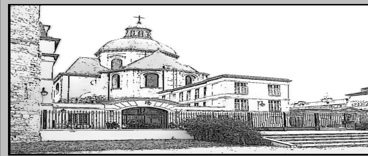
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 31 mars
M.P.S.I.2



2024 2025

TD23

◁0▷ Montrez que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ *(sans utiliser un théorème sur la dérivée)*.

On se donne x et y plus grands que 1 et on majore après usage de la quantité conjuguée :

$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \dfrac{|y-x|}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{|y-x|}{1+1}$ car $\sqrt{x} \geqslant 1$ *(et pareil pour y)*.

Remarque : C'est direct et rapide.
Et il est très décevant de voir des élèves sortir des réflexes « dérivée bornée implique lipschitzienne » pour traiter cet exercice. Ce sont en général les élèves qui ont appris UNE chose et croient que comme en terminale avec UNE CHOSE on traite chaque exercice contenant le mot « lipschitzienne ».
Non, on est en maths, et justement, on varie les points de vue. C'est ça l'intelligence mathématique.

◁1▷ ♡ On a bien sûr $(n+1) \sim_{n\to+\infty} n$. A-t-on $\sin(n+1) \sim_{n\to+\infty} \sin(n)$? A-t-on $\ln(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$? A-t-on $\exp(n+1) \sim_{n\to+\infty} \exp(n)$? A-t-on $Arctan(n+1) \sim_{n\to+\infty} Arctan(n)$? A-t-on $\sqrt{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{n}$? A-t-on $\sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$? A-t-on $(n+1)^{n+1} \sim_{n\to+\infty} (n)^n$? A-t-on $(n+1)! \sim_{n\to+\infty} n!$?

◁2▷ Soit N une norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(E, +, .)$ (application positive, séparante, homogène, triangulairement inégalitaire). On suppose de plus qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 + N(v)^2)$$

pour tout couple de vecteurs (u, v).

a – Montrez que c'est le cas dans les cas suivants :

$(M_n(\mathbb{R}), +, .)$	$(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$	$(\mathbb{R}^2, +, .)$
$\sqrt{\sum_{i,k} (a_i^k)^2}$	$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2}$
$(\mathbb{R}^3, +, .)$	$(\mathbb{R}_3[X], +, .)$	
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2+z^2}$	$\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2+P(4)^2}$	

Pour chacune de ces normes (mais est on sûr que c'en sont), on détermine un produit scalaire dont elle est issue. Il faut vérifier pour ce produit scalaire le caractère positif et défini positif.

$\sqrt{\sum_{i,k}(a_i^k)^2}$	$Tr({}^tA.C)$	classique
$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\int_0^1 f(t).g(t).t.dt$	bilinéaire symétrique, $\int_0^1 f(t)^2.t.dt$ est positive (application continue positive) par continuité, elle n'est nulle que pour $Id.f^2$ nulle, donc f nulle partout sauf peut être en 0, mais... par continuité...
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2}$	$x.x' + 2.x'.y + 2.x.y' + 5.y.y'$	$(x+2.y)^2+y^2$ est positif il n'est nul que pour $x=y=0$
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2+z^2}$	$x.x' + 2.x'.y + 2.x.y' + 5.y.y' + z.z'$	$(x+2.y)^2+y^2+z^2$ même histoire
$\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2+P(4)^2}$	$\sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k)$	la somme des carrés est nulle si et seulement si chaque terme est nul, P a cinq racines, or il est de degré inférieur ou égal à 4.

b – Montrez que ce n'est pas le cas pour

$(M_n(\mathbb{R}),+,.)$	$(C_0([-1,\ 1],\mathbb{R}),+,.)$	$(\mathbb{R}^2,+,.)$
$Max\Big(\sum_{k=1}^{n}\vert a_i^k\vert \mid 1 \leqslant i \leqslant n\Big)$	$Max(\vert f(t)\vert \mid t\in[-1,\ 1])$	$Max(\vert x+y\vert,\ \vert x-y\vert)$
$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(\mathbb{R}_2[X],+,.)$	
$\vert y+z\vert+\vert x+z\vert+\vert x+y\vert$	$Max(\vert P(0)\vert,\ \vert P'(0)\vert,\ \vert P''(0)\vert)$	

même si ce sont des normes (si ça vous gave, passez à la suite)
On veut montrer que sous l'hypothèse "identité du parallélogramme", N est une norme euclidienne, issue d'un produit scalaire.

On ne montrera pas ici que ce sont des normes. Mais on montrera que la condition nécessaire du parallélogramme n'est pas vérifiée. Sur des contre-exemples.

Par exemple, pour $Max(|f(t)| \mid t\in[-1,\ 1])$, on prend $f = t \longmapsto t$ et $g = t \longmapsto 1$.
f et g ont pour norme 1.
$f+g$ a pour norme 2 (atteinte en 1) et $f-g$ a pour norme 2 (atteinte en -1).
On compare $||f+g||^2+||f-g||^2$ et $2.||f||^2+2.||g||^2$.
L'un vaut 8 et l'autre 4. Même pour le SIIiste, il n'y a pas égalité.

Pour $|y+z|+|x+z|+|x+y|$ (pour laquelle on vérifie facilement existence, positivité, homogénéité et inégalité triangulaire), on vérifie la séparation :
si $|y+z|+|x+z|+|x+y|$ est nul, c'est que $|y+z|$, $|x+z|$ et $|x+y|$ sont nuls (encadrer $0 \leqslant |x+y| \leqslant |x+y|+|y+z|+|z+x| = 0$)
le système $x+y=x+z=y+z=0$ conduit à $x=y=z$.
Le résultat aurait il été le même à quatre dimensions ?

On prend une suite un contre-exemple avec deux vecteurs « au hasard » : $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
On a $||\overrightarrow{i}|| = 1+1+0 = 2$,
$||\overrightarrow{j}|| = 1+0+1 = 2$
$||\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}|| = 2+1+1 = 4$
$||\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}|| = 0+1+1 = 2$
On n'a pas $4^2+2^2 = 2.(2^2+2^2)$.

c – On pose donc “tout naturellement” : $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4}$ pour tout couple de vecteurs. Vérifiez alors $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2}{2}$.

On a bien $\dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4} = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2}{2}$ puisque justement

$$N(u+v)^2 - N(u-v)^2 = 2.(N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2)$$

en triturant l'hypothèse

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 + N(v)^2)$$

d – Montrez que ϕ est une forme symétrique, positive, défini positive.

On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (pardon, on note juste u et v pour ne pas alourdir) et on compare $\dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4}$ et $\dfrac{N(u+v)^2 - N(v-u)^2}{4}$.
L'homogénéité de la norme dit $N(a) = N(-a)$; il y a égalité.

Pour la positivité, on doit calculer $\phi(u,u)$. On trouve $\dfrac{N(2.n)^2 - N(0)^2}{4}$.
Pour une norme, $N(0) = 0$. La somme est positive (et ne contient qu'un terme).

Si $\phi(u,u)$ est nul, c'est que $N(2.u)^2$ est nulle.
Par séparation, u est nul.

Bref, il nous manque la bi-linéarité.

e – Montrez pour tout triplet $(u,\ v,\ w)$: $\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$ (indication : dans l'hypothèse de l'identité du parallélogramme, remplacez u par $u+w$ et $u-w$).

Par définition,

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = N(u+w+v)^2 - N(u+w-v)^2 + N(u-w+v)^2 - N(u-w-v)^2$$

On regroupe :

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = \Big(N(u+w+v)^2 + N(u-w+v)^2\Big) - \Big(N(u+w-v)^2 + N(u-w-v)^2\Big)$$

On arrange :

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = \Big(N((u+v)+w)^2 + N((u+v)-w)^2\Big) - \Big(N((u-v)+w)^2 + N((u-v)-w)^2\Big)$$

En appliquant l'identité du parallélogramme à $u+v$ et w puis à $u-v$ et w[1] :

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.\Big(N(u+v)^2 + N(w)^2\Big) - 2.\Big(N(u-v)^2 + N(w)^2\Big)$$

On regroupe :

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.\Big(N(u+v)^2 - N(u-v)^2\Big)$$

On reconnaît :

$$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.4.\phi(u,v)$$

On simplifie par 4 et on trouve ça joli.

Remarque : Évidemment, si on savait à l'avance que ϕ était bi-linéaire, c'était évident...
Mais la linéarité est notre objectif...

1. oui, ce n'est pas tout à fait l'indication de l'énoncé

f - Déduisez $\phi(2.u,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$.

On applique le résultat e au vas particulier $w = u$:

$$\phi(2.u,\ v) + \phi(0,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$$

Encore faut il s'assurer que $\phi(0,\ v)$ est nul.
Or, $4.\phi(0,\ v) = N(0+v)^2 - N(0-v)^2 = 0$ car pour une norme, un vecteur et son opposé ont même longueur.
Remarque : On avance vers la linéarité par rapport au premier vecteur, en $\phi(\alpha.v,\ v) = \ldots$

g - Déduisez aussi : $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$.

On repart de $\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$.
On échange les rôles de u et w :

$$\phi(w+u,\ v) + \phi(w-u,\ v) = 2.\phi(w,\ v)$$

On somme les deux formules :

$$2.\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v) + 2.\phi(w,\ v)$$

Or, $\phi(u-w,\ v)$ et $\phi(u-w,\ v)$ sont opposés l'un de l'autre.
En effet : $4.\phi(a,\ v) = N(a+v)^2 + N(a-v)^2$
$4.\phi(-a,\ v) = N(-a+v)^2 + N(-a-v)^2$
$4.\phi(-a,\ v) = N(v-a)^2 + N(a+v)^2$ en utilisant toujours $N(-b) = N(b)$
On a donc $2.\phi(u+w,\ v) + 0 = 2.\phi(u,\ v) + 2.\phi(w,\ v)$.
Je pense qu'il suffit de diviser par 2.

Remarque : On avance vers la linéarité par rapport au premier vecteur, en $\phi(a+b,\ c) = \phi(a,\ c) + \phi(b,\ c)$. On l'a même.

h - Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

Le résultat est trivial pour $n = 0$ (on a prouvé plus haut $\phi(0,\ v) = 0$).
Il est évident pour $n = 1$.
On l'a prouvé pour $n = 2$.

Supposons le vrai pour n quelconque donné.
Reprenons la formule $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$ et appliquons la à $w = n.u$.

$$\phi(u+n.u,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(n.u,\ v) = \phi(u,\ v) + n.\phi(u,\ v) = (n+1).\phi(u,\ v)$$

avec l'hypothèse de récurrence.[2]

i - Montrez pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

On veut passer à $\mathbb{Z}$?
On se donne n dans $\mathbb{Z}^-$, et on l'écrit $n = -p$ avec p positif.
On écrit $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour$p$, $-u$ et v (puisque le résultat précédent est vrai pour tout u et tout p).
On a donc $\phi(p.(-u),\ v) = p.\phi(-u,\ v)$.

J'ai envie d'affirmer $\phi(-u,\ v) = -\phi(u,\ v)$. Faisons le, on reviendra dessus plus loin.
On a alors $\phi(p.(-u),\ v) = -p.\phi(u,\ v)$.
On l'écrit

$$\phi(n.u,\ v) = \phi(-p.u,\ v) = \phi(p.(-u),\ v) = -p.\phi(u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$$

C'est ce qu'on voulait.

Mais comment a-t-on
Reprenons la formule du g : $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$.
Appliquons la à $w = -u$: $\phi(0,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(-u,\ v)$.
Or, $\phi(0, v) = 0$ (troisième fois que je le dis). Il reste $\phi(u,\ v) + \phi(-u,\ v) = 0$[3].
Et c'est pareil que $-\phi(u,\ v) = \phi(-u,\ v)$

2. pardon ? j'ai oublié de dire que je conduisais une récurrence ?
3. ici, c'est le réel nul, dans nos parenthèses c'est souvent le vecteur nul

Progrès : | On a donc $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis de $\mathbb{Z}$. Et si on passait à $\mathbb{Q}$? Et même à $\mathbb{R}$?

j - Montrez pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\phi(r.u,\ v) = r.\phi(u,\ v)$.

Le passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ est classique.
On écrit $r = \dfrac{p}{q}$.
On applique la relation $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ à q, $r.u$ et v : $\phi(q.r.u,\ v) = q.\phi(r.u,\ v)$

Le premier membre devient $\phi(p.u,\ v)$.

Le résultat du i donne $p.\phi(u,\ v)$.

On a donc $p.\phi(u,\ v) = q.\phi(r.u,\ v)$.

On divise par q non nul (et entier) et le premier terme devient $r.\phi(u,\ v)$.
Progrès : | On a donc $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis de $\mathbb{Z}$ puis de $\mathbb{Q}$? On passe à $\mathbb{R}$?

k - Montrez pour tout t de $\mathbb{R}$: $\phi(t.u,\ v) = t.\phi(u,\ v)$.

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
On se donne t réel, limite d'une suite r_n de rationnels.
Pour chaque r_n on a $\phi(r_n.u,\ v) = r_n.\phi(u,\ v)$.
Quand n tend vers l'infini, le dernier membre tend vers $t.\phi(u,\ v)$ (limite dans un produit de réels).

Et le premier tend vers $\phi(t.u,\ v)$.

l - Déduisez que ϕ est un produit scalaire, puis que N est bien la norme qui en est issue.

Notre forme ϕ vérifie deux propriétés par rapport au premier vecteur : $\phi(\alpha.a,\ c) = \alpha.\phi(a,\ c)$ et $\phi(a+b,\ c) = \phi(a,\ c) + \phi(b,\ c)$.
C'est la linéarité par rapport au premier vecteur.

Mais elle est symétrique.
On tient la bilinéarité.

On a une forme bilinéaire symétrique, positive défini positive, c'est un produit scalaire.
Et on a calculé en route : $\phi(a\ a) = \dfrac{N(2.a)^2 - N(0)^2}{4} = \dfrac{(2.N(a))^2 - 0}{4} = N(a)^2$.
C'est la définition de N est la norme issue du produit scalaire ϕ.

Retour : | Je ne dirai pas que la démonstration était difficile.
Mais on comprend qu'on ne demande pas aux élèves de la connaître.
Cela ferait trop de choses à apprendre inutilement par cœur.

◃3▹ Je veux une suite d'entiers (a_n) telle que tout entier naturel k soit limite d'au moins une sous-suite de (a_n). J'ai pensé à
$(\overline{0},\ \underline{0,\ 1},\ \overline{0,\ 1,\ 2},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3},\ \overline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5},\ \overline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6},\ \underline{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7},\ \overline{0,\ 1, \ldots})$.
Calculez $(a_{n.(n+1)/2})$ pour tout n.
Écrivez un script Python qui fabrique pour N donné, les N premiers termes de la suite.
Construisez une sous-suite qui converge vers 10.
Trouvez une formule explicite pour le n^{ieme} terme de cette suite.
Que fait la moyenne de Cesàro de cette suite (calculez $(C_{n.(n+1)/2})$).
Et sa moyenne de Cesàro géométrique ?

◃4▹ ♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

On va prendre plein de termes nuls, et de temps en temps un terme grand. Mais vraiment pas souvent, pour que la moyenne tende vers 0.
On dit que $a_n$est nul, sauf quand n est une puissance de 2. Et donc, pour $n = 2^k$, on posera $a_n = k$.

0	0	1	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	4	0	...

La suite (a_n) n'est pas bornée, puisque sa sous-suite (a_{2^k}) diverge vers $+\infty$.

Et la moyenne ?
Calculons par exemple c_{2^N}. C'est une somme de 2^N+1 termes, dont beaucoup sont nuls.
Mais il y a quand même $a_{2^0}=0$, $a_{2^1}=1$, $a_{2^2}=2$ jusqu'à $a_{2^N}=N$.
La somme au numérateur vaut donc $1+2+\ldots+N$.
La moyenne de Cesàro vaut $\frac{}{2^N+1}$.
Par croissances comparées, c'est la suite géométrique qui l'emporte sur le polynôme quand N tend vers l'infini.

Et si n n'est pas une puissance de 2 ? On le cerne entre deux puissances de 2 : $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$.
Par exemple : $64 \leqslant 100 < 128$. Proprement : $N = \left[\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right]$.
La somme au numérateur vaut encore $1+2+\ldots+N$ (et depuis $u_{2^N}=N$, il n'y a eu que des 0 : a_2^N+1=0 , $a_{2^N+2}=0$ et ainsi de suite).
Mais alors $c_n = \frac{N.(N+1)}{2.(n+1)}$.
On l'encadre par 0 et $\frac{N.(N+1)}{2.(2^N)}$ car $2^N \leqslant n$.
Quand n tend vers l'infini, N tend aussi vers l'infini, et les croissances comparées invoquées font encore tendre la-dite moyenne vers 0.

◁5▷

On sait que si u et v sont bornées, alors $u.v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie *(peut on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?)*.
Montrez que si $u+v$ et $u.v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

$(n.\sin(n.\pi/2))$ et $(n.\cos(n.\pi/2))$.

◁6▷

Frais ou veau :
∘1∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β, alors il existe une sous-suite de (a_n+b_n) qui converge vers $\alpha+\beta$?
∘2∘ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
∘3∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
∘4∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.
∘5∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1.
∘6∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.

A faire.

◁7▷

♡ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée ($A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$). Montrez que $(A_{2.n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

Comme a est positive, la série associée A est croissante.
Elle n'a alors que deux possibilités : converger
ou diverger vers $+\infty$.
Si elle divergeait, alors sa sous-suite $(A_{2.n})$ divergerait aussi.
Comme elle converge, on élimine cette possibilité.
Il ne nous reste que (A_n) converge.

Sinon, on pouvait aussi encadrer A_n par $A_{2.p}$ et $A_{2.p+2}$ pour $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ (par positivité de la suite a)
et conclure par théorème d'encadrement.

Si la suite est de signe quelconque, on n'a plus accès à ces deux modèles d'arguments.
Mais ça ne vaut pas dire que c'est impossible de prouver que (A_n) converge.
Mais on a un contre-exemple. Et là, c'est sans faille.

Devinez lequel : $a_n = (-1)^n$ pour tout n.
La série $A_{2.n}$ vaut toujours 1, elle converge.

Mais (A_n) vaut $\left(\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}\right)$. Elle diverge.

◃8▹ Donnez le limite, puis un éventuel équivalent du type $a.n^\alpha$quand n tend vers $+\infty$ pour les formes (indéterminées) suivantes

$(n+1)-n$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^4-n^4$	$\ln(n+1)-\ln(n)$	$e^{n+1}-e^n$
$(2.n+1)-n$	$\sqrt{2.n+1}-\sqrt{n}$	$(2.n+1)^4-n^4$	$\ln(2.n+1)-\ln(n)$	$e^{2.n+1}-e^n$
$(n^2+1)-n$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$	$(n^2+1)^4-n^4$	$\ln(n^2+1)-\ln(n)$	$e^{n^2+1}-e^n$

	$(n+1)-n$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^4-n^4$	$\ln(n+1)-\ln(n)$	$e^{n+1}-e^n$
limite	1	0	$+\infty$	0	$+\infty$
équivalent	$1.n^0$	$\dfrac{1}{2}.n^{-1/2}$	$4.n^3$	n^{-1}	rien
	$(2.n+1)-n$	$\sqrt{2.n+1}-\sqrt{n}$	$(2.n+1)^4-n^4$	$\ln(2.n+1)-\ln(n)$	$e^{2.n+1}-e^n$
limite	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
équivalent	$1.n^1$	$(\sqrt{2}-1).n^{1/2}$	$15.n^4$	$\ln(2).n^0$	rien
	$(n^2+1)-n$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$	$(n^2+1)^4-n^4$	$\ln(n^2+1)-\ln(n)$	$e^{n^2+1}-e^n$
limite	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
équivalent	$1.n^2$	$1.n^1$	$1.n^8$	rien	rien

Pour les polynômes de degré 4, c'est le binôme qui nous le dit.

Pour les racines, on passe par la quantité conjuguée.

Pour le logarithme, c'est le classique $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n}$.
Sinon $\ln(n^2+1)-\ln(n)$ est équivalent à $2.\ln(n)-\ln(n)$ ce qui fait $\ln(n)$ et n'est pas polynômial.

Pour l'exponentielle, on factorise par exemple $e^{n+1}-e^n=e^n.(e-1)$.

◃9▹ Petit quiz très formateur.
si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.

Quels mots pouvez mettre dans le cadre :

croissante	continue	monotone
bornée	continue à droite	lipschitzienne

Donnez un argument, ou sinon un contre-exemple.

Même question avec « si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$ ». (pas pareil...)

Si f est $\boxed{\text{croissante}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.
On se donne x et y dans $\mathbb{R}$, on suppose $x\leqslant y$ et on étudie quatre cas. pardon, trois.

	$x\leqslant 0$	$0\leqslant x$
$y\leqslant 0$	$f(x)\leqslant f(y)$	impossible
	car f croissante sur $\mathbb{R}^-$	
$0\leqslant y$	$f(x)\leqslant f(0)\leqslant f(y)$	$f(x)\leqslant f(y)$
	avec les deux hypothèses	car f croissante sur $\mathbb{R}^+$

Dans tous les cas, on peut conclure favorablement.

Si f est $\boxed{\text{croissante}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle a le droit de sauter en 0. On prend $x\longmapsto\left\{\begin{array}{ccc}1 & si & x\leqslant 0\\ 0 & si & x>0\end{array}\right|$.

Si f est $\boxed{\text{continue}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.
Elle est continue en tout point a de $]-\infty,\ 0[$,
Elle est continue à gauche en 0, et aussi à droite, donc elle est continue en 0.
Elle est continue en tout point a de $]0,\ +\infty[$.

Si f est $\boxed{\text{continue}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle a le droit de sauter en 0. On prend $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & x \leqslant 0 \\ 0 & si & x > 0 \end{array} \right|$ là encore.

Attention en effet, la phrase « f est continue sur $]-\infty,\ 0]$ » ne regarde f que sur cet intervalle, et ne nous renseigne que sur la continuité à gauche en 0.

Si f est $\boxed{\text{monotone}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle peut ne pas avoir la même monotonie de chaque côté, comme $x \longmapsto x^2$ ou la valeur absolue.

A plus forte raison encore avec $]-\infty,\ 0]$ et $]0,\ +\infty[$ où on peut utiliser le même contre-exemple.

Si f est $\boxed{\text{bornée}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Si f est $\boxed{\text{bornée}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Il suffit de prendre le maximum des deux majorants.

Si f est $\boxed{\text{lipschitzienne}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Il suffit de prendre le maximum des deux rapports de Lipschitz K et K' venant de

$$\big(\forall(x,\ y) \in\ ]-\infty,\ 0]^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant K.|y-x|\big)\ et\ \big(\forall(x,\ y) \in\ [0,\ +\infty[^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant K'.|y-x|\big)$$

On prend a et b dans $\mathbb{R}$.
Si ils sont tous deux négatifs, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-a| \leqslant Max(K,\ K').|b-a|$.
Si ils sont tous deux positifs, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K'.|b-a| \leqslant Max(K,\ K').|b-a|$.
Si a est négatif et b positif, on écrit

$$|f(b)-f(a)| = |f(b)-f(0)+f(0)-f(a)| \leqslant |f(b)-f(0)|+|f(0)-f(a)|$$

$$|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-0|+K'.|0-a|$$
$$|f(b)-f(a)| \leqslant Max(K,K').|b-0|+Max(K,K').|0-a|$$

$$|f(b)-f(a)| \leqslant Max(K,K').\big(b+(-a)\big) = Max(K,K').|b-a|$$

Si a est positif et b négatif, je ne vais quand même pas le rédiger !

Si f est $\boxed{\text{lipschitzienne}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
On a le droit de la faire sauter en 0. On peut prendre encore le même contre-exemple.
Ou $x \longmapsto x$ sur $]0,\ +\infty[$ et $x \longmapsto -x-1$ sur $]-\infty,\ 0]$.

◃10▹ Un élève écrit : "f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0)=1$; on dérive : $f'(0)=0$". Montrez qu'il a tort.
Un élève écrit : "f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0)=1$; on dérive : $f'(0)=0$". Montrez qu'il a raison.

Le premier a totalement tort (et pourtant, on trouve des copies de concours où des élèves dérivent une information qu'on n'a qu'en un point). On rappelle que pour dériver, il faut connaitre l'application au voisinage du point, puisque la dérivée est une histoire de développement limité d'ordre 1.
On sait que $\exp(0)$ est égal à 1, mais quand on dérive, on ne trouve pas 0.
Et visuellement, vous devez voir les deux graphes qui se croisent : exp et $x \longmapsto 1$. Les deux coïncident en 0, mais pas leurs dérivées.
C'est à partir du moment où je l'ai vu ainsi que je me suis dit que c'était vraiment crétin de dériver une relation « en un point ».

Qu'est ce qui change pour le second élève ? Elle est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ (même pas dérivable, mais à valeurs dans $\mathbb{Q}$).

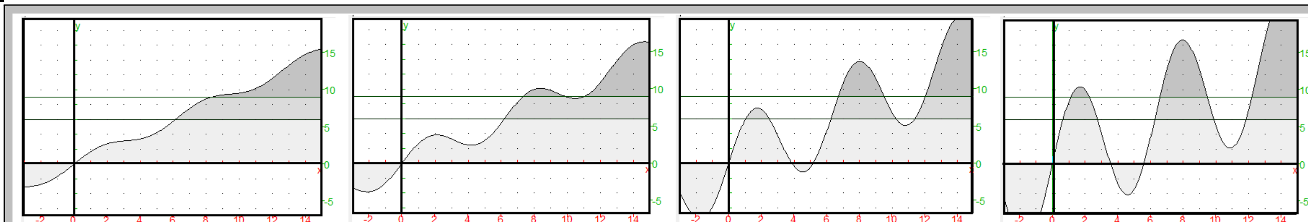
Et comme $\mathbb{Q}$ est un ensemble où on ne peut jamais relier deux points, f est forcément constante.

Si elle ne l'était pas, elle prendrait une autre valeur a différente de 1 et par théorème des valeurs intermédiaires, elle atteindrait toutes les valeurs entre 1 et a, y compris des irrationnelles (densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Étant constante, elle est dérivable, de dérivée nulle.

Idiotie : j'ai failli proposer comme dernier exercice
Un élève écrit : "f est continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0)=1$; on dérive : $f'(0)=0$". Montrez qu'il a tort.
Et la solution est « il n'a pas mis de e à continue ».

◁11▷



a est un réel positif. Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x)+x$ est elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x)+x$ les équation $f(x)=b$ d'inconnue x ont elles de 1 à 3 solutions ?
Existe-t-il une valeur de a pour laquelle chaque équation $f(x)=b$ d'inconnue x a exactement 3 solutions ?

Pour a égal à 0, on a Id, et elle est évidemment bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mais en fait, tant que a est plus petit que 1, l'application $x \longmapsto a.\sin(x)+x$ a une dérivée $a.\cos+1$ qui reste positive (encadrer $a.\cos$ par $-a$ et a et constater que $a.\cos+1$ reste toujours plus grand que $1-a$). L'application $x \longmapsto a.\sin(x)+x$ est strictement croissante, elle est alors injective.
Le théorème des valeurs intermédiaires avec les limites aux bornes donne une application bijective de $]-\infty, +\infty[$ dans lui même.

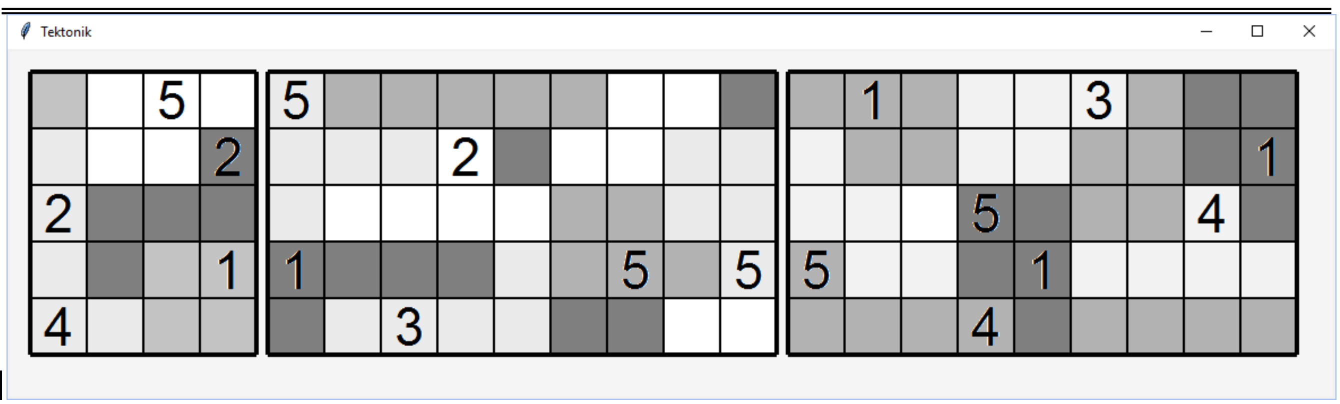
Ceci est aussi valable dans le cas $a=1$. La dérivée s'annule, mais seulement en des points isolés. L'application (classique) $x \longmapsto \sin(x)+x$ est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas néanmoins, le graphe de f_a a une tangente horizontale, et sa réciproque a une « tangente verticale ».

Pour a plus grand que 1, l'application change plusieurs fois de sens de variations, et perd son injectivité.
Rien que sur l'intervalle $[0, \pi]$, on dresse un tableau de variations

	0		$Arccos(-1/a)$		π		$2.\pi - Arccos(-1/a)$		$2.\pi$
f_a	$1+a>0$	$\oplus$	0	$\ominus$	$1-a<0$	$\ominus$	0	$\oplus$	$1+a>0$
			maximum local	$\searrow$					$2.\pi$
		$\nearrow$			π	$\searrow$		$\nearrow$	
							minimum local		
	0								

Par exemple, la valeur $f_a(Arccos(-1/a))$ est atteinte une fois en $Arccos(-1/a)$ puis une fois entre $2.\pi - Arccos(-1/a)$ et $2.\pi$ (T.V.I.).

A terminer.



◁12▷

◁13▷ ♡ Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$). On suppose $\int_a^b f(t).dt = 0$. Montrez que f s'annule et change de signe au moins une fois en un point c de $[a, b]$ (raisonner par l'absurde, ou par théorème de Rolle). On suppose de plus $\int_a^b t.f(t).dt = 0$. Déduisez que f s'annule en fait au moins deux fois sur $[a, b]$ (étudier $\int_a^b (t-c).f(t).dt$).
♡ On suppose $\int_a^b t^k.f(t).dt = 0$ pour tout k de 0 à n. Montrez que f s'annule et change de signe au moins $n+1$ fois.

Supposons que f ne s'annule pas. Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a, b]$, elle reste de signe constant.
quitte à remplacer f par $-f$, on va dire qu'elle reste positive.
Mais alors son intégrale est positive.
De plus, comme f est strictement positive, il existe au moins un point où elle est strictement positive. Par continuité, elle le reste sur un intervalle autour de ce point, et l'intégrale est strictement positive.[4]
On tient notre contradiction.

La méthode moins matheuse consiste à introduire l'application $F = x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$.
Elle est continue et même dérivable (de dérivée f).
Elle vaut 0 en a (intégrale sur un intervalle réduit à un point) et en b (hypothèse).
L'application dérivable prend la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle.
Par théorème de Rolle, sa dérivée s'annule au moins une fois : il existe c vérifiant $F'(c) = 0$, c'est à dire $f(c) = 0$.

> Pourquoi je ne trouve pas cette preuve si bien en tant que matheux, alors même que tout y est parfaitement rigoureux ?
> Juste, on fait appel à de gros théorèmes (lien entre intégrale et primitive, Rolle), alors qu'il existe une preuve simple reposant juste sur la continuité.
> Si vous avez une âme de physicien, vous dites « oui et alors, du moment qu'on arrive à la réponse, même avec de gros théorèmes, on s'en fout ».
> Et si vous avez une âme d'esthète (et donc de matheux), vous dites « oh, c'est vrai, autant payer le prix minimum, non ? ».

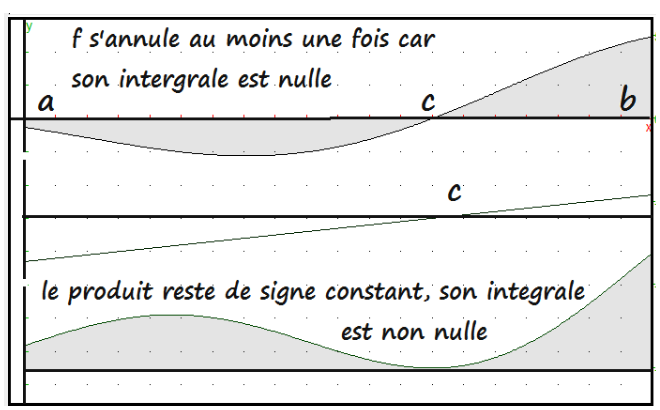
Passons à $\int_a^b f(t).dt = \int_a^b t.f(t).dt = 0$. Il faut montrer que f s'annule au moins deux fois.
Avec $\int_a^b f(t).dt = 0$, on vient de montrer qu'il existait c vérifiant $f(c) = 0$.
Mais est-ce le seul ?
Par l'absurde, si c'est le seul, alors f reste de signe constant sur $[a, c]$, puis sur $[c, b]$ (contraposée du théorème des valeurs intermédiaires encore).
Et elle change de signe en c puisque sinon $\int_a^b f(t).dt$ serait strictement positive (ou strictement négative).

Mais alors, f et $x \longmapsto x - c$ changent de signe en même temps en c.

Le produit $t \longmapsto f(t).(t-c)$ reste donc de signe constant sur $[a, b]$.

Or, son intégrale est $\int_a^b t.f(t).dt - c.\int_a^b f(t).dt$ par linéarité. Et elle vaut 0.

On tient notre contradiction...



---

4. rappelons que $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & x = 1 \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$ est positive, strictement en un point, mais son intégrale est nulle...

La résultat général se prouve ensuite par récurrence sur n.

◁ 14 ▷ **Existe-t-il un intervalle du type $[0,\ a]$ sur lequel la valeur moyenne du sinus vaut $1/3$?**

On veut $\frac{1}{a}.\int_0^a \sin(t).dt = \frac{1}{3}$.
Ceci revient à demander $3.a - 3.a.\cos(a) - 1 = 0$.
On définit cette application continue : $a \longmapsto 3.a - 3.a.\cos(a) - 1$.
Elle vaut -1 en 0 et $\frac{3.\pi}{2} - 1$ en $\frac{\pi}{2}$.
Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois.

Mais on n'a pas de valeur explicite...

◁ 15 ▷ **Pour f intégrable de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on appelle valeur moyenne l'application $x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(u).du$ (notée ϕ) ; c'est en fait la valeur moyenne sur $[0,\ x]$ de f.
Montrez que si f est positive, ϕ l'est aussi.
Montrez que si f est croissante, ϕ l'est aussi. Preuve de physicien(ne) naïf : dérivez, en estimant que dans votre monde idéalisé tout est dérivable. Preuve de mathématicien(ne) : $\int_0^1 f(t.x).dt$.
Tracez l'application "valeur moyenne de la partie entière".**

A faire.

◁ 16 ▷ **Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne est une suite de Cauchy.**

On écrit les deux hypothèses, et la conclusion, comme toujours. Et normalement, tout vient en une fois

H	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{matrix} p \geqslant C_\varepsilon \\ q \geqslant C_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \lvert a_p - a_q \rvert \leqslant \varepsilon$
H	$\exists K,\ \forall (x,y),\ \lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant K.\lvert x - y \rvert$
?	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists H_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{matrix} p \geqslant H_\varepsilon \\ q \geqslant H_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \lvert f(a_p) - f(a_q) \rvert \leqslant \varepsilon$

On se donne ε et on prend $H_\varepsilon = C_{\varepsilon/K}$ et tout passe $\begin{matrix} p \geqslant H_\varepsilon \\ q \geqslant H_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \lvert a_p - a_q \rvert \leqslant \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow \lvert f(a_p) - f(a_q) \rvert \leqslant K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

I∼0) **On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.**

L'espace des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour les stabilités, on rappelle que si f et g sont lipschitziennes des rapports K_f et K_g alors $f + g$ est lipschitzienne de rapport $K_f + K_g$ *(pas forcement le meilleur, mais qu'importe)*. Et $\lambda.f$ est lipschitzienne de rapport $\lvert\lambda\rvert.K_f$. Enfin, l'application nulle est lipschitzienne de rapport 0 *(par exemple)*.

I∼1) **Montrez que $f \longmapsto ||f||$ est une norme sur $(E, +, .)$, sachant que l'on pose $||f|| = Sup(\lvert f(t)\rvert \mid t \in [0,\ 1])$.**

N est une norme sur $(F, +, .)$ où F est un espace vectoriel

Le mnémotechnique pour retenir cette liste, c'est "Sophie a perdu son haut" si vous reprenez l'idée de François-Xavier il y a déjà vingt deux ans de ça, et si vous voulez j'ai des photos de la Sophie en question. Avec son O

E	Existence	pour tout $\overrightarrow{u}$ de E, $N(\overrightarrow{u})$ existe
P	Positivité	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) \geqslant 0$
S	Séparation	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow N(\overrightarrow{u}) > 0$ $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
H	Homogénéité	$\forall (\lambda,\ \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lvert\lambda\rvert.N(\overrightarrow{u})$
I	Inégalité triangulaire	$\forall (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \in E^2,\ N(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \leqslant N(\overrightarrow{u}) + N(\overrightarrow{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptoires "il est évident que" :
on se donne f et g ; pour tout x, on a : $\lvert f(x) + g(x)\rvert \leqslant \lvert f(x)\rvert + \lvert g(x)\rvert \leqslant ||f|| + ||g||$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

On montre que $||.||$ est une norme.

Existence Chaque application lipschitzienne est continue sur le segment $[0,\ 1]$ donc bornée et atteint ses bornes. Mais c'est plutôt à $\lvert f\rvert$ qu'il faut appliquer le théorème de compacité.

Positivité La borne supérieure $||f||$ majore au moins $\lvert f(0)\rvert$. par transitivité, elle est positive.

$\boxed{\text{Séparation}}$ Supposons $||f||$ nulle. Alors pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|f-t)| \leqslant ||f||$ par définition de la borne supérieure. Par antisymétrie, chaque $f(t)$ est nul. C'est la définition de f est nulle de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer $((\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}) \Rightarrow (||\overrightarrow{u}|| > 0))$ *ou* $((||\overrightarrow{u}|| = 0) \Rightarrow (\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}))$. *Par contraposée.*

$\boxed{\text{Inégalité triangulaire}}$ On prend f et g. Pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$ par inégalité triangulaire. Par définition de « la borne supérieure est un majorant » : $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)| \leqslant ||f||+||g||$. Le réel $||f||+||g||$ est un majorant de $\{|f(t)+g(t)|\ |\ t \in [0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant de cet ensemble, on a $||f+g|| \leqslant ||f||+||g||$.

C'est le type de question classique sur lequel on pourra vous tester aux oraux de concours. Un passage aux bornes supérieures à savoir mener proprement, sans se contenter de dire « il est évident que ». savoir rendre propre et rigoureux ce qui semble évident, c'est des maths. Et du travail d'ingénieur.

$\boxed{\text{Homogénéité}}$ Là aussi, ça se fait proprement. Pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|\lambda.f(t)| = |\lambda|.|f(t)| \leqslant |\lambda|.||f||$. Le réel $|\lambda|.||f||$ majore l'ensemble $\{|\lambda.f(t)|\ |\ t \in [0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $||\lambda.f|| \leqslant |\lambda|.||f||$. Zut, il en manque la moitié. Mais si on l'applique à $\dfrac{1}{\lambda}$ et $\lambda.f$, on a $\left|\left|\frac{1}{\lambda}.\lambda.f\right|\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}.||\lambda.f||$. On a donc $||f|| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}.||\lambda.f||$. On a l'autre inégalité.

Celle là, elle est vraiment particulière, et il faut avoir le profil « étoile » pour en goûter la saveur, plutôt que d'affirmer $Sup(|\lambda|.y\ |\ y \in E\} = |\lambda|.Sup(y\ |\ y \in E)$.

I~2) Pour f dans E, on pose $L(f) = Sup\left\{\dfrac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}\ |\ 0 \leqslant a < b \leqslant 1\right\}$. Montrez que L est une semi norme sur $(E, +, .)$ *(semi-norme, c'est EPHI)*.

$\boxed{\text{Existence}}$ Pour définit $L(f) = Sup\Big(\dfrac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}\ |\ 0 \leqslant a < b \leqslant 1\Big)$, il faut prouver que l'on a affaire à une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée. On y trouve au moins $\dfrac{|f(1)-f(0)|}{1-0}$. Cette partie est majorée par K puisqu'on a dit $\exists K,\ \forall(x,y),\ |f(x)-f(y)| \leqslant K.|y-x|$.
On a donc une borne supérieure qui est « *le plus petit rapport de Lipschitz* ».

$\boxed{\text{Positivité}}$ Cette quantité est toujours positive, puisque c'est le plus petit majorant d'un ensemble de réels positifs.

$\boxed{\text{Homogénéité}}$ Si on passe de f à $\lambda.f$, tous les taux d'accroissement sont multipliés par $|\lambda|$, leur borne supérieure aussi *(il faudrait normalement le traiter en deux majorations comme à la question « norme »)*.

$\boxed{\text{Inégalité triangulaire}}$ On se donne f et g. Pour tout couple $(a,\ b)$, on a

$$\frac{f((b)+g(b)-f(a)-g(a)|}{|b-a|} \leqslant \frac{|f((b)-f(a)|}{|b-a|} + \frac{|g(b)-g(a)|}{|b-a|} \leqslant L(f)+F(g)$$

par définition de « majorant »
Le réel $L(f)+L(g)$ majore tous les taux d'accroissements de $f+g$. par définition, $L(f+g)$ est le plus petit majorant de ces taux, donc $L(f+g) \leqslant L(f)+L(g)$.

Pour ce qui est de la séparation, on ne l'a pas. Si $L(f)$ *est nulle, cela veut juste dire que tous les taux d'accroissement sont nuls,* f *est juste constante et pas forcément identiquement nulle.*

I~3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = ||f'||$. *Et si vous préférez des photos de François-Xavier, j'ai aussi.*

Supposons f de classe C_1. L'application f' est donc continue. On peut donc définir sa norme $||f'||$ (maximum de $|f'|$ sur $[0,\ 1]$).
Pour tout couple $(a,\ b)$, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant ||f'||.|b-a|$. C'est le résultat du cours qui dit que pour montrer qu'une application est lipschitzienne, il suffit de borner sa dérivée.
En effet,

$$|f(b)-f(a)| = \Big|\int_a^b f'(t).dt\Big| \leqslant \int_a^b |f't)|.dt \leqslant \int_a^b ||f'||.dt = (b-a).||f'||$$

Il ne reste qu'à diviser.
Le réel $||f'||$ est un majorant de l'ensemble des $\dfrac{|f-(b)-f(a)|}{b-a}$. Par définition du plus petit majorant, $L(f)$ est plus petit que $||f'||$.
Ensuite, pour tout a, $f'(a)$ est la limite des $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}$ quand x tend vers a. Chacun de ces taux est majoré par

$L(f)$. La limite de ces taux (qui existe par dérivabilité) est encore plus petite que $L(f)$.
Le réel $L(f)$ est un majorant de $\{|f'(a)| \mid a \in [0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $||f'|| \leqslant L(f)$.
On a deux inégalités qui se transforment en une égalité par antisymétrie de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

I∼4) Calculez la norme $||f||$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$s_n = \theta \longmapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$	$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \lvert 2.x-1\rvert$	$x \longmapsto \ln(1+x)$

Quand les applications offertes sont de classe C^1, pour trouver leur rapport de Lipschitz $L(f)$, il suffit de chercher le maximum de leur dérivée en valeur absolue.

fonction	$s_n = \theta \longmapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$	$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \lvert 2.x-1\rvert$	$x \longmapsto \ln(1+x)$
dérivée	$\theta \longmapsto n.\cos(n.\theta)$	$c_n = \theta \longmapsto -n.\sin(n.\theta)$	$x \longmapsto n.x^{n-1}$	pas dérivable	$x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$
maximum	n en $\theta = 0$	n en $\theta = \pi/(2.n)$	n en $x = 1$		1 en $x = 0$

On mettra de côté le cas de $x \longmapsto x^0$, constante sur $[0,\ 1]$, dont le rapport de Lipschitz est nul.

L'application $x \longmapsto |2.x-1|$ n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$. Le graphe « en V » a un point anguleux.
Sur le premier segment, f est lipschitzienne de rapport 2 car affine de la forme $t \longmapsto 1-2.t$.
Sur le segment suivant, elle est encore lipschitzienne de rapport 2 car de la forme $t \longmapsto 2.t-1$.
Mais de là à conclure... Dans la quantification $\forall (a,\ b) \in [0\ 1]^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant 2.|b-a|$, il faut étudier tous les cas :

a et b dans $[0,\ 1/2]$	a dans $[0,\ 1/2]$ et b dans $[1/2,\ 1]$
b dans $[0,\ 1/2]$ et a dans $[1/2,\ 1]$	a et b dans $[1/2,\ 1]$

Si a est dans $[0,\ 1/2]$ et b dans $[1/2,\ 1]$, on a quand même $\Big||2.a-1|-|2.b-1|\Big| \leqslant 2.|a-1|$ par la seconde inégalité triangulaire.
L'application $x \longmapsto |2.x-1|$ (variante de $t \longmapsto |t|$) est bien lipschitzienne, de rapport 2, atteint pour des couples du même « demi-intervalle ».

I∼5) Montrez que $f \longmapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme *(notée Λ)*. Montrez pour tout f de $||f|| \leqslant \Lambda(f)$.
Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E,\ L(f) \leqslant K.||f||$.

Maintenant, on prend $f \longmapsto |f(0)| + L(f)$.
Existence $L(f)$ existe, de même que $|f(0)|$.

Positivité C'est une somme de deux réels positifs.

Homogénéité Pour f et λ donnés, on a bien $|\lambda.f(0)| + L(\lambda.f) = |\lambda|.|f(0)| + |\lambda|.L(f)$.

Inégalité triangulaire On se donne f et g, on somme deux formules déjà connues (l'inégalité triangulaire usuelle et inégalité triangulaire pour L) :

$$|(f+g)(0)| \leqslant |f(0)| + |g(0)| \text{ et } L(f+g) \leqslant L(f) + L(g)$$

Séparation Le seul point intéressant de la question. On se donne f. On suppose $|f(0)| + L(f) = 0$. Comme ce sont deux réels positifs, chaque des deux est nul. L'égalité $L(f) = 0$ force f à être constante, par exemple égale à sa valeur en 0. L'autre égalité dit « mais $f(0)$ est nul ». C'est fini, f est nulle. Par contraposée, si f n'est pas identiquement nulle, elle a une norme strictement positive.

Si on se donne f dans E et x dans $[0,\ 1]$, on a $f(x) = f(x) - f(0) + f(0)$ donc

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant L(f).|x-0| + |f(0)|$$

par caractère lipschitzien ($L(f)$ est le plus petit rapport de Lipschitz, c'en est bien un).
On majore x par 1 : $|f(x)| \leqslant L(f) + |f(0)| = \Lambda(f)$.
Le réel $\Lambda(f)$ est un majorant de $(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1])$. par définition de plus petit des majorants, on a $||f|| \leqslant \Lambda(f)$.

En revanche, les s_n définies plus haut (c'est $\theta \longmapsto \sin(n.\theta)$) ont toutes pour norme 1 : $||s_n|| = 1$.
En revanche leur norme de Lipschitz vaut n.
On ne peut donc pas avoir pour tout f de E : $\Lambda(f) \leqslant K.||f||$. Il suffirait, pour un K proposé, de donner s_n avec n plus grand que K.

II∼0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ K_\varepsilon \leqslant p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0,\ 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

L'hypothèse $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ K_\varepsilon \leqslant p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$ dit que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme

Λ.
On se donne x dans $[0,\ 1]$ (lui il ne bouge pas, c'est n qui va bouger).
La majoration $|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant ||f_p - f_q|| \leqslant \Lambda(f_p - f_q)$ (définition de la borne supérieure et question précédente) permet de dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy.
Comme on est dans $\mathbb{R}$, elle converge.

Si vous oubliez de préciser qu'on est dans $\mathbb{R}$, vous avez perdu !
Sinon, la valeur de la limite de la suite n'est pas connue.

II∼1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E.

Il reste à prouver que f est à son tour lipschitzienne.
Pour x et y donnés, ainsi d'ailleurs que n, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L(f_n).|x - y| \leqslant \Lambda(f_n).|x - y|$.
Mais le rapport $\Lambda(f_n)$ dépend encore de n.
Mais la suite $\Lambda(f_n)$ vérifie $\Big|\Lambda(f_p) - \Lambda(f_p)\Big| \leqslant \Lambda(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$ pour p et q plus grands que K_ε. Elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc dans $\mathbb{R}$ vers une limite qu'on va noter μ. Oh, et puis on n'a pas besoin de tant.
Elle est majorée par un réel qu'on va appeler M.
Mais alors on a donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L(f_n).|x - y| \leqslant \Lambda(f_n).|x - y| \leqslant M.|x - y|$.
On ne garde que le début et la fin, et on fait tendre n vers l'infini (on sait que $f_n(x)$ et $f_n(y)$ convergent.
On a finalement $|f(x) - f(y)| \leqslant M.|x - y|$. L'application f est à son tour lipschitzienne.

III∼0) Pour tout x de $[0,\ 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque F_n est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est il dans E ?

On se donne x. On pose donc $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Par récurrence immédiate, tous les termes de la suite existent.
Étudions l'application $t \longmapsto t + \dfrac{x - t^2}{2}$ *(x est fixé, on peut la nommer φ_x).*
Elle va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle a pour dérivée $1 - t$. Elle est croissante puis décroissante.
Elle coupe la bissectrice en $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, ce qui est avant 1.
On a donc : $\forall t \in [-\sqrt{x},\ \sqrt{x}],\ -\sqrt{x} = \varphi_x(\sqrt{x}) \leqslant \varphi_x(t) \leqslant \varphi_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$.
Par récurrence immédiate, comme $P_0(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, tous les termes de la suite sont entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$.

Si vous ne me faites pas cette récurrence qui prouve que tous les termes sont dans le bon intervalle, n'espérez pas avoir plus du tiers des points. Cela signifie en effet que vous confondez un résultat sur le premier terme de la suite avec un résultat sur tous les termes :
si, sur l'intervalle I le graphe de f est au dessus de la bissectrice, alors il y a trois conclusions, dont une totalement débile (celle que vous me balancez parce que vous avez des réflexes de « formules par cœur » et pas une vision des objets et des variables) :
- *si u_0 est dans I alors $u_1 \geqslant u_0$ (passionnant, la suite est croisssante... pour un rang)*
- *tous les $u_n$sont dans I donc pour tout n, alors pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$*
- *si u_0 est dans I alors la suite est croissante (crétnisme pur)*

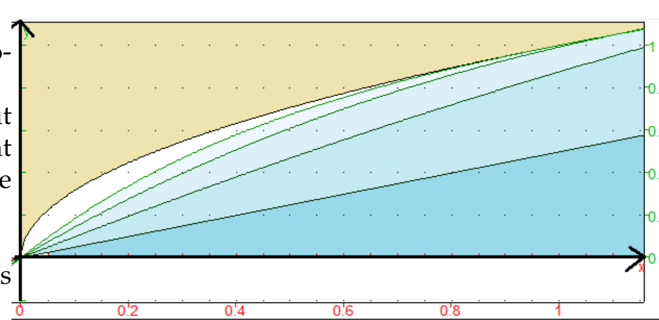
III∼1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \longmapsto t + \dfrac{x - t^2}{2}$ sur $[0,\ 1]$).

III∼2) La limite des P_n est elle dans E ?

Maintenant, directement, si $F_n(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$ alors $x - (F_n(x))^2$ est positif. On a donc $F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2} \geqslant F_n(x)$.

La suite est croissante. Comme elle est croissante majorée, elle converge, vers son plus petit majorant.
Ce majorant est forcément un point fixe. Ce ne peut être que $\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$ Comme les termes de la suite sont positif (croissante, de premier terme 1), la seule limite possible est donc $\sqrt{x}$.

Pour tout x la suite $(F_n(x))$ converge en croissant vers $\sqrt{x}$.



L'application obtenue à la limite a perdu son caractère lipschitzien.

Par récurrence sur n, chaque F_n est un polynôme. C'est d'abord le polynôme nul, puis le polynôme $x \longmapsto \dfrac{x}{2}$. Au rang suivant, on trouve $x \longmapsto x - \dfrac{x^2}{8}$. Ensuite, on a $x \longmapsto \dfrac{192.x - 80.x^2 + 16.x^3 - x^4}{128}$ *(je ne vous ai pas demandé de le calculer)*.
Si F_n est un polynôme en x *(à coefficients rationnels)*, de degré 2^{n-1}, alors $(F_n)^2$ est de un polynôme de degré $(2^{n-1}).2$.
Par addition est soustraction, F_{n+1} est encore un polynôme et son terme dominant ne peut venir que de $\dfrac{-(F_n)^2}{2}$.
Notre récurrence prouve que $\boxed{P_n \text{ est de degré } 2^{n-1}}$ *(pour n non nul)*.

Chaque P_na pour dérivée un polynôme. Cette dérivée est alors bornée sur le segment $[0,\ 1]$. Ayant une dérivée bornée, chaque $P_n$est dans E.

En revanche, la limite des P_n n'est pas dans E.

◁17▷ ♡ Complétez $F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2.a + \heartsuit.b \\ 3.a - b \end{pmatrix}$ sachant que F admet plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}^2$ *(un point fixe de f c'est une solution de $f(x) = x$)*.
Déterminez $F \circ F \circ F \circ F$. Résolvez $F(F(U)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un point fixe, c'est un vecteur propre de valeur propre 1 : $M.U = U$.
On en détecte la présence (autre que $U = 0_2$ puisqu'on a dit plusieurs) en disant que l'équation $(M - 1.I_2).U = 0_2$ admet d'autres solutions que la solution triviale.
On annule donc $\det(M - 1.I_2)$. Avec ici $M = \begin{pmatrix} -2 & \heartsuit \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Et sans calcul, car on est en maths : 1 est valeur propre, et la trace vaut -3.
C'est donc que l'autre valeur propre vaut -4.
Le produit des valeurs propres vaut -4.
Le déterminant vaut -4.
♡ vaut 2.

On vérifie alors $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et tous les multiples conviennent encore.

Pour ce qui est de F^4, on élève la matrice à la puissance 4.
A la main : $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ logiquement de spectre $\{1, 16\}$ et déterminant 16.

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154 & -102 \\ -153 & 103 \end{pmatrix}$$

à mettre sous forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 154.a - 102.b \\ \dots \end{pmatrix}$.

Disposant de M^2 inversible, on résout $M^2.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on trouve $\begin{pmatrix} 13/16 \\ 19/16 \end{pmatrix}$.

◁18▷ $\sqrt{10}$, $\sqrt{10.\sqrt{10}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}$, $\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10..\sqrt{10}}}}}$.
Mettez cette suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez qu'elle est croissante, majorée et donnez sa limite.

$u_0 = \sqrt{10}$ et $u_{n+1} = \sqrt{10.u_n}$ c'est tout.
La suite est croissante. En effet, $u_1 = \sqrt{10; \sqrt{10}} \geqslant \sqrt{10} = u_0$
si à un rang n on a $u_{n+1} \geqslant u_n$
alors $10.u_{n+1} \geqslant 10.u_n$ (multiplicateur positif)
puis $\sqrt{10.u_{n+1}} \geqslant \sqrt{10.u_n}$ (application croissante)
et donc $u_{n+2} \geqslant u_n$

Remarque : Ici, on a utilisé « f croissante implique (u_n) monotone ».
Méfiez vous, ce n'est pas « f croissante implique (u_n) croissante ».
Tout dépend de u_1 par rapport à u_0.
Par exemple $x \longmapsto x - 1$ est croissante, mais la suite « $u_{n+1} = u_n - 1$ » est décroissante...

On doit majorer la suite. On va la majorer par ce qui doit bien être sa limite : le point fixe.
On résout au passage $x = \sqrt{10.x}$ et on trouve $x = 10$ (ou $x = 0$, mais ça, on laisse de côté).

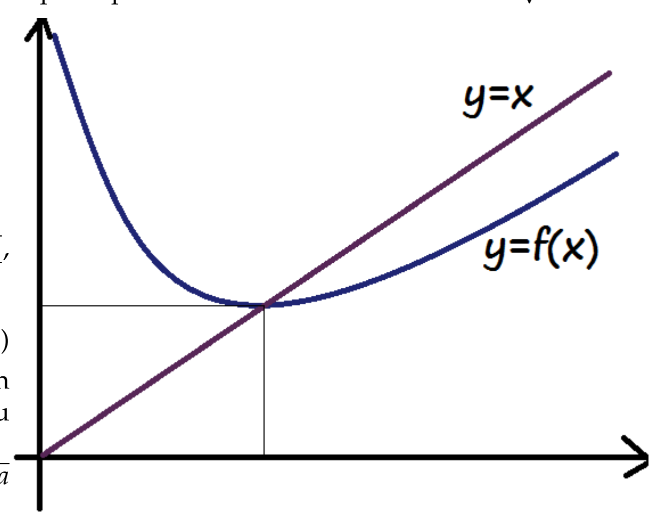
On a $u_0 \leqslant 10$.
On suppose pour un n donné : $u_n \leqslant 10$
$10.u_n \leqslant 100$
$u_{n+1} = \sqrt{10.u_n} \leqslant \sqrt{100} = 10$
La suite est croissante, majorée. Elle converge.
Et sa limite ne peut être que 10.

◁19▷ $\heartsuit^2$ a est un réel strictement positif donné. On définit la suite u par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2}$ pour tout n (et $u_0 = a$ par exemple).
Montrez que la suite u converge.
On pose alors $r_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Exprimez r_{n+1} à l'aide de r_n. Montrez : $|u_n - \sqrt{a}| = O(r_0^{(2^n)})$ *(la convergence est très très rapide !).*

Un grand classique de la convergence très très rapide. Vers $\sqrt{a}$.
Déjà, par récurrence sur n, tous les termes de la suite sont strictement positifs.

On va montrer qu'elle est monotone, bornée.
Mais bornée par quoi ? Par 0, certes mais aussi ?

Le mieux est de voir le point fixe : on résout $x = \dfrac{x + \dfrac{a}{x}}{2}$ on passe par $2.x^2 = x^2 + a$ et on trouve $x = \sqrt{a}$.



On étudie les variations de $x \longmapsto \dfrac{x^2 + a}{2.x}$ sur $]0,\ +\infty[$, domaine sur lequel on est sûr de rester.
On constate que f (si tel est le nom de $x \longmapsto \dfrac{x^2 + a}{2.x}$) est décroissante puis croissante, avec un minimum en $\sqrt{a}$, égal à $\sqrt{a}$ (dérivation, tableau de variations, tout du niveau Terminale, adjugé).
On a donc, à partir du rang 1, quoi qu'on fasse : $u_n \geqslant \sqrt{a}$ (puisque $u_n = f(u_{n--1}) \geqslant \sqrt{a}$).
On a donc pour tout n plus grand que 1, $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Mais ça ne majore pas la suite.
Mais qu'importe, puisqu'elle décroit.
Comment on sait ça ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2 + a}{2.u_n} - u_n = \frac{a - (u_n)^2}{2.u_n}$$

Et comment on a le signe de ce truc ? En rappelant : $u_n > \sqrt{a}$.

Conseil :
| Ne vous ruez pas tout de suite sur la monotonie des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
| Vos profs de Terminale ont dû vous le dire.
| Sinon, ils ont failli à leur devoir.
| On commence par encadrer la suite, PUIS on étudie sa monotonie, souvent en utilisant l'encadrement.
| Et pour deviner l'encadrement, un tableau de variations, une recherche de points fixes. Et d'intervalles stables.

La suite est décroissante *(à partir du rang* 1*)*,
minorée par $\sqrt{a}$ *(à partir du rang* 1*)*
Elle converge.

Et maintenant qu'on sait qu'elle converge, on sait que c'est vers un point fixe.
C'est donc vers $\sqrt{a}$.

Remarque : | L'existence de la limite repose souvent sur « monotone bornée ». Et on trouve la valeur de la limite par « point fixe ».

Mais ici, on va faire mieux, on va prouver que la convergence est très rapide.

Par positivité de la suite, chaque $\dfrac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}$ existe. Par définition

$$r_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}}=\frac{\dfrac{(u_n)^2+a}{2.u_n}-\sqrt{a}}{\dfrac{(u_n)^2+a}{2.u_n}+\sqrt{a}}=\frac{(u_n)^2+a-2.\sqrt{a}.u_n}{(u_n)^2+a+2.\sqrt{a}.u_n}$$

en multipliant haut et bas par $2.u_n$.

On identifie remarquablement : $r_{n+1}=\dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{(u_n+\sqrt{a})^2}=(r_n)^2$. Trop fort !

On a alors par récurrence *(presque)* immédiate sur n : $r_n=(r_0)^{2^n}$. Et c'est bien $(r_0)^{(2^n)}$ avec un gros exposant.
Attention, ce n'est pas une série géométrique ! C'est pire.
Mais il y a bien une suite géométrique dans l'histoire : $(\ln(r_n))$. De raison 2.

On a donc $r_n=\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$ ou aussi $\dfrac{u_n-\sqrt{a}}{u+\sqrt{a}}=\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

On encadre : $\dfrac{|u_n-\sqrt{a}|}{u_0+\sqrt{a}}\leqslant\dfrac{|u_n-\sqrt{a}|}{u_n+\sqrt{a}}=\left(\dfrac{|a-\sqrt{a}|}{a+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$

En gros, à chaque étape, le nombre de chiffres exacts double.
Un exemple avec $a=3$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	3	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{18817}{10864}$	$\frac{708158977}{408855776}$	
approchée	3	2	1.75	1.73214285	1.732050810	1.7320508075688772952543 53	
« vraie valeur »	1.73205080756887729352744634151 à 10^{-30} près						

$u_7\simeq\sqrt{3}$ à 10^{-72} près !
$u_8\simeq\sqrt{3}$ à 10^{-145} près !

◁20▷ Montrez que si f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t).dt=0$ alors elle admet au moins un point fixe *(on pourra étudier $f-Id$ sur $[-1,\ 1]$ et montrer qu'elle ne peut pas rester de signe constant).*

Un classique. Un point fixe, c'est une solution de $f(x)=x$ (« fixe » car f n'a aucun effet sur lui). Mais il faut le voir comme une intersection du graphe avec la bissectrice (encore un dessin, encore un dessin !).
On va donc tout naturellement étudier $f-Id$. Ou ce que vous appelez $f(x)-x$. A tort, puisque $f(x)-x$ est un pauvre nombre et pas un graphe ni une fonction.

On pose $g=f-Id$ et on calcule

$$\int_0^1 g(t).dt=\int_0^1 f(t).dt-\int_0^1 t.dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Cette intégrale est nulle. La fonction g ne peut pas être toujours positive (son intégrale serait positive) ni toujours négative (son intégrale serait négative).
Elle change donc de signe.
Et en tant que fonction continue qui change de signe sur un intervalle, elle s'annule au moins une fois.

Et toc ! Zéro calcul, juste de l'intuition et un dessin.
Si si, un dessin. Si le graphe de f était toujours sous la bissectrice, son intégrale ne pourrait pas valoir $1/2$. De même si il était toujours au dessus. Donc, g est vraiment la bonne fonction...

◃21▹ Montrez toute suite réelle monotone est de signe constant à partir d'un certain rang.
Montrez que si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors $(a_n \times b_n)$ ne l'est pas forcément.
Un élève affirme « oui, mais si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors à partir d'un certain rang, les deux restent de signe constant, leur produit est alors de signe constant, et en multipliant membre à membre les inégalités, leur produit est monotone ». Vrai ou Faux ?
Non, pas « Vraiou faux, l'élève a-t-il fit ça », mais « vrai ou faux, ce que dit l'élève est correct ».

◃22▹ Pour tout n, on pose $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+n})$. Un élève affirme : $\sqrt{n^2+n} \simeq n$ donc $\cos(\pi.\sqrt{n^2+n}) \simeq \cos(n.\pi)$ la suite ne va donc pas converger mais osciller entre -1 et 1. Concluez qu'il est en P.C.
Donnez le développement de $\sqrt{n^2+n}$ sous la forme $n + a + o(1)$ *(pensez à la quantité conjuguée)*. Déduisez que la suite u_n converge vers 0.
Question bonus : la série de terme général u_n converge-t-elle ?
Qu'en est il de la suite $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+2.n})$.

L'équivalent $\sqrt{n^2+n} \sim n$ est correct quand n tend vers l'infini.
On peut le multiplier par π.
Mais pas passer au cosinus.
En effet, l'équivalent dit juste $\sqrt{n^2+n} = n + o(n)$.
Et dans le cosinus, ce $o(n).\pi$ peut tout changer.
Imaginons que derrière le n de l'équivalent, on ait $\frac{1}{2} + o(1)$ (le $o(n)$ contient une limite finie, et des termes correctifs).
On a alors $\cos(n.\pi + \frac{\pi}{2}\ldots)$ en notation de physicien. Et cette fois, tout tend vers 0.
Mais si le $o(n)$ est un $\frac{1}{3}$, ça change tout à nouveau...

On développe : $\sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}$.
On déduit : $\sqrt{n^2+n} = n + \dfrac{1}{2} + o(1)$.
On peut cette fois passer au cosinus : $\cos(\sqrt{n^2+n}.\pi) = \cos\left(n.\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^n.\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + o(1)\right)$.[5]
Le terme $(-1)^n$n'y peut rien. On est face à un $O(1).o(1)$ avec nos notations.

◃23▹ On se donne u_0 strictement positif. On définit $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$ pour tout n. Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrez qu'il existe un rang R vérifiant $u_R \geqslant 2$. Déduisez $\forall n \geqslant R,\ u_n \geqslant 2^{n-R+1}$. Déduisez que la série de terme général $\dfrac{1}{1+u_n}$ converge. Montrez pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Concluez.

Si u_0 est donné, par récurrence immédiate, chaque nouveau terme existe et est réel. La suite existe.
En écrivant $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2$, on trouve une suite croissante.

Elle a alors deux possibilités : converger vers son plus petit majorant, ou tendre vers $+\infty$.

Si elle convergeait, sa limite λ devrait vérifier $\lambda = \lambda + \lambda^2$. La seul limite possible est 0. Mais 0 n'est pas un majorant de la suite ! C'est même un minorant.

Par élimination, c'est vers $+\infty$ qu'elle diverge.

Comme elle tend vers l'infini, à partir d'un certain rang, elle dépasse 2 (prendre $A = 2$ dans la quantification $\forall A,\ \exists G_A,\ \forall n,\ n \geqslant G_A \Rightarrow u_n \geqslant A$)

Mais alors, à ce rang, on a $u_R \geqslant 2$ puis $u_{R+1} = (u_R)^2 + u_R \geqslant 2^2$.
On part sur une récurrence. Prenons n quelconque plus grand que R. Supposons $u_n \geqslant 2^{n-R}$. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2 \geqslant (u_n)^2 \geqslant (2^{n-R})^2 = 2^{2.n-2.R} \geqslant 2^{n+1-R}$$

car $N - R \geqslant 1$.

---

5. la formule $\cos(n.\pi + \theta) = (-1)^n.\cos(\theta)$ est pour moi du cours, elle se justifie par un dessin, et c'est seulement si le correcteur est un emmerdeur que vous devrez la justifier autrement que par « demi-période » et « dessin sur le cercle trigonométrique ». E c'est seulement si vous avez affaire à un élève de Terminale qui n'a pas l'intention de faire des études scientifiques que vous lui écrirez $\cos(\pi.n).\cos(\theta) - \sin(\pi.n).\sin(\theta)$. Parce que là, franchement, c'est remplacer l'intelligence mathématique par le calcul...

Ayant $u_n \geqslant 2^{n-R}$ à partir du rang R, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n+1} \leqslant 2^{R-n}$.

La série géométrique de terme général 2^{R-n}converge (sommes partielles calculables $\left(\sum\limits_{k=0}^{R-1} \dfrac{1}{u_k+1}\right) + \dfrac{1-2^{R-n-1}}{1-2^{-1}}$, et admettant une $\left(\sum\limits_{k=0}^{R-1} \dfrac{1}{u_k+1}\right) + 2$). Par théorème de majoration sur les séries à termes positifs, la série de terme général positif $\dfrac{1}{u_n+1}$ converge.

Mais on va la calculer explicitement. Par récurrence sur n on prouve

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

On initialise :

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0.(1+u_0)} = \frac{1+u_0-1}{u_0.(1+u_0)} = \frac{1}{1+u_0}$$

Si on suppose à un rang n donné $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{1+u_k} = \dfrac{1}{u_0} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$, on ajoute $\dfrac{1}{1+u_{n+1}}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{u_0} - \frac{1+u_{n+1}-1}{u_{n+1}.(1+u_{n+1})} = \frac{1}{u_0} - \frac{1+u_{n+1}-u_{n+1}}{u_{n+1}.(1+u_{n+1})} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Quand n tend vers l'infini, on obtient la convergence, et aussi la somme de la série.

◁ 24 ▷ ♡ Retrouvez les coefficients qui manquent : $\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{a}{n^4} + \dfrac{b}{n^5} + o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)_{n\to+\infty}$ (pensez à soustraire).

Étape par étape : $\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$ classique.

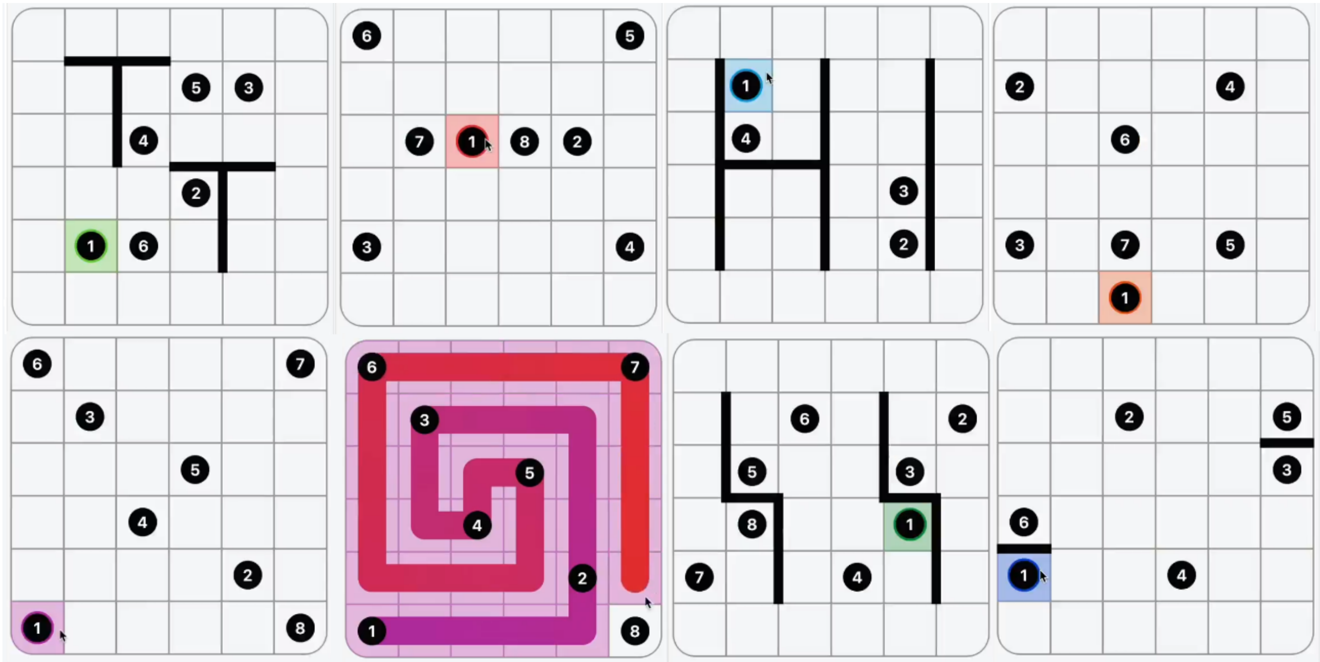
$$\frac{1}{n^2+n+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{-n-1}{n^4+o(n^4)} = -\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\to+\infty}$$

Rappel :
- $u_n \sim_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ signifie $\frac{u_n}{a.n^\alpha} \to_{n\to+\infty} 1$
- $u_n \sim_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ signifie aussi $u_n = a.n^\alpha + o(n^\alpha)_{n\to+\infty}$
- $u_n \simeq_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ ne signifie rien (si ce n'est que vous confondez les notations).
- $u_n \to_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ ne signifie rien (si ce n'est que vous êtes NUL de chez nul).

On poursuit : $\dfrac{1}{n^2+n+1} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = \dfrac{1}{n^3.(n^2+n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^5}$.

$$\boxed{\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{0}{n^4} + \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)_{n\to+\infty}}$$

◁ 25 ▷ Zip est un nouveau jeu développé par LinkedIn. Une grille. Il s'agit de trouver un chemin passant par chaque case une fois et une seule (ne pas laisser de case vide, ne pas croiser les chemins donc), en passant dans l'ordre par celles qui sont numérotées). Un exemple doit vous aider parmi ceux soumis ci dessous.



◁ 26 ▷

Pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|.dt$, $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$ et $||f||_\infty = Sup(|f(t)|\ |\ t \in [0,\ 1]$.
Montrez que ce sont bien trois normes.
Pour l'inégalité triangulaire de $||.||_2$, on utilisera l'inégalté de Cauchy Schwarz.

Montrez pour toute f : $||f||_1 \leqslant ||f_2|| \leqslant ||f||_\infty$.

Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto x^n$ est bornée pour chacune de ces normes.
Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto n.x^n$ est bornée une et une seule de ces normes.

◁ 27 ▷

♡ Complétez $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ en base de $\mathbb{R}^3$ *(c'est à dire adjoignez un vecteur)* sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,\ 1,\ 1)$.

Il manque un vecteur : $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{e_3})$.
Et si $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,\ 1,\ 1)$, c'est qu'on a $\overrightarrow{i} = 1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) + 1.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + 1.\overrightarrow{e_3}$.
On soustrait : $\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}$.

Et on vérifie que c'est bien une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

◁ 28 ▷

Écrivez un script **Python** appelé `Cesaro` qui prend en entrée une suite *(liste évidemment finie de flottants)* et retourne en sortie une liste égale à la moyenne de Cesàro de la précédente *(exemple `Cesaro([1, 5, 3, 8])` retournera `[1, 3, 3, 4.25]`)*.
Écrivez un script appelé `oraseC` qui prend en entrée une suite et retourne en sortie la liste dont elle est la moyenne de Cesàro.

```
def Cesaro(A) :
....C = [ ] #la liste des moyennes
....n, S = 0, 0. #n sera entier, on force S à être flottant
....for Element in A :
........S += Element #somme des termes dans accumulateur
........n += 1 #nombre de termes
........C.append(S/n)
....return C
```

plus proche de vos habitudes en `range(len(L))` :

```
def Cesaro(A) :
....C = [ ]
....S = 0.
....for k in range(len(A)) :
........S += A[k]
........C.append(S/(k+1))
....return C
```

Dans l'autre sens, avec nos notations, on remonte : $c_{n-1} = \dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n}$

et $c_n = \dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n+1}$

donc $a_n = (n+1).c - n.c_{n-1}$

```
def oraseC(C) :
...A = [C[0]]
....for k in range(1, len(C)) :
........a = (k+1)*C[k]-k*C[k-1]
........A.append(a)
....return A
```

◁29▷ Soit (a_n) une suite réelle bornée. On pose $A_0 = \{u_n \mid n \geqslant 0\}$. Montrez que A_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On note α_0 sa borne supérieure. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(0)$ vérifiant $\alpha_0 \geqslant a_{\varphi(0)} \geqslant \alpha_0 - 1$.
On pose alors $A_1 = \{u_n \mid n > \varphi(0)\}$. Montrez que A_1 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_0. On note α_1 sa borne supérieure. Justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(1)$ vérifiant $\alpha_1 \geqslant a_{\varphi(1)} \geqslant \alpha_1 - \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(0) < \varphi(1)$.
On pose ensuite $A_2 = \{u_n \mid n > \varphi(1)\}$. Montrez que A_2 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_1. On note α_2 sa borne supérieure, justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(2)$ vérifiant $\alpha_2 \geqslant a_{\varphi(2)} \geqslant \alpha_2 - \dfrac{1}{4}$ et $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)$.
Construisez une suite décroissante (α_p) et une extraction φ vérifiant $\alpha_p \geqslant a_{\varphi(p)} \geqslant \alpha_p - \dfrac{1}{2^p}$.
Montrez que la suite α converge, de même que la suite $(a_{\varphi(p)})$.
Que vient on de prouver. Quand avez vous dû employer l'hypothèse "a est bornée" ?

◁30▷ Pour tout n , on pose $f_n = x \longmapsto \dfrac{\sin(3^n.x)}{2^n}$ et $F_N = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Montrez que pour tout x, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k}$ et $F_n(x)$ convergent. La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ sera notée $F(x)$.

Notre but est ici de construire un monstre. Ou une jolie bestiole suivant le point de vue :

une application continue en tout point, mais dérivable nulle part.

Un graphe qu'on eut tracer sans lever le crayon (continu), mais où il va y avoir partout des points anguleux (un toboggan où on ne se casse pas la figure mais dont on revient avec les fesses en sang).
Pour cela, on va additionner des applications continues. En quantité infinie, ce qui fait qu'on risque de perdre la continuité, mais on va s'arranger pour la garder. Mais c'est à la dérivation que ça va planter.
Et tout va se faire à coups de séries géométriques de raison plus petite ou plus grande que 1.

Chaque f_n est une application continue. Chaque somme F_N est aussi continue.
Pour l'instant, x est fixé. On se place en un point. Et on regarde N tendre vers l'infini.
On pose donc $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k}$, car nommer les objets permet de mieux en parler.
On calcule : $G_{n+1}(x) - G_n(x) = \dfrac{1+\sin(3^{n+1}.x)}{2^{n+1}}$. Comme un sinus reste entre -1 et 1, c'est positif. $(G_n(x))_n$ (en tant que suite) est croissante.
Mais en utilisant l'autre moitié d'encadrement du sinus :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sin(3^k.x)}{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1+1}{2^k}$$

On identifie une série géométrique que l'on calcule et même majore

$$G_n(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2^k} = \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 4$$

Je rappelle qu'il est important que le majorant ne doit pas dépendre de n.
Et je rappelle qu'on ne joue pas encore à faire tendre n vers l'infini, on cherche justement à savoir si tout converge.

La suite $(G_n(x))$ est croissante majorée, elle converge.

En Sup, on fera souvent des trucs de ce genre là pour prouver une convergence de série, surtout pour une série à termes positifs.

Maintenant, et seulement maintenant, on sépare par linéarité de la somme : $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sin(3^k.x)}{2^k} = F_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

La série géométrique $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ converge vers 2. Par soustraction, $(F_n(x))$ converge (quand n tend vers l'infini).

On pose donc : $F_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(3^n.x)}{2^n}$ (continue) et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(3^n.x)}{2^n}$, dont seule pour l'instant l'existence est acquise.

Montrez que F_n est lipschitzienne de rapport $\frac{3^{n+1}}{2^n}$.

L'application sinus est lipschitzienne, c'est du cours.
$f_k = x \longmapsto \frac{\sin(3^k.x)}{2^k}$ est donc aussi lipschitzienne, comme composées.
Calculons lui un rapport de Lipschitz, soit en dérivant, soit en disant qu'une composée d'applications lipschitziennes a pour rapport le produit des rapports :
$(f_k)' = x \longmapsto \frac{3^k}{2^k}\cos(3^k.x)$ ou

$$x \underset{3^k}{\longrightarrow} 3^k.x \underset{1}{\longrightarrow} \sin(3^k.x) \underset{2^{-k}}{\longrightarrow} 2^{-k}.\sin(3^k.x)$$

Bref, chaque f_k est lipschitzienne, donc la somme des f_k de 0 à N l'est aussi.
On somme les rapports de chaque f_k : F_n est lipschitzienne de rapport $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^k}$.
Tiens, encore une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^k} = \frac{1-\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{1-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{3^{n+1}}{2^n} - 2$$

ce n'est pas le -2 qui va nous embêter (surtout face à un $\frac{3^{n+1}}{2^n}$, on majore encore (si f est lipschitzienne de rapport K elle l'est aussi de rapport $K+2$) :
F_n est lipschitzienne de rapport $\frac{3^{n+1}}{2^n}$.

Ceci ne permettra pas de dire que F est encore lipschitzienne par passage à la limite. Les rapports tendent vers l'infini.

On se donne une suite (a_p) qui converge vers α (quantifiez). On veut montrer que $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$ (ce qui traduira la continuité de F). Montrez : $\lvert F(a_p) - F(\alpha)\rvert \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \lvert F_n(a_p) - F_n(\alpha)\rvert + \frac{\varepsilon}{3}$ pour n égal à $\left[-\frac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\right] + 1$.

La continuité de chaque F_n va se transmettre à la limite F, mais seulement « point par point » et pas uniformément.
On va devoir revenir ici aux ε. On a déjà

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$$

On sent venir la caractérisation séquentielle de la continuité en tout α.

On veut passer de $|F(a_p) - F(\alpha)|$ à $|F_n(a_p) - F_n(\alpha)|$ avec des $\varepsilon/3$ de chaque côté .
Il est naturel d'écrire

$$|F(a_p) - F(\alpha)| = |F(a_p) - F_n(a_p) + F_n(a_p) - F_n(\alpha) + F_n(\alpha) - F(\alpha)|$$

puis $|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant |F(a_p) - F_n(a_p)| + |F_n(a_p) - F_n(\alpha)| + |F_n(\alpha) - F(\alpha)|$, en approximant $F(a_p)$ par $F_n(a_p)$.

Mais pour quelle valeur de n ? Ah ça, on ne le dit pas encore. Mais ça va être à nous de le choisir.
Le mauvais élève dirait « pour n infini ».
Le physicien dirait « pour n très grand, comme ça, $F_n(\alpha) \simeq F(\alpha)$ et $F_n(a_p) \simeq F(a_p)$ ».
On va rendre rigoureuse l'idée du physicien.

La différence $|F(a_p) - F_n(a_p)|$ doit pouvoir être rendue plus petit que ε et même que $\dfrac{\varepsilon}{3}$ pour n assez grand.
Et aussi pour $|F(\alpha) - F_n(\alpha)|$. Tout l'intérêt est que n soit le même pour tout le monde.
En l'occurrence, pour tout x,

$$|F(\alpha) - F_n(\alpha)| = \Big|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big|\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big|$$

et même

$$|F(\alpha) - F_n(\alpha)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \lim_{N\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

On va demander à n d'être assez grand pour avoir $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ (comme toujours, un truc en $\Big[-\dfrac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\Big] + 1$).
On a alors pour tout p : $|F(a_p) - F_n(a_p)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|F(\alpha) - F_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. On reporte

$$|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant |F(a_p) - F_n(a_p)| + |F_n(a_p) - F_n(\alpha)| + |F_n(\alpha) - F(\alpha)| \leqslant 2.\frac{\varepsilon}{3} + |F_n(a_p) - F_n(\alpha)|$$

Le travail sur n vient d'être fait.

Déduisez $\lvert F(a_p) - F(\alpha)\rvert \leqslant \varepsilon$ pour p plus grand qu'une valeur à préciser.

On passe au travail sur p (indice de la suite (a_p) qui converge vers α).
Il nous reste à rendre $|F_n(a_p) - F_n(\alpha)|$ plus petit que $\dfrac{\varepsilon}{3}$, avec n fixé, en jouant sur p.
Or, $F_n$est lipschitzienne (certes de grand rapport, mais elle l'est) :

$|F_n(a_p) - F_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ dès lors qu'on a $|x_p - \alpha| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3.(3^{n+1}/2^n)}$.

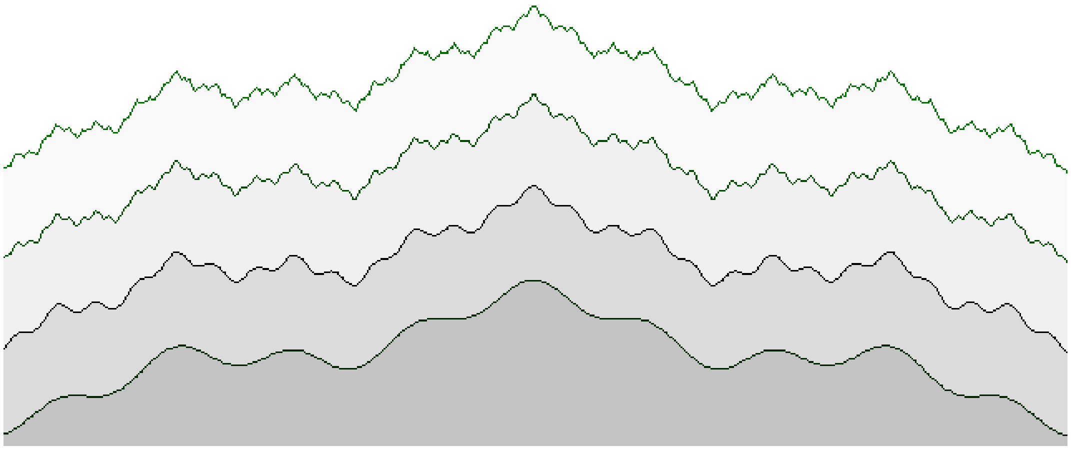
Donc, à partir du rang $N_{(2^n.\varepsilon/3^{n+2})}$ on a $|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant \varepsilon$.
On reconnaît : la suite $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$.

On a établi la continuité de F en α.

Attention, il faut bien séparer les rôles de n et p. Choisir n pour avoir des $|F(x) - F_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, puis choisir p pour avoir (pour ce n) $|F_n(x) - F_n(\alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Les variables se posent des conditions les unes au autres, dans un certain ordre. Vous le referez l'an prochain. Vous parlez de convergence uniforme. Ou de convergence au sens de la norme $||.||_\infty$.

F est continue. la continuité s'est conservé par passage à la limite.

Utilisez Python et ses modules tout prêts : votre procédure prend en entrée n, a et b et représente sur le même graphe F_0 à F_n sur le segment $[a,\ b]$.



`Python` avec `munpy`, `scipy`, `pyplot` et autres, ce n'est pas pour moi. C'est trop lourd par rapport à des logiciels comme XCas, Maple, Mathematica.
J'ai l'impression de dévoyer `Python`, de lui demander de faire lourdement des choses que d'autres font facilement, et de ne pas l'utiliser à ce qu'il sait faire de mieux : des simulations, du Big-Data, des serveurs...

> Montrez que la série de terme général $f'_k(0)$, de même que la série de terme général $f_k(\pi/9)$, de même que toute série de terme général $f'_k(\theta)$ avec θ de la forme $p.\pi.2^{-q}$.
> Ceci ne prouve pas encore que F n'est dérivable nulle part, mais ça peut en donner une idée.

On a envie de dériver F en écrivant $F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$. Mais cette série converge-t-elle ?

On regarde par exemple en 0 : $f'_k = x \longmapsto \frac{3^k}{2^k}.\cos(3^k.x)$. On a donc $\sum_{k=0}^{N} f'_k(0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{2^k}$.
On a une série géométrique de raison plus grande que 1. Cette série diverge.

Et en $\dfrac{\pi}{9}$?

$$\sum_{k=0}^{N} f'_k(0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{2^k}.\cos\left(3^k.\frac{\pi}{9}\right)$$

Dans cette somme, les premiers termes sont à part. Mais à partir de $k = 2$, on a des multiples de π. Et on a donc une somme $truc + \sum_{k=2}^{N} \dfrac{3^k}{2^k}.\cos(entier.\pi)$. la série diverge.
On sent venir la fonction trop pointue en plein de points.

◁31▷

> Soit f continue de I (intervalle réel) dans $\mathbb{R}$. On suppose f non monotone.
> Montrez alors qu'il existe a, b et c vérifiant $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$.
> On définit alors $\varphi = t \longrightarrow \Big(f(c)-f(b)\Big).\Big(f\big(b + t.(c-b)\big)-f\big(a + t.(b-a)\big)\Big)$.
> Donnez le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$. Déduisez $\exists t \in [0,\ 1],\ f\big(b + t.(c-b)\big) = f\big(a + t.(b-a)\big)$.
> Que venez vous de redémontrer ?

On écrit la négation de la monotonie : $\text{non} \begin{array}{l} f \text{ croissante} \\ \text{ou } f \text{ décroissante} \end{array}$

C'est à dire $\begin{array}{ll} & f \text{ non croissante} \\ \text{et} & f \text{ non décroissante} \end{array}$

On transcrit $\begin{array}{ll} & \exists(a,\ b),\ a < b \text{ et } f(a) > f(b) \\ \text{et} & \exists(\alpha,\ \beta),\ \alpha < \beta \text{ et } f(\alpha) < f(\beta) \end{array}$
On se rend compte que ce n'est pas évident.

Il faut une autre approche. f est monotone, c'est « les taux d'accroissement sont tous de même signe ».

Avec $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$, on a bien deux taux de signes différents.
Rien ne nous dit si c'est $(f(c) - f(b)) < 0$ et $.(f(b) - f(a)) > 0$
ou si c'est $(f(c) - f(b)) > 0$ et $.(f(b) - f(a)) < 0$.
Mais c'est un des deux.

Pourquoi ne pas définir alors en effet $\varphi = t \longrightarrow \Big(f(c) - f(b)\Big).\Big(f\big(b+t.(c-b)\big) - f\big(a+t.(b-a)\big)\Big)$ dans laquelle a, b et c ont été définis à la question précédente, et dans laquelle seul t varie.
On calcule en 0 : $\varphi(0) = \Big(f(c) - f(b)\Big).\Big(f(b) - f(a)\Big)$. Négatif par hypothèse.
On calcule en 1 : $\varphi(1) = \Big(f(c) - f(b)\Big).\Big(f(c) - f(b)\Big)$. Positif, car carré de réel.

L'application φ est continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ et change de signe.
Elle s'annule donc en au moins un point qu'on va appeler t.

En ce point, on a $\Big(f\big(b+t.(c-b)\big) - f\big(a+t.(b-a)\big)\Big) = 0$ car $f(c) - f(b)$ est non nul.

Mais on a alors $f\big(b+t.(c-b)\big) = f\big(a+t.(b-a)\big)$.
Ça fait deux points où f prend la même valeur. Ça veut dire que f n'est pas injective.
Sauf qu'on ne sait pas si ce n'est pas deux fois le même point (réflexe de matheux que de se dire « eh, si c'est deux fois le même, on n'a rien prouvé ! »).

Peut on avoir $b + t.(c-b) = a + t.(b-a)$?
L'élève qui bluffe sans preuve dit « non ! » et passe à la suite.
Le physicien calcule t et arrive à une incohérence avec t entre 0 et 1.
Le géomètre dit « comme t est entre 0 et 1, on a $b + t.(c-b) \in]b,\ c[$ et $a + t.(b-a) \in]a,\ b[$; il y a donc b entre les deux, ils ne peuvent pas être égaux.
Il n'est pas allé plus vite que le physicien, et a prouvé la même chose, avec les mêmes arguments. Mais il a compris ce qu'il faisait...

On a établi que f n'était pas injective.
Mais à partir d'hypothèses. Il ne faut pas se focaliser sur « f non injective ». On n'y est parvenu que sous certaines hypothèses. Combien de fois vous ruez vous sur « on a montré f non injective » sans voir que ce n'était que pour des f particulières. Ce n'est pas parce qu'un résultat Q est encadré qu'il est vrai. Ce qui est vrai c'est $H \Rightarrow Q$.

Bon, donc ici, on a prouvé

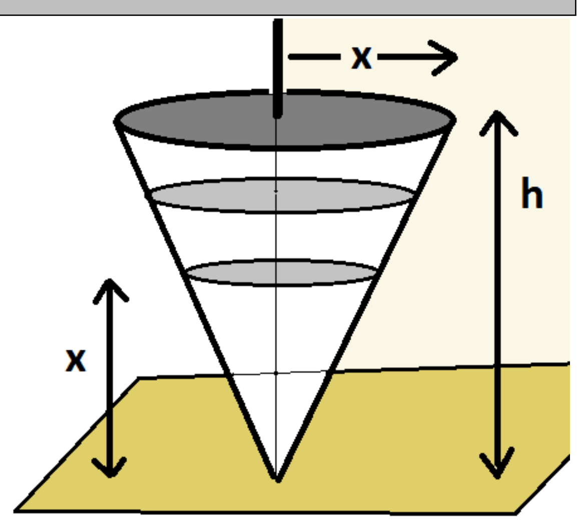
f continue de I dans $\mathbb{R}$		
f non monotone	$\Rightarrow$	f non injective

On contrapose :

f continue de I dans $\mathbb{R}$		
f injective	$\Rightarrow$	f monotone

C'est le résultat du cours, par une méthode alternative.

◁32▷ On dispose d'un cône à section circulaire (rayon r) de hauteur (verticale) h. On doit le découper en trois parts de volumes égaux par deux découpes horizontales. A quelle hauteur les situez vous ?



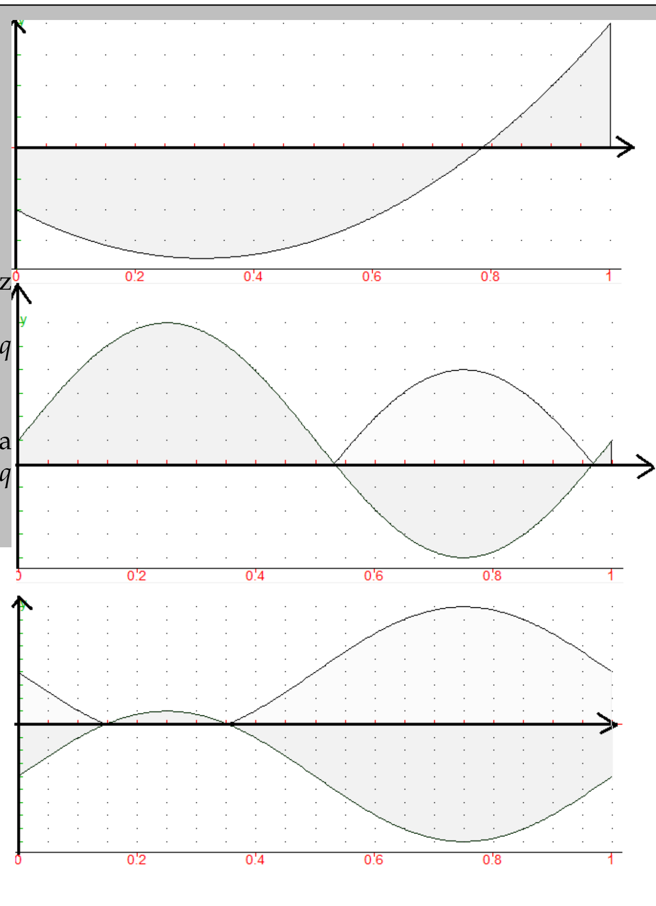
Le volume d'un cône est $\frac{1}{3}.(aire\ de\ base\ fois\ hauteur)$.
Pour le cône initial : $\frac{\pi.r^2.h}{3}$. Si on le coupe à hauteur x à parti du sommet, la hauteur devient x, et l'aire de la section devient $\pi.\Big(r.\frac{x}{h}\Big)^2$. Le volume du petit cône est donc $\frac{\pi.r^2.h}{3}.\Big(\frac{x}{h}\Big)^3$ (ce cube se comprend : trois dimension).
Pour récupérer un tiers du volume total, on coupe à $x = \sqrt[3]{1/3}$.
Pour qu'il ne reste en bas que un tiers du volume total, on coupe donc pour qu'il reste en haut deux tiers : $\sqrt[3]{2/3}$.
Les découpes sont à 87 pour cent de la hauteur et à 69 pour cent.

Pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $|f|_\infty = Sup\{|f(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$.

Calculez $|x \longmapsto x+a|_\infty$ en fonction du réel a.
Calculez $|t \longmapsto \sin(2.\pi.t)+a|_\infty$ en fonction de a.
Calculez $|t \longmapsto 8.t^2-5.t-1|_\infty$.
Pour quelles valeurs de a a-t-on $|t \longmapsto e^t - a|_\infty = 2$.

Pour tout n, on pose $g_n = t \longmapsto t^n$. Calculez $|g_p - g_q|_\infty$ pour p et q entiers naturels donnés.
La norme $|g_p - g_q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?

Calculez $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ pour tout couple $(p,\ q)$. La norme $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?



◁ 33 ▷

L'application $x \longmapsto x+a$ est affine. Son maximum est en 1 et il vaut $1+a$.
Mais sa valeur absolue n'est peut être plus affine...
On a trois cas de figure :

	$a < -1$	$-1 \leqslant a \leqslant 0$	$0 \leqslant a$
sur $[0,\ 1]$	$\lvert x+a\rvert = -x-a$	$\lvert x+a\rvert = -a-x$ puis $\lvert x+a\rvert = x+a$	$\lvert x+a\rvert = x+a$
	$\searrow$	$\searrow\nearrow$	$\nearrow$
le maximum est atteint en	0	0 ou en 1	1
le maximum vaut	$-a$	$Max(-a,\ 1+a)$	$1+a$

Le graphe de $t \longmapsto 8.t^2-5.t-1$ est une parabole de sommet $\left(\frac{5}{16},\ \frac{-57}{32}\right)$. Négatif.
C'est un minimum pour $t \longmapsto 8.t^2-5.t-1$, mais un maximum local pour $t \longmapsto |8.t^2-5.t-1|$.
Le maximum de $t \longmapsto |8.t^2-5.t-1|$ est donc peut être atteint en 0, en $\frac{5}{16}$ ou en 1.
On va noter r_1 la racine positive de $8.X^2-5.X-1$.

	$\left[0,\ \frac{5}{16}\right]$	$\left[\frac{5}{16},\ r_1\right]\right]$	$[r_1,\ 1]$
$\lvert 8.t^2-5.t-1\rvert$	$-8.t^2+5.t+1$	$-8.t^2+5.t+1$	$8.t^2-5.t-1$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	de 1 à $\frac{57}{32}$	de $\frac{57}{32}$ à 0	de 0 à 2

Le maximum est 2, atteint en 1.

L'application $t \longmapsto e^t - a$ peut rester positive sur $[0,\ 1]$, ou négative, ou changer de signe. Regardez pour a égal à 1.
Tout dépend de a.

valeur de a	$]-\infty,\ 1]$	$[1,\ e]$	$[e,\ +\infty[$
signe de $e^t - a$	positif	négatif puis positif	négatif
variations de $t \longmapsto \lvert e^t - a\rvert$	croissant	décroissant puis croissant	décroissant
maximum de $t \longmapsto \lvert e^t - a\rvert$	$e-a$	$Max(a-1,\ e-a)$	$a-1$
maximum atteint en	1	0 ou 1	0

◃34▹ ♠♡ On appelle “nombres conjugués” deux réels positifs p et q vérifiant $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Montrez qu'ils dépassent 1.
Qui est q pour $p=2$?
On se donne deux réels a et b avec $a\leqslant b$. Dérivez deux fois $t\longmapsto(1-t).e^a+t.e^b-e^{(1-t).a+t.b}$. Déduisez que cette application est croissante puis décroissante sur $[0,\ 1]$. déduisez qu'elle est positive sur $[0,\ 1]$.
Déduisez pour tout couple $(u,\ v)$ de réels strictement positifs : $u.v\leqslant\dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}$ *(que reconnait on pour $p=2$?).*
Indication : $t=1/q$, $e^a=u^p$.

On se donne deux suites finies $(a_1,\dots a_n)$ et $(b_1,\dots b_n)$ de réels strictement positifs. On définit : $A=\left(\sum\limits_{i=1}^n(a_i)^p\right)^{1/p}$ et $B=\left(\sum\limits_{i=1}^n(b_i)^q\right)^{1/q}$. Pour tout k, on pose $u_k=a_k/A$ et $v_k=b_k/B$.
Montrez $\sum\limits_{k=1}^n a_k.b_k\leqslant\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n(a_i)^p}.\sqrt[q]{\sum\limits_{i=1}^n(b_i)^q}$ *(inégalité de Hölder dite aussi de Minkowski).*
Que retrouvez vous dans le cas $p=2$?
Montrez pour f et g continues positives $\displaystyle\int_a^b f(t).g(t).dt\leqslant\sqrt[p]{\int_a^b(f(t))^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b(g(t))^q.dt}$.

Par positivité de q : $\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{q}<1$.
On passe à l'inverse (positivité) : $p>1$.

De même pour q.

Pour p égal à 2, q est aussi égal à 2.

On va prouver une inégalité de convexité en introduisant $t\longmapsto(1-t).e^a+t.e^b-e^{(1-t).a+t.b}$ qu'on va noter φ.

t	0		1
$\varphi''(t)=-(b-a)^2.e^{(1-t).a+t.b}$		$-$	
$\varphi'(t)=e^b-e^a-(b-a).e^{(1-t).a+t.b}$	$\varphi'(t)=e^b-e^a-(b-a).e^a$	$\searrow$	$\varphi'(t)=e^b-e^a-(b-a).e^b$
$\varphi(t)=(1-t).e^a+t.e^b-e^{(1-t).a+t.b}$	0	$\nearrow\searrow$	0

Peut on trouver facilement le signe de $\varphi'(0)$ et $\varphi'(1)$ pour déduire que φ va s'annuler aune fois entre 0 et 1 par continuité (et une seule par monotonie) ?
Finalement, pas besoin, même si c'est faisable.
φ' est décroissante. Imaginons qu'elle ne s'annule pas. Elle reste alors de signe constant. Et φ est strictement monotone.
Alors qu'elle prend la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle $[0,\ 1]$. C'est impossible.
φ' s'annule donc une fois, et une seule.
On l'a aussi par $\varphi(0)=\varphi(1)$ et le théorème de Rolle...

φ' est donc positive, puis négative.
φ est donc croissante, puis décroissante.
Par croissance, on a $\varphi(t)\geqslant\varphi(0)=0$ au début.
Par décroissance, on a $\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=0$ à la fin.
Par recouvrement, on a $\varphi(t)\geqslant0$ tout le temps.

On a donc obtenu $(1-t).e^a+t.e^b-e^{(1-t).a+t.b}\geqslant0$ pour tout t de $[0,\ 1]$. On traduit :

$$(1-t).e^a+t.e^b\geqslant e^{(1-t).a+t.b}$$

Prenons alors $t=\dfrac{1}{q}$ avec nos p et q de tout à l'heure.

Ce t est entre 0 et 1, on peut utiliser le résultat précédent. mais alors $1-t=\dfrac{1}{p}$.

L'inégalité[6] devient

$$\frac{1}{p}.e^a+\frac{1}{q}.e^b\geqslant e^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}=e^{\frac{a}{p}}.e^{\frac{b}{q}}=(e^a)^{\frac{1}{p}}.(e^b)^{\frac{1}{q}}$$

6. inégalité, et non inéquation ; une inégalité est vraie toujours, une inéquation est une question « pour quelles valeurs de l'inconnue a-t-on... »

Si u et v sont deux réels strictement positifs, on pose donc $a = \ln(u^p)$ et $b = \ln(v^q)$.
La formule devient $\dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^p}{q} \geqslant u.v$.

Attention, le bon sens de rédaction est « on se donne u et v,
on pose $a = \ln(u^p)$ et $b = \ln(v^q)$
on a le droite d'utiliser la formule précédente.
En effet, notre objectif est une proposition en $\forall(u, v), \ldots$.
C'est donc que u et v sont donnés, et ensuite on choisit a et b.

Mais il faut s'assurer que u et v peuvent être quelconques.
L'élève qui écrit « a et b quelconques donnés
on a prouvé $\dfrac{1}{p}.e^a + \dfrac{1}{q}.e^b \geqslant (e^a)^{\frac{1}{p}}.(e^b)^{\frac{1}{q}}$
on pose $u^p = e^a$ et $v^q = e^b$
on a donc $\dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q} \geqslant (u^p)^{\frac{1}{p}}.(v^q)^{\frac{1}{q}} = u.v$
commet une erreur mathématique. Non pas une erreur de calcul, mais une erreur de variables (la pire pour le matheux).
En effet, qui lui dit que son u et son v sont quelconques ?
Certes, ici, ça « saute aux yeux » que comme on a posé $u^p = e^a$ avec a quelconque, u est quelconque strictement positif.
Mais on écrit tellement vite des bêtises avec ça.

On sait pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2 \geqslant 0$.
On pose $x^é = u$.
On a donc pour tout u de $\mathbb{R}$: $u \geqslant 0$.
Vu comme ça, c'est totalement crétin[7]. mais en êtes vous si loin quand vous n'introduisez pas vos variables dans le bon ordre ?

Pour p égal à 2 (et donc q aussi), on trouve $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \sqrt{\alpha.\beta}$ pour α et β réels strictement positifs. Un classique.

$A = \Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\Big)^{1/p}$ et $B = \Big(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q\Big)^{1/q}$ existent et sont strictement positifs. On peut les lacer au dénominateur.

On peut définir les quotients $u_k = \dfrac{a_k}{A}$ et $v_k = \dfrac{b_k}{B}$ et appliquer à chacun le résultat précédent :

$$\frac{(u_k)^p}{A^p.p} + \frac{(v_k)^q}{B^q.q} \geqslant u.v = \frac{u_k.v_k}{A.B}$$

On somme de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{(u_k)^p}{A^p.p} + \frac{(v_k)^q}{B^q.q}\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k.v_k}{A.B} = \frac{1}{A.B}.\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k$$

Intéressons nous au premier membre. Il est fait de deux termes, le premier suffira, puisque les deux sont du même modèle :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(u_k)^p}{A^p.p} = \frac{1}{A^p.p}.\sum_{k=1}^{n}(u_k)^p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(u_k)^p.p}.\sum_{k=1}^{n}(u_k)^p$$

puisque A est une racine p^{ieme} .
On simplifie par la somme qui s'est reconstruire en haut comme somme en bas comme puissance : $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(u_k)^p}{A^p.p} = \dfrac{1}{p}$.

La seconde somme vaut $\dfrac{1}{q}$.

La somme des deux sommes vaut $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ ce qui fait 1.

7. j'espère que vous en êtes conscient

On a donc $1 \geqslant \frac{1}{A.B}.\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$.

Par produit en croix : $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant A.B$ c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p}.\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^q}$$

Pour p et q égaux à 2 (donc conjugués) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais dans une démonstration généralisable à d'autres exposants :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{3/2}\Big)^{2/3}.\Big(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^3\Big)^{1/3}$$

Pour les intégrales, on démontre la même formule initiale : $\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q} \geqslant u.v$.

On l'applique à $u = \frac{|f(t)|}{I}$ et $u = \frac{|g(t)|}{J}$ avec $I = \Big(\int_0^1 |f(t)|^p.dt\Big)^{1/p}$ et $J = \Big(\int_0^1 |g(t)|^q.dt\Big)^{1/q}$.

On intègre la majoration $\frac{|f(t)|^p}{I^p.q}+\frac{|g(t)|^q}{J^q.q} \geqslant u.v$ de 0 à 1.

Le premier membre finit par donner 1.

Et le second : $\frac{1}{\sqrt[p]{\int_a^b (f(t))^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b (g(t))^q.dt}}.\int_a^b |f(t)|.|g(t)|.dt$.

◃35▹ ♡ Soit à présent f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées *(normes de la convergence uniforme notées M_0 et M_2)*. Montrez pour tout x : $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \int_0^1 (1-t).f''(x+t).dt$. Déduisez que f' est aussi bornée.

On écrit simplement une formule de Taylor entre x et $x+1$ (donc $h = 1$) :

$$f(x+1) = f(x) + 1.f'(x) + 1^2.\int_0^1 (1-t).f''(x+t.1).dt$$

On fait juste passer un terme de l'autre côté et c'est bon.

On passe aux valeurs absolues et on majore :

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f(x+1)| + \int_0^1 (1-t).|f''(x+t)|.dt$$

Comme on a supposé f et f'' bornées, on nomme même les bornes supérieures de leurs valeurs absolues :

$$|f'(x)| \leqslant ||f|| + ||f|| + \int_0^1 (1-t).||f''||.dt = 2.||f|| + \frac{||f''||}{2}$$

Comme ceci est vrai pour tout f, f' est bornée, et on a même $||f'|| \leqslant 2.||f|| + \frac{||f''||}{2}$.

On a même des variantes pour encadrer encore plus finement la dérivée première par une combinaison de $||f||$ et $||f''||$.

Avec ces **T**ypes, on épargne les com**P**romis. Elle évite les **CO**pines lentes. Le capitaine fait **M**ander les marins à **B**ord. Tu me **P**araissais bien **C**a**L**ine. **SI** c'est mon énorme tr**U**c ! Brigitte ne crût plus ce maçon. Il m'a véh**I**culé malgré ma susp**EN**sion. Faut pas manquer de pèze **P**our une belle com**B**ine. On cherche le**S** ados dans les ly**C**ées. Il apprécie les ny**L**ons à **CH**oisir. Le curé cherche des **T**enues pour les **C**atés.

◁36▷ Complétez :

$P(X)$	$\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$\frac{(x-a).(x-b)}{?}$	$\frac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	?	?	?
$P\left(\frac{a+b}{2}\right)$	?	1	?
$P(b)$	?	?	?
$\int_a^b P(t).dt$	$\frac{b-a}{6}$	?	$\frac{b-a}{6}$

Un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ et $P(\frac{a+b}{2}) = \gamma$. Montrez : $\frac{1}{b-a}.\int_a^b P(t).dt = \frac{\alpha+4.\gamma+\beta}{6}$ (valeur moyenne donnée par la formule dite des trois niveaux).

Oui, c'est des polynômes d'interpolation de Lagrange !

$P(X)$	$\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$	$\frac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	1	0	0
$P\left(\frac{a+b}{2}\right)$	1	1	0
$P(b)$	0	0	1

On a juste $4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$ au milieu pour que ce polynôme, nul en a et b vaille 1 juste au milieu.

On calcule alors la dernière intégrale : $4.\int_a^b \frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}.dx$ par parties

$(x-a)$	$\hookrightarrow$	1
$(x-b)$	$\hookleftarrow$	$(x-b)^2/2$

$P(X)$	$\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$	$\frac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$\int_a^b P(t).dt$	$\frac{b-a}{6}$	$\frac{4.(b-a)}{6}$	$\frac{b-a}{6}$

On nous a donné P. On considère alors
$Q = x \longmapsto \alpha.\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2} + \gamma.4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2} + \beta.\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$.
C'est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Et il vérifie $Q(a) = \alpha = P(a)$, $Q(b) = \beta = P(b)$ et $Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = \gamma = P\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
La différence $P - Q$ est nulle en trois points. Elle est nulle partout (polynôme ayant plus de racines que son degré).
On a donc en fait $P = Q$.
On résume avec Joseph-Louis Lagrange : $P(x) = \alpha.\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2} + \gamma.4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2} + \beta.\frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$.
On intègre alors $P(x) = \alpha.\int_a^b \frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}.dx + \gamma.\int_a^b 4.\frac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}.dx + \beta.\int_a^b \frac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}.dx$.

Les calculs sont déjà faits : $\int_a^b P(x).dx = \frac{F(a)+4.P\left(\frac{a+b}{2}\right)+P(b)}{6}.(b-a)$
Formule valable pour tous les polynômes de degré 2.

On note que la valeur moyenne de P est alors $\frac{F(a)+4.P\left(\frac{a+b}{2}\right)+P(b)}{6}$.
Quand le polynôme est de degré inférieur ou égal à 2, il suffit de le connaître aux deux extrémités de l'intervalle et au milieu pour pouvoir le connaître partout et même l'intégrer...

◁37▷ Soit f continue ; donnez la limite de la valeur moyenne de f sur $[a,\ b]$ lorsque b tend vers a.

La valeur moyenne sur $[a,\ b]$ est atteinte en un point c de $[a,\ b]$.
On écrit donc $\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt = f(c)$ pour un c bien choisi.
Quand b tend vers a, par encadrement, c tend vers a aussi, et par continuité, $f(c)$ tend vers $f(a)$.
Oui, logique, la valeur moyenne tend vers la valeur au points en question...

◁38▷ ♡ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

On la regarde sur une période. Par continuité sur un segment, elle est bornée.

Et c'est cette borne qui sert sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité.
Ici, il n'y a qu'un x dans $\exists K,\ \forall x,\ |f(x)| \leqslant K$, on n'a donc pas besoin de jouer sur du recouvrement d'intervalles comme dans la démonstration pour la continuité uniforme.

> *Attention, la tangente est continue, périodique, mais elle n'est pas bornée. Elle n'est pas « continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » mais, d'un « ensemble à trous dans $\mathbb{R}$ ».*

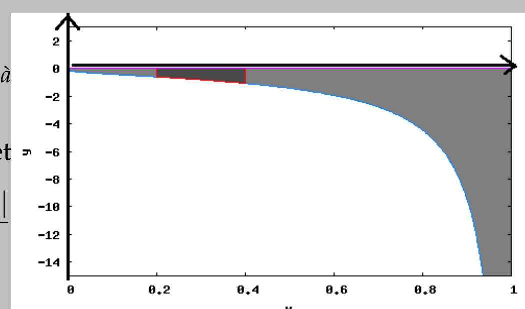
◁ 39 ▷ La valeur moyenne de f (intégrable) sur $[a,\ b]$ est $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt$. Montrez que si f est continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors on a
$Sup(f(t)\mid t\in[a,\ b]) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt \leqslant Sup(f(t)\mid t\in[a,\ b])$ (même si $a > b$?)
Déduisez : $\exists c\in[a,\ b],\ \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt = f(c)$.
Montrez que ce résultat tombe en défaut si f est juste intégrable, et pas continue.

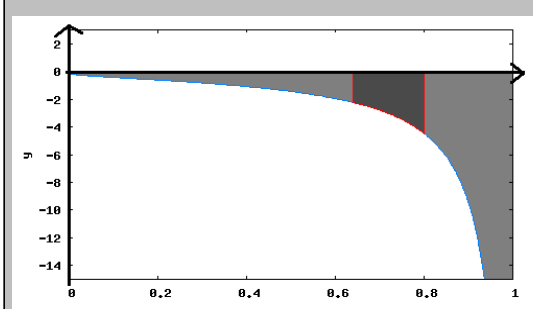
◁ 40 ▷ Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $a+b$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit la longueur $b-a$ du segment ?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{2.a+b}{3}\Big)$?

◁ 41 ▷

On définit $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Montrez que H est C^1 sur $]0,\ 1[$ et calculez sa dérivée *(pensez à l'écrire $F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \ln^{-1}(t)$ sur $]1,\ +\infty[$).*
Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est bornée sur $]0,\ 1/2[$ par 0 et $-1/\ln(2)$. Déduisez que $H(x)$ est compris entre 0 et $\dfrac{|x^2-x|}{\ln(2)}$ pour x entre 0 et $1/2$.
Déduisez que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.





Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 1 *(attention, ne pas soustraire des "équivalents, ça ne donne rien, réduisez d'abord au dénominateur commun, puis utilisez des développements limités)*.
Montrez que $\displaystyle\int_x^{x^2}\Big(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\Big).dt$ converge vers 0 quand x tend vers 1.
Calculez $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$ pour x entre 0 et 1.
Déduisez que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1.
Déduisez en étudiant $F(1) - F(0)$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$.

Notons F une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $]0,\ 1[$ (par exemple $F = x \longmapsto \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$.
On a alors par relation de Chasles $H(x) = F(x^2) - F(x)$.
On dérive une composée[8] : $H' = x \longmapsto 2.x.F'(x^2) - F'(x)$.
On remplace : $H' = x \longmapsto \dfrac{2.x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)}$.

8. H est dérivable en tant que composée et différence d'applications dérivables

On simplifie : $H' = x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

Cette dérivé est continue (en tout cas sur $]0,\ 1)$. H est donc C^1.
En fait elle est même C^∞.

Pour tout x de $]0,\ 1/2[$, on a $\ln(x) \leqslant \ln(1/2) = -\ln(2) < 0$.
On passe à l'inverse (décroissant sur $]-\infty,\ 0[$: $0 > \dfrac{1}{\ln(x)} \geqslant \dfrac{-1}{\ln(2)}$.

Prenons x entre 0 et1/2 et écrivons la relation précédente pour tout t lui même entre 0 et x : $0 > \dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant \dfrac{-1}{\ln(2)}$.

Quand on intègre entre deux bornes a et b dans le bon ordre, on a alors $0 > \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\ln(t)} \geqslant -\frac{b-a}{\ln(2)}$.

Mais justement, x est plus grand que x^2 (entre 0 et 1, comparez par exemple $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{9}$).

Il faut donc changer le sens : $0 < \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leqslant -\frac{x^2-x}{\ln(2)} = \frac{x-x^2}{\ln(2)}$.

On fait tendre x vers 0 (ce qui est compatible avec « x est entre 0 et 1/2 »).

Par encadrement, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers 0 par valeur supérieure.

> *Attention, on ne peut pas dire que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers 0 parce que les « bornes se rejoignent ».*
> *Ou « parce qu'on obtient $\displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{\ln()}$ par passage à la limite ».*
> *C'est un argument raté.*
> *Regardez $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$. Elle devrait tendre vers « l'intégrale sur un intervalle réduit à un point » c'est à dire vers 0 ».*
> *Mais sur ce pseudo intervalle, la fonction est infinie.*
> *D'ailleurs $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \Big[\ln(t)\Big]_x^{x^2} = \ln(2)$. Ceci ne tend pas vers 0.*
> *Comme quoi il faut se méfier des affirmations à l'emporte pièce.*

D'ailleurs, en 1, $x$et x^2 tendent vers la même valeur mais $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ ne va pas tendre vers 0.

$x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ s'étudie en 1 en posant $x = 1+h$ avec h qui tend vers 0.

$$\frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} = \frac{h-\ln(1+h)}{h.\ln(1+h)} = \frac{h-h+\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)}{h.\ln(1+h)} \sim \frac{h^2/2}{h^2}$$

La fraction est équivalent au réel $\dfrac{1}{2}$, elle tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Une fois prolongée, l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}$ est continue sur $]0,\ 1]$.

Mais on peut même la prolonger en 0 par la valeur $0 - \dfrac{1}{-1}$. Elle est donc continue sur $[0,\ 1]$.
Par théorème de compacité, elle est bornée.

Même si on ne connaît pas la valeur de ces bornes, on peut les nommer α et β.

On a donc $\alpha \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} \leqslant \beta$ pour tout t entre x et x^2 si x est lui même entre 0 et 1.
On intègre de x à x^2 (attention au sens de l'intervalle là encore) :

$$\alpha.(x^2-x) = \int_x^{x^2} \alpha.dx \geqslant \int_x^{x^2} \Big(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\Big).dt \geqslant \int_x^{x^2} \beta.dt = (x^2-x).\beta$$

Si x tend vers 1 les deux termes de l'encadrement tendent vers 0.

On a donc $\int_x^{x^2} \Big(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\Big).dt$ qui tend vers 0 en 1.

On sépare : $H(x) - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ tend vers 0.
Mais la seconde intégrale vaut $\ln(x^2-1) - \ln(x-1)$ ce qui fait $\ln(x+1)$.

Par soustraction, c'est donc que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1.

Le signe ne doit pas vous surprendre : dans $H(x)$, les bornes sont dans le mauvais sens, mais la fonction intégrée est négative.

L'exercice peut se conclure.
$H(x)$ tend vers 0 en 0 et $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ en 1.
C'est donc qu'elle a augmenté de $\ln(2)$ en allant de 0 à 1 : $\ln(2) = \Big[H(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$.
Mais là ou c'est fort, c'est que $\Big[H(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$ est égal à $\int_0^1 H'(x).dx$ par théorème fondamental du calcul intégrale.
Mais comme on connaît H', on a

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx$$

(en prolongeant la fonction sous le signe somme en 0 parla valeur 0 et en 1 par la valeur 1 [9])

C'est votre seconde exercice où vous calculez une intégrale sans disposer de primitive.

9. inverse le la limite d'un taux d'accroissement