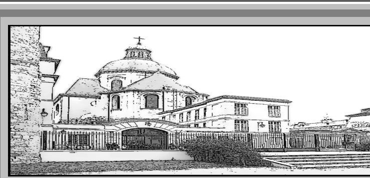
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 19 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

IS21

♡ 0 ♡ Montrez que l'intersection de deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ est un intervalle. 2 pt.

♡ 1 ♡ Soit (I_n) une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ (ouverts, fermés, semi-ouverts, bornes ou non on n'en sait rien), contenant tous 0. Montrez que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$est encore un intervalle de $\mathbb{R}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Quantifiez $a_n \to_{n\to+\infty} \alpha$ et « f est continue en α ». 2 pt. Montrez alors avec ces deux hypothèses $f(a_n) \to_{n\to+\infty} f(\alpha)$. 1 pt.
On suppose maintenant au contraire $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in [\beta-\eta,\ \beta+\eta],\ |f(x)-f(\beta)| > \varepsilon_0$. Montrez qu'il existe une suite (b_n) qui converge vers β et qui vérifie pourtant $|f(b_n)-f(\beta)| > \varepsilon_0$. 2 pt.

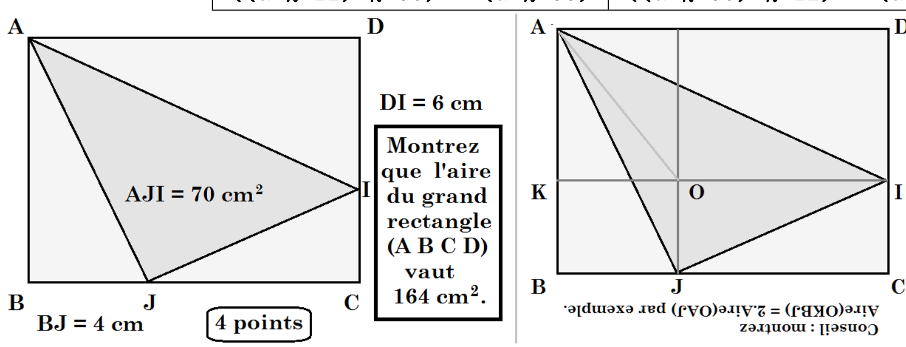
◇ 0 ◇ Montrez que sur chaque intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n.\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+n.\pi\right[$ (noté I_n) pour n dans $\mathbb{N}$) l'équation $\tan(x) = th(x)$ admet une solution et une seule, qu'on va donc noter x_n. 2 pt. Montrez : $x_n \sim_{n\to+\infty} n.\pi$. 1 pt.
On pose alors $y_n = x_n - n.\pi$. Montrez : $\tan(y_n) = \tan(x_n) \to_{n\to+\infty} 1$. 2 pt. Déduisez que la suite (y_n) converge en croissant vers $\dfrac{\pi}{4}$. 2 pt. A-t-on $e^{x_n} \sim_{n\to+\infty} e^{n.\pi}$? 1 pt. On pose alors pour tout n : $z_n = x_n - n.\pi - \dfrac{\pi}{4}$. Montrez : $\tan(z_n) = -e^{-2.x_n}$. 2 pt. Complétez $x_n = a.n + b + \dfrac{c}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\to+\infty}$. 2 pt.

♯ 0 ♯ Pour les nombres écho, Raphaël avait besoin de petits résultats du type « pour tout a entier, `((a % 12) % 60) = (a % 12)` ». Prouvez le. 2 pt.

Et sinon, résolvez

`((a % 12) % 60) = (a % 12)`	`((a % 60) % 12) = (a % 60)`
`((a % 12) % 60) = (a % 60)`	`((a % 60) % 12) = (a % 12)`

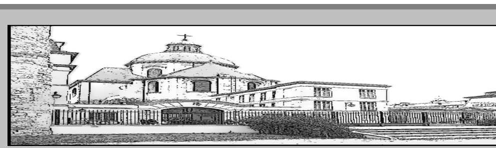
2 pt.



♡ Vrai ou faux : $t \longmapsto ch(t)$ est solution particulière de $y''_t + 3.y'_t + 2.y_t = 3.e^t$. 1 pt.
Vrai ou faux :
$t \longmapsto e^{-t} + 2.t^2 - 6.t + 7$ est solution particulière de $y''_t + 3.y'_t + 2.y_t = 4.t^2$. 1 pt.

♠ 0 ♠ Si (a_n) est une suite réelle, on pose $S_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} k.a_k}{n.(n+1)}$. Montrez que si (a_n) est constante, alors (S_n) l'est aussi. 1 pt. Montrez pour tout n : $S_{n+1} - S_n = 2.\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k.(a_{n+1}-a_k)}{n.(n+1).(n+2)}$. 3 pt. Montrez que si (a_n) est croissante, alors (S_n) l'est aussi. 2 pt. On suppose $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall k \geqslant N_\varepsilon,\ |a_k| \leqslant \varepsilon$. Montrez pour n plus grand que N_ε :
$|S_n| \leqslant \dfrac{A_\varepsilon}{n.(n+1)} + \dfrac{\sum_{k=N_{\varepsilon+1}}^{n} k.\varepsilon}{n.(n+1)} \leqslant \dfrac{A_\varepsilon}{n^2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$avec $A_\varepsilon = |\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} k.u_k|$. 3 pt. A partir de quel rang P_ε est on sûr d'avoir $|S_n| \leqslant \varepsilon$? 1 pt. Déduisez $S_n \longrightarrow_{n\to 0} 0$. 1 pt. Vers quoi converge (S_n) si (a_n) converge vers λ ? 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 19 mars
M.P.S.I.2



2024 2025
IS21
CORRECTION

IS21 Intervalles.

I et J sont deux intervalles.
On veut montrer que $I \cap J$ (éventuellement vide auquel cas c'est vite réglé) est un intervalle.
On prend a et b dans $I \cap J$ et t entre 0 et 1. On doit montrer que tout réel de la forme $(1-t).a + t.b$ est encore dans $I \cap J$.
Mais comme a et b sont dans l'intervalle I, $(1-t).a + t.b$ est encore dans I.
De même, comme a et b sont dans l'intervalle J, $(1-t).a + t.b$ est encore dans J.
Que vous faut il de plus pour dire que $(1-t).a + t.b$ est dans $I \cap J$?

Maintenant, on prend des intervalles ayant tous un point commun : 0.
Leur réunion doit rester un intervalle.

Exemple : $[-1,\ 2[\cup]-2,\ 5[\cup]-\infty,\ 1]$.

On se donne a et b dans cette réunion. Et t entre 0 et 1.
Il faut montrer que $(1-t).a + t.b$ est encore dans cette réunion.

Mais a et b ne sont pas forcément dans le même intervalle c'est ça le problème.
a est dans un intervalle I_p et b est dans un intervalle I_q.
Et on va montrer que $(1-t).a + t.b$ est encore dans un d'entre eux (peut être I_p, peut être I_q ou même encore un autre I_k ?).

Sans perte de généralisé, on va supposer $a \leqslant b$. Et on va raisonner par disjonction de cas.
• a et b sont négatifs. $a \leqslant b \leqslant 0$.
Comme a est dans I_p et 0 aussi (0 est dans tous les intervalles), le réel b vérifiant $a \leqslant b \leqslant 0$ est aussi dans I_p.
Maintenant que I_p est un intervalle (on le redit), le réel $(1-t).a + t.b$ est dans I_p donc dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

a est négatif et b est positif : $a \leqslant 0 \leqslant b$.
a et 0 sont dans I_p.
0 et b sont dans I_q.
Le réel $(1-t).a + t.b$ est alors soit entre a et 0 , soit entre 0 et b (suivant la valeur de t par rapport à $\dfrac{a}{a-b}$).
Si il est entre a et 0 , alors il est dans I_p. Il est donc dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.
Si il est entre 0 et b , alors il est dans I_q. Il est donc dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

• a et b sont positifs. $0 \leqslant a \leqslant b$.
On note que a est entre 0 et b (éléments de I_q). Il est donc I_q.
Comme a et b sont dans I_q, le réel $(1-t).a + t.b$ est dans I_q et donc dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

IS21 Convergene et limites.

On écrit deux hypothèses et une conclusion souhaitée

H	$a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \alpha$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n \geqslant N_{\varepsilon,},\ \lvert a_n-\alpha\rvert \leqslant \varepsilon$
	f continue en α	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ \lvert x-\alpha\rvert\leqslant\eta_\varepsilon \Rightarrow \lvert f(x)-f(\alpha)\rvert\leqslant\varepsilon$
?	$f(a_n)\longrightarrow_{n\to+\infty} f(\alpha)$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists P_\varepsilon,\ \forall n\geqslant P_{\varepsilon,},\ \lvert f(a_n)-f(\alpha)\rvert\leqslant\varepsilon$

Pour ε donné, on pose $P_\varepsilon = N_{(\eta_\varepsilon)}$ et on vérifie pour tout n de $\mathbb{N}$

$$n \geqslant N_{(\eta_\varepsilon)} \Rightarrow |a_n-\alpha| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(a_n)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

(même si enchaîner les implications n'a pas de sens).

On fait maintenant une hypothèse dans laquelle on reconnaît la parfaite négation de la continuité en α

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\eta>0,\ \exists x\in[\beta-\eta,\ \beta+\eta],\ |f(x)-f(\beta)|>\varepsilon_0$$

On ne peut pas jouer sur ε_0 puisqu'il est quantifié en $\exists$. mais on peut jour sur ε puisque lui a un joli $\forall$.
On l'applique à $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ puisqu'on veut construire une suite et qu'on veut la voir tendre vers quelquechose.
On sait alors pour chaque n que pour ce choix $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ il existe au moins un élément x de D_f vérifiant $|x-\beta| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ mais aussi $|f(x_n)-f(\beta)|>\varepsilon_0$.
Puisqu'il en existe, on en reprend un, et on l'appelle b_n.

Comme on peut le faire pour tout n, on construit donc une suite (b_n) d'éléments de D_f.
On a alors pour tout x : $|b_n-\beta| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, ce qui, par théorème des gendarmes donne $b_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \beta$.
Mais en même temps, la relation $|f(b_n)-f(\beta)|>\varepsilon_0$ fait que $(f(b_n))$ ne peut pas converger vers $f(\beta)$.

Même si $(f(b_n)$ convergeait vers quelquechose (vers une limite μ), cette limite vérifierait $|\mu - f(\beta)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

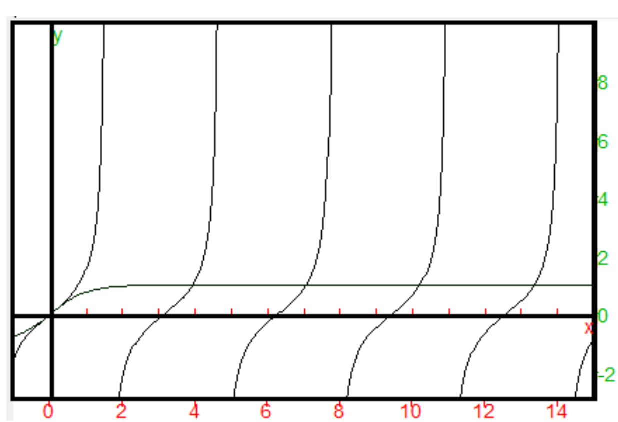
On a donc prouvé deux implications, qui donnent une équivalence ($p \Rightarrow q$ et $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$)

f continue en α	$\Rightarrow$	pour toute suite (a_n) qui converge vers α la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(\alpha)$
f non continue en β	$\Rightarrow$	il existe une suite (b_n) qui converge vers β sans que la suite $(f(b_n)$ converge vers $f(\beta)$

IS21 Suite implicite.

On définit la fonction différence $x \longmapsto \tan(x) - th(x)$ qu'on va noter f.
Elle est continue. Sa dérivée est $x \longmapsto 1+\tan^2(x) - (1-th^2(x))$. Sa dérivée est positive.

Cette application est strictement croissante[premier mot clef]. Et elle est continue[deuxieme mot clef].
En $-\dfrac{\pi}{2}+n.\pi$par valeur supérieure, elle tend vers $-\infty$(à cause de la tangente, car l'autre terme est borné par -1 et 1).
En $\dfrac{\pi}{2}+n.\pi$par valeur inférieure, elle tend vers $+\infty$(à cause de la tangente, car l'autre terme reste borné comme un militant politique).
Par théorème des valeurs intermédiaire sur l'intervalle[troisieme mot clef] I_n l'équation $f(x) = 0$ admet une solution.



Par stricte croissance*rettour au premier mot clef* la solution est unique.

On va donc noter x_n la n^{ieme} solution.

On a $-\dfrac{\pi}{2}+n.\pi < x_n < \dfrac{\pi}{2}+n.\pi$ et après division par $n.\pi$(positif) $-\dfrac{1}{2.n}+1 < \dfrac{x_n}{n.\pi} < \dfrac{1}{2.n}+1$.
Par théorème des gendarmes x_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
C'est la définition de l'équivalent $x_n \sim_{n\to+\infty} n.\pi$.

On calcule donc une différence $y_n = x_n - n.\pi$.
Par périodicité de l'application tangente : $\tan(y_n) = \tan(x_n)$. Par définition de la suite :

$$\tan(y_n) = \tan(x_n) = th(x_n)$$

Mais comme x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini (minoration par $n.\pi - \dfrac{\pi}{2}$), on déduit que $th(x_n)$ tend vers 1.

Avec $\tan(y_n) \longrightarrow 1$ on ne déduit pas directement $y_n \to \dfrac{\pi}{4}$.
En effet, il reste normalement des modulo π si on peut dire.

Rappelons que $\tan\left(\dfrac{5.\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$ *tend vers & alors que* $\dfrac{5.\pi}{4}+\dfrac{1}{n}$ *ne tend pas vers* $\dfrac{\pi}{4}$.
Et que penser même de $\tan\left(\dfrac{(4.n+1).\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

Mais y_n reste entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ par construction.
On est donc en droit de passer à l'arctangente : $y_n = Arctan(th(x_n))$ tend bien vers $Arctan(1)$ c'est à dire $\dfrac{\pi}{4}$.

Certes on a $x_n \sim_{n\to+\infty} n.\pi$. Mais de là à déduire $e^{x_n} \sim_{n\to+\infty} e^{n.\pi}$ il ne faut pas pousser. Revenons à la définition avec le quotient

$$\frac{e^{x_n}}{e^{n.\pi}} = e^{x_n - n.\pi} = e^{y_n} \longrightarrow e^{\pi/4} \neq 1$$

Bref, $a_n \sim b_n \not\Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$. *Mais je vous connais, vous me l'écrirez, rien que parce que ça vous permettra de conclure.*

Avec $z_n = y_n - \dfrac{\pi}{4}$ on pousse un cran plus loin. Et cette fois, il s'agit d'avoir des exponentielles. On va donc revenir à la définition de la tangente hyperbolique. On utilise la formule de $\tan(a+b)$ et la propriété $\tan(\pi/4) = 1$:

$$\tan(z_n) = \tan\left(y_n - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(y_n)-1}{1+\tan(y_n)} = \frac{th(x_n)-1}{1+th(x_n)} = \frac{\dfrac{e^{x_n}-e^{-x_n}}{e^{x_n}-e^{-x_n}}-1}{1+\dfrac{e^{x_n}-e^{-x_n}}{e^{x_n}-e^{-x_n}}}$$

$$\tan(z_n) = \frac{(e^{x_n}-e^{-x_n})-(e^{x_n}-e^{-x_n})}{(e^{x_n}-e^{-x_n})+(e^{x_n}-e^{-x_n})} = \frac{-2.e^{-x_n}}{2.e^{-x_n}} = -e^{-2.x_n}$$

Cette quantité tend vers 0 par valeur inférieure.
Comme z_n est entre $-\dfrac{3.\pi}{4}$ et 0 ($x_n - n.\pi - \dfrac{\pi}{4}$ avec x_n entre $n.\pi - \dfrac{\pi}{2}$ et $n.\pi - \dfrac{\pi}{2}$) on passe aussi à l'arctangente et $z_n = Arctan(-e^{-2.x_n})$ tend aussi vers 0 par valeur inférieure.

Pour l'instant, on a juste $x_n = n.\pi + \dfrac{\pi}{4} + z_n$ avec $z_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ soit encore $x_n = n.\pi + \dfrac{\pi}{4} + o(1)_{n\to+\infty}$.
Il faudrait être plus précis sur ce petit o et deviner si il est en $\dfrac{1}{n}$ ou $\dfrac{2}{n}$ ou plutôt $-\dfrac{1}{n}$ ou pourquoi pas $\dfrac{-1}{n.\pi}$.
A quelle vitesse

Il suffit de dériver et reporter dans l'équation différentielle

	y''_t	$+3.y'_t$	$+2.y_t$	
cas $y_t = ch(t)$	$ch(t)$	$+3.sh(t)$	$+2.ch(t)$	$3.(ch(t)+sh(t)) = 3.e^t$
cas $y_t = e^{-t}$	e^{-t}	$-3.e^{-t}$	$+2.e^{-t}$	$= 0$
$2.t^2 - 6.t + 7$	4	$+12.t - 18$	$+4.t^2 - 12.t + 14$	$4.t^2$

Dans les deux cas, l'équation est vérifiée.

On peut dire qu'on a une solution (pas la solution, puisqu'il n'y a pas de condition initiale).

Ce que je risque de croiser :
c'est $2.t^2 - 6.t + 7$ qui est la solution particulière, alors que $e^{-t} + 2.t^2 - 6.t + 7$ es une somme « homogène plus particulière ».
C'est commettre une erreur. Il n'y a pas de raison de favoriser une solution particulière plutôt qu'une autre.
Proprement, on peut dire que $2.t^2 - 6.t + 7$ est UNE solution particulière
$2.t^2 - 6.t + 7$ est LA solution particulière POLYNOMIALE

IS21 Congruences.

On prend un entier a et on le réduit modulo 12 ou modulo 60 et même les deux à la fois.

Posons tout de suite une formule utile : $a = 12.p + r$ avec r entier dans range(12) (donc $c = a\%12$).
Pour prouver `(a%12) % 60 =(a%12)`, il suffit donc de prouver `(c % 60) = c`.
Or, comme `c` est entre 0 et 12, on a `c = 0.60+c` avec c entre 0 et 12 (et donc entre 0 et 60).
On a donc `(c % 60) = c`.

Exemple : `((2025 % 12) % 60) = (9 % 60) = 9`.

On peut donc remplir une des cases du jeu de quatre équations. Comme la formule est vraie pour tout a, on a $S_a = \mathbb{Z}$.

`((a % 12) % 60) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$	`((a % 60) % 12) = (a % 60)`	
`((a % 12) % 60) = (a % 60)`		`((a % 60) % 12) = (a % 12)`	

Écrivons aussi pour les besoins de l'exercice $a = 60.\gamma + \rho$ avec γ entier (le quotient) et r entier entre 0 et 60.
On a alors $a = 5.12..\gamma + \rho$ et donc $a - \rho$ est un multiple de 12.
L'équation `((a % 60) % 12) = (a % 60)` devient $\rho\%12 = \rho$.
Comme ρ est ρest un entier entre 0 et 60, on valide pour ρ entre 0 et 11(inclus) et on refuse pour ρ entre 12 et 59 inclus).

`((a % 12) % 60) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$	`((a % 60) % 12) = (a % 60)`	$\{60.\gamma + \rho \mid \gamma \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \rho < 12\}$
`((a % 12) % 60) = (a % 60)`		`((a % 60) % 12) = (a % 12)`	

Exemple : $2025\%60 = 45$ puis $(2025\%60)\%12 = (45\%12) = 9$ et on a $(2025\%60)\%12 = 9 \neq 45 = (45\%60)$.
$69\%60 = 9$ puis $(69\%60)\%12 = (9\%12) = 9$ et on a $(69\%60)\%12 = 9 = (69\%60)$.

En revanche l'équation `((a % 60) % 12) = (a % 12)` devient $(\rho\%12) = (a\%12)$. Et ceci est vrai pour tout entier, par notre remarque $a - \rho \in 12.\mathbb{Z}$.

`((a % 12) % 60) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$	`((a % 60) % 12) = (a % 60)`	$S_a = \{60.\gamma + \rho \mid \gamma \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \rho < 12\}$
`((a % 12) % 60) = (a % 60)`		`((a % 60) % 12) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$

Exemple : $2025\%60 = 45$ puis $(2025\%60)\%12 = (45\%12) = 9$ et on a $(2025\%60)\%12 = 9 = (2025\%12)$.

On termine avec `((a % 12) % 60) = (a % 60)` qui donne, comme on l'a vu pour la première `(a % 12) = (a % 60)`.
On retrouve la condition « le reste modulo 60 est plus petit que 12.

`((a % 12) % 60) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$	`((a % 60) % 12) = (a % 60)`	$S_a = \{60.\gamma + \rho \mid \gamma \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \rho$
`((a % 12) % 60) = (a % 60)`	$S_a = \{60.\gamma + \rho \mid \gamma \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \rho < 12\}$	`((a % 60) % 12) = (a % 12)`	$S_a = \mathbb{Z}$

IS21 Théorème du type Cesàro.

On part d'une suite (a_n) et on construit donc la suite $\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1+2.a_2}{3}, \frac{a_1+2.a_2+3.a_3}{12}, \frac{a_1+2.a_2+3.a_3+4.a_4}{20}, \dots\right)$.
C'est à peu de choses près une moyenne pondérée, sauf que la somme des coefficients vaut $1+2+\ldots+n$ (c'est à dire$\frac{n.(n+1)}{2}$) alors qu'on divise par $n.(n+1)$.

On suppose (a_n) constante, égale à α. On calcule S_n pour n donné

$$S_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k.\alpha}{n.(n+1)} = \frac{\alpha.\sum_{k=1}^{n} k}{n.(n+1)} = \alpha.\frac{\frac{n.(n+1)}{2}}{n.(n+1)} = \frac{\alpha}{2}$$

La suite (S_n) est constante, égale à la moitié de la suite (a_n).

On se donne un entier n et on définit à la fois $S_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1)}$ et

$$S_{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k.a_k}{(n+1).(n+2)} = \frac{(n+1).a_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{(n+1).(n+2)}$$

et on calcule la différence en réduisant au dénominateur commun et en remplaçant $\frac{n.(n+1)}{2}$ par $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{(n+1).a_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{(n+1).(n+2)} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1)}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n.(n+1).a_{n+1} + n.\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k - (n+2).\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n.(n+1).a_{n+1} - 2.\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1).(n+2)} = 2.\frac{\frac{n.(n+1)}{2}.a_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$S_{n+1} - S_n = 2.\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k}{n.(n+1).(n+2)} = 2.\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k.(a_{n+1} - a_k)}{n.(n+1).(n+2)}$$

(question pas évidente du tout, et même la récurrence passait difficilement, sauf l'initialisation).

On suppose (a_p) croissante. On calcule comme ci dessus, pour n donné $S_{n+1} - S_n$ qui est du signe de $\sum\limits_{k=1}^{n} k.(a_{k+1} - a_k)$.
Mais par croissance de (a_p) chaque différence $a_{n+1} - a_k$ est positive (puisque k reste entre 1 et n).
La différence $S_{n+1} - S_n$est positive pour tout n. C'est exactement « la suite (S_n) » est croissante.

Dans $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall k \geqslant N_\varepsilon,\ |a_k| \leqslant \varepsilon$ on reconnaît « a_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini ».

Comme on nous dit que n est plus grand que N_ε on s'autorise) couper en deux la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k.a_k$ avec la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} k.a_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} k.a_k + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} k.a_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} k.a_k\Big| + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} k.|a_k|$$

Dans la seconde partie de la somme, les indices sont tous plus grands que N_ε on peut donc majorer

$$|S_n| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} k.a_k\right|}{n.(n+1)} =\leqslant \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} k.a_k\right|}{n.(n+1)} + \frac{\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} k.\varepsilon}{n.(n+1)}$$

Dans la seconde somme, on factorise ε et on majore $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} k$ par la somme plus longue $\sum_{k=1}^{n} k$ dont la valeur a l'avantage d'être connue : $\frac{n.(n+1)}{2}$ (comme par hasard). La seconde somme se majore donc par $\frac{\varepsilon}{2}$ après simplification des $n.(n+1)$.
Quant à la première, on y majore $\frac{1}{n.(n+1)}$ par $\frac{1}{n^2}$.

On veut majorer alors cette nouvelle somme par $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. On va donc demander à avoir $\frac{A_\varepsilon}{n^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Le seul sur lequel on puisse jouer est n à qui on va demander $\frac{2.A_\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant n^2$.

On va donc demander $n \geqslant \left[\sqrt{\frac{2.A_\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1$ (quantité cohérente, car plus ε sera petit, plus elle sera grande).

Pour avoir les deux termes en $\varepsilon/2$ on va donc poser $P_\varepsilon = Max\left(N_{\varepsilon/2},\ \left[\sqrt{\frac{2.A_\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1\right)$ avec $A_\varepsilon = \left|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} k.a_k\right|$.

Cette quantité dépend bien de ε mais évidemment pas de n puisque c'est n qui doit dépendre de P_ε(par $n \geqslant P_\varepsilon$).

On a prouvé $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon,\ \forall n \geqslant P_\varepsilon,\ \left|S_n\right| \leqslant \varepsilon$. C'est exactement la définition de $S_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

Si la suite tend vers 0, la suite des « moyennes » tend aussi vers 0.

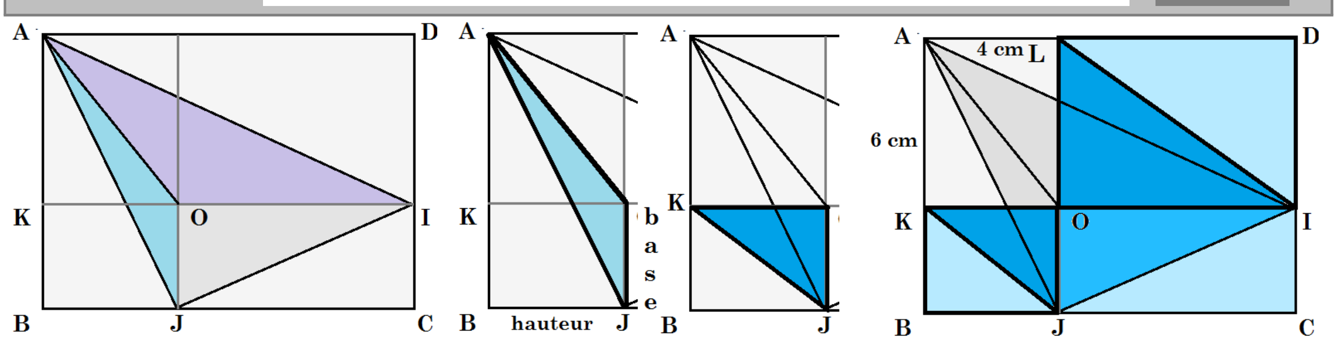
Mais si la suite (a_n) tend vers λ, le phénomène doit être juste translaté. Écrivons $a_n = \lambda + u_n$ avec u_n qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini (en fait, c'est $u_n = a_n - \lambda$). On calcule alors

$$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k.(\lambda + u_k)}{n.(n+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k.\lambda}{n.(n+1)} + \frac{\sum_{k=1}^{n} k.u_k}{n.(n+1)} = \frac{\frac{n.(n+1)}{2}.\lambda}{n.(n+1)} + S_n = \frac{\lambda}{2} + S_n$$

La suite (S_n) associée à la suite (u_n) converge vers 0 (à coups d'ε, on vient de le faire, puisque $u_n$tend bien vers 0).

On déduit que $\frac{\sum_{k=1}^{n} k.(\lambda + u_k)}{n.(n+1)}$ converge vers $\frac{\lambda}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ si $a_n$convergeait vers λ.

IS21 Géométrie.



même base, même hauteur

On découpe le triangle AJI en trois triangles : OAJ, OJI et OIA.

On les regarde un par un.
IOJ est rectangle en O. Pas grand chose de plus à dire.

OAJ a pour base OJ et pour hauteur OK.
Et comme par hasard OKJ a pour base OJ et hauteur OK.
Les deux triangles ont la même aire.

On peut le voir par déformation du triangle à base fixe et hauteur constante.
On peut aussi comparer deux déterminant : $\det(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OJ})$ et $\det(\overrightarrow{OK},\ \overrightarrow{OJ})$.
Il suffit décrire et développer $\det(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OJ}) = \det(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA},\ \overrightarrow{OJ}) = \det(\overrightarrow{OK},\ \overrightarrow{OJ}) + \det(\overrightarrow{KA},\ \overrightarrow{OJ})$ et le second déterminant est nul, par colinéarité des vecteurs.

OIA a pour base OI et pour hauteur KA.
Son aire $\dfrac{OI \times KA}{2}$ est égale à celle de OIL.

triangle	OJI	OAJ	OAJ	total 70 cm^2
même aire	triangle OJI	triangle OKJ	triangle OKJ	
on double	rectangle $OJCI$ lui	rectangle $OKBJ$ lui	rectangle $OKBJ$ lui	lui lui lui total 140 cm^2

Pour l'aire totale du grand rectangle il nous manque un petit rectangle : $OKBJ$.
Mais, lui, son aire est trop facile : $4 \times 6\ cm^2$.

On arrive bien à un total de 164 cm^2.