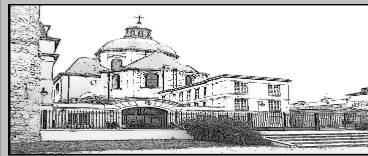
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 31 mars

$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD23

◁0▷ Montrez que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1,\ +\infty[$ *(sans utiliser un théorème sur la dérivée).*

◁1▷ ♡ On a bien sûr $(n+1) \sim_{n\to+\infty} n$. A-t-on $\sin(n+1) \sim_{n\to+\infty} \sin(n)$? A-t-on $\ln(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$? A-t-on $\exp(n+1) \sim_{n\to+\infty} \exp(n)$? A-t-on $Arctan(n+1) \sim_{n\to+\infty} Arctan(n)$? A-t-on $\sqrt{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{n}$? A-t-on $\sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$? A-t-on $(n+1)^{n+1} \sim_{n\to+\infty} (n)^n$? A-t-on $(n+1)! \sim_{n\to+\infty} n!$?

◁2▷ Soit N une norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(E, +, .)$ (application positive, séparante, homogène, triangulairement inégalitaire). On suppose de plus qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 + N(v)^2)$$

pour tout couple de vecteurs $(u,\ v)$.

a – Montrez que c'est le cas dans les cas suivants :

$(M_n(\mathbb{R}), +, .)$	$(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$	$(\mathbb{R}^2, +, .)$
$\sqrt{\sum_{i,k} (a_i^k)^2}$	$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2}$
$(\mathbb{R}^3, +, .)$	$(\mathbb{R}_3[X], +, .)$	
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2+z^2}$	$\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2+P(4)^2}$	

b – Montrez que ce n'est pas le cas pour

$(M_n(\mathbb{R}), +, .)$	$(C_0([-1,\ 1], \mathbb{R}), +, .)$	$(\mathbb{R}^2, +, .)$
$Max\Big(\sum_{k=1}^n \lvert a_i^k \rvert \mid 1 \leqslant i \leqslant n\Big)$	$Max(\lvert f(t)\rvert \mid t \in [-1,\ 1])$	$Max(\lvert x+y\rvert,\ \lvert x-y\rvert)$
$(\mathbb{R}^3, +, .)$	$(\mathbb{R}_2[X], +, .)$	
$\lvert y+z\rvert + \lvert x+z\rvert + \lvert x+y\rvert$	$Max(\lvert P(0)\rvert,\ \lvert P'(0)\rvert,\ \lvert P''(0)\rvert)$	

même si ce sont des normes (si ça vous gave, passez à la suite)On veut montrer que sous l'hypothèse "identité du parallélogramme", N est une norme euclidienne, issue d'un produit scalaire.

c – On pose donc "tout naturellement" : $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4}$ pour tout couple de vecteurs. Vérifiez alors $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2}{2}$.

d – Montrez que ϕ est une forme symétrique, positive, défini positive.

e – Montrez pour tout triplet $(u,\ v,\ w)$: $\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$ (indication : dans l'hypothèse de l'identité du parallélogramme, remplacez u par $u+w$ et $u-w$).

f – Déduisez $\phi(2.u,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$.

g – Déduisez aussi : $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$.

h – Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

i - Montrez pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

j - Montrez pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\phi(r.u,\ v) = r.\phi(u,\ v)$.

k - Montrez pour tout t de $\mathbb{R}$: $\phi(t.u,\ v) = t.\phi(u,\ v)$.

l - Déduisez que ϕ est un produit scalaire, puis que N est bien la norme qui en est issue.

◃3▹ Je veux une suite d'entiers (a_n) telle que tout entier naturel k soit limite d'au moins une sous-suite de (a_n). J'ai pensé à
$(\overline{0},\ \underline{0,\ 1},\ \overline{0,\ 1,\ 2},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3},\ \overline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5},\ \overline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7},\ \overline{0,\ 1,\ldots})$.
Calculez $(a_{n.(n+1)/2})$ pour tout n.
Écrivez un script Python qui fabrique pour N donné, les N premiers termes de la suite.
Construisez une sous-suite qui converge vers 10.
Trouvez une formule explicite pour le n^{ieme} terme de cette suite.
Que fait la moyenne de Cesàro de cette suite (calculez $(C_{n.(n+1)/2})$).
Et sa moyenne de Cesàro géométrique ?

◃4▹ ♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

◃5▹ On sait que si u et v sont bornées, alors $u.v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie *(peut on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?)*.
Montrez que si $u + v$ et $u.v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

◃6▹ Frais ou veau :
∘1∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β, alors il existe une sous-suite de $(a_n + b_n)$ qui converge vers $\alpha + \beta$?
∘2∘ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
∘3∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
∘4∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.
∘5∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1.
∘6∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.

◃7▹ ♡ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée ($A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$). Montrez que $(A_{2.n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

◃8▹ Donnez le limite, puis un éventuel équivalent du type $a.n^\alpha$quand n tend vers $+\infty$ pour les formes (indéterminées) suivantes

$(n+1) - n$	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$(n+1)^4 - n^4$	$\ln(n+1) - \ln(n)$	$e^{n+1} - e^n$
$(2.n+1) - n$	$\sqrt{2.n+1} - \sqrt{n}$	$(2.n+1)^4 - n^4$	$\ln(2.n+1) - \ln(n)$	$e^{2.n+1} - e^n$
$(n^2+1) - n$	$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$	$(n^2+1)^4 - n^4$	$\ln(n^2+1) - \ln(n)$	$e^{n^2+1} - e^n$

◃9▹ Petit quiz très formateur.
si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.

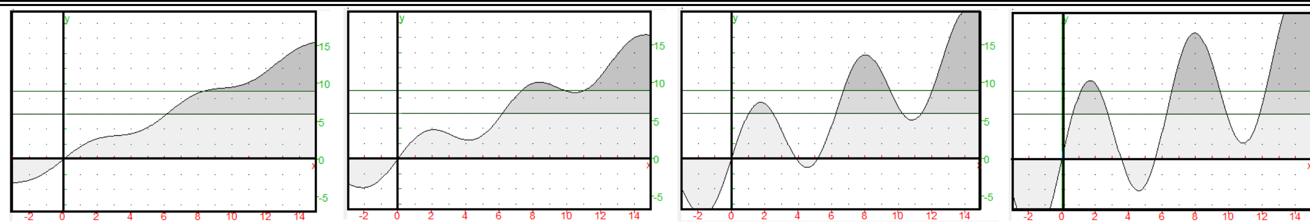
Quels mots pouvez mettre dans le cadre :

croissante	continue	monotone
bornée	continue à droite	lipschitzienne

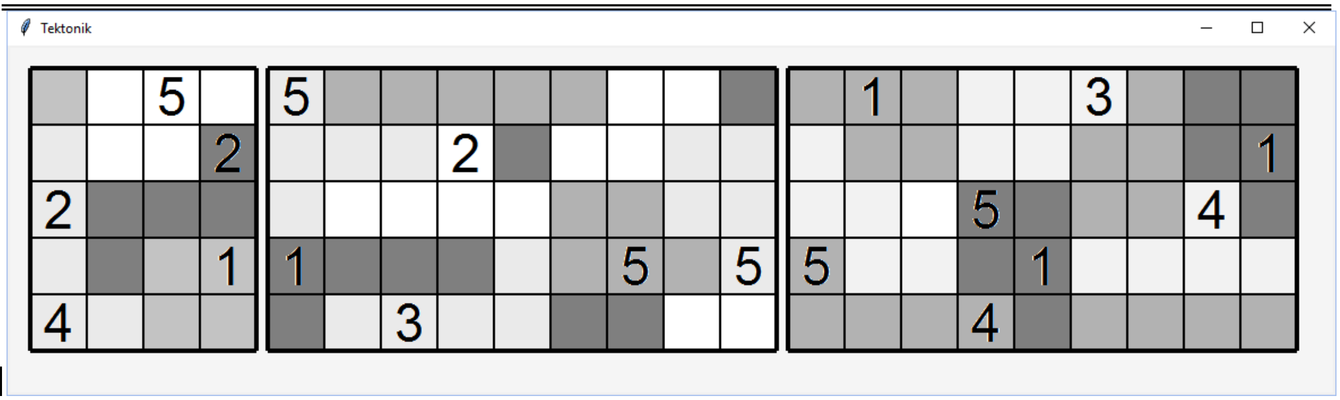
Donnez un argument, ou sinon un contre-exemple.

Même question avec « si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$ ». (pas pareil...)

◁10▷ Un élève écrit : "f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a tort.
Un élève écrit : "f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a raison.



◁11▷ a est un réel positif. Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ est elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ les équation $f(x) = b$ d'inconnue x ont elles de 1 à 3 solutions ?
Existe-t-il une valeur de a pour laquelle chaque équation $f(x) = b$ d'inconnue x a exactement 3 solutions ?



◁12▷

◁13▷ ♡ Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$). On suppose $\int_a^b f(t).dt = 0$. Montrez que f s'annule et change de signe au moins une fois en un point c de $[a,\ b]$ (raisonner par l'absurde, ou par théorème de Rolle).
On suppose de plus $\int_a^b t.f(t).dt = 0$. Déduisez que f s'annule en fait au moins deux fois sur $[a,\ b]$ (étudier $\int_a^b (t-c).f(t).dt$).
♡ On suppose $\int_a^b t^k.f(t).dt = 0$ pour tout k de 0 à n. Montrez que f s'annule et change de signe au moins $n+1$ fois.

◁14▷ Existe-t-il un intervalle du type $[0,\ a]$ sur lequel la valeur moyenne du sinus vaut $1/3$?

La valeur moyenne d'une application continue f sur un intervalle $[a,\ b]$ est $\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt$.

◁15▷ Pour f intégrable de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on appelle valeur moyenne l'application $x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(u).du$ (notée ϕ) ; c'est en fait la valeur moyenne sur $[0,\ x]$ de f.
Montrez que si f est positive, ϕ l'est aussi.
Montrez que si f est croissante, ϕ l'est aussi. Preuve de physicien(ne) naïf : dérivez, en estimant que dans votre monde idéalisé tout est dérivable. Preuve de mathématicien(ne) : $\int_0^1 f(t.x).dt$.
Tracez l'application "valeur moyenne de la partie entière".

◁16▷ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne est une suite de Cauchy.

◁17▷

I∼0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

I∼1) Montrez que $f \longmapsto ||f||$ est une norme sur $(E, +, .)$, sachant que l'on pose $||f|| = Sup(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1])$.

I∼2) Pour f dans E, on pose $L(f) = Sup\left\{ \dfrac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1 \right\}$. Montrez que L est une semi norme sur $(E, +, .)$.

I∼3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = ||f'||$..

I∼4) Calculez la norme $||f||$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$s_n = \theta \longmapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$	$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \lvert 2.x-1 \rvert$	$x \longmapsto \ln(1+x)$

I∼5) Montrez que $f \longmapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme *(notée Λ)*. Montrez pour tout f de $||f|| \leqslant \Lambda(f)$. Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E,\ L(f) \leqslant K.||f||$.

II∼0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p, q),\ K_\varepsilon \leqslant p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0,\ 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

II∼1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E.

III∼0) Pour tout x de $[0,\ 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque F_n est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est il dans E ?

III∼1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \longmapsto t + \dfrac{x-t^2}{2}$ sur $[0,\ 1]$).

III∼2) La limite des P_n est elle dans E ?

◁ 18 ▷ ♡ Complétez $F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2.a + \heartsuit.b \\ 3.a - b \end{pmatrix}$ sachant que F admet plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}^2$ *(un point fixe de f c'est une solution de $f(x) = x$)*.
Déterminez $F \circ F \circ F \circ F$. Résolvez $F(F(U)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

◁ 19 ▷ $\sqrt{10}$, $\sqrt{10.\sqrt{10}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10..\sqrt{10}}}}}$.
Mettez cette suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez qu'elle est croissante, majorée et donnez sa limite.

◁ 20 ▷ $\heartsuit^2$ a est un réel strictement positif donné. On définit la suite u par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2}$ pour tout n (et $u_0 = a$ par exemple).
Montrez que la suite u converge.
On pose alors $r_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Exprimez r_{n+1} à l'aide de r_n. Montrez : $|u_n - \sqrt{a}| = O(r_0^{(2^n)})$ *(la convergence est très très rapide !)*.

◁ 21 ▷ Montrez que si f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\int_{-1}^{1} f(t).dt = 0$ alors elle admet au moins un point fixe *(on pourra étudier $f - Id$ sur $[-1,\ 1]$ et montrer qu'elle ne peut pas rester de signe constant)*.

◁ 22 ▷ Montrez toute suite réelle monotone est de signe constant à partir d'un certain rang.
Montrez que si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors $(a_n \times b_n)$ ne l'est pas forcément.
Un élève affirme « oui, mais si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors à partir d'un certain rang, les deux restent de signe constant, leur produit est alors de signe constant, et en multipliant membre à membre les inégalités, leur produit est monotone ». Vrai ou Faux ?
Non, pas « Vraiou faux, l'élève a-t-il fit ça », mais « vrai ou faux, ce que dit l'élève est correct ».

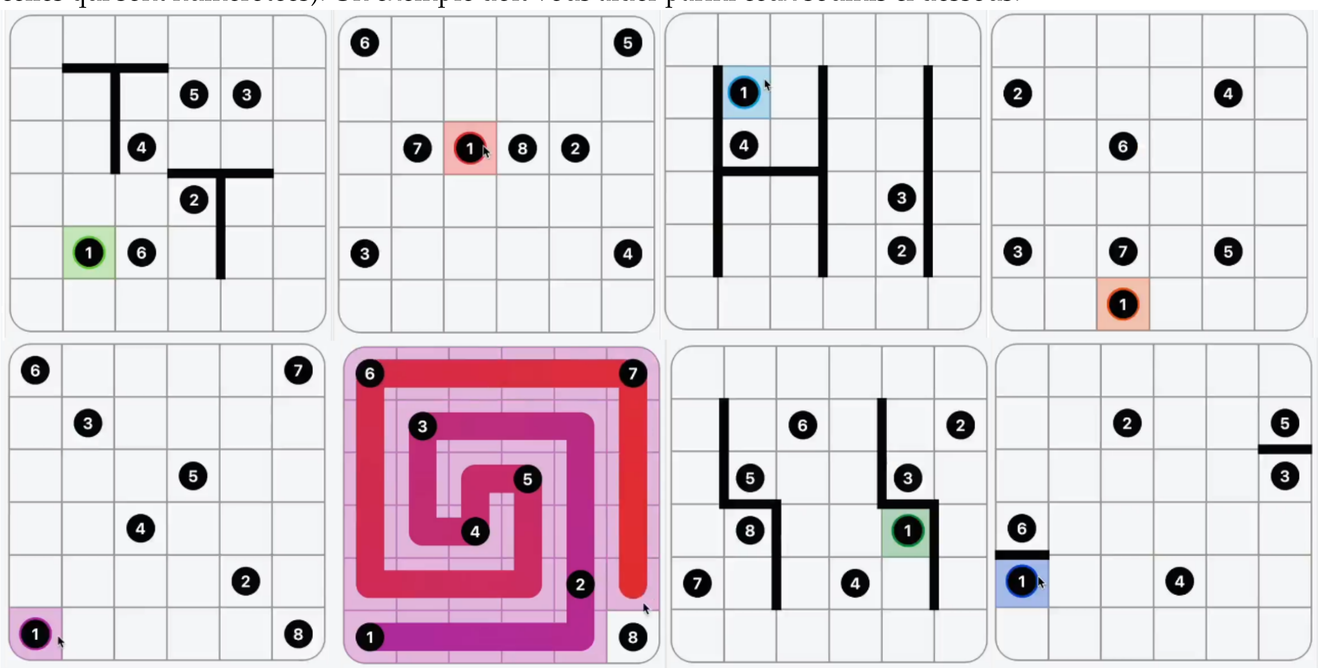
◁ 23 ▷ Pour tout n, on pose $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+n})$. Un élève affirme : $\sqrt{n^2+n} \simeq n$ donc $\cos(\pi.\sqrt{n^2+n}) \simeq \cos(n.\pi)$ la

suite ne va donc pas converger mais osciller entre -1 et 1. Concluez qu'il est en P.C.
Donnez le développement de $\sqrt{n^2+n}$ sous la forme $n+a+o(1)$ *(pensez à la quantité conjuguée)*. Déduisez que la suite u_n converge vers 0.
Question bonus : la série de terme général u_n converge-t-elle ?
Qu'en est il de la suite $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+2.n})$.

◁ 24 ▷ On se donne u_0 strictement positif. On définit $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$ pour tout n. Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrez qu'il existe un rang R vérifiant $u_R \geqslant 2$. Déduisez $\forall n \geqslant R,\ u_n \geqslant 2^{n-R+1}$. Déduisez que la série de terme général $\dfrac{1}{1+u_n}$ converge. Montrez pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Concluez.

◁ 25 ▷ ♡ Retrouvez les coefficients qui manquent : $\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{a}{n^4} + \dfrac{b}{n^5} + o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)_{n\to+\infty}$ (pensez à soustraire).

◁ 26 ▷ Zip est un nouveau jeu développé par LinkedIn. Une grille. Il s'agit de trouver un chemin passant par chaque case une fois et une seule (ne pas laisser de case vide, ne pas croiser les chemins donc), en passant dans l'ordre par celles qui sont numérotées). Un exemple doit vous aider parmi ceux soumis ci dessous.



◁ 27 ▷ Pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|.dt$, $||f||_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2.dt}$ et $||f||_\infty = Sup(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1]$.
Montrez que ce sont bien trois normes.
Pour l'inégalité trianglaire de $||.||_2$, on utilisera l'inégalté de Cauchy Schwarz.

Montrez pour toute f : $||f||_1 \leqslant ||f_2|| \leqslant ||f||_\infty$.

Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto x^n$ est bornée pour chacune de ces normes.
Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto n.x^n$ est bornée une et une seule de ces normes.

◁ 28 ▷ ♡ Complétez $(\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\ )$ en base de $\mathbb{R}^3$ *(c'est à dire adjoignez un vecteur)* sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,\ 1,\ 1)$.

◁ 29 ▷ Écrivez un script **`Python`** appelé **`Cesaro`** qui prend en entrée une suite *(liste évidemment finie de flottants)* et retourne en sortie une liste égale à la moyenne de Cesàro de la précédente *(exemple `Cesaro([1, 5, 3, 8])` retournera `[1, 3, 3, 4.25]`)*.
Écrivez un script appelé **`oraseC`** qui prend en entrée une suite et retourne en sortie la liste dont elle est la moyenne de Cesàro.

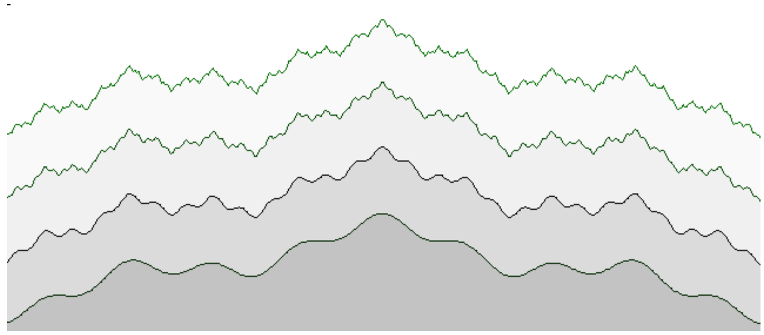
◁30▷ Soit (a_n) une suite réelle bornée. On pose $A_0 = \{u_n \mid n \geqslant 0\}$. Montrez que A_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On note α_0 sa borne supérieure. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(0)$ vérifiant $\alpha_0 \geqslant a_{\varphi(0)} \geqslant \alpha_0 - 1$.
On pose alors $A_1 = \{u_n \mid n > \varphi(0)\}$. Montrez que A_1 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_0. On note α_1 sa borne supérieure. Justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(1)$ vérifiant $\alpha_1 \geqslant a_{\varphi(1)} \geqslant \alpha_1 - \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(0) < \varphi(1)$.
On pose ensuite $A_2 = \{u_n \mid n > \varphi(1)\}$. Montrez que A_2 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_1. On note α_2 sa borne supérieure, justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(2)$ vérifiant $\alpha_2 \geqslant a_{\varphi(2)} \geqslant \alpha_2 - \dfrac{1}{4}$ et $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)$.
Construisez une suite décroissante (α_p) et une extraction φ vérifiant $\alpha_p \geqslant a_{\varphi(p)} \geqslant \alpha_p - \dfrac{1}{2^p}$.
Montrez que la suite α converge, de même que la suite $(a_{\varphi(p)})$.
Que vient on de prouver. Quand avez vous dû employer l'hypothèse "a est bornée" ?

◁31▷ Pour tout n , on pose $f_n = x \longmapsto \dfrac{\sin(3^n.x)}{2^n}$ et $F_N = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Montrez que pour tout x, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k}$ et $F_n(x)$ convergent. La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ sera notée $F(x)$.

Montrez que F_n est lipschitzienne de rapport $\dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

On se donne une suite (a_p) qui converge vers α (quantifiez). On veut montrer que $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$ (ce qui traduira la continuité de F).
Montrez : $|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + |F_n(a_p) - F_n(\alpha)| + \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour n égal à $\left[-\dfrac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\right] + 1$.

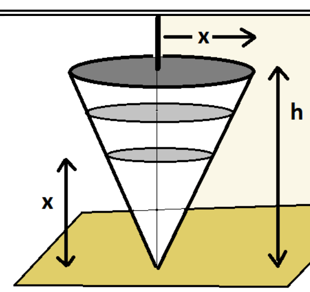
Déduisez $|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant \varepsilon$ pour p plus grand qu'une valeur à préciser.



Utilisez Python et ses modules tout prêts : votre procédure prend en entrée n, a et b et représente sur le même graphe F_0 à F_n sur le segment $[a,\ b]$.

Montrez que la série de terme général $f'_k(0)$, de même que la série de terme général $f_k(\pi/9)$, de même que toute série de terme général $f'_k(\theta)$ avec θ de la forme $p.\pi.2^{-q}$.
Ceci ne prouve pas encore que F n'est dérivable nulle part, mais ça peut en donner une idée.

◁32▷ Soit f continue de I (intervalle réel) dans $\mathbb{R}$. On suppose f non monotone.
Montrez alors qu'il existe a, b et c vérifiant $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$.
On définit alors $\varphi = t \longrightarrow \Big(f(c) - f(b)\Big).\Big(f\big(b + t.(c-b)\big) - f\big(a + t.(b-a)\big)\Big)$.
Donnez le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$. Déduisez $\exists t \in [0,\ 1],\ f\big(b + t.(c-b)\big) = f\big(a + t.(b-a)\big)$.
Que venez vous de redémontrer ?



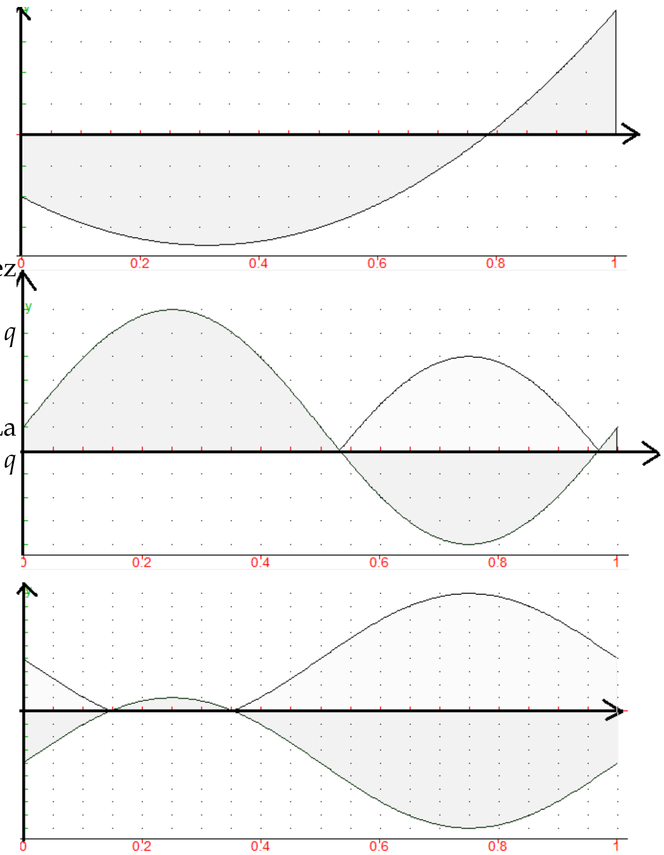
◁33▷ On dispose d'un cône à section circulaire (rayon r) de hauteur (verticale) h. On doit le découper en trois parts de volumes égaux par deux découpes horizontales. A quelle hauteur les situez vous ?

Pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $|f|_\infty = Sup\{|f(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$.

Calculez $|x \longmapsto x + a|_\infty$ en fonction du réel a.
Calculez $|t \longmapsto \sin(2.\pi.t) + a|_\infty$ en fonction de a.
Calculez $|t \longmapsto 8.t^2 - 5.t - 1|_\infty$.
Pour quelles valeurs de a a-t-on $|t \longmapsto e^t - a|_\infty = 2$.

Pour tout n, on pose $g_n = t \longmapsto t^n$. Calculez $|g_p - g_q|_\infty$ pour p et q entiers naturels donnés.
La norme $|g_p - g_q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?

Calculez $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ pour tout couple $(p,\ q)$. La norme $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?



◁34▷

◁35▷ ♠♡ On appelle "nombres conjugués" deux réels positifs p et q vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrez qu'ils dépassent 1. Qui est q pour $p = 2$?
On se donne deux réels a et b avec $a \leqslant b$. Dérivez deux fois $t \longmapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$. Déduisez que cette application est croissante puis décroissante sur $[0,\ 1]$. déduisez qu'elle est positive sur $[0,\ 1]$.

Déduisez pour tout couple $(u,\ v)$ de réels strictement positifs : $u.v \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ *(que reconnait on pour $p = 2$?)*. Indication : $t = 1/q$, $e^a = u^p$.

On se donne deux suites finies $(a_1, \ldots a_n)$ et $(b_1, \ldots b_n)$ de réels strictement positifs. On définit : $A = \Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\Big)^{1/p}$ et $B = \Big(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q\Big)^{1/q}$. Pour tout k, on pose $u_k = a_k/A$ et $v_k = b_k/B$.

Montrez $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p}.\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q}$ *(inégalité de Hölder dite aussi de Minkowski)*.
Que retrouvez vous dans le cas $p = 2$?

Montrez pour f et g continues positives $\int_a^b f(t).g(t).dt \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b (f(t))^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b (g(t))^q.dt}$.

◁36▷ ♡ Soit à présent f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées *(normes de la convergence uniforme notées M_0 et M_2)*. Montrez pour tout x : $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \int_0^1 (1-t).f''(x+t).dt$. Déduisez que f' est aussi bornée.

Avec ces Types, on épargne les comPromis. Elle évite les cOpines lentes. Le capitaine fait Mander les marins à Bord. Tu me Paraissais bien CaLine. SI c'est mon énorme trUc ! Brigitte ne crût plus ce maçon. Il m'a véhIculé malgré ma suspENsion. Faut pas manquer de pèze Pour une belle comBine. On cherche leS ados dans les lyCées. Il apprécie les nyLons à CHoisir. Le curé cherche des Tenues pour les Catés.

◁37▷ Complétez :

$P(X)$	$\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{(x-a).(x-b)}{?}$	$\dfrac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	?	?	?
$P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$	?	1	?
$P(b)$	?	?	?
$\displaystyle\int_a^b P(t).dt$	$\dfrac{b-a}{6}$	?	$\dfrac{b-a}{6}$

Un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ et $P(\dfrac{a+b}{2}) = \gamma$. Montrez : $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b P(t).dt = \dfrac{\alpha+4.\gamma+\beta}{6}$ (valeur moyenne donnée par la formule dite des trois niveaux).

◁38▷ Soit f continue ; donnez la limite de la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ lorsque b tend vers a.

◁39▷ ♡ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

◁40▷ La valeur moyenne de f (intégrable) sur $[a, b]$ est $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt$. Montrez que si f est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors on a

$Sup(f(t) \mid t \in [a, b]) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt \leqslant Sup(f(t) \mid t \in [a, b])$ (même si $a > b$?)

Déduisez : $\exists c \in [a, b]$, $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt = f(c)$. Montrez que ce résultat tombe en défaut si f est juste intégrable, et pas continue.

◁41▷ Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a, b]$ soit $a+b$?

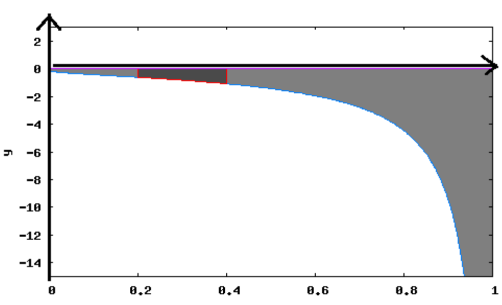
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a, b]$ soit la longueur $b-a$ du segment ?

Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a, b]$ soit $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$?

Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a, b]$ soit $f\Big(\dfrac{2.a+b}{3}\Big)$?

◁42▷

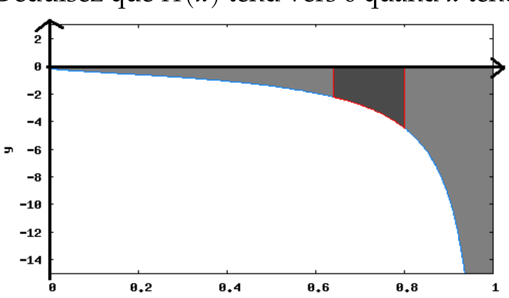
On définit $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.



Montrez que H est C^1 sur $]0, 1[$ et calculez sa dérivée *(pensez à l'écrire $F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \ln^{-1}(t)$ sur $]1, +\infty[$).*

Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est bornée sur $]0, 1/2[$ par 0 et $-1/\ln(2)$. Déduisez que $H(x)$ est compris entre 0 et $\dfrac{|x^2-x|}{\ln(2)}$ pour x entre 0 et $1/2$.

Déduisez que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.



Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 1 *(attention, ne pas soustraire des "équivalents, ça ne donne rien, réduisez d'abord au dénominateur commun, puis utilisez des développements limités).*

Montrez que $\displaystyle\int_x^{x^2} \Big(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\Big).dt$ converge vers 0 quand x tend vers 1.

Calculez $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ pour x entre 0 et 1.

Déduisez que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. Déduisez en étudiant $F(1) - F(0)$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$.