ayant $\forall a \in [0,\ +\infty[,\ F(a) = a$ et $\forall a \in [0,\ +\infty[,\ F(-a) = F(a)$, on déduit $\forall a \in [0,\ +\infty[,\ F(-a) = a$ et ceci donne $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = |x|$.

La graphe offert confirme que nos $F_N(x)$ convergent vers $|x|$ quand N tend vers l'infini.

Je ne sais pas dans quelle mesure l'examinateur de Polytehnique guide le candidat avec les questions intermédiaires ici.
La convergence des F_p vers F est directement attendue du candidat.
De même que la continuité de F avec des méthodes plus directes.
L'équation fonctionnelle $F(2.x) = 2.F(x)$ doit être suggérée « donnez moi le lien entre $F(2.x)$ et $F(x)$ ».
On doit demander aussi : et entre $F(x+1)$ et $F(x)$?
Ensuite, le candidat doit tout trier et arriver à $F = x \longmapsto |x|$.