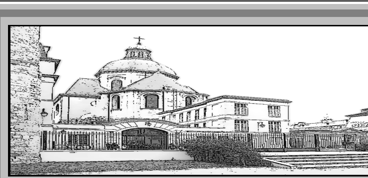
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi avril
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



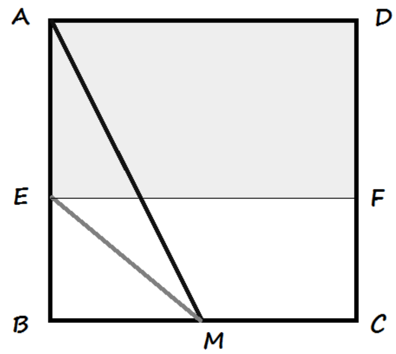
2024 2025

TD24

◁0▷ Montrez $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\frac{\ln(t)}{1+t^2}.dt = 0$.

Prolongez en 0 $x \longmapsto \sin(x).\ln(x)$. Est elle alors dérivable en 0 ?

Montrez que si f est C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne.
Montrez qu'il n'y a pas de réciproque.



(A, B, C, D) est un carré,
M est le milieu de [B, C]
(A, E, M) est isocèle en E
AM mesure 4 unités.
Calculez l'aire du rectangle (A, E, F, D).

◁1▷ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ alors $1/f$ l'est aussi *(il faudra penser à introduire $Inf(f(x) \mid x \in [0,\ 1])$).*

◁2▷ Construire une suite qui admet une sous-suite strictement croissante de limite 1 et une sous-suite strictement décroissante de limite 0.

◁3▷ En quels point la dérivée de $x \longmapsto |\ln(|x|)|$ est elle discontinue ?
Ne dites pas n'importe quoi, la question a un sens précis.

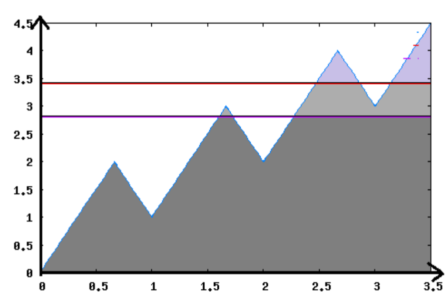
◁4▷ Soit f de classe C^1 de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n.f(t).dt$. Montrez par encadrement que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Déterminez la limite de $((n+1).I_n)$. Déterminez la limite de $(n.I_n)$.

◁5▷ ♡ Résolvez $z + \overline{z} = |z|$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

◁6▷ f et g sont deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$. On suppose $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ *(au fait, pour un demi point déjà, ça veut dire quoi ?)*. Lesquelles de ces affirmations sont alors vraies :

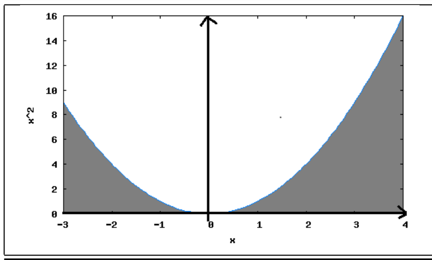
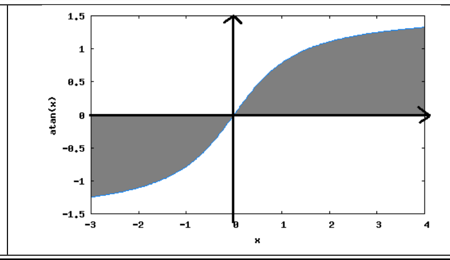
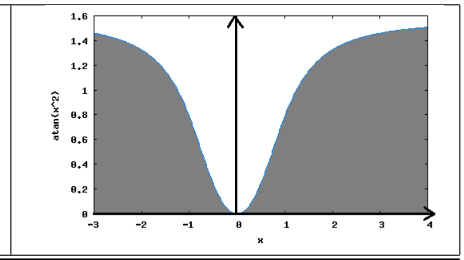
A	si	f est bornée	alors	g est bornée
B	si	f est dérivable en tout point	alors	g est dérivable en tout point
C	si	f est positive en tout point	alors	g est positive en tout point
D	si	f est périodique	alors	g est périodique à partir d'un certain réel
E	si	f est croissante	alors	g est croissante
F	si	f est lipschitzienne	alors	g est lipschitzienne

◁7▷ ♣ On définit : $f = x \longmapsto 2 - |3.x - 2|$ et $g = x \longmapsto [x] + f(x - [x])$. Représentez f et g. Montrez que g est continue et lipschitzienne.



Montrez que pour tout λ réel l'équation $g(x) = \lambda$ d'inconnue x a exactement trois solutions.
Montrez qu'il n'existe pas d'application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel λ l'équation $h(x) = \lambda$ ait exactement deux solutions.

◁8▷ Parmi ces trois applications, combien sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto Arctan(x)$	$x \longmapsto Arctan(x^2)$
		

◁9▷ Qui, de $\theta \longmapsto \sin(\tan(\theta))$ et $\theta \longmapsto \tan(\sin(\theta))$ est lipschitzienne sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$?

◁10▷ Montrez que $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ sont périodiques.
On suppose que $x \longmapsto \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période p. Montrez alors $\cos(p)+\cos(\sqrt{2}.p) = 2$.
Déduisez $\cos(p) = 1$ et $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$. Concluez.

◁11▷ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ (rapport H) et de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K) alors elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

◁12▷ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ l'est aussi.
Montrez que $x \longmapsto (-1)^{[x]}$ n'est pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais que sa valeur absolue l'est aussi.

On suppose $|f|$ lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K), et continue.
On se donne a et b. Montrez que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-a|$.
On les suppose cette fois de signes opposés. Montrez qu'il existe c entre a et b vérifiant $f(c) = 0$. Montrez alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant |f(b)|+|f(a)| \leqslant K.|c-b|+K.|c-a| \leqslant K.|b-a|$$

Concluez : f est à son tour lipschitzienne.

◁13▷ ♡ Montrez que $x \longmapsto \tan(x)$ est lipschitzienne de $[-\pi/3,\ \pi/3]$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $[0,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que sinon, elle serait bornée).

◁14▷ Montrez que si f et $[f]$ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée (raisonnez, n'écrivez pas plein de formules).

◁15▷ Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un rationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel et l'image de chaque irrationnel soit un rationnel ?

◁16▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{Arctan(1).Arctan(2)\dots Arctan(n)}$.

◁17▷. ♠ *Un des plus beaux exercices niveau Sup. Il figure dans tout bon cours parlant des sommes de Riemann.*
n est un entier naturel ; résolvez l'équation $z^{2.n}+1 = 0$ *(en passant par $z = r.e^{i.\theta}$)* puis factorisez $(X^{2.n}+1)$ dans $\mathbb{C}$.

On pose $f_x = \theta \longmapsto \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1)$ *(x est un réel fixé de $]1,\ +\infty[$)*. Montrez que f_x est intégrable sur $[0,\ \pi]$.

Exprimez grâce à la première question la somme de Riemann milieu de f_x pour l'équisubdivision de $[0,\ \pi]$.

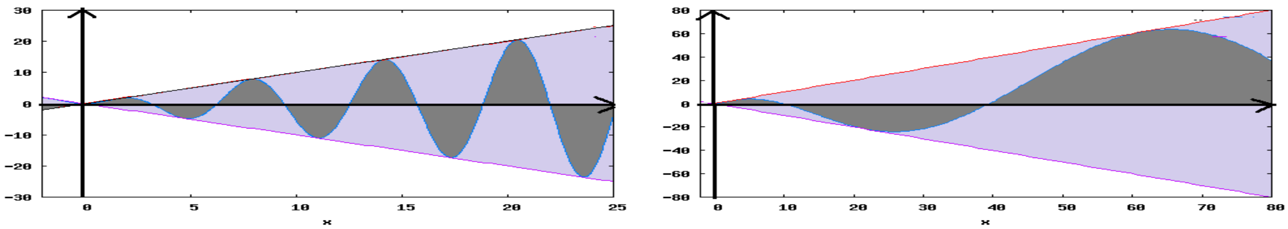
Déduisez : $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$ pour x dans $]-\infty,\ -1[$ (indication : $t = \pi-\theta$).

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$ pour x dans $]-1,\ 1[$.

Vérifiez que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$ admet la même limite à droite et à gauche en 1, dont on estimera que c'est la valeur de $\int_0^\pi \ln(1^2 - 2.1.\cos(\theta) + 1).d\theta$. Calculez alors $\int_0^\pi \ln(\sin(t)).dt$.

◁ 18 ▷ Montrez que $x \longmapsto x.\sin(x)$ est lipschitzienne sur chaque segment $[-a,\ a]$. Montrez qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.



Et pour $x \longmapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

◁ 19 ▷ ♡ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?
Combien y a-t-il d'applications uniformément continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ (attention, à $x < 0 < y$ avec $|y - x| \leqslant \mu_\varepsilon$).

◁ 20 ▷ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors $x \longmapsto \sqrt{1 + f(x)}$ l'est aussi.

◁ 21 ▷ On définit : $f = x \longmapsto |\sin(x)|$ et pour tout entier naturel n : $\boxed{f_n = x \longmapsto |\sin(2^n.x)|/2^n}$ Montrez que chaque f_n est lipschitzienne.

Déterminez proprement $\boxed{Sup(Inf(f_n(x) \mid x \in [0,\ \pi]) \mid n \in \mathbb{N})}$ $\boxed{Inf(Sup(f_n(x) \mid x \in [0,\ \pi]) \mid n \in \mathbb{N})}$ $\boxed{Sup(Inf(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0,\ \pi])}$ $\boxed{Inf(Sup(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0,\ \pi])}$

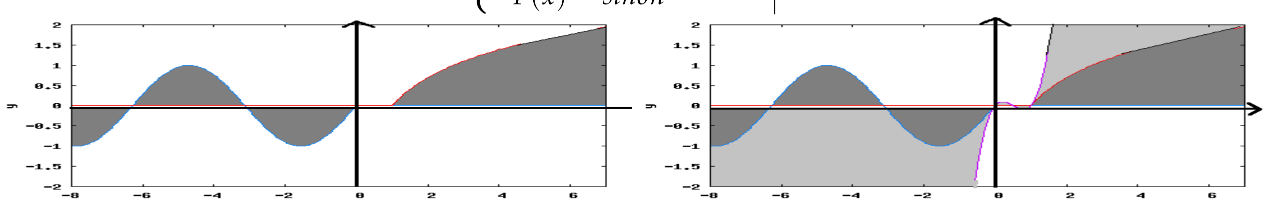
◁ 22 ▷ Montrez que $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.dt$ est lipschitzienne mais pas dérivable. Même question avec $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.\sin(t).dt$.

◁ 23 ▷ Montrez que $x \longmapsto \int_x^{2.x} e^{-t^2}.dt$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

◁ 24 ▷ ♡ Montrez sans forcément la calculer *(ni même la dériver)* que $x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

◁ 25 ▷ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.
La méthode astucieuse consistera à définition $\varphi = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ et même si possible $]-\pi/2,\ \pi/2[$.

◁ 26 ▷ Ajustez un polynôme P pour que $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \sin(x) & si & x < 0 \\ \ln(x) & si & x > 1 \\ P(x) & sinon & \end{array} \right|$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.



◁ 27 ▷ Soit f continue. Montrez que $x \longmapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ est lipschitzienne.

◁ 28 ▷ ♡ Montrez que l'application $x \longmapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment *(en revenant à la définition, et non pas en majorant la dérivée)*.

◁ 29 ▷ ♡ Une application est dite lilipschitzienne si il existe K vérifiant $\forall (x, y),\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|^2$. Montrez que les applications lilipschitziennes ont une dérivée nulle. Déduisez que l'ensemble des applications lilipschiztiennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Find Wrong Steps

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \\ -1/1 &= -1/1 \\ -1/1 &= 1/-1 \\ \sqrt{-1/1} &= \sqrt{1/-1} \\ i/1 &= 1/i \\ i &= 1/i \\ i^2 &= 1 \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

◁ 30 ▷

Ceci est la racine cubique d'un arbre.

◁ 31 ▷ Montrez que $x \longmapsto \cos(e^x)$ n'est pas lipschitzienne (sans dériver, étudiez le taux d'accroissement entre $\ln(k.\pi)$ et $\ln((k+1).\pi)$ pour k entier).

◁ 32 ▷ ♡ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue de A dans B est une suite de Cauchy.

◁ 33 ▷ ♣ L'application f échange les deux premiers chiffres derrière la virgule et garde les autres chiffres ($f(1/2) = 0,05$, $f(\pi) = 3,41159\ldots$, $f(4/7) = 0.75\overline{142857}1429\ldots$). Donnez ses points de discontinuité. Calculez $\int_0^1 f(t).dt$ (allez, les plus fous, c'est pour vous !).

◁ 34 ▷ Montrez que si f est uniformément continue sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ elle ne l'est plus forcément sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f est uniformément continue sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$:
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \gamma_\epsilon > 0,\ \forall (x,\ y) \in]-\infty,\ 0]^2,\ (|y-x| \leqslant \gamma_\epsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0,\ \forall (x,\ y) \in [0,\ +\infty[^2,\ (|y-x| \leqslant \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon)$

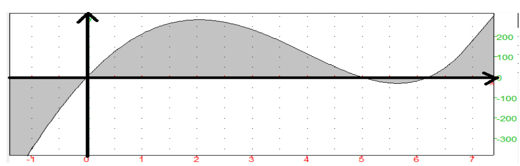
On se donne ε strictement positif. Montrez que pour $|x-y| \leqslant Min(\gamma_{\epsilon/2},\ \delta_{\epsilon/2})$, on a $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ dans chacun des cas suivants :

$x \leqslant y \leqslant 0$	$y \leqslant x \leqslant 0$	$x \leqslant 0 \leqslant y$	$y \leqslant 0 \leqslant x$	$0 \leqslant x \leqslant y$	$0 \leqslant y \leqslant x$

Concluez.

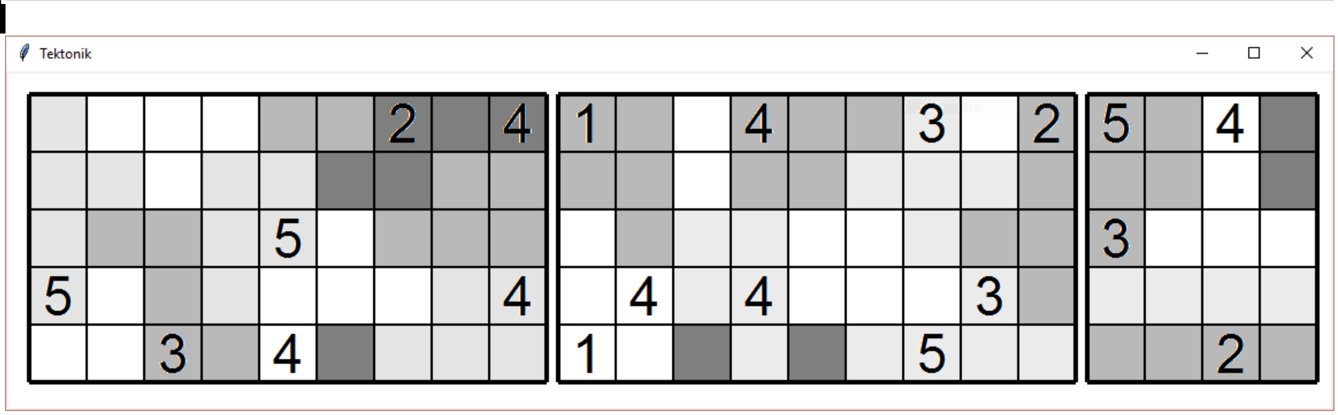
◁ 35 ▷

f est un polynôme unitaire de degré 4 convexe exactement sur $[-3,\ 4]$. Son développement limité en 2 est $f(2+h) = a + 5.h + c.h^2 + d.h^3 + o(h^3)$ et son développement limité en 5 est $f(5+h) = 1 + \beta.h + \gamma.h^2 + \delta.h^3 + o(h^3)$. Trouvez a, c, d, β, γ et δ.



Unitaire, c'est « coeffcient dominant égal à 1 ».

◁ 36 ▷



Palindrome numérique

91	=	90	+	01
10	+	06	=	16

◁ 37 ▷ ♡ Calculez $\int_a^b 2^t.dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_a^b f(t).dt$ pour f continue.

◁ 38 ▷ L'exercice est "*limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{n!}$*". L'élève Agin-Tensiff passe par la forme exponentielle : $\exp\left(\frac{\ln(n!)}{n}\right)$.

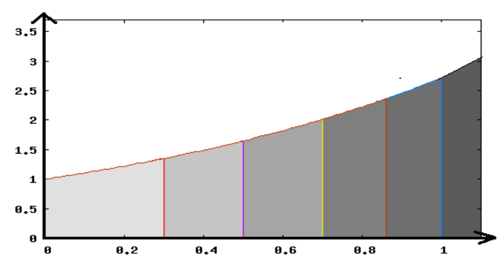
Il sépare la factorielle : $\frac{\ln(n)+\ln(n-1)+\ldots+\ln(1)}{n}$. Chacun des termes de la somme *(de $\ln(n)/n$ à $\ln(1)/n$)* tend vers 0 ; la somme tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{n!}$ converge vers 1.

Pourtant, l'ordinateur donne à 10^{-1} près

$\sqrt[20]{20!}$	$\sqrt[30]{30!}$	$\sqrt[40]{40!}$	$\sqrt[50]{50!}$
8.3	12.0	15.7	19.4

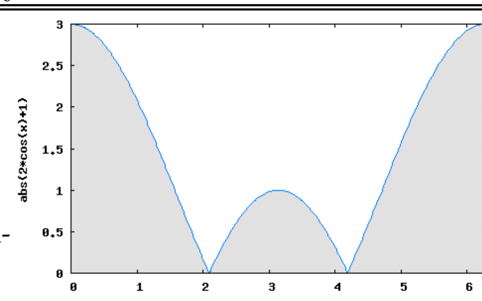
Alors qui a tort ? Que doit on trouver ?
Tiens, au fait, et si ça avait été à vous de calculer avec Python $\sqrt[n]{n!}$ pour n "*grand*", qu'auriez vous fait ?
Il parait qu'avec une somme de Riemann droite pour $\ln(t)$ entre 0 et 1 on a un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$. A vous de le faire.

◁ 39 ▷ ♠ Soit f une application de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $I=\int_0^1 f(t).dt$.
Montrez que pour tout n, il existe une subdivision de $[0,\ 1]$: $0=x_{n,0}<x_{n,1}<x_{n,2}<\ldots x_{n,n}=1$ vérifiant $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt=\frac{I}{n}$.
Interprétez géométriquement.
Pour rédiger cette question, on aura intérêt à définir F *(la primitive de f nulle en 0)* et à faire intervenir F^{-1} *(sa réciproque de $[0,\ I]$ dans $[0,\ 1]$ après en avoir prouvé l'existence)*.



Au fait, pourquoi les note-t-on $(x_{n,0},\ldots x_{n,n})$ et pas juste $(x_0,\ldots x_n)$?

g est continue. Montrez que $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ converge vers $\frac{\int_0^1 f(t).g(t).dt}{\int_0^1 f(t).dt}$ quand n tend vers l'infini.



◁ 40 ▷ ♡ Montrez que $|sin|$ n'est pas une primitive de $|\cos|$. Calculez $\int_0^{2.\pi} |1+2.\cos(t)|.dt$.

◁ 41 ▷ ♡ f est croissante de classe C^1. Montrez que $\int_0^{\pi} f(t).\cos(t).dt$ est négative.

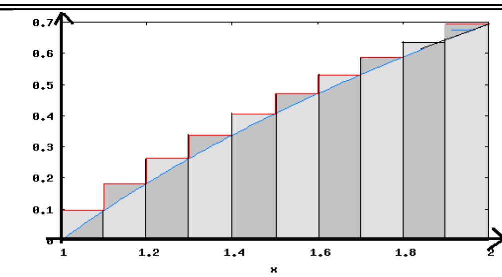
◁ 42 ▷ ♡ Un élève donne les théorèmes suivants pour les applications D^1 :

	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		
si f est bornée sur $[a,\ b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a,\ b]$ alors f l'est aussi		

◁ 43 ▷ Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$. Déduisez que la suite $\left(\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n^n.n!}}\right)$ converge et donnez sa limite.

◁44▷ ♡ On rappelle que l'on note « sommes de Riemann de f sur $[a,\ b]$ pour la subdivision $a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n = b$ les trois sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_k)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_{k+1})$ (gauche, milieu et droite) ». On prend la version simplifiée : $a_k = a + k.\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{(n-k).a+k.b}{n}$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^2$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^3$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto 2^x$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

◁45▷ ♡ On considère l'application logarithme, sur le segment $[1,\ 2]$ dont on effectue une équisubdivision en n morceaux. Montrez que la somme de Riemann droite est alors
$\ln\Big(\Big(\dfrac{(2.n)!}{n!}\Big)^{1/n}\Big) - \ln(n)$.



◁46▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^x \cos(t).dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

◁47▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_a^b t^2.dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

◁48▷ Montrez que l'application tangente est lipschitzienne sur $[-a,\ a]$ pour a strictement plus petit que $\pi/2$ *(sans dériver, mais en pensant à* $\dfrac{\sin(b-a)}{\cos(b).\cos(a)}$*)*.
Lipschitzienne sur I c'est $\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall(x,\ y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant K.|x-y|$.
Au fait, quelles applications vérifient $\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall(x,\ y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| < K.|x-y|$?

◁49▷

Soit f une application de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$I = \displaystyle\int_a^b f(t).dt$	$J = \displaystyle\int_a^b f'(t).\Big(t - \frac{a+b}{2}\Big)dt$	$K = \displaystyle\int_a^b f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big).\Big(t-\frac{a+b}{2}\Big)dt$

♡ 0 ♡ Calculez K.

♡ 1 ♡ Montrez : $I + J = (b-a).\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

♡ 2 ♡ Justifiez l'existence de $Sup\{|f''(t)|\ |\ t \in [a,\ b]\}$ *(notée M_2)*.

♡ 3 ♡ Montrez pour tout t de $[a,\ b]$: $\Big|f'(t) - f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big| \leqslant M_2.\Big|t - \frac{a+b}{2}\Big|$.

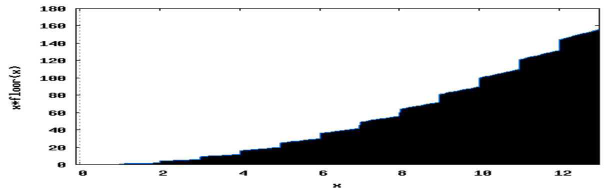
♡ 4 ♡ Déduisez : $\Big|I - \dfrac{f(a)+f(b)}{2}.(b-a)\Big| \leqslant \dfrac{M_2.(b-a)^3}{12}$.

♡ 5 ♡ Déduisez : $|I - T_n| \leqslant \dfrac{M_2.(b-a)^3}{12.n^2}$ où T_n est l'approximation de I par la méthode des trapèzes pour une équisubdivision de $[a,\ b]$ en n pas *(dont vous rappellerez la formule)*.

◁50▷ f est un C^1 difféomorphisme de $[a,\ b]$ sur $[c,\ d]$. Justifiez : $\displaystyle\int_a^b f(u).du + \int_c^d f^{-1}(v).dv = b.d - a.c$ *(on pourra dériver* $\displaystyle\int_a^x f(u).du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v).dv$*)*.

◁51▷ Déterminez la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+4.h)-4.f(a+3.h)+6.f(a+2.h)-4.f(a+h)+f(a)}{h^4}$ quand h tend vers 0 *(où f est une application de classe 4)*.
(utiliser des DL).

◁52▷ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2\}$?



◁53▷ Résolvez $\int_0^x t.[t].dt = 222$ d'inconnue réelle x.

◁54▷ ♠ Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer qu'elle se prolonge en une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ "par densité de $\mathbb{Q}$".
On se donne un irrationnel a. Montrez qu'il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers a. Montrez que les suites (r_n) et $(f(r_n))$ sont de Cauchy et convergent donc. L'élève A veut alors poser $f(a) = \lim_{n\mapsto+\infty} f(r_n)$. L'élève B l'arrête en indiquant : mais si tu avais pris une autre suite (c_n), qui dit que tu aurais obtenu la même limite $f(a) = \lim_{n\mapsto+\infty} f(c_n)$ *($f(a)$ dépendrait il du choix de la suite choisie ?)*. Que pensez vous de son objection ? Et que pensez vous de l'élève qui explique alors $(r_0,\ c_0,\ r_1,\ c_1,\ r_2, \ldots)$?
Montrez que f ainsi définie est à son tour uniformément continue.

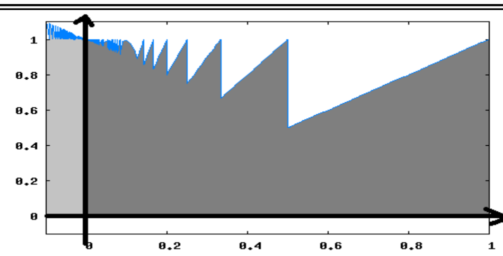
◁55▷ ♡ Prolongez la aux bornes du domaine : $x \longmapsto \ln(x).\ln(1-x)$. Trouvez son maximum, donnez son axe de symétrie.
Admet elle un développement limité en 0 ?

◁56▷

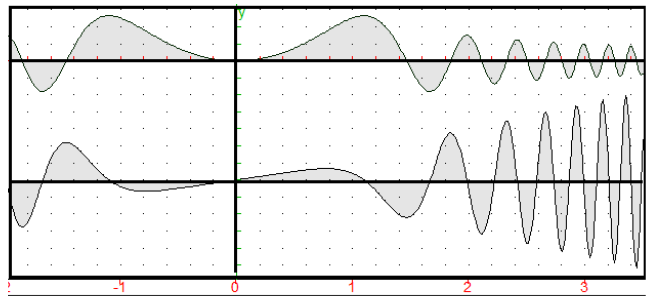
a	Pourquoi est il vrai que si f est continue à droite et continue à gauche en a, alors elle est continue en a.	.
b	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a, alors pourquoi elle n'est pas forcément dérivable en a.	
c	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a, alors elle est continue en a.	
d	Un $\mathcal{E}$ tracé par Enis est il homéomorphe à un $\mathcal{E}$ tracé par Ines ?(référenc MPSI2 2023-24)	
e	Vrai ou faux : $x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert)$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{\lvert x\rvert}$?	
f	Vrai ou faux : f est dérivable en a si et seulement si $x \longmapsto f(x+a)$ est dérivable en 0.	
g	Vrai ou faux : si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable en $-a$ de dérivée $f'(a)$.	
h	Vrai ou faux : si $x \longmapsto Arctan(f(x))$ est dérivable en a alors f est dérivable en a.	
i	Vrai ou faux : si $x \longmapsto (f(x))^2$ est dérivable en a alors f est dérivable en a.	
j	Vrai ou faux : si f est paire, alors f' est nulle en 0.	
	et même http ://rogermansuy.fr/HX2/Derivables.html	

Homéomorphisme : application continue bijective dont la réciproque est aussi continue.

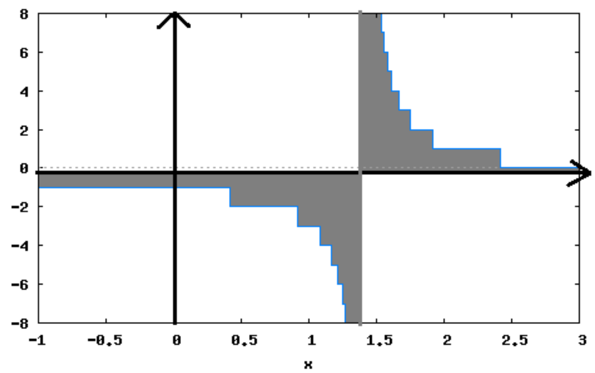
◁57▷ ♡ Donnez les points de discontinuité sur $[0,\ 1]$ de $x \longmapsto x.\left[\dfrac{1}{x}\right]$. Prolongez cette application par continuité en 0.
♣ Exprimez l'intégrale de cette application de 0 à 1 comme somme d'une série numérique. Donnez sa valeur, en admettant $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.



Messaline se fit mettre un col de loutre sur la nuque. Le Pape remercia la Duchesse de l'avoir fait mander. Il n'y a pas que dans les Postes qu'on voit de beaux Bottins. La Chine se soulève à l'appel du Japon. Frottez moi ce lard dit la charcutière, il est bien salé.
Ne cherchez pas, ce sont des parapétries de l'OuLiPo. Elles en ont la forme, l'odeur, la saveur, mais ce ne sont pas des contrepèteries.

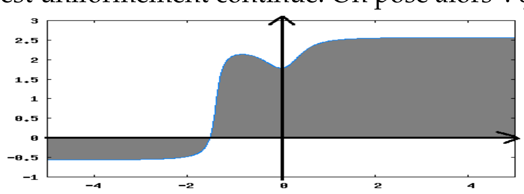


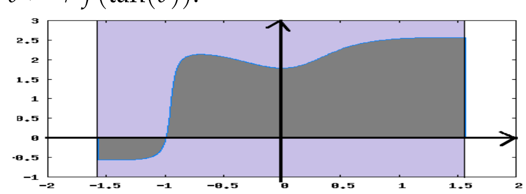
♡ On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x}$. Prolongez la par continuité en 0.
Montrez qu'elle est dérivable, même en 0.
♡♡ Montrez que f est uniformément continue sur tout segment$[-a,\ a]$ et sur $\mathbb{R}$.
◁58▷ Montrez que f' n'est pas bornée.
(Rappel : on a montré $(f'\ bornee) \Rightarrow (f\ lipschitzienne) \Rightarrow (f\ uniform\acute{e}ment\ continue)$ mais on voit ici qu'il n'y a pas de réciproque.



♡ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{x-\sqrt{2}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. Même question avec
◁59▷ $x \longmapsto \left[\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}\right]$ *(partie entière)*.

◁60▷ ♡ Donnez une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue. Soit maintenant f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite a en $-\infty$ et une limite b en $+\infty$. Montrez que f est bornée. On veut montrer que f est uniformément continue. On pose alors : $\varphi = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$.





Montrez que φ se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$. Montrez que φ est alors uniformément continue sur $[-\pi/2,\ \pi/2]$ puis sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Déduisez par composition que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

◁61▷ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est uniformément continue sur $[0,\ 2]$.
Déduisez que f est uniformément continue sur tout $\mathbb{R}$.
Pourquoi a-t-on pris $[0,\ 2]$ plutôt que $[0,\ 1]$ simplement ?

◁62▷ ♡ Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne a dans $\mathbb{R}$. Montrez par récurrence sur n que pour tout x de $[a + n.\mu_1,\ a + (n+1).\mu_1]$, on a $|f(x) - f(a)| \leqslant n + 1$. Déduisez que f est encadrée par deux applications affines.

◁63▷ ♡ Quels sont les vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right)$ que vous pouvez utiliser pour compléter $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right)$ en base de $\mathbb{R}^3$? Lesquels donnent une base de même orientation que la base canonique ?

◁64▷ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix}2\\1\\x\end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 4\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 (libre) et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 2 (liée) ?
Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 1 ?