

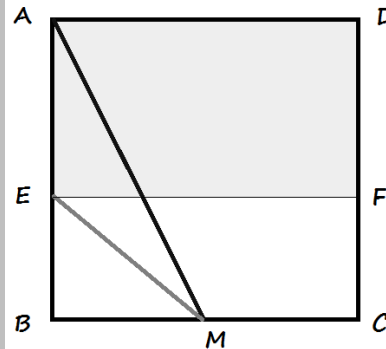


Montrez $\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$.

Prolongez en $0 x \mapsto \sin(x) \cdot \ln(x)$. Est elle alors dérivable en 0 ?

Montrez que si f est C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne.

Montrez qu'il n'y a pas de réciproque.



(A, B, C, D) est un carré,

M est le milieu de [B, C]

(A, E, M) est isocèle en E

AM mesure 4 unités.

Calculez l'aire du rectangle

(A, E, F, D).

<0>

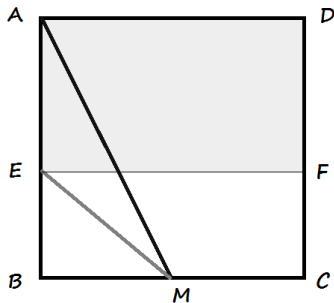
L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue donc intégrable.

Mais l'intégration par parties ne donne rien. La clef semble être dans le choix des bornes : $1/2$ et 2 .

On pose un changement de variable $u = \frac{1}{t}$. L'intégrale devient la même, à trois signes près.

$$I = \int_{t=1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_{u=2}^{1/2} \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-du}{u^2} = -I$$

On peut aussi changer de variable avec $u = \ln(t)$ et obtenir l'intégrale d'une application impaire sur un intervalle centré sur l'origine.



(A, B, C, D) est un carré,

M est le milieu de [B, C]

(A, E, M) est isocèle en E

AM mesure 4 unités.

Calculez l'aire du rectangle

(A, E, F, D).

On note c le côté du carré. On se place dans le triangle rectangle (A, B, M) de côtés c , $c/2$ et 4. On a $c^2 + (c/2)^2 = 4^2$ soit $c = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

On note a la distance AE, que l'on retrouve en EM et que l'on soustrait pour EB.

Encore avec le théorème de Pythagore : $(c-a)^2 + (c/2)^2 = a^2$.

Sans effort : $c^2 + \frac{c^2}{4} - 2.a.c + a^2 = a^2$ et donc $2.a.c =$

$$c^2 + \frac{c^2}{4} = 16.$$

Immédiatement l'aire cherchée vaut 8.

<1>

♥ Montrez que si f est lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ alors $1/f$ l'est aussi (il faudra penser à introduire $\inf(f(x) \mid x \in [0, 1])$).

Un exercice de colle classique, vous risquez de l'avoir la semaine prochaine.¹

Calculons

$$\left| \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \right| = \frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) \cdot f(b)|} \leq \frac{K \cdot |b - a|}{|f(a) \cdot f(b)|}$$

On a le droit, f ne s'annule jamais.

Mais il y a un problème : $\frac{K}{|f(a) \cdot f(b)|}$ dépend encore de a et b .

Il faut donc majorer ce majorant. Pour le majorer, il faut minorer $|f(a)|$ et $|f(b)|$.

Et c'est là qu'on fait intervenir le segment $[0, 1]$. Sur ce segment, $|f|$ est bornée et atteint ses bornes :

$\exists c \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], f(c) \leq f(x) $	$\exists d \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(d) $
minorant	majorant

1. tiens, je ne pensais pas pouvoir la dire en plein confinement, cette phrase classique ; et pourtant...merci les colleurs !

On peut donc passer aux inverses positifs, et on obtient $\left| \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \right| \leq \frac{K}{|f(c)|^2} \cdot |b - a|$. Le rapport $\frac{K}{(f(c))^2}$ convient.

On note que $\frac{K}{f(c)^2}$ peut faire penser à $-\frac{f'(c)}{f(c)^2}$ dans la dérivation de $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

On note que si f avait eu une borne inférieure et non un minimum atteint, on ne pouvait plus majorer ainsi. La borne inférieure aurait pu être 0, certes non atteinte, mais dont on pouvait s'approcher à loisirs..

<2>

Construire une suite qui admet une sous-suite strictement croissante de limite 1 et une sous-suite strictement décroissante de limite 0.

Ce serait avoir $1 - \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}$ comme sous suites.

On peut jouer sur $(-1)^n$ avec $\frac{(-1)^n}{n+1}$ qui va donner une part de ce qu'on attend.

Mais il y a aussi le 1 ou 0 devant.

Et lui, on l'a avec $\frac{1 - (-1)^n}{2}$.

On propose donc $u_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

<3>

En quels point la dérivée de $x \mapsto |\ln(|x|)|$ est-elle discontinue ?

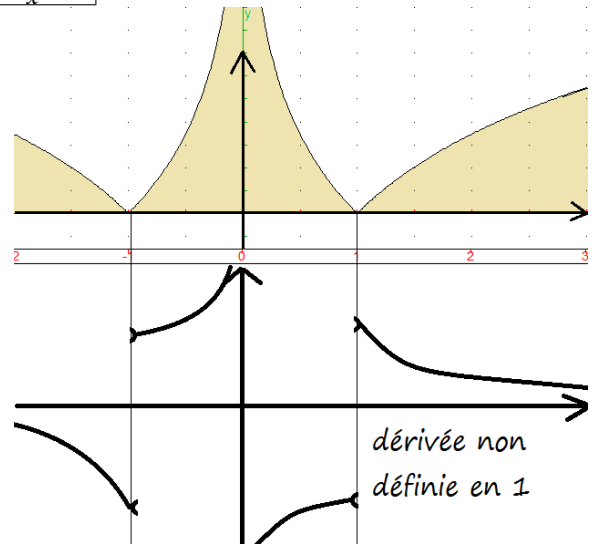
Attention, la question est précise². Et la réponse le sera aussi : nulle part.

Déjà, le domaine de définition : $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Mais quel est ensuite le domaine de définition de la dérivée ? : $] - \infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Et sur tout ce domaine, la dérivée est continue.

	$] - \infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$		$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f(x)$	$\ln(-x)$	0	$-\ln(-x)$	$ $	$-\ln(x)$	0	$\ln(x)$
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	$ $	$-\frac{1}{x}$	$ $	$-\frac{1}{x}$	$ $	$\frac{1}{x}$



Vous avez été tentés de proposer -1 et 1 ?

Mais en ces points, f' n'est même pas définie, comment pourriez-vous parler de continuité ?

Certes, la dérivée saute en ces points, et admet une limite à droite et une limite à gauche distinctes.

Mais ne lui faites pas dire ce qu'elle ne dit pas.

.

.

.

<4>

Soit f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout n , on pose $I_n = \int_0^1 t^n \cdot f(t) \cdot dt$. Montrez par encadrement que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déterminez la limite de $((n+1) \cdot I_n)$. Déterminez la limite de $(n \cdot I_n)$.

L'existence de chaque I_n repose sur le mot « continuité ».

Pour faire tendre une intégrale vers 0, on l'encadre : f est positive, donc chaque I_n est positive.

f est continue sur un segment, donc bornée et atteint ses bornes.

Il existe un certain c vérifiant $0 \leq f(t) \leq f(c)$ pour tout t .

2. mais contient une faute de grammaire

On multiplie par t^n positif : $0 \leq t^n \cdot f(t) \leq t^n \cdot f(c)$.

On intègre de 0 à 1 :

$$0 \leq I_n \leq f(c) \cdot \int_0^1 t^n \cdot dt = \frac{f(c)}{n+1}$$

Par encadrement ($f(c)$ est une « constante »), I_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Comme f est C^1 il est tentant d'intégrer par parties : $I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot f(t) \right] - \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 t^{n+1} \cdot f'(t) \cdot dt$.

$f(t)$	$\hookrightarrow$	$f'(t)$
t^n	$\longleftarrow$	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$

On récupère :

$$I_{n+1} \cdot (n+1) = f(1) - \int_0^1 t^{n+1} \cdot f'(t) \cdot dt$$

Comme f' est continue, elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe d et δ vérifiant $\forall t, f'(d) \leq f'(t) \leq f'(\delta)$.

On multiplie par t^n positif, on intègre de 0 à 1 : $\frac{f'(d)}{n+2} \leq \int_0^1 t^{n+1} \cdot f'(t) \cdot dt \leq \frac{f'(\delta)}{n+2}$.

par encadrement, ce terme tend vers 0. Par somme ; $(n+1) \cdot I_n$ converge vers $f(1)$.

On soustrait I_n qui tend vers 0 : $(n+1) \cdot I_n$ converge vers $f(1)$.

On peut reformuler (sauf si $f(1)$ est nul) : $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{n}$

Comme si f avait été constante sur $[0, 1]$ et partout égale à $f(1)$.

◀5▶

♥ Résolvez $z + \bar{z} = |z|$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

On pose $z = x + i \cdot y$ avec x et y réels.

L'équation devient $2 \cdot x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Elle équivaut à $\frac{x}{4 \cdot x^2} \geq \frac{0}{x^2 + y^2} \cdot 3$.

L'équation $3 \cdot x^2 = y^2$ donne deux droites : $y = \sqrt{3} \cdot x$ et $y = -\sqrt{3} \cdot x$. Dont on ne garde que les deux demi-droites avec x positif.

Autre approche : en polaires. On écrit $z = \rho \cdot e^{i \cdot \theta}$. On aboutit à $2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) = \rho$.

Soit que ρ est nul (origine), soit que $\cos(\theta)$ vaut $\frac{1}{2}$. Deux demi droites issues de l'origine faisant un angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses.

◀6▶

f et g sont deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$. On suppose $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (au fait, pour un demi point déjà, ça veut dire quoi ?). Lesquelles de ces affirmations sont alors vraies :

A	si	f est bornée	alors	g est bornée
B	si	f est dérivable en tout point	alors	g est dérivable en tout point
C	si	f est positive en tout point	alors	g est positive en tout point
D	si	f est périodique	alors	g est périodique à partir d'un certain réel
E	si	f est croissante	alors	g est croissante
F	si	f est lipschitzienne	alors	g est lipschitzienne

On définit : $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ signifie $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1$ et aussi $\frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1$ par symétrie des rôles.

Pour simplifier, on a pris des applications ne s'annulant jamais. Sinon, il faut revenir aux ε et encadrer $f(t) \cdot (1 - \varepsilon) \leq g(t) \leq (1 + \varepsilon) \cdot f(t)$ à partir d'un certain rang...

On en déduit que $\frac{g}{f}$ est bornée par $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ à partir d'un certain réel $A_{1/2}$. Mais avant, sur $[0, A_{1/2}]$, le rapport $\frac{g}{f}$ est borné (continu sur un segment). Globalement, $\frac{g}{f}$ est borné sur tout $\mathbb{R}^+$ (théorème de compacité étendu grâce à une limite à l'infini).

3. si vous marquez juste $(x = \sqrt{x^2 + y^2}) \Leftrightarrow (4 \cdot x^2 = x^2 + y^2)$, je déduis que vous avez fait six heures de maths hebdomadaires en Terminale pour rien ou juste pour faire des calculs en physique, mais pas pour cultiver votre intelligence

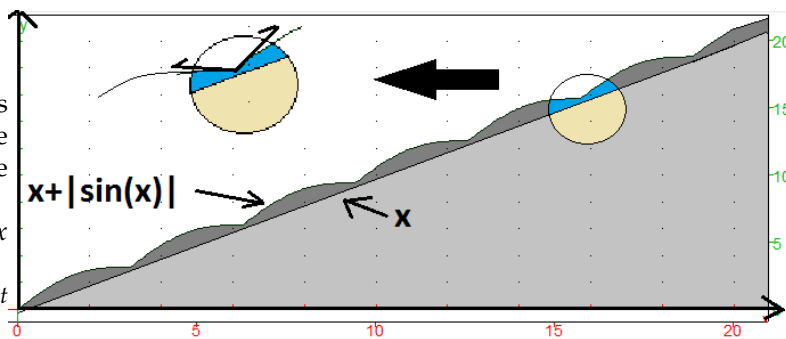
Par produit, $f \cdot \frac{g}{f}$ est bornée si f est bornée.

f et g sont toutes les deux continues, mais pas forcément dérivables ensemble. Un défaut de dérivabilité sur g ne va pas forcément l'empêcher d'être équivalente à f . Il suffit que le $o(f)$ dans $g(x) = f(x) + o(f(x))$ soit un terme non dérivable.

On peut prendre $|\sin|$ qui a des problèmes en tous les multiples de π . Mais c'est une application bornée, « de peu de poids » face à Id par exemple.

On tient un contre-exemple avec $f = x \mapsto x$ et $g = x \mapsto x + |\sin(x)|$.

Un dessin fait aussi l'affaire pour convaincre si il est assez explicite.



Pourquoi la positivité de f se transmettrait-elle à g ? Vers l'infini, oui, mais avant? A priori, on pourrait prendre $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto x^2 - 1$. La première est positive, et la seconde change de signe entre -1 et 1 . Ça ne les empêche pas d'être équivalentes vers $+\infty$.

Mais il y a un détail à regarder. f et g sont continues de $\mathbb{R}^+$ (intervalle) dans $\mathbb{R}^*$ (qui a un trou). Ceci force f et g à ne pas s'annuler. Et donc à ne pas changer de signe.

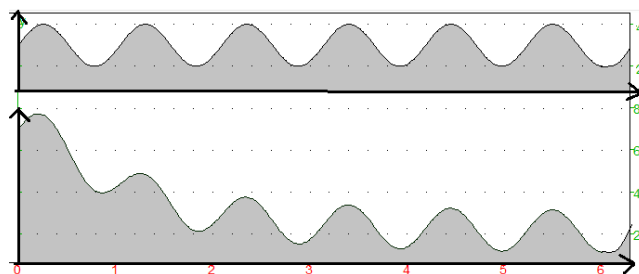
En effet, si g change de signe, par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins, une fois, ce qui est contradictoire.

f et g sont donc de signe constant. f est positive. Le quotient tend vers 1. g ne peut pas être négative. Elle est donc aussi positive.

La périodicité de f ne se transmet pas forcément à g . Il suffit de perturber f avec un petit terme non périodique, mais s'effaçant devant f .

On est obligé de prendre une application continue périodique, donc bornée. On ne prend pas un sinus. Il faut une application qui ne s'annule pas. On prend alors $2 + \sin$. Et la perturbation sera une fonction qui tend vers 0.

Par exemple $x \mapsto 2 + \sin(x) + \frac{1}{1+x^2} = 2 + \sin(x) + o(1)$.



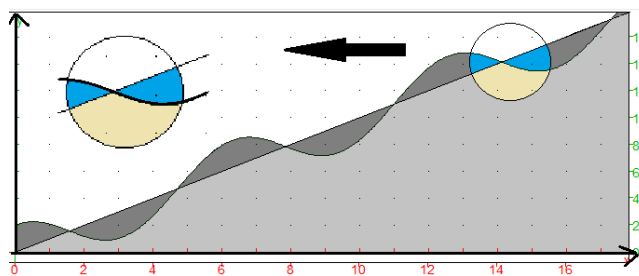
Le quotient tend vers 1, mais la seconde n'est pas périodique même à partir d'un certain rang.⁴

Pour f croissante, il y a une erreur à ne pas commettre. La négation de g croissante n'est pas « g décroissante ». On ne peut effectivement pas avoir f croissante et g décroissante.

Mais on peut avoir f croissante et g changeant de sens de variations de temps en temps.

Prenons encore $x \mapsto x$ et perturbons la avec un cosinus.

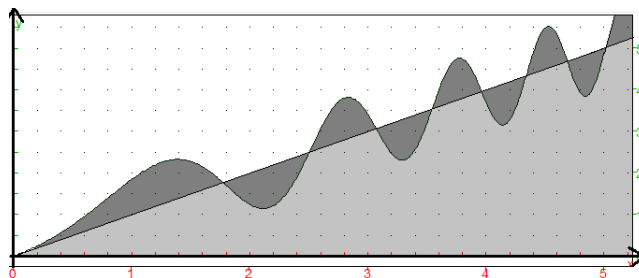
La somme $x \mapsto x + \cos(x)$ a pour dérivée $1 - \sin$ qui peut s'annuler. Ah, elle ne change pas de signe? Allez : $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2 \cdot \cos(x)$. leur quotient tend bien vers 1. Mais la seconde a un tableau de variations très laid.



4. pas si évident si on doit entrer dans les détails, elle pourrait avoir une période « nouvelle ». Mais si elle était périodique, sa dérivée le serait aussi, de même que $g + g''$.

Pour le caractère lipschitzien, restons naïf en parlant de dérivée bornée. Si f a une dérivée bornée, pourquoi celle de g le serait ? Si les variations de f sont « calmes », celles de g peuvent être plus brutales, du moment que f et g partent à la même vitesse.

Perturbons Id (lipschitzienne) par $x \mapsto \sin(x^2)$ (pas lipschitzienne quand on part vers l'infini). Elles restent quand même équivalentes.



A	f est bornée	g est bornée	oui	produit
B	f est dérivable en tout point	g est dérivable en tout point	non	$x + \sin(x) $
C	f est positive en tout point	g est positive en tout point	oui	T.V.I.
D	f est périodique	g est périodique à partir d'un certain réel	non	$2 + \sin(x) + \frac{1}{1+ x }$
E	f est croissante	g est croissante	non	$x + 2 \cdot \cos(x)$
F	f est lipschitzienne	g est lipschitzienne	non	$x + \sin(x^2)$

Les arguments graphiques sont acceptés si ils donnent une bonne compréhension de la chose.

Les pseudos arguments du type « ne se transmet pas forcément » ne sont pas acceptés tant qu'il ne sont pas assortis d'un contre-exemple.

Mes exemples sont nuls en un point alors qu'on voulait des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$? On leur ajoute 1.

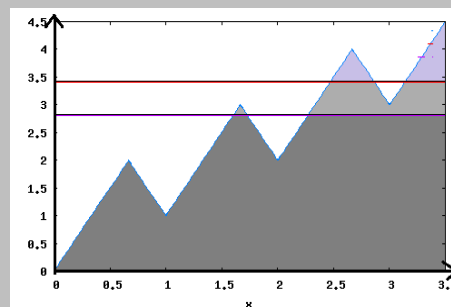
<7>

♣ On définit : $f = x \mapsto 2 - |3x - 2|$ et $g = x \mapsto [x] + f(x - [x])$. Représentez f et g . Montrez que g est continue et lipschitzienne.

Montrez que pour tout λ réel l'équation $g(x) = \lambda$ d'inconnue x a exactement trois solutions.

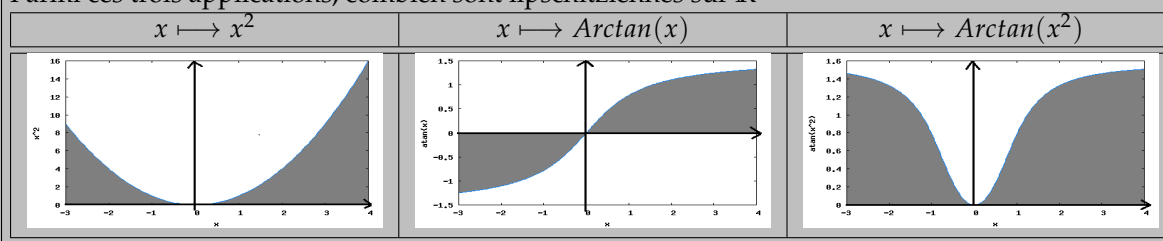
Montrez qu'il n'existe pas d'application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel λ l'équation $h(x) = \lambda$ ait exactement deux solutions.

A faire.



<8>

Parmi ces trois applications, combien sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$



$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \text{Arctan}(x)$	$x \mapsto \text{Arctan}(x^2)$
pas lipschitzienne	lipschitzienne	lipschitzienne
dérivée non bornée	dérivée bornée	dérivée bornée

Sinon, « à la main »⁵, pour $x \mapsto x^2$, on écrit la négation :

$$\forall K, \exists (a, b) |a^2 - b^2| > K \cdot |a - b|$$

Pour K donné, il suffit de choisir $a = K + 1$ et $b = 0$.

Pour Arctan , on borne la dérivée, ou on écrit (ce qui revient au même) :

$$|\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)| = \left| \int_a^b \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \left| \int_a^b dt \right| = |b - a|$$

Pour bornée $x \mapsto \frac{2x}{1+x^4}$ (dérivée de la dernière), on en dresse le tableau de variations.

5. ce qui se traduit par « avec son cerveau »

◀9▶ Qui, de $\theta \mapsto \sin(\tan(\theta))$ et $\theta \mapsto \tan(\sin(\theta))$ est lipschitzienne sur $] -\pi/2, \pi/2[$?

La première ne l'est pas. Certes le sinus reste borné, mais la tangente le fait osciller de plus en plus vite.

On prend $x_n = \text{Arctan}(2.n.\pi)$ et $y_n = \text{Arctan}(2.n.\pi + \frac{\pi}{2})$.

Ces deux valeurs sont dans $] -\pi/2, \pi/2[$ (très proche de l'extrémité droite, là où tout se passe...).

On calcule $\sin(\tan(x_n)) = 0$ et $\sin(\tan(y_n)) = 1$.

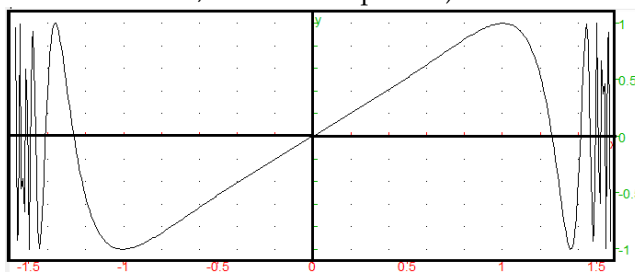
De x_n à y_n la fonction grimpe de 1, alors que x_n et y_n sont très proches.

Le taux d'accroissement $\frac{|f(y_n) - f(x_n)|}{|y_n - x_n|}$ vaut $\frac{1}{|y_n - x_n|}$

et tend vers $+\infty$ (dénominateur tendant vers $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$).

Quel que soit K donné, il existe donc au moins un n vérifiant $\frac{1}{|y_n - x_n|} > K$.

C'est lui qu'on va prendre.



Un logiciel graphique ne peut pas rendre compte du phénomène. Il se perd en $\pi/2$, n'arrivant pas à avoir assez de points pour tracer une sinusoïde accélérée...

La seconde l'est.

sin est lipschitzienne de rapport 1.

$\sin(x)$ reste entre -1 et 1 .

Et $\tan$ est lipschitzienne sur $[-1, 1]$ (dérivée bornée).

◀10▶ Montrez que $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ sont périodiques.

On suppose que $x \mapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période p . Montrez alors $\cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) = 2$.

Déduisez $\cos(p) = 1$ et $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$. Concluez.

◀11▶ ♥ Montrez que si f est lipschitzienne de $] -\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$ (rapport H) et de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K) alors elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On écrit deux hypothèses et une conclusion cherchée :

H^-	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^-, f(y) - f(x) \leq H \cdot y - x $
H^+	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+, f(y) - f(x) \leq K \cdot y - x $
?	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(y) - f(x) \leq R \cdot y - x $

La rapport sera bien $R = \text{Max}(H, K)$.

Mais il y a quatre cas à traiter pour x et y dans $\mathbb{R}$:

	$x \leq 0$	$x \geq 0$
$y \leq 0$	$ f(y) - f(x) \leq H \cdot y - x \leq \text{Max}(H, K) \cdot y - x $	ah oui tiens !
$y \geq 0$	fallait y penser	$ f(y) - f(x) \leq K \cdot y - x \leq \text{Max}(H, K) \cdot y - x $

Prenons x négatif et y positif.

On intercale 0 entre x et y .

On écrit $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(0) + f(0) - f(x)| \leq |f(y) - f(0)| + |f(0) - f(x)|$.

Comme y et 0 sont positifs, on peut majorer

$$|f(y) - f(0)| \leq K \cdot |y - 0| \leq \text{Max}(H, K) \cdot |y| = \text{Max}(H, K) \cdot y$$

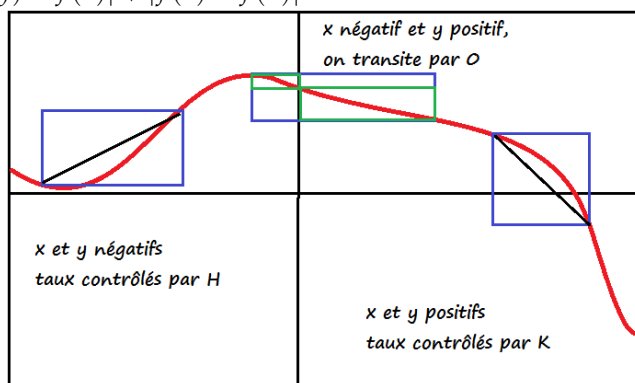
Comme x et 0 sont négatifs, on peut majorer

$$|f(0) - f(x)| \leq H \cdot |x - 0| \leq \text{Max}(H, K) \cdot |x| = \text{Max}(H, K) \cdot (-x)$$

On somme donc :

$$|f(y) - f(x)| \leq \text{Max}(H, K) \cdot (y - x) = \text{Max}(H, K) \cdot |y - x|$$

L'autre cas est totalement symétrique...



◁12▷ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ l'est aussi.
 Montrez que $x \mapsto (-1)^{[x]}$ n'est pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais que sa valeur absolue l'est aussi.

On suppose $|f|$ lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K), et continue.

On se donne a et b . Montrez que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors on a $|f(b) - f(a)| \leq K \cdot |b - a|$.

On les suppose cette fois de signes opposés. Montrez qu'il existe c entre a et b vérifiant $f(c) = 0$. Montrez alors

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b)| + |f(a)| \leq K \cdot |c - b| + K \cdot |c - a| \leq K \cdot |b - a|$$

Concluez : f est à son tour lipschitzienne.

A faire.

◁13▷ ♥ Montrez que $x \mapsto \tan(x)$ est lipschitzienne de $[-\pi/3, \pi/3]$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que sinon, elle serait bornée).

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x) \cdot \cos(y) - \sin(y) \cdot \cos(x)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x - y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| \leq \left| \frac{\sin(x - y)}{\cos(\pi/3) \cdot \cos(\pi/3)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| \leq \frac{|x - y|}{\cos^2(\pi/3)}$$

Du pur raisonnement de maths. Juste de la trigonométrie et des majorations dans le bon sens...

Avez vous cette approche, ou sortez vous de gros théorèmes ? Êtes vous matheux ou...

Si f est K lipschitzienne de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f(x) - f(0)| \leq K \cdot |x - 0| \leq K \cdot \frac{\pi}{2}$.

L'application serait bornée...

◁14▷ Montrez que si f et $[f]$ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée (raisonnez, n'écrivez pas plein de formules).

Mais ! La partie entière fait des sauts aux abscisses entières. Elle n'est donc pas continue.

Donc pas lipschitzienne.

Pour que $[f]$ reste lipschitzienne, il faut que f reste bornée entre deux entiers. Donc bornée.

◁15▷ Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un rationnel ?
 Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel ?
 Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel et l'image de chaque irrationnel soit un rationnel ?

Il suffit de prendre f constante. Égale à 1 dans le premier cas, et à $\sqrt{2}$ dans le second.

En revanche, si on impose « les rationnels ont une image irrationnelle »

et « les irrationnels ont une image rationnelle »,

alors on aura un problème. Le voyez vous ? (T.V.I. et cardinal)

◁16▷ ♥ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{\text{Arctan}(1) \cdot \text{Arctan}(2) \cdots \text{Arctan}(n)}$.

Un produit, une racine ? On va rendre tout ça plus convivial en passant au logarithme.

$$\frac{\ln(\text{Arctan}(1)) + \ln(\text{Arctan}(2)) + \dots + \ln(\text{Arctan}(n))}{n}$$

On introduit la suite $(\ln(\text{Arctan}(n)))$. Elle converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sa moyenne de Cesàro fait de même et converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

On revient à la suite initiale, elle converge vers $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

Avec cette forme, il fallait penser au logarithme pour rendre les choses plus basiques.

Et il fallait se dire « soit Cesàro, soit somme de Riemann ». Ici c'était Cesàro.

Et c'était en fait une moyenne géométrique.

◁17▷. ♠ n est un entier naturel ; résolvez l'équation $z^{2n} + 1 = 0$ (en passant par $z = r.e^{i\theta}$) puis factorisez $(X^{2n} + 1)$ dans $\mathbb{C}$.

On pose $f_x = \theta \mapsto \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1)$ (x est un réel fixé de $]1, +\infty[$). Montrez que f_x est intégrable sur $[0, \pi]$. Exprimez grâce à la première question la somme de Riemann milieu de f_x pour l'équisubdivision de $[0, \pi]$.

Déduisez : $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$.

Calculez $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta$ pour x dans $] -\infty, -1[$ (indication : $t = \pi - \theta$).

Calculez $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta$ pour x dans $] -1, 1[$.

Vérifiez que $x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$ admet la même limite à droite et à gauche en 1, dont on estimera que c'est la valeur de $\int_0^\pi \ln(1^2 - 2.1.\cos(\theta) + 1).d\theta$. Calculez alors $\int_0^\pi \ln(\sin(t)).dt$.

Un des plus beaux exercices niveau Sup. Il figure dans tout bon cours parlant des sommes de Riemann.

Justement, grâce à ces sommes, on va calculer une intégrale pour laquelle n n'a pas de primitive...

On résout $z^{2n} + 1 = 0$ en mettant z sous la forme polaire $\rho.e^{i\theta}$ (sachant que $z = 0$ n'est pas solution).

On obtient $\rho^{2n}.e^{i.2n.\theta} = -1 = e^{i.\pi}$.

On identifie le module : $\rho = 1$ (et pas $\rho = -1$, puisque ρ est positif) et $2.n.\theta = \pi [2.\pi]$.

On obtient $z = \exp\left(\frac{(2.k+1).i.\pi}{2.n}\right)$ avec k autorisé à décrire $\mathbb{Z}$.

Mais déjà, quand k va de 0 à $2.n - 1$, on a $2.n$ racines distinctes. On a les a toutes. De toutes façons, k et $k + 2.n$ donnent la même racine.

$$S = \left\{ \exp\left(\frac{(2.k+1).i.\pi}{2.n}\right) \mid k \in \text{range}(2.n) \right\} \text{ et on factorise } X^{2.n} + 1 = \prod_{k=0}^{2.n-1} (X - e^{\frac{(2.k+1).\pi}{2.n}})$$

On étudie ensuite $f_x = \theta \mapsto \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1)$ sur $[0, \pi]$. Elle est définie et continue.

Il nous suffit de vérifier que le terme dans le logarithme est continu et ne s'annule jamais.

Forme simple : $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$. Pour qu'elle s'annule, il faudrait avoir à la fois $\sin(\theta) = 0$ et $x - \cos(\theta) = 0$.

Mais $\sin(\theta) = 0$ conduit à $\cos(\theta) = 1$ ou $\cos(\theta) = -1$, alors même que x est strictement plus grand que 1.

Autre approche : $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1$ ne s'annule que pour $x = e^{i\theta}$ ou $x = e^{-i\theta}$. Or, x est un réel, et il n'est même pas sur le cercle trigonométrique...

L'intégrale $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta$ existe pour tout x . Mais on ne sait pas la calculer à l'aide de primitives, changements de variables ou par parties.

On découpe $[0, \pi]$ en n segments à l'aide des $\frac{k.\pi}{n}$ pour k de 0 à n .

Les milieux des segments sont les $\frac{2.k+1}{2.n}.\pi$.

La somme de Riemann milieu est

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2.\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right) + 1\right)$$

Et si on compactait les logarithmes en un seul ?

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2.\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right) + 1\right)\right)$$

On factorise notre célèbre noyau :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \cdot \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \right)$$

La ressemblance avec notre factorisation initiale se fait vraiment sentir.

De 0 à $n-1$, on a les n premières racines de $X^{2n} + 1$: $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$.

Où sont les suivantes ? Dans la description ci dessus, c'est $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$. Demi cercle inférieur.

Dans la description « factorisation de $X^{2n} + 1$, c'est $\prod_{p=n}^{2n-1} \left(x - e^{-\frac{2p+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$. C'est finalement le même demi cercle.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$	et	$p=n$	$p=n+1$	$p=n+2$	...	$p=2n-2$	$p=2n-1$
$e^{-\frac{1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{-\frac{2n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{2n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$		$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$

Ajoutez 2π aux arguments de la première (ça ne change rien), et renversez le sens de lecture de la deuxième :

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$	et	$p=2n-1$	$p=2n-2$	...	$p=n+1$	$p=n$
$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$		$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$

Finalement : $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) = \prod_{p=n}^{2n-1} \left(x - e^{-\frac{2p+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$

On recolle :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \cdot \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \right) = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} \right) \right) = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(x^{2n} + 1)$$

On n'a pas de primitive, mais on a une formule pour la somme de Riemann milieu... $R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n})$

Elle dépend de x (paramètre de la fonction) et aussi de n , nombre de pas de la subdivision.

Mais que font les sommes de Riemann quand n tend vers l'infini ? Elles tendent vers l'intégrale. On va donc pouvoir calculer celle ci en passant à la limite sur n (comme dans le cours on avait calculé $\int_a^b e^t \cdot dt$ en passant par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^a \cdot \left(e^{\frac{b-a}{n}} \right)^k$$

Mais que fait $\frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n})$ quand n tend vers l'infini ?

Forme indéterminée ? Si on le traite vite : $1 + x^{2n}$ est équivalent à x^{2n} , donc on va étudier $\frac{\pi}{n} \cdot \ln(x^{2n})$ qui vaut $2\pi \cdot \ln(x)$ et tend vers $2\pi \cdot \ln(x)$.

Est ce rigoureux ? Pas tant que ça.

Alors on va en faire quelquechose de rigoureux :

$$\frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n}) = \frac{\pi}{n} \cdot \left(\ln(x^{2n}) + \ln(x^{-2n} + 1) \right) = 2\pi \cdot \ln(x) + \frac{\pi \cdot \ln(1 + e^{-2n})}{n}$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{\pi \cdot \ln(1 + e^{-2n})}{n}$ tend tranquillement vers 0 et la somme de Riemann tend vers $2\pi \cdot \ln(x)$.

Trop fort : $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2\pi \cdot \ln(x)$

Et pour x dans $] -\infty, -1[$? Il me semble que le calcul ne change pas. Simplement, on va garder x^2 car il est positif.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = \pi \cdot \ln(x^2)$$

Mais on peut aussi suivre l'indication de l'énoncé. Pour x négatif, l'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$, ça c'est sûr.

On y fait un changement de variable $\alpha = \pi - \theta$. l'intégrale devient $\int_{\alpha=\pi}^0 \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\alpha + \pi) + 1) \cdot (-d\alpha)$ et même

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \ln(x^2 + 2x \cdot \cos(\alpha) + 1) \cdot d\alpha$$

On reconnaît l'intégrale de la question précédente, mais avec $-x$ à la place de x . Et justement, $-x$ est positif ! On est exactement dans le cadre de la première série de questions, et l'intégrale vaut $2 \cdot \pi \cdot \ln(-x)$ avec $-x$ positif. Soit encore $2 \cdot \pi \cdot \ln(|x|)$.

Notre intégrale à paramètre x est paire.

Si x est entre -1 et 1 , pas de grand changement dans l'existence, ni le calcul de la somme de Riemann.

On a encore $R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2,n})$.

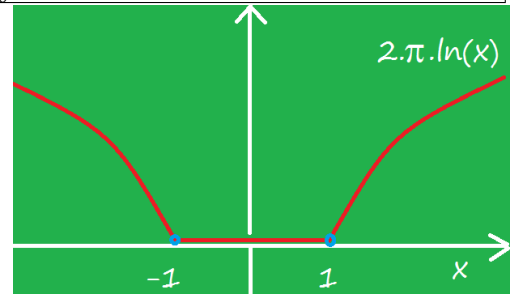
Sauf que maintenant, quand n tend vers l'infini, $\ln(1 + x^{2,n})$ tend vers 0 et le dénominateur tend vers l'infini. La somme de Riemann tend vers 0 (il y a des logarithmes de réels plus grands que 1 et des logarithmes négatifs, tout se compense).

On résume :

$x \in]-\infty, -1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$
$x \in]-1, 1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 0$
$x \in]1, +\infty[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$

Il nous en manque ?

$x \in]-\infty, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$	?	0	?	$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$



Ayant la même limite à droite et à gauche en 1 et -1 , on a envie de compléter :

$x \in]-\infty, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$	0	0	0	$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$

Et là, ça continue à être joli, avec un peu de trigonométrie.

La valeur en 1, c'est $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$.

On l'écrit $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(2 - 2 \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ et même $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(4 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot d\theta$.

On sait que cette intégrale est nulle. Et par propriété du logarithme, cela nous donne

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\ln(4) + 2 \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right) \cdot d\theta = 0$$

On intègre la constante et bascule de l'autre côté : $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot d\theta = -\pi \cdot \ln(2)$.

Attention, il y a comme un problème en 0 et en π pour ce logarithme quand même. On commence à faire des choses louches.

On change même de variable avec $\theta = 2\alpha$: $\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2 \cdot \ln(\sin(\alpha)) \cdot d\theta = -\pi \cdot \ln(2)$

On divise : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)) \cdot d\alpha = \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$ (avec un signe moins, car ces logarithmes de sinus sont négatifs).

Mais on voulait une intégrale de 0 à π ?

Or, que fait le sinus de $\pi/2$ à π . Exactement ce qu'il a fait de 0 à π . mais en sens inverse. On repasse par les mêmes valeurs, et l'intégrale se dédouble.

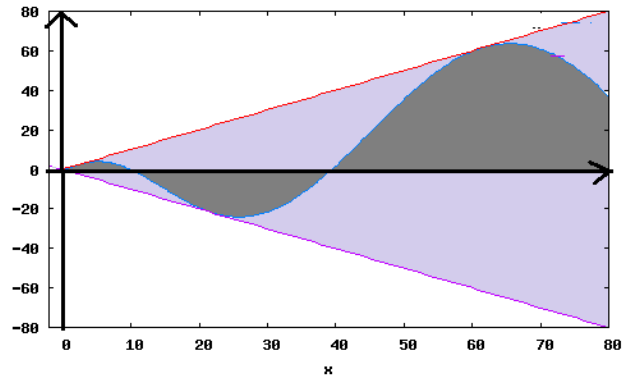
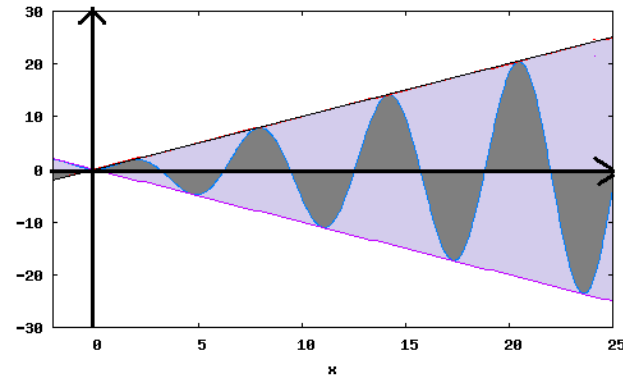
Proprement en posant $\beta = \pi - \alpha$: $\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \int_{\beta=\pi}^{\pi/2} \ln(\sin(\beta)).(-d\beta) = \int_{\beta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\beta)).d\beta$.

En additionnant les deux et en recollant par relation de Chasles (variables muettes, on somme de 0 à π) c'est tout

$$: \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \pi. \ln(2)$$

◀ 18 ▶

Montrez que $x \mapsto x. \sin(x)$ est lipschitzienne sur chaque segment $[-a, a]$. Montrez qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.



Et pour $x \mapsto x. \sin(\sqrt{x})$?

Pour lipschitzienne, on peut dire que c'est le produit de deux applications lipschitziennes bornées.

On peut aussi sortir les gros moyens : $f' = x \mapsto \sin(x) + x. \cos(x)$.

Sur $[-a, a]$, f' est bornée par $a + 1$.⁶

Et si f' est bornée, f est lipschitzienne.⁷

Ensuite, on a une implication « lipschitzienne implique uniformément continue » en prenant $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{K}$ avec des notations que tout le monde comprend.

Passons à $\mathbb{R}$ tout entier.

Attention, il y a des propriétés qui ne passent pas de « sur tout segment » à « donc sur tout $\mathbb{R}$ ».

Si f est continue sur chaque $[-a, a]$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est lipschitzienne de rapport 1 sur chaque $[-a, a]$, alors elle est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est lipschitzienne sur chaque $[-a, a]$, alors elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$: non.

Si f est bornée sur chaque $[-a, a]$, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$: non.

Si f est positive sur chaque $[-a, a]$, alors elle est positive sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est uniformément continue sur chaque $[-a, a]$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: non.

La dérivée n'est plus bornée. calculez la en $2.k.\pi$, vous voyez $f'(2.k.\pi)$ filer vers l'infini.

Elle ne peut donc plus être lipschitzienne (car « lipschitzienne et dérivable implique dérivée bornée »).

Pourrait elle être quand même uniformément continue sans être lipschitzienne.

L'implication est en effet « lipschitzienne implique uniformément continue en passant par $\frac{\varepsilon}{K}$.

Mais peut être qu'avec un η d'une autre forme, on peut s'en sortir.

La seule façon de nier uniformément continue, c'est de revenir à la définition et à sa négation.

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta, \exists (x, y), |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

On va prendre $\varepsilon_0 = 1$ car sinon on n'a pas trop d'idée pour commencer.

Pour η petit, on va aller chercher x et y proches l'un de l'autre à η près, mais avec des images éloignées.

On va prendre $x = 2.k.\pi$ et $y = 2.k.\pi + \eta$. On se place là où le graphe coupe l'axe.

On a bien $|y - x| \leq \eta$, que k soit « grand » ou « petit ».

On a ensuite $f(y) - f(x) = (2.k.\pi + \eta). \sin(2.k.\pi + \eta) - 0 = (2.k.\pi + \eta). \sin(\eta) \geq 2.k.\pi. \sin(\eta)$.

Jouons à présent sur k en le prenant « grand ».

6. quand je dis « bornée », je me contente de majorée en valeur absolue

7. l'équivalence « lipschitzienne » et « dérivée bornée » ne s'applique que si on sait que f est déjà bel et bien dérivable

Le physicien dira même « si k est grand, $2.k.\pi.\sin(\eta)$ est grand et c'est plus grand que 1 ».

Le matheux se sent obligé de dire « je prends $k = \left\lceil \frac{1}{2.\pi.\sin(\eta)} \right\rceil + 1$ ». Et ceci n'est ni petit ni grand. Ceci est juste « bien choisi ».

Bref, elle n'est pas uniformément continue, à cause de ses taux d'accroissement trop grands.

Et $x \mapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

Sur les segments, même argument.

Et sur $\mathbb{R}$: $g' = x \mapsto \sin(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2}.\cos(x)$ et $g'(0) = 0$ par limite des taux d'accroissement.

On a les mêmes problèmes.

◀19▶

♥ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$?

Combien y a-t-il d'applications uniformément continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ (attention, à $x < 0 < y$ avec $|y - x| \leq \mu_\varepsilon$).

♥ Combien il y a d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$?

Comment peut-on compter ça ? facilement !

Une application continue sur un intervalle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne peut donc pas sauter d'un entier à un autre.

Toute application continue de $] -\infty, 0[$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est constante.

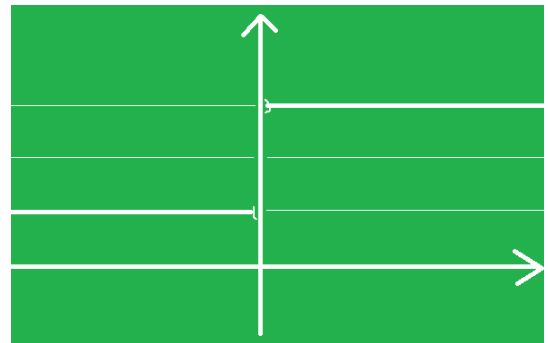
Il n'y a donc que quatre applications possibles.

Toute application continue de $]0, +\infty[$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est constante.

Il n'y a donc que quatre applications possibles.

Et ensuite, on recolle. Et l'exigence de continuité sur $\mathbb{R}^*$ n'impose rien.

L'exemple ci contre est bien une application continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.



Ne me dites pas « mais en 0 ». E, 0 elle n'est pas définie, on ne parlera pas de continuité.

Certes, on ne peut pas la prolonger par continuité en 0, mais la question n'est pas là.

Il y a donc seize (16) applications qui conviennent.

Mais l'uniforme continuité fait retomber sur la même constante des deux côtés.

En effet, il suffit de prendre la quantification de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1/4$ par exemple ici :

$$\exists \eta_{1/4}, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, |y - x| \leq \eta_{1/4} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq 1/4$$

On prend alors $x = -\frac{\eta_{1/4}}{2}$ et $y = \frac{\eta_{1/4}}{2}$.

$f(x)$ est la constante sur $] -\infty, 0[$ et $f(y)$ celle sur $]0, +\infty[$.

ce sont deux entiers de $\{0, 1, 2, 3\}$, distants de moins de $\frac{1}{4}$.

Ils sont égaux.

Il n'y a donc cette fois que quatre applications uniformément continues.

◀20▶

♥ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors $x \mapsto \sqrt{1 + f(x)}$ l'est aussi.

$t \mapsto \sqrt{1 + t}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

On vérifie :

$$|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}| = \frac{|b-a|}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}} \leq \frac{|b-a|}{1+1}$$

On parle ensuite de composée d'applications lipschitziennes.

Des fois, c'est tout bête...

21 On définit : $f = x \mapsto |\sin(x)|$ et pour tout entier naturel n : $f_n = x \mapsto |\sin(2^n \cdot x)|/2^n$ Montrez que chaque f_n est lipschitzienne.

$$\sup(\inf(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})$$

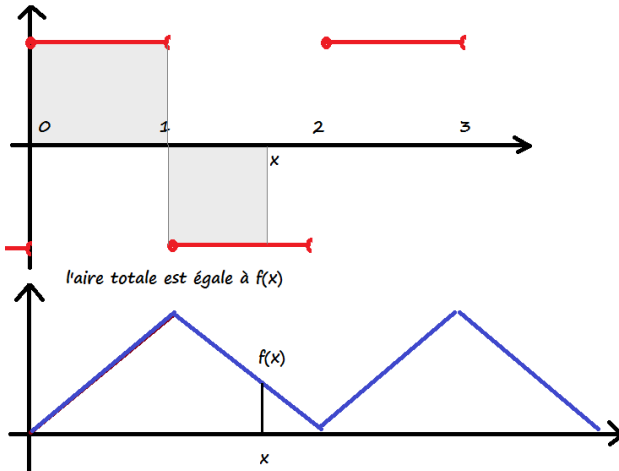
Déterminez proprement

$$\inf(\sup(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})$$

$$\sup(\inf(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])$$

$$\inf(\sup(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])$$

22 Montrez que $x \mapsto \int_0^x (-1)^{[t]} \cdot dt$ est lipschitzienne mais pas dérivable. Même question avec $x \mapsto \int_0^x (-1)^{[t]} \cdot \sin(t) \cdot dt$.



On peut tracer l'application et vérifier qu'elle n'est pas dérivable en 1 par exemple (deux demi-tangentes distinctes). Mais pour ce qui est de lipschitzienne, on va le faire sans effort.

Par la relation de Chasles, en encadrant.

Normalement, tout est dit, mais je vous le fais.

On se donne x et y et on calcule $f(y) - f(x)$ en appelant f l'application.

Par relation de Chasles : $f(y) - f(x) = \int_x^y (-1)^{[t]} \cdot dt$ (sans partie entière, $(-1)^x$ n'aurait pas eu de sens).

On passe à la valeur absolue, et on utilise l'inégalité triangulaire sur les intégrales : $\left| \int_a^b \varphi(t) \cdot dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| \cdot dt$ (en supposant $a < b$ sans perte de généralité).

On a donc $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |(-1)^{[t]}| \cdot dt = \int_x^y dt = y - x$ (ça c'est pour $x \leq y$ sinon, c'est $|f(y) - f(x)| \leq \int_y^x |(-1)^{[t]}| \cdot dt = \int_y^x dt = |y - x|$).

L'application est lipschitzienne de rapport 1.

Celle avec un sinus se traite de la même façon, même si on ne sait pas trop comment la représenter...

23 Montrez que $x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} \cdot dt$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On va revenir aux résultats simples. Comme cette application est dérivable, il suffit de borner sa dérivée.

On dérive proprement (voir feuille de rentrée) : on note F une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$). Notre application est alors $x \mapsto F(2x) - F(x)$.

Elle se dérive en $x \mapsto 2 \cdot F'(2x) - F'(x)$.

On obtient donc $x \mapsto 2 \cdot e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

On encadre par 2 et -1 (ou on majore brutalement en valeur absolue par 3).

La dérivée est bornée, l'application est lipschitzienne. Et nul ne nous demande d'optimiser le rapport de Lipschitz.

24 ♥ Montrez sans forcément la calculer (ni même la dériver) que $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Certes, elle se calcule : $\int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$.

On trouve au final $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ (on a changé de variable en $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$).

On décortique : $t \mapsto \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ et chaque terme est lipschitzien.

On peut aussi la dériver : $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

On minore puis majore : $1+x+x^2 \geq \frac{3}{4}$ (minimum d'un trinôme, et même factorisation canonique plus haut) :

$$\frac{1}{1+x+x^2} \leq \frac{4}{3}.$$

La dérivée est bornée, c'est fini.

Mais un vrai matheux sait payer le prix minimum. On se donne x et y avec x plus petit que y sans restreindre la généralité.

On calcule la différence : $\int_0^y \frac{dt}{1+t+t^2} - \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2}$ (relation de Chasles).

Cette différence est positive, mais on la majore aussi : la fonction sous le signe somme est positive, mais aussi plus petite que $\frac{4}{3}$ (voir « majoration de la dérivée »).

On encadre donc : $\int_x^y 0 \cdot dt \leq \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2} \leq \int_x^y \frac{4}{3} \cdot dt : 0 \leq f(y) - f(x) \leq 4 \cdot \frac{y-x}{3}$.

L'application est bien lipschitzienne, et le rapport est le même que dans les autres preuves.

◀25▶

♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.

La méthode astucieuse consistera à définir $\varphi = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et même si possible $] -\pi/2, \pi/2[$.

En notant α la limite de f à l'infini positif, et en quantifiant cette propriété, on a f bornée par $\alpha - 1$ et $\alpha + 1$ sur $[G_1, +\infty[$.

En notant β la limite de f à l'infini négatif, et en quantifiant cette propriété avec d'autres variables utiles, on a f bornée par $\beta - 1$ et $\beta + 1$ sur $] -\infty, G_1]$.

Par compacité et continuité, f est bornée sur le segment $[G_1, G_1]$, on va dire par M et μ .

Globalement, f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\max(\beta + 1, M, \alpha + 1)$ et minorée par $\max(\beta - 1, \mu, \alpha - 1)$.

La preuve stylée fait appel à $g = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$, continue, comme composée d'applications continues.

On la prolonge par composition de limites : $g(-\pi/2) = \beta$ (limite à droite) et $g(\pi/2) = \alpha$ (limite à gauche seulement).

g est à présent continue sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est bornée.

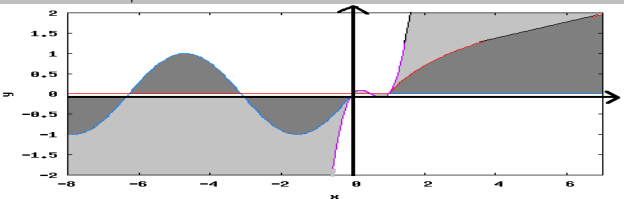
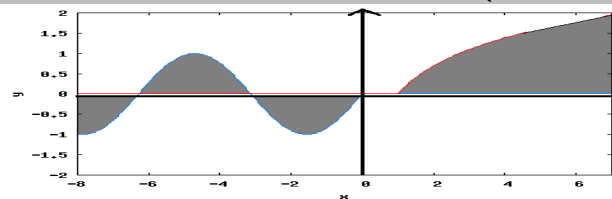
Par restriction, elle est bornée $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en gardant les mêmes bornes.

On a donc $\exists(\mu, M), \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mu \leq f(\tan(\theta)) \leq M$.

On change de variable : $\exists(\mu, M), \forall t \in \mathbb{R}, \mu \leq f(t) \leq M$. f est bornée.

◀26▶

Ajustez un polynôme P pour que $x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \\ P(x) & \text{sinon} \end{cases}$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.



On découpe en trois le domaine

	$x < 0$	$x = 0^-$	$0 < x < 1$	$x = 1^+$	$1 < x$
$f(x)$	$\sin(x)$	0	?	0	$\ln(x)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	1	?	1	$1/x$

Pour un raccordement continu en 0, on doit donc avoir la même limite à droite qu'à gauche. Ceci va imposer $P(0) = 0$.

Mais la tangente en 0 a pour coefficient directeur à gauche 1. On doit avoir le même à droite : $P'(0) = 1$.

On fait de même en 1 à droite : valeur 0 et dérivée 1.

On impose donc aussi $P(1) = 0$ et $P'(1) = 1$.

On cherche donc un polynôme vérifiant quatre conditions

$P(0) = 0$	$P(1) = 0$
$P'(0) = 1$	$P'(1) = 1$

On aura quatre équations. Il nous faut quatre inconnues.

$$P \text{ est donc dans } \mathbb{R}_3[X]. \text{ On l'écrit } a.X^3 + b.X^2 + c.X + d \text{ et on résout}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & & d & = & 0 \\ & & & c & = & 1 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ 3.a & + & 2.b & + & c & & & = & 1 \end{array}$$

On trouve $x \mapsto 2.x^3 - 3.x^2 + x$ (ça c'est la fonction polynôme, et le polynôme (formel) c'est $2.X^3 - 3.X^2 + X$).

On l'écrit aussi $X.(X-1).(2.X-1)$.

Le polynôme $X.(X-1).(2.X-1) + (X.(X-1))^2$ convient aussi d'ailleurs.

Et même tout polynôme $X.(X-1).(2.X-1) + (X.(X-1))^2.Q(X)$, voyez vous la structure particulière plus homogène ?

◁27▷ Soit f continue. Montrez que $x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ est lipschitzienne.

Attention aux variables.⁸

On pose $F = x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$.

On calcule et on majore pour x et y donnés : $|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt - \int_0^\pi \sin(y.t).f(t).dt \right|$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^\pi (\sin(x.t) - \sin(y.t)).f(t).dt \right|$$

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_0^\pi |\sin(x.t) - \sin(y.t)|.|f(t)|.dt$$

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_0^\pi |x.t - y.t|.|f(t)|.dt$$

$$|F(x) - F(y)| \leq |x - y|. \int_0^\pi |t.f(t)|.dt$$

L'intégrale $\int_0^\pi |t.f(t)|.dt$ est un réel qui ne dépend plus de x et y . C'est bon.

◁28▷ ♥ Montrez que l'application $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment (en revenant à la définition, et non pas en majorant la dérivée).

On doit contrôler les taux d'accroissement (lipschitzienne, c'est ça, et pas tout de suite une formule).

Or, $\frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = |x + y|$. Si x et y sont pris tous deux dans un segment $[a, b]$, la somme $|x + y|$ ne peut pas devenir »trop grande«.

On peut dans un premier temps supposer que notre segment est de la forme $[-K, K]$. Alors $|x|$ et $|y|$ se majorent par K .

On a donc $\forall (x, y) \in [-K, K]^2, |y^2 - x^2| \leq 2.K.|y - x|$.

L'application est lipschitzienne de rapport $2.K$ (je ne dis pas que c'est le meilleur rapport, mais on s'en moque).

Si ensuite, on travaille sur un segment $[a, b]$, on l'inclus dans $[-K, K]$ avec K bien choisi ($K = \max(|a|, |b|)$).

exemple de segment $[a, b]$	$[-4, -2]$	$[-4, 3]$	$[-1, 7]$	$[2, 5]$
segment centré $[-K, K]$	$[-4, 4]$	$[-4, 4]$	$[-7, 7]$	$[-5, 5]$

◁29▷ ♥ Une application est dite lipschitzienne si il existe K vérifiant $\forall (x, y), |f(x) - f(y)| \leq K.|x - y|$. Montrez que les applications lipschitziennes ont une dérivée nulle. Déduisez que l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

On prend f vérifiant cette propriété, on se donne a et on montre que f est dérivable en a , de dérivée nulle.

On calcule en effet les taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et on trouve que leur valeur absolue est majorée par $K.|x - a|$.

8. $x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ n'est pas f et n'est pas non plus une primitive de f ou d'une fonction de la forme $f \times g$, c'est une intégrale à paramètre contenant f sous le signe somme

Quand x tend vers a , $k|x - a|$ tend vers 0.

Par encadrement, $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|$ tend vers 0.⁹.

On en déduit $f'(a) = 0$ pour tout a .

Un théorème fin d'analyse permet de dire que f est constante.

Réciproquement, si f est constante, elle est lipschitzienne, de rapport... ce que vous voulez.

L'ensemble des applications lipschitziennes est donc l'espace des applications constantes. Il est de dimension 1 et une base en est $(x \mapsto 1)$.

Find Wrong Steps

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \\ -1/1 &= -1/1 \\ -1/1 &= 1/-1 \\ \sqrt{-1/1} &= \sqrt{1/-1} \\ i/1 &= 1/i \\ i &= 1/i \\ i^2 &= 1 \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

◀30▶



Ceci est la racine cubique d'un arbre.

Amorce de réponse. Vous avez appris une formule : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ en première.

Mais elle avait des conditions d'utilisation.

déjà, ça se passait dans $\mathbb{R}$. Et il y avait un piège même avec la racine du produit.

Pour avoir le droit d'écrire $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ il fallait quand même que a et b soient positifs.

Prenons directement $a = -1$ et $b = -1$.

Le produit $a \cdot b$ vaut 1 et il a bien une racine carrée : $\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Mais si je vous dis $\sqrt{-1} = i$, protestez vous ?

Puis si je vous dis $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i$, protestez vous ?

Si je termine avec $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$, vous voyez l'erreur ?

La notation $\sqrt{a}$ est à réserver aux réels positifs. Et ensuite, un complexe (ou même un réel négatif) a deux racines carrées.

Et sans unicité de la racine, la formule $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ne peut plus être démontrée. Elle n'est plus valable.

◀31▶

Montrez que $x \mapsto \cos(e^x)$ n'est pas lipschitzienne (sans dériver, étudiez le taux d'accroissement entre $\ln(k \cdot \pi)$ et $\ln((k+1) \cdot \pi)$ pour k entier).

Certes, sa dérivée n'a pas l'air bornée, mais si on nous l'interdit, prouvons la négation du caractère lipschitzien

$$\forall K, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| > K|x - y|$$

K quelconque donné, notre mission est de trouver x et y tel que le taux d'accroissement dépasse K .

Il ne faut pas rêver et se dire « oh, et si je prenais $x = y$? ». En effet, on demande $|f(y) - f(x)| > K|x - y|$ avec inégalité stricte.

9. théorème d'encadrement et pas passage à la limite

Dans le taux $\frac{|\cos(e^y) - \cos(e^x)|}{|y - x|}$ on ne peut pas espérer rendre le numérateur grand. Il reste entre 0 et 2.

Afin d'optimiser, prenons le égal à 2 d'ailleurs avec deux cosinus égaux à -1 et 1 .

D'où l'idée de $\ln(n.\pi)$ et $\ln((n+1).\pi)$ (puisque $\cos(n.\pi)$ et $\cos((n+1).\pi)$ sont de signes opposés).

Et le dénominateur ? C'est $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ après fusion des deux logarithmes.

Et il tend vers 0. Ce qui va rendre le taux d'accroissement très grand.

Explicitement, K étant fixé, on veut $\frac{2}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} > K$.

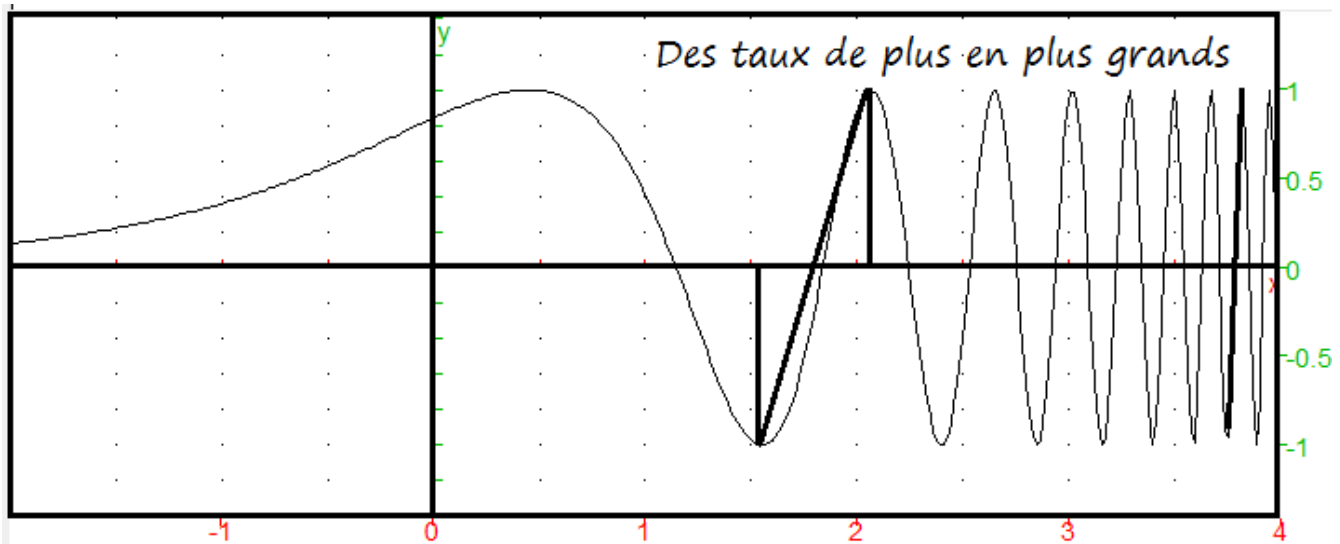
C'est une inéquation qui conduit à $n > \frac{1}{e^{2/K} - 1}$. On va donc prendre explicitement

$$x = \ln\left(\left(\left[\frac{1}{e^{2/K} - 1}\right] + 1\right).\pi\right), y = \ln\left(\left(\left[\frac{1}{e^{2/K} - 1}\right] + 2\right).\pi\right)$$

et vérifier

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{2}{\ln\left(\frac{\left[\frac{1}{e^{2/K} - 1}\right] + 2}{\left[\frac{1}{e^{2/K} - 1}\right] + 1}\right)} > K$$

Visuellement,



32 ♡ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue de A dans B est une suite de Cauchy.

H	$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq K_\varepsilon \text{ et } q \geq K_\varepsilon) \Rightarrow (a_p - a_q \leq \varepsilon)$
H	$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu_\varepsilon, \forall (x, y), (y - a \leq \mu_\varepsilon) \Rightarrow (f(y) - f(x) \leq \varepsilon)$
?	$\forall \varepsilon > 0, \exists Q_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq Q_\varepsilon \text{ et } q \geq Q_\varepsilon) \Rightarrow (f(a_p) - f(a_q) \leq \varepsilon)$

Pour ε donné, on prend $Q_\varepsilon = K_{(\mu_\varepsilon)}$ et c'est fini.

33 ♣ L'application f échange les deux premiers chiffres derrière la virgule et garde les autres chiffres ($f(1/2) = 0,05$, $f(\pi) = 3,41159\dots$, $f(4/7) = 0.751428571429\dots$). Donnez ses points de discontinuité. Calculez $\int_0^1 f(t).dt$ (allez, les plus fous, c'est pour vous !).

Finalement, on a une formule explicite pour l'application, et c'est ça qui fait tout marcher.

Pour récupérer juste la partie décimale de $x : x \mapsto x - [x]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,1415\dots$

Pour pousser le premier chiffre et le récupérer : $x \mapsto [10.(x - [x])]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 1,41592\dots \mapsto 1$.

Pour pousser les deux premiers chiffres et les récupérer : $x \mapsto [100.(x - [x])]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 14,1592\dots \mapsto 14$.

Pour récupérer ce qui suit les deux premiers chiffres : $x \mapsto \frac{100.(x - [x]) - [100.(x - [x])]}{100}$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 14,1592\dots \mapsto 0,1592\dots \mapsto 0,001592$.

Et la fonction qui échange les deux chiffres d'un entier à deux chiffres : $n \mapsto \left[\frac{n}{10}\right] + 10.(n - 10.\left[\frac{n}{10}\right])$

Il ne reste qu'à mettre bout à bout tout ce qu'on a ici créé :

$$x \mapsto [x] + \frac{100.(x - [x]) - [100.(x - [x])]}{100} + \frac{10.[100.(x - [x]) - 99.\left[\frac{100.(x - [x])}{10}\right]}{100}$$

Sauf erreur de ma part. Mais je l'ai validé avec Python en découpant en terme à terme.

Où est elle discontinue ?

Partout où les parties entières le sont.

La partie entière est discontinue en toute abscisse entière.

Ici, l'application est discontinue en toute abscisse entière et en toute abscisse de la forme $\frac{n}{100}$ avec n entier.

A moins que les deux chiffres échangés ne soient les mêmes.

Pour le calcul, on peut utiliser la relation de Chasles, pour découper en intervalles sur lesquels la fonction est affine.

On peut aussi profiter de $f \circ f = Id$.

Finalement, on trouve $\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$. On a la moitié de l'aire du carré.

Le vrai exercice est « f permute deux à deux tous les chiffres », avec plein de points de discontinuité...

34 Montrez que si f est uniformément continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ elle ne l'est plus forcément sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f est uniformément continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in] -\infty, 0]^2, (|y - x| \leq \gamma_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, (|y - x| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$

On se donne ε strictement positif. Montrez que pour $|x - y| \leq \min(\gamma_{\varepsilon/2}, \delta_{\varepsilon/2})$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ dans chacun des cas suivants :

$x \leq y \leq 0$	$y \leq x \leq 0$	$x \leq 0 \leq y$	$y \leq 0 \leq x$	$0 \leq x \leq y$	$0 \leq y \leq x$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

Concluez.

Un classique.

On prend $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. En fait, c'est $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Etant constante sur $]0, +\infty[$, elle est continue et même uniformément continue (η quelconque, on a toujours $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |1 - 1| \leq \varepsilon$).

Le même argument la rend uniformément continue sur $] -\infty, 0]$.

Ensuite, sur $\mathbb{R}^*$ elle est continue. En tout point a elle est constante sur un voisinage $\left[a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2}\right]$.

Mais sur $\mathbb{R}^*$ elle n'est pas uniformément continue.

Prenez $\varepsilon_0 = 1$. Vous aurez beau choisir un η tout petit pour faire plaisir au physicien, il y aura toujours un matheux pour vous dire « je prends $x = -\frac{\eta}{2}$ et $y = \frac{\eta}{2}$ ».

Et avec jubilation, il vous dit : $|y - x| \leq \eta$ (différence d'abscisse petite) et pourtant $|f(y) - f(x)|$ est grand (2 c'est quand même beaucoup).

La continuité reste le nez collé sur le gaohe en tout point. Elle n'a pas le droit de se poser sur 0, elle ne voit pas le saut.

La continuité uniforme doit tout regarder en même temps.

Elle survole de loin et voit de part et d'autre de 0.

Mais si on raccorde en 0 ?

Alors là tout va bien.

Comme indiqué, prenons $|x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2})$ et étudions les différents cas

x et y négatifs. On a alors $|x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \gamma_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^-$ donne $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$

On ne dit pas tout de suite « f est uniformément continue dans ce cas ».

Il faut étudier tous les cas....

x et y positifs. On a alors $|x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \delta_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^+$ donne $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$

Mais il reste des cas....

x négatif et y positif. On a alors $|x - 0| \leq |x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \gamma_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^-$ donne $|f(x) - f(0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Dans le même temps $|y - 0| \leq |y - x| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \delta_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^+$ donne $|f(y) - f(0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Il n'y a plus qu'à écrire

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(0) + f(0) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

On a transité par 0 et $f(0)$, puisque 0 est entre x et y .

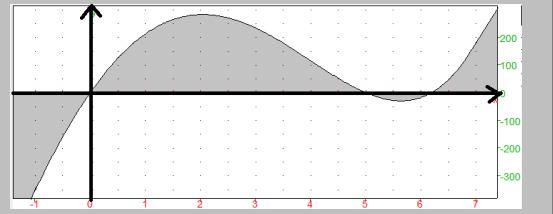
Géométriquement, c'est « naturel ».

Les autres cas sont symétriques. On les a tous traités.

Le réel $\min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2})$ nous donne donc bien un module d'uniforme continuité...

35

f est un polynôme unitaire de degré 4 convexe exactement sur $[-3, 4]$. Son développement limité en 2 est $f(2+h) = a + 5h + c.h^2 + d.h^3 + o(h^3)$ et son développement limité en 5 est $f(5+h) = 1 + \beta.h + \gamma.h^2 + \delta.h^3 + o(h^3)$. Trouvez a, c, d, β, γ et δ .



On pose a priori le polynôme $X^4 + B.X^3 + C.X^2 + D.X + E$ (on a dit « unitaire », son coefficient dominant vaut bien 1).

Sa dérivée seconde est $12.X^2 + 6.B.X + 2.C$.

Elle doit s'annuler et changer de signe en -3 et en 4 . On a donc $-\frac{6.B}{12} = 1$ (somme des racines) et $\frac{2.C}{12} = -12$ (produit des racines).

$$12.X^2 + 6.B.X + 2.C = 12.(X - 4).(X + 3).$$

$$\text{A ce stade : } X^4 - 2.X^3 - 72.X^2 + D.X + E.$$

Mais qui sont ensuite les coefficients de son développement limité en 2 ? La valeur en 2 : $a = 16 - 2.8 - 72.4 + D.2 + E$

$$\text{La dérivée en 2 : } 5 = 4.2^3 - 6.2^2 - 144.2 + D$$

$$\text{On trouve } d : d = 285$$

$$\text{On recommence en 5 : } 1 = 625 - 2.125 - 72.25 + 285.5 + e \text{ et } e \text{ vaut } 1.$$

$$\text{Finalement, le polynôme est } X^4 - 2.X^3 - 72.X^2 + 285.X + 1$$

On redonne les développements limités demandés en calculant les dérivées :

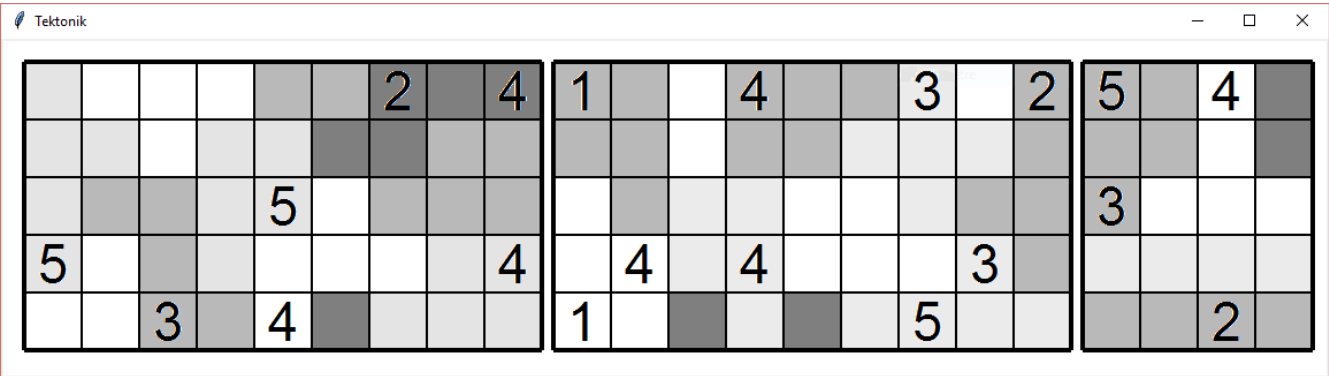
$$\begin{aligned} f(2+h) &= 283 + 5h - 60.h^2 + 6.h^3 + h^4 + o(h^4) \\ f(5+h) &= 1 - 85.h + 48.h^2 + 18.h^3 + h^4 + o(h^4) \end{aligned}$$

Mais en fait les deux $o(h^4)$ sont nuls, car f est un polynôme. Et les termes en h^4 sont connus. Le polynôme est de degré 4, unitaire.

<36>

Palindrome numérique

91	=	90	+	01
10	+	06	=	16



<36>

♥ Calculez $\int_a^b 2^t \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \cdot \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cdot dt \text{ pour } f \text{ continue.}$$

Prenons la somme de Riemann gauche pour une équisubdivision de pas $\frac{b-a}{n}$:

$$R = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^{a+k \cdot \frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{2^a - 2^{a+n \cdot \frac{b-a}{n}}}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{2^a - 2^b}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}}$$

Le numérateur est simple.

Le dénominateur est une forme indéterminée qu'on peut lever soit par développement limité soit par taux d'accroissement :

$$n \cdot (1 - e^{\frac{b-a}{n} \cdot \ln(2)}) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{b-a}{n} \cdot \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = -(b-a) \cdot \ln(2) + o(1) \rightarrow (a-b) \cdot \ln(2)$$

$$\text{ou } n \cdot (1 - e^{\frac{b-a}{n} \cdot \ln(2)}) = -\frac{2^{\frac{b-a}{n}} - 2^0}{\frac{b-a}{n} - 0} \cdot (b-a) \rightarrow f'(0) \text{ avec } f = x \mapsto 2^x \text{ et } f' = x \mapsto \ln(2) \cdot 2^x$$

Bref, la limite des sommes de Riemann vaut $\frac{2^b - 2^a}{\ln(2)}$ comme le confirme l'intégration de $x \mapsto e^{x \cdot \ln(2)}$.

<37>

L'exercice est "limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{n!}$ ". L'élève Agin-Tensiff passe par la forme exponentielle : $\exp\left(\frac{\ln(n!)}{n}\right)$.

Il sépare la factorielle : $\frac{\ln(n) + \ln(n-1) + \dots + \ln(1)}{n}$. Chacun des termes de la somme (de $\ln(n)/n$ à $\ln(1)/n$) tend vers 0 ; la somme tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{n!}$ converge vers 1.

Pourtant, l'ordinateur donne à 10^{-1} près

$\frac{20}{\sqrt[20]{20!}}$	$\frac{30}{\sqrt[30]{30!}}$	$\frac{40}{\sqrt[40]{40!}}$	$\frac{50}{\sqrt[50]{50!}}$
8.3	12.0	15.7	19.4

Alors qui a tort ? Que doit on trouver ?

Tiens, au fait, et si ça avait été à vous de calculer avec Python $\sqrt[n]{n!}$ pour n "grand", qu'auriez vous fait ?

Il paraît qu'avec une somme de Riemann droite pour $\ln(t)$ entre 0 et 1 on a un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$. A vous de le faire.

L'élève a écrit une grosse bêtise. Chaque terme de la « somme » tend vers 0, mais le nombre de termes tend vers l'infini.

C'est une faute classique de débutant.

Le théorème sur les sommes de suites convergentes, c'est $(a_n + b_n + c_n + \dots + v_n)$ avec un nombre clairement défini de suites.

En revanche, dans $\sum_{k=0}^n \frac{\ln(k)}{n}$, le nombre de termes dépend de n . LES VARIABLES !

Erreur de débutant aussi, faire tendre n vers l'infini dans une partie de la formule et pas dans l'autre. LES VARIABLES !

Prenons un exemple simplissime : $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ (n fois). On fait tendre n vers l'infini, chaque terme de la « somme » tend vers 0. La « somme » tend vers 0 : $1 = 0$.

Ou alors $1 = \frac{n}{n}$. On fait tendre n vers l'infini seulement au dénominateur : $1 = \frac{n}{\infty} = 0$.

On fait tendre n vers l'infini seulement au numérateur : $1 = \frac{\infty}{n} =$.

Évidemment, ici, ça se voit... Mais le nombre de fois où vous faites un coup comme ça sans le voir...

Mais le correcteur, lui, il le voit.

Partie sur les sommes de Riemann à faire..

♠ Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $I = \int_0^1 f(t).dt$.

Montrez que pour tout n , il existe une subdivision de $[0, 1]$:

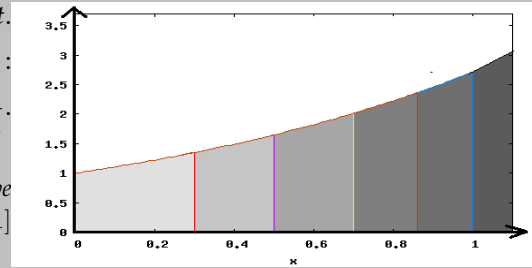
$0 = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n} = 1$ vérifiant $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt = \frac{I}{n}$.

Interprétez géométriquement.

Pour rédiger cette question, on aura intérêt à définir F (la primitive de f nulle en 0) et à faire intervenir F^{-1} (sa réciproque de $[0, I]$ dans $[0, 1]$ après en avoir prouvé l'existence).

Au fait, pourquoi les note-t-on $(x_{n,0}, \dots, x_{n,n})$ et pas juste $(x_0, \dots, x_n)$?

g est continue. Montrez que $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ converge vers $\frac{\int_0^1 f(t).g(t).dt}{\int_0^1 f(t).dt}$ quand n tend vers l'infini.



On ne fait pas une équisubdivision sur l'axe des abscisses, mais une subdivision adaptée à l'intégrale de f .

Il faut découper pour que $\int_0^{x_{n,1}} f(t).dt$ soit égale à $\frac{I}{n}$, puis on redécoupe le point suivant pour que l'on ait encore $\frac{I}{n}$ et ainsi de suite.

A la main, c'est simple à voir et raconter.

En pratique, c'est très facile à rendre mathématiquement rigoureux.

Il suffit de définir $F = x \mapsto \int_0^x f(t).dt$.

C'est un C^1 difféomorphisme de $[0, 1]$ dans $[0, I]$ (pour $x = 0$ l'intégrale est nulle, et en 1 on a intégré sur tout le segment).

Quant à difféomorphisme, c'est que la dérivée F' de F est f strictement positive.

Il suffit alors de dire que F^{-1} existe de $[0, I]$ dans $[0, 1]$ et on pose $x_{n,k} = F^{-1}\left(\frac{k.I}{n}\right)$

On a défini ainsi $n + 1$ points (donc 0 et 1), ordonnés en croissant, et la relation $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt = \frac{I}{n}$ c'est juste

$F(x_{n,k+1}) - F(x_{n,k}) = \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt$ couplé à

$$F\left(F^{-1}\left(\frac{(k+1).I}{n}\right)\right) - F\left(F^{-1}\left(\frac{k.I}{n}\right)\right) = \frac{(k+1).I}{n} - \frac{k.I}{n} = \frac{I}{n}$$

On notera la nécessité d'un double indice, car la subdivision dépend de n , et chaque terme de la subdivision dépend de son propre indice k .

$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ s'écrit en fait $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g\left(F^{-1}\left(\frac{k.I}{n}\right)\right)$.

On reconnaît une somme de Riemann, non pas pour g mais pour $x \mapsto g(F^{-1}(x))$ sur $[0, I]$.

Elle converge vers $\int_0^I g(F^{-1}(x)).dx$.

Ah non, pas tout à fait. L'intervalle étant $[0, I]$, celle qui converge vers $\int_0^I g(F^{-1}(x)).dx$, c'est $\frac{I}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$.

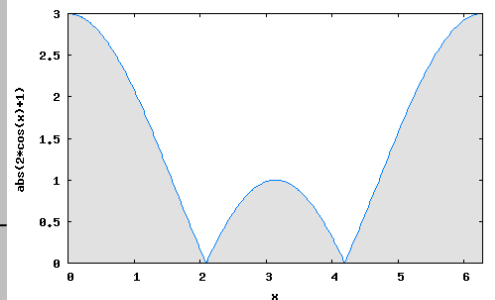
La somme de l'énoncé converge donc vers $\frac{1}{I} \cdot \int_{x=0}^I g(F^{-1}(x)) \cdot dx$

On a fait un changement d'échelle le long de l'axe des abscisses.

Et si on faisait un changement de variable ? $F^{-1}(x) = t$. Si ça ce n'est pas un C^1 difféomorphisme !
On change d'élément différentiel : $x = F(t)$ donc $dx = F'(t) \cdot dt = f(t) \cdot dt$.
Les bornes deviennent 0 et 1.

L'intégrale devient $\int_{t=0}^1 g(t) \cdot f(t) \cdot dt$. Et il reste le $\frac{1}{I}$ devant, d'où comme demandé $\frac{\int_0^1 f(t) \cdot g(t) \cdot dt}{\int_0^1 f(t) \cdot dt}$.

♥ Montrez que $|\sin|$ n'est pas une primitive de $|\cos|$. Calculez $\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt$.



La fonction $|\sin|$ n'est même pas dérivable en 0. Or, dans la phrase « est une primitive de... », on doit lire « se dérive et a pour dérivée... ».

De plus, $|\cos|$ est positive.

Si elle était une primitive de $|\cos|$, on aurait $|\sin|' = |\cos|$, positive.

L'application $|\sin|$ serait croissante, et ne pourrait pas s'annuler tant de fois de suite...

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt = \int_0^{2\pi/3} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt + \int_{4\pi/3}^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt$$

par relation de Chasles. On a donc

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt = \int_0^{2\pi/3} f(t) \cdot dt - \int_{4\pi/3}^{2\pi/3} f(t) \cdot dt + \int_{4\pi/3}^{2\pi} f(t) \cdot dt$$

en posant $f = 1 + 2 \cdot \cos$. On a donc :

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt = [F(t)]_0^{2\pi/3} - [F(t)]_{4\pi/3}^{2\pi/3} + [F(t)]_{4\pi/3}^{2\pi}$$

On somme :

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt = F(2\pi) - F(0) - 2F\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Sous cette forme primitive, on voit comment la primitive se met à compter deux fois quand on a un rebond sur l'axe des abscisses.

Tous calculs faits, avec $F = t \mapsto t + 2 \cdot \sin(t)$, il vient

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt = \frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3} \text{ (fort heureusement positif).}$$

Les logiciels de calcul formel trouvent la bonne réponse sans se tromper.

♥ f est croissante de classe C^1 . Montrez que $\int_0^\pi f(t) \cdot \cos(t) \cdot dt$ est négative.

L'intégrale existe, et peut même se calculer, par parties avec hypothèse C^1 :

$f(t)$	$\hookrightarrow$	$f'(t)$
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$

L'intégrale vaut $\sin(t) \cdot f(t) \Big|_{t=0}^\pi - \int_0^\pi f(t) \cdot \sin(t) \cdot dt$.

Le crochet est nul. Et sur $[0, \pi]$, f' est positive et le sinus aussi.

C'est fini.

41

♥ Un élève donne les théorèmes suivants pour les applications D^1 :

	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		
si f est bornée sur $[a, b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a, b]$ alors f l'est aussi		
	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		$x \mapsto \sin(x^2)$
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		$x \mapsto x$
si f est bornée sur $[a, b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a, b]$ alors f l'est aussi	théorème de compacité	

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est bornée, mais sa dérivée ne l'est pas à cause d'oscillations de plus en plus rapides. Si f' est bornée sur $[a, b]$, f est bornée sur $[a, b]$ car elle est juste continue sur un segment.

Pour la ligne 3, c'est plus vicieux, mais j'ai un contre-exemple.

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que cette application est dérivable, même en 0, mais que sa dérivée n'est pas bornée. Même pas continue ! Oui ! Mais elle ne saute pas. Elle a une discontinuité de première espèce.

42

Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$. Déduisez que la suite $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}}\right)$ converge et donnez sa limite.

Oui, c'est bien une somme de Riemann : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$ est de la forme

$$\frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

avec $a = 0, b = 1$ et $f = x \mapsto \ln(1+x)$ (ou $a = 1, b = 2$ et $f = \ln$). par continuité, cette somme de Riemann converge vers l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t) \cdot dt$. Celle ci vaut $[(1+t) \cdot \ln(1+t) - t]_{t=0}^{t=1}$. Application numérique : $2 \cdot \ln(2) - 1$

La quantité $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}}\right)$ a pour logarithme

$$\frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \dots (n+n)}{n^n}\right)$$

en simplifiant les entiers de 1 à n dans $(2n)!$.

On fait passer un n dans chacun des n termes du produit :

$$\frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)\right)$$

C'est notre somme dont la limite vaut $2 \cdot \ln(2) - 1$

On en déduit que $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}}\right)$ converge vers $\frac{4}{e}$ par continuité de l'exponentielle.

43

♥ On rappelle que l'on note « sommes de Riemann de f sur $[a, b]$ pour la subdivision $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ les trois sommes $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_k)$, $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_{k+1})$ (gauche, milieu et droite) ». On prend la version simplifiée : $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{(n-k) \cdot a + k \cdot b}{n}$. Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \mapsto x^2$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$. Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \mapsto x^3$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$. Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \mapsto 2^x$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

fonction	somme de Riemann	limite
$x \mapsto x^2$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2$	$\frac{b^3 - a^3}{3}$
$x \mapsto x^2$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^3$	$\frac{b^4 - a^4}{4}$
$x \mapsto 2^x$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^a \cdot \left(2^{\frac{b-a}{n}}\right)^k$	$\frac{2^b - 2^a}{\ln(2)}$

Bon, pour ce qui est des limites, il faut justifier.

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^2 + 2ka \cdot \frac{b-a}{n} + k^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2}\right) \\ \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(na^2 + 2a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6}\right) \\ \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 &= (b-a) \cdot \left(a^2 + 2a \cdot (b-a) \cdot \frac{(n-1)}{2n} + (b-a)^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (2n-1)}{6n^2}\right) \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, il reste $(b-a) \cdot \left(a^2 + a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}\right)$ et ceci donne bien $\frac{(b-a) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)}{3}$.
On confirme donc la primitive attendue.

Pour la seconde somme, avec courage, on développe de la même façon et on passe aux équivalents

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{b-a}{n} \cdot \left(a^3 \cdot n + 3a^2 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 3a \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n \cdot (2n+1)}{6} + \frac{(b-a)^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4}\right)$$

La suite n'est que calcul.

Pour le dernier, on identifie une série géométrique de raison $2^{\frac{b-a}{n}}$ avec n termes.

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^a \cdot \left(2^{\frac{b-a}{n}}\right)^k = \frac{b-a}{n} \cdot 2^a \cdot \frac{1 - 2^{\frac{b-a}{n} \cdot n}}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}} = \frac{b-a}{n} \cdot 2^a \cdot \frac{1 - 2^{b-a}}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}} = (2^a - 2^b) \cdot \frac{t}{1 - 2^t}$$

en posant comme par hasard $t = \frac{b-a}{n}$.

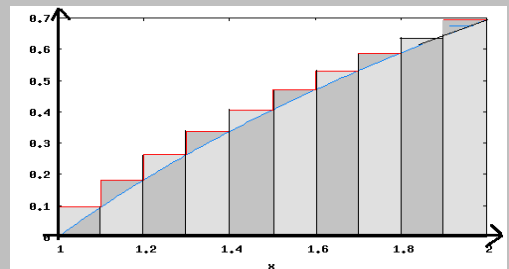
On a une forme indéterminée, mais $\frac{2^t - 1}{t}$ tend vers la dérivée en 0 de $x \mapsto 2^x$ c'est à dire vers $\ln(2)$.

On a bien au final $ds p(2^a - 2^b) \cdot \frac{1}{-\ln(2)}$ et c'est bien ce qu'on espérait pour un calcul de primitive.

♥ On considère l'application logarithme, sur le segment $[1, 2]$ dont on effectue une équisubdivision en n morceaux. Montrez que la somme de Riemann droite est alors

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}\right) - \ln(n).$$

44



Les points de subdivision sont les $1 + \frac{k}{n}$. Et k va aller de 1 à n (droite).

La largeur des intervalles sera de $\frac{1}{n}$.

On se doit donc de calculer $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+n}{n}\right)$ (notée R_n).

On fusionne tous les logarithmes en un seul :

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+n}{n} \right) \right)$$

On regroupe les n facteurs n ensemble :

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\frac{\prod_{k=1}^n (k+n)}{n^n} \right)$$

On sépare le n^n en on tient compte du $\frac{1}{n}$ devant : $R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=1}^n (k+n) \right) - \frac{1}{n} \cdot \ln(n^n)$.

Déjà, le $-\ln(n)$ est là.

Dans le produit $\prod_{k=1}^n (k+n)$ qu'on écrit $(n+1) \cdot (n+2) \dots (n+n)$, on identifie une factorielle incomplète $\frac{(2n)!}{n!}$.

On entre le $\frac{1}{n}$ en puissance dans le logarithme et c'est fini.

◀45▶

♡ Calculez $\int_0^x \cos(t) \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{x}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{k \cdot x}{n} \right) = \frac{x}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\frac{2n-1}{2} \cdot \theta \right)}{2 \cdot \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right)$$

avec $\theta = \frac{x}{n}$ sachant qu'il y a un 1 au lieu du $\frac{1}{2}$ du célèbre noyau).

Au numérateur, $\sin \left(\frac{2n-1}{2} \cdot x \right)$ converge vers $\sin(x)$.

Au dénominateur, la forme indéterminée $2n \cdot \sin \left(\frac{x}{2} \right)$ converge vers x .

Le réel x se simplifie entre le haut et le bas. Il reste $\int_0^x \cos(t) \cdot dt = \sin(x)$.

◀46▶

♡ Calculez $\int_a^b t^2 \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^2 + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot a \cdot k + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$R_n = a^2 \cdot (b-a) \cdot \frac{n}{n} + 2 \cdot a \cdot (b-a)^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n^2} + (b-a)^3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6 \cdot n^3}$$

En utilisant des équivalents, la somme de Riemann converge vers $a^2 \cdot (b-a) + (b-a)^2 \cdot a + \frac{2 \cdot (b-a)^3}{3}$ et après simplification : $\frac{b^3 - a^3}{3}$ (variation de la primitive classique).

◀47▶

Montrez que l'application tangente est lipschitzienne sur $[-a, a]$ pour a strictement plus petit que $\pi/2$ (sans dériver, mais en pensant à $\frac{\sin(b-a)}{\cos(b) \cdot \cos(a)}$).

Lipschitzienne sur I c'est $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$.

Au fait, quelles applications vérifient $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| < K \cdot |x - y|$?

A faire.

◀48▶

Soit f une application de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$I = \int_a^b f(t).dt \quad J = \int_a^b f'(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \quad K = \int_a^b f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt$$

♡ 0 ♡ Calculez K .

♡ 1 ♡ Montrez : $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

♡ 2 ♡ Justifiez l'existence de $\text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [a, b]\}$ (notée M_2).

♡ 3 ♡ Montrez pour tout t de $[a, b]$: $\left|f'(t) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq M_2 \cdot \left|t - \frac{a+b}{2}\right|$.

♡ 4 ♡ Déduisez : $\left|I - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a)\right| \leq \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12}$.

♡ 5 ♡ Déduisez : $|I - T_n| \leq \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12 \cdot n^2}$ où T_n est l'approximation de I par la méthode des trapèzes pour une équisubdivision de $[a, b]$ en n pas (dont vous rappellerez la formule).

Rappelons tout de suite la formule pour l'aire d'un trapèze : base fois moyenne des hauteurs.

Dans le cas d'un trapèze de largeur $(b-a)$ et de hauteurs $f(a)$ et $f(b)$, on trouve comme par hasard $(b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

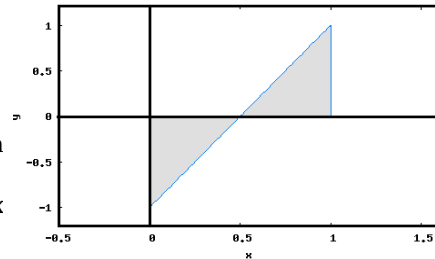
Dans le cas d'une somme de trapèzes pour la méthode du même nom, on trouve

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right)}{2} \quad \text{On peut aussi regrouper en}$$

$$2 \cdot T_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

(moyenne des deux sommes de Riemann).

Pour le calcul de $K = \int_a^b f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt$, on sort $f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$ par linéarité, et il reste $\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt$. Cette intégrale est nulle. On l'a en intégrant explicitement avec $\frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2$ ou en voyant **deux triangles d'aires opposées**.



Quand on calcule $I + J$, on fusionne par linéarité en $\int_a^b \left(f(t) + \left(t - \frac{a+b}{2}\right) \cdot f'(t)\right) dt$.

On reconnaît une forme en $u' \cdot v + u \cdot v'$ avec f et $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$.

On trouve donc $\left[f(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right]_{t=a}^{t=b}$. En a et en b , le terme $\left(t - \frac{a+b}{2}\right)$ donne $(b-a)/2$ et son opposé. Les termes vont plutôt "s'additionner". Il reste $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

On pouvait aussi intégrer **par parties**.

Pour ce qui est de l'existence de M_2 , on rappelle que f'' existe et est continue sur un segment. Il ne reste qu'à utiliser un théorème de **compacité** : existence de la **norme de la convergence uniforme**.

On se donne t dans $[a, b]$ et on écrit une **formule de Taylor** pour f' entre $\frac{a+b}{2}$ et t :

$f'(t) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \text{reste}$, avec $\text{reste} = \left(t - \frac{a+b}{2}\right) \cdot \int_{u=0}^{u=1} (1-u)^0 \cdot f''\left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right) du$ en sachant que notre variable d'intégration dans la formule de Taylor ne peut pas s'appeler t comme d'habitude.

On passe à la valeur absolue et on majore par inégalité triangulaire :

$$|\text{reste}| \leq \left|t - \frac{a+b}{2}\right| \cdot \int_0^1 |f''\left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right)| du$$

On majore ensuite :

$$|\text{reste}| \leq \left|t - \frac{a+b}{2}\right| \cdot \int_0^1 M_2 du = M_2 \cdot \left|t - \frac{a+b}{2}\right|$$

C'est l'inégalité souhaitée.

On pouvait aussi l'obtenir par l'inégalité des accroissements finis.

Ce qu'il ne fallait pas faire, c'est invoquer une histoire de développement limité. Un développement limité n'est qu'une limite, et jamais une majoration.

Partant de $I + J = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$, on trouve $I - (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = -J$.

On remplace $-J$ par $K + (J - K)$. Comme K est nul, il reste $\int_a^b \left(f'(t) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$.

On passe à la valeur absolue avec inégalité triangulaire : $|J| \leq \int_a^b \left| f'(t) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right| dt$.

On exploite le résultat précédent :

$$|J| \leq \int_a^b M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|^2 dt$$

La valeur absolue ne sert plus à rien avec le carré. On peut intégrer $\int_a^b M_2 \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 dt$ en $\frac{1}{3} \cdot \left[t - \frac{a+b}{2} \right]_{t=a}^{t=b}$. On trouve précisément $\frac{(b-a)^3}{12}$.

On écrit cette inégalité pour a égal à $a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_k) et b égal à $a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_{k+1}). La différence $b - a$ devient $\frac{b-a}{n}$.

On a donc

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3}$$

On somme ces n inégalités pour k de 0 à $n-1$. Les n termes en $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^3}$ donnent $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

Le terme du milieu télescope par relation de Chasles en $I - T_n$.

On aboutit à l'inégalité exigée.

Elle nous renseigne sur la qualité de l'approximation d'intégrale par la formule des trapèzes.

49

f est un C^1 difféomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$. Justifiez : $\int_a^b f(u) du + \int_c^d f^{-1}(v) dv = b \cdot d - a \cdot c$ (on pourra dériver $\int_a^x f(u) du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v) dv$).

On définit $\Phi = x \mapsto \int_a^x f(u) du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v) dv$ en se demandant quand même si ça a un sens. La première intégrale est celle d'une application continue sur un segment, elle existe.

La seconde est la composée de $x \mapsto f^{-1}(x)$ (f^{-1} existe puisque f est un C^1 difféomorphisme) et de $y \mapsto \int_c^y f^{-1}(v) dv$; c'est aussi l'intégrale d'une application continue, et tant que $f(x)$ reste entre c et d , c'est calculable. Or, justement, $f(x)$ varie et décrit $[c, d]$, comme l'énoncé nous le dit.

On dérive une intégrale fonction de la borne du haut et une composée : $F' = x \mapsto f(x) + f'(x) \cdot f^{-1}(f(x))$.

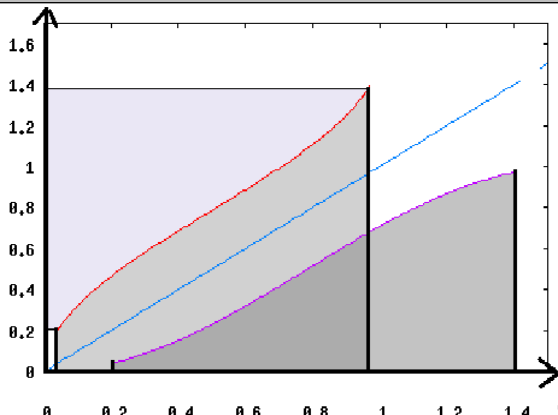
On simplifie par bijectivité : $F' = x \mapsto f(x) + x \cdot f'(x)$.

Si on a un peu d'habitude, on reconnaît $F' = (x \mapsto x \cdot f(x))'$.

Et si on a de l'habitude mais un cerveau en pâte à modeler ramolli, on écrit $F' = (x \cdot f(x))'$ ou autre insanité, et on retourne au fond de l'amphi 21 faire des applications numériques.

Ayant cette dérivée, on remonte par théorème fondamental qui relie intégrales et primitives :

$$F(b) - F(a) = b \cdot f(b) - a \cdot f(a).$$



Et encore une fois, si on a le cerveau ramolli, on écrit des choses louches comme $F(x) = x.f(x) + C^{\text{te}}$ et on dit qu'on détermine la constante en regardant la valeur en a , puis on retourne faire des mesures en salle de T.P. de biochimie.

Il reste juste à dire que $F(a)$ est nul (intégrales de a à a et de c à c), et que $f(a)$ vaut c tandis que $f(b)$ vaut d . Pourquoi ? Mais juste parce que on a dit que f était un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ sur $[c, d]$; on n'a donc pas juste dit "de $[a, b]$ dans $[c, d]$ ". C'est donc que c et d sont atteints. Par croissance, sur a peut atteindre c et seul b peut atteindre d .

Si non, si vous avez reconnu dans $b.d - a.c$ l'aire d'un rectangle, vous avez mille fois raison. Géométriquement, c'est une évidence. D'ailleurs, le résultat s'étend aux fonctions continues et pas forcément dérivables, en découpant l'intervalle initial $[a, b]$ et l'intervalle image $[c, d]$ avec des subdivisions associées, et en calculant l'intégrale par des sommes d'aires de trapèzes.

◁50▷ Déterminez la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+4.h) - 4.f(a+3.h) + 6.f(a+2.h) - 4.f(a+h) + f(a)}{h^4}$ quand h tend vers 0 (où f est une application de classe 4).

$f(a+4.h)$	=	$f(a)$	$+4.h.f'(a)$	$+\frac{16}{2}.h^2.f''(a)$	$+\frac{64}{6}.f^{(3)}(a)$	$+\frac{256}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$-4.f(a+3.h)$	=	$-4.f(a)$	$-12.h.f'(a)$	$-4.\frac{9}{2}.h^2.f''(a)$	$-4.\frac{27}{6}.f^{(3)}(a)$	$-4.\frac{81}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$6.f(a+2.h)$	=	$+6.f(a)$	$+12.h.f'(a)$	$+6.\frac{4}{2}.h^2.f''(a)$	$+6.\frac{8}{6}.f^{(3)}(a)$	$+6.\frac{16}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$-4.f(a+h)$	=	$-4.f(a)$	$-4.h.f'(a)$	$-4.\frac{1}{2}.h^2.f''(a)$	$-4.\frac{1}{6}.f^{(3)}(a)$	$-4.\frac{1}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$f(a)$	=	$f(a)$					
somme	=	0	$+0.h$	$+0.h^2$	$+0.h^3$	$+h^4$	$+o(h^4)$

La limite vaut $f^{(4)}(a)$.

Trop fort !

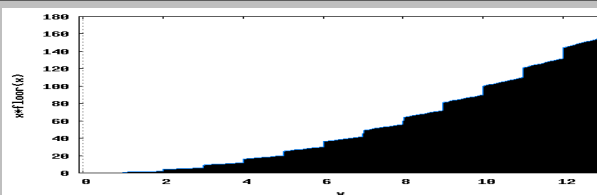
◁51▷ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2\}$?

Une application continue de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\{0, 1, 2\}$ est forcément constante. En effet, si elle ne l'était pas, elle prendrait deux valeurs différentes, comme 1 et 2 et devrait donc prendre aussi toutes les valeurs intermédiaires comme des irrationnels. Ça lui est interdit. Elle est donc constante.

Mais attention, f est constante sur $] -\infty, 0[$ et constante sur $]0, +\infty[$. Elle a trois choix d'un côté et trois de l'autre. Ce qui fait neuf applications.

Exercice à double détente...

◁52▷ Résolvez $\int_0^x t.[t].dt = 222$ d'inconnue réelle x .



Oui, voici bien une fonction discontinue. Peut on calculer l'intégrale ? Oui. Mais pas avec des mots clefs de Terminale du type « dérivable donc intégrable » (ce qui fait sauter deux marches, et dire que pour aller à Fontainebleau, il faut acheter un billet pour Marseille, s'arrêter à Lyon et reprendre un train en sens inverse...). ici, il faut découper par relation de Chasles :

x	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, 5[$
$f(x)$	0	x	$2.x$	$3.x$	$4.x$
	$\int_0^1 f(t).dt = 0$	$\int_0^2 f(t).dt = 0 + \int_1^2 t.dt = \frac{3}{2}$	$\int_0^3 f(t).dt = \frac{3}{2} + \int_2^3 2.t.dt = \frac{13}{2}$	etc...	

On peut calculer $\int_0^n f(t).dt$ pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t).dt = \sum_{k=0}^{n-1} k. \int_k^{k+1} t.dt$$

On trouve donc $\sum_{k=0}^{n-1} k. \left(\frac{(k+1)^2}{2} - \frac{k^2}{2} \right)$. On peut simplifier ceci.

Ou se demander quand cette quantité dépasse 222. Et quelle chance, avec un peu de patience ou un Python en

rond, on trouve $\int_0^9 f(t).dt = 222$.

Et comme f est positive, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ est croissante. Il n'y a donc pas d'autre solution. Il est vrai que si x dépasse 0, l'intégrale augmente encore. Et avant, on n'a pas encore atteint 222.

Mais si j'avais demandé $\int_0^x f(g).dt = 223$, il aurait fallu en rajouter un petit peu, avec $x = 9 + a$ avec a à ajuster.

53 Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer qu'elle se prolonge en une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ "par densité de $\mathbb{Q}$ ".
On se donne un irrationnel a . Montrez qu'il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers a . Montrez que les suites (r_n) et $(f(r_n))$ sont de Cauchy et convergent donc. L'élève A veut alors poser $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n)$.
L'élève B l'arrête en indiquant : mais si tu avais pris une autre suite (c_n) , qui dit que tu aurais obtenu la même limite $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n)$ ($f(a)$ dépendrait-il du choix de la suite choisie ?). Que pensez-vous de son objection ? Et que pensez-vous de l'élève qui explique alors $(r_0, c_0, r_1, c_1, r_2, \dots)$?
Montrez que f ainsi définie est à son tour uniformément continue.

On va prolonger f par continuité (uniforme) en a irrationnel.

Chaque intervalle $[a - 2^{-n}, a + 2^{-n}]$ contient au moins un rationnel car non réduit à un point.

Rappel : tout intervalle non réduit à un point contient au moins un rationnel.

Et par petite translation, tout intervalle non réduit à un point contient au moins un irrationnel.

Et par itération : tout intervalle non réduit à un point contient une infinité de rationnels.
tout intervalle non réduit à un point contient une infinité d'irrationnels.

On en prend un dans chacun de ces intervalles.

On a une suite de rationnels (r_n) vérifiant $|a - r_n| \leq 2^{-n}$ pour tout n .

Par encadrement, c'est une suite de rationnels, et elle converge vers a .

Sinon, on prend $\left(\left[\frac{a}{10^n}\right].10^n\right)$ qui est la suite classique des approximations décimales par défaut.

La suite (r_n) est de Cauchy car convergente.

Classique : $|r_p - r_q| = |r_p - a + a - r_q| \leq |r_p - a| + |a - r_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ pour p et q plus grands que $N_{\varepsilon/2}$.

Il est temps d'utiliser la continuité uniforme. L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

H	$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq K_\varepsilon \text{ et } q \geq K_\varepsilon) \Rightarrow (a_p - a_q \leq \varepsilon)$
H	$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu_\varepsilon, \forall (x, y), (y - x \leq \mu_\varepsilon) \Rightarrow (f(y) - f(x) \leq \varepsilon)$
?	$\forall \varepsilon > 0, \exists Q_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq Q_\varepsilon \text{ et } q \geq Q_\varepsilon) \Rightarrow (f(a_p) - f(a_q) \leq \varepsilon)$

Pour ε donné, on prend $Q_\varepsilon = K_{(\mu_\varepsilon)}$ et c'est fini.

La suite $(f(r_n))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Mais $\mathbb{R}$ est complet (résultat du cours). C'est à dire qu'il y a équivalence entre « suite de Cauchy » et « suite convergente ».

La suite $f(r_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.

Le théorème de complétude de $\mathbb{R}$ ne dit pas vers quoi.

C'est ça la force des suites de Cauchy : on montre qu'elles convergent sans être obligé de dire vers quoi.

C'est aussi ce en quoi le physicien dira que c'est un peu inutile au premier abord...

Pourquoi ne peut-on se permettre de poser $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n)$ et dire « f est maintenant prolongée par continuité en a » ?

Le problème est qu'il existe une suite (r_n) qui converge vers a et telle que la suite $(f(r_n))$ converge vers $f(a)$. Et la définition est « pour toute suite (c_n) qui converge vers a , la suite $(f(c_n))$ converge vers $f(a)$ ».

On doit passer de « une suite » à « toute suite ».

Un début. Si une suite (c_n) converge vers a alors la suite (c_n) est de Cauchy
la suite $(f(c_n))$ est de Cauchy
la suite $(f(c_n))$ converge

Mais vers quoi ? Pas forcément vers la même limite que $(f(r_n))$ de tout à l'heure. Oui, il ne faut pas aller trop vite.

Il faut se convaincre que $(f(r_n))$ et $(f(c_n))$ ont la même limite.¹⁰

Et là, la belle astuce est entrelarder les deux suites en une seule.

On crée la suite (x_p) dont un terme sur deux vient de (c_n) et un terme sur deux de (r_n) .

En l'occurrence : $x_{2,p} = r_p$ et $x_{2,p+1} = c_p$.

Les deux sous-suites $(x_{2,p})$ et $(x_{2,p+1})$ convergent vers a par définition.

Par recouvrement, la suite (x_n) converge vers a .

Elle est donc de Cauchy.

La suite image $(f(x_n))$ est de Cauchy.

La suite image $(f(x_n))$ converge.

Ses deux sous-suites $(f(x_{2,p}))$ et $(f(x_{2,p+1}))$ convergent donc vers une même limite.

L'une convergeait vers la valeur qu'on avait donné $f(a)$.

L'autre convergeait vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n)$.

On a donc $f(c_n)$ qui converge vers $f(a)$.

f est continue en a .

On pouvait le faire en tout point a .

Partout on a pu prolonger f par continuité en tout point a irrationnel.

f est maintenant continue partout.

Une application uniformément continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ se prolonge automatiquement d'une façon unique en une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, une application uniformément continue de A dans $\mathbb{R}$ (avec A une partie dense de E , espace complet) se prolonge en une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

Ça sert à quoi ?

On définit l'application $f \mapsto \int_a^b f(t).dt$ quand f est une fonction en escalier.

L'opérateur est uniformément continu.

On peut le prolonger à un opérateur $f \mapsto \int_a^b f(t).dt$ quand f est une limite de fonctions en escalier...

On a prolongé la notion d'intégrale par densité des fonctions en escalier au sein de l'ensemble de toutes les fonctions...

◀ 54 ▶

♡ Prolongez la aux bornes du domaine : $x \mapsto \ln(x) \cdot \ln(1-x)$. Trouvez son maximum, donnez son axe de symétrie.

Admet elle un développement limité en 0 ?

On exige $x > 0$ et $1-x > 0$. On trouve $x \in]0, 1[$.

Quand x tend vers 0, on a une forme indéterminée.

On utilise un équivalent pour ce qu'on peut : $\ln(1-x) \sim_{x \rightarrow 0} -x$ et rien pour l'autre.

$\ln(1-x) \cdot \ln(x) \sim -x \cdot \ln(x)$ c'est une forme indéterminée classique, qui tend vers 0.

Étant équivalente à une quantité de limite nulle, la fonction tend vers 0 en 0.

En 1, en posant $x = 1-h$, on a le même modèle d'équivalent : $\ln(1-h) \cdot \ln(h) \sim -h \cdot \ln(h)$.

La fonction tend aussi vers 0 en 1 (et on le sait avec l'axe de symétrie).

Oui, l'axe de symétrie est visible rien qu'avec l'écriture : $f(1-x) = f(x)$ (si elle s'appelle f).

S'il n'y avait pas le 1 ce serait de la parité $h(-t) = h(t)$.

Le 1 n'y change pas grand chose. On décale : $h(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right)$ (et $\frac{1}{2}$ est la valeur qui donne $1-x = x$).

On a alors $h(-t) = h(t)$ puisque $f\left(-t + \frac{1}{2}\right) = f\left(1 - \left(t + \frac{1}{2}\right)\right) = f\left(t + \frac{1}{2}\right)$.

^{10.} et il faut vous convaincre aussi, mais il y a tant parmi vous qui disent « bah, à quoi bon, il suffit de faire confiance, je ne vois pas où est le problème »

h est paire et possède donc un axe de symétrie, f possède donc aussi un axe de symétrie.

On peut dire aussi que $1-x$ et x sont symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$ (leur milieu est $\frac{1}{2}$), et ont la même image.

Rappel :
 Axe de symétrie en a : $f(2.a - x) = f(x)$
 Centre de symétrie en (a, b) : $f(2.a - x) + f(x) = 2.b$

Vu sa symétrie, son maximum doit être en $\frac{1}{2}$.

Mais après tout, elle pourrait avoir un maximum de chaque côté de $\frac{1}{2}$.

On dérive : $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t} - \frac{\ln(t)}{1-t}$ et on va étudier le signe du numérateur (dénominateur de signe constant sur $]0, 1[$).

On crée donc $\varphi = x \mapsto (1-x) \cdot \ln(x) - x \cdot \ln(1-x)$

On dérive : $\varphi' = x \mapsto (-\ln(x) - \ln(1-x) + \frac{1-x}{x} - \frac{x}{1-x})$

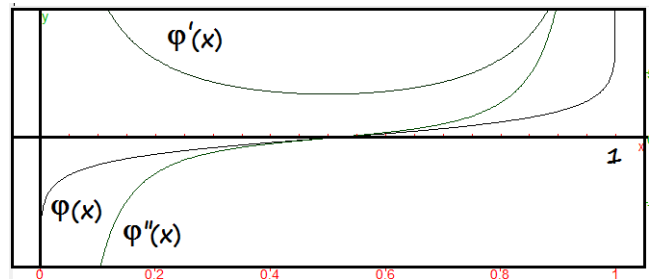
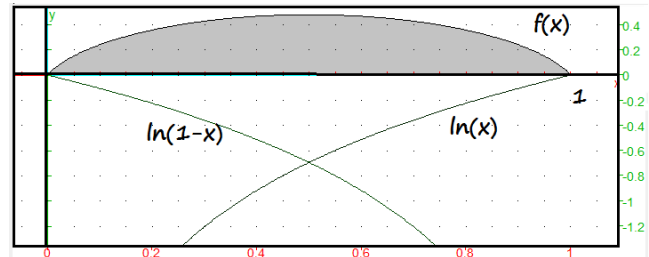
Et pas qu'un peu, mon n'veu : $\varphi'' = x \mapsto \left(\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2} \right)$

φ' est croissante, décroissante, avec maximum en $\frac{1}{2}$ de valeur $2 \cdot \ln(2) - 2$ (négative).

φ est donc décroissante. Nulle en $\frac{1}{2}$. Elle s'annule et

change de signe en $\frac{1}{2}$ (passant du positif au négatif).

f' est donc positive, puis négative. f admet son maximum en $\frac{1}{2}$.



Ce type de petit raisonnement avec tableau de variations et dérivées doit être un classique pour vous, sans aucune difficulté.

*La seule subtilité est de ne garder que le numérateur de f (nommé φ)
et d'accepter de se dire qu'il faudra peut être dériver plusieurs fois.*

Pour ce qui est du développement limité en 0, on peut certes s'occuper de $\ln(1-x)$. Mais il reste $\ln(x)$ qui est rétif à tout développement limité.

Et si on regarde le graphe on se doute de quelque chose. On a une demi tangente verticale en 0.

Et ceci interdit tout développement limité (pour ceux qui en ont besoin DL d'ordre n implique DL d'ordre 1 implique dérivable).

On vérifie donc : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x)}{x} \cdot \ln(x)$. Le terme $\frac{\ln(1-x)}{x}$ tend vers -1 (équivalent du numérateur) et $\ln(x)$ tend vers l'infini.

Demi-tangente verticale. C'est fini. Le seul développement limité sera d'ordre 0.

◀55▶

<i>a</i>	Pourquoi est il vrai que si f est continue à droite et continue à gauche en a , alors elle est continue en a .	.
<i>b</i>	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a , alors pourquoi elle n'est pas forcément dérivable en a .	
<i>c</i>	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a , alors elle est continue en a .	
<i>d</i>	Un $\mathcal{E}$ tracé par Enis est il homéomorphe à un $\mathcal{E}$ tracé par Ines ?(référenc MPSI2 2023-24)	
<i>e</i>	Vrai ou faux : $x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{ x }$?	
<i>f</i>	Vrai ou faux : f est dérivable en a si et seulement si $x \mapsto f(x+a)$ est dérivable en 0.	
<i>g</i>	Vrai ou faux : si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors $x \mapsto f(-x)$ est dérivable en $-a$ de dérivée $f'(a)$.	
<i>h</i>	Vrai ou faux : si $x \mapsto \text{Arctan}(f(x))$ est dérivable en a alors f est dérivable en a .	
<i>i</i>	Vrai ou faux : si $x \mapsto (f(x))^2$ est dérivable en a alors f est dérivable en a .	
<i>j</i>	Vrai ou faux : si f est paire, alors f' est nulle en 0.	
et même http://rogermansuy.fr/HX2/Derivables.html		
Homéomorphisme : application continue bijective dont la réciproque est aussi continue.		

a : la limite à droite est gale à $f(a)$, la limite à gauche est gale à $f(a)$.

La limite sans condition est égale à $f(a)$.

b : la limite à droite des taux d'accroissements existe, de même que la limite à gauche.

Mais elles ne sont pas forcément gales.

L'exemple usuel est la valeur absolue, en 0.

Elle est dérivable à droite ($f'_d(0) = 1$) et à gauche ($f'_g(0) = -1$).

Elle n'est pas dérivable en 0.

c : Si elle est dérivable à droite, elle est continue à droite (un DL d'ordre 1 devient un DL d'ordre 0).

Si elle est dérivable à gauche, elle est continue à gauche.

Étant continue à droite et à gauche, elle est continue.

d : Julien L ; et Julien W ne sont plus élèves de MPSI2. Mais vous pouvez reprendre avec des prénoms de la classe de cette année. Et peut être même avec un même prénom porte par deux élèves...

e : Faux. $x \mapsto \ln(|x|)$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est même dans le cours de Terminale.

Pour vous en convaincre.

Travaillez sur $\mathbb{R}^{-*}$ pour commencer. Vous avez $x \mapsto \ln(-x)$ qui se dérive en $x \mapsto \frac{-1}{-x}$.

Travaillez sur $\mathbb{R}^{-*}$ pour commencer. Vous avez $x \mapsto \ln(x)$ qui se dérive en $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Vous pouvez aussi convaincre le physicien sur $\mathbb{R}^{-}$ en écrivant $\ln(-x) = \ln(x) + \ln(-1)$ et $\ln(-1)$ est une constante qui saute à la dérivation.

f : Vrai.

C'est même la clef pour passer des formules $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + o(h)$ (recommandées)

aux formules $f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + o(x-a)$ (sources d'erreurs chez trois quart des élèves les utilisant).

g : Si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors $x \mapsto f(-x)$ est dérivable en $-a$ mais sa dérivée est $-f'(-a)$.

C'est la dérivée d'une composée.

On peut aussi écrire $g(x) = f(-x)$ et obtenir $g(-a+h) = f(a-h) = f(a) - h.f'(a) + o(-h) = g(-a) - h.f'(a) + o(h)$.

h : Vrai. Il suffit de composer par $\tan$, dérivable sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

La simplification $\tan(\text{Arctan}(f(x))) = f(x)$ vient de la définition.

i : Si $x \mapsto (f(x))^2$ est dérivable en a , $x \mapsto f(x)$ n'est peut être même pas continue en a .

Prenez $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ rationnel} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ici, on ne pouvait pas composer par la racine carrée. On n'a pas $\sqrt{t^2} = t$.

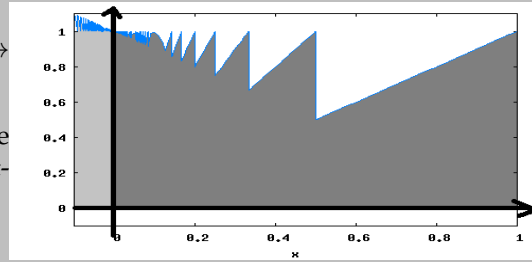
j : Si f est paire et dérivable, alors f' est impaire et donc nulle en 0.

Mais si f est paire sans être dérivable, comme la valeur absolue.

On peut aussi dire que « f paire » n'implique pas « f définie en 0 ». Alors à quoi bon dériver ?

♡ Donnez les points de discontinuité sur $[0, 1]$ de $x \mapsto x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$. Prolongez cette application par continuité en 0.

♣ Exprimez l'intégrale de cette application de 0 à 1 comme somme d'une série numérique. Donnez sa valeur, en admettant $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.



◀ 56 ▶

Messaline se fit mettre un col de loutre sur la nuque. Le Pape remercia la Duchesse de l'avoir fait mander. Il n'y a pas que dans les Postes qu'on voit de beaux Bottins. La Chine se soulève à l'appel du Japon. Frottez moi ce lard dit la charcutière, il est bien salé.

Ne cherchez pas, ce sont des parapéties de l'OuLiPo. Elles en ont la forme, l'odeur, la saveur, mais ce ne sont pas des contre-péties.

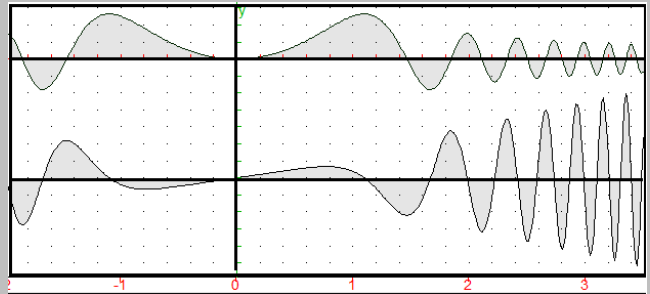
♡ On définit : $f = x \mapsto \frac{\sin(x^3)}{x}$. Prolongez la par continuité en 0.

Montrez qu'elle est dérivable, même en 0.

♡ Montrez que f est uniformément continue sur tout segment $[-a, a]$ et sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f' n'est pas bornée.

(Rappel : on a montré $(f' \text{ bornée}) \Rightarrow (f \text{ lipschitzienne}) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue})$ mais on voit ici qu'il n'y a pas de réciproque.



◀ 57 ▶

f n'est pas définie en 0. Mais $f(x)$ est équivalent à $\frac{x^3}{x}$ quand x tend vers 0.

$f(x)$ tend vers 0 en 0. On posera $f(0) = 0$.

En toute rigueur, on dit qu'on définit une nouvelle application $\bar{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ pour x non nul.
Et c'est elle qui va être dérivable et tout et tout.

Pour ce qui est de la dériver en 0, il ne sert à rien de calculer f' ailleurs qu'en 0 et de regarder ensuite si f' a une limite en 0.

Déjà, ça conduit à des calculs moches (mais si vous préférez calculer plutôt que raisonner...).

Et ensuite, ça revient à dire « f' doit bien être continue en 0 ». Ce qui est une grosse question.

Non, simplement, pour dériver en 0, on calcule les taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Comme on a posé $f(0) = 0$, ce taux devient $\frac{\sin(x^3)}{x}$ c'est à dire $\frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Ce quotient (indéterminé) est équivalent à $\frac{x^3}{x^2}$. Il tend vers 0.

f est dérivable en 0 et $f'(0)$ vaut 0.

On a une tangente horizontale, ce qui était prévisible car l'application était paire.

Mais elle eut pû être paire et n'avoir pas de tangente (comme la valeur absolue).

Sur chaque segment $[-a, a]$, f est uniformément continue, puisqu'elle est continue.

C'est le théorème du mathématicien prussien de Göttingen, Berlin et Königsberg : Eduard Heine.

Pour la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut pas passer de uniformément continue sur tout segment à uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet, il n'y a aucun résultat en ce sens.

Et même, $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment, mais pas sur $\mathbb{R}$ entier.¹¹

Mais ici, gros avantage : $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Un exercice classique (inclus dans ce TD) dit si f est continue sur $] -\infty, +\infty[$

a une limite finie a en $-\infty$

a une limite finie b en $+\infty$

alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

On peut l'appliquer ici : f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Graphiquement, on sent qu'on peut utiliser des boîtes assez fines de hauteur ε .

On a une formule pour f' : $f'(x) = 3.x.\cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Il suffit d'avoir dérivé proprement comme un produit, et tout vient en place très visiblement.

Sauf en 0 où on prend $f'(0) = 0$.

Ce qui ne se devinait d'ailleurs guère avec cette formule moche...

Ceci pour ceux qui pensent calculer une dérivée après prolongement par la limite de f' au lieu des taux d'accroissement de f ...

Pour montrer que cette dérivée n'est pas bornée, on va exploiter le terme en $3.x.\cos(x^3)$ puisque l'autre tend vers 0 à l'infini (et reste borné en 0).

On calcule f' là où le cosinus vaut 1 : $f'(\sqrt[3]{2.k.\pi}) = 3.\sqrt[3]{2.k.\pi} - \text{dsp}_{(2.k.\pi)^{2/3}}$.

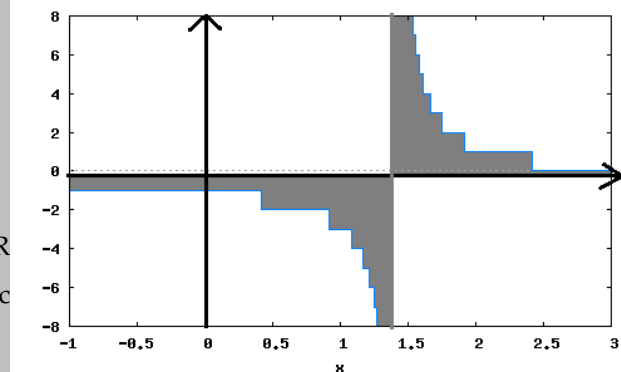
Cette quantité tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

f' ne peut donc pas être bornée.

On a donc bien une application uniformément continue mais non lipschitzienne.

♥ Montrez que $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. Même question avec

$x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$ (partie entière).



L'application $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est définie en tout point de $\mathbb{Q}$.

Et elle y est continue.

Le seul point qui poserait problème est $\sqrt{2}$. Et il n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Pour ce qui est de « pas uniformément continue », on va montrer une négation :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{Q}^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

On notera qu'il on écrit $\exists \varepsilon_0$ en lui donnant un nom avec indice, car il est particulier.

Bon, en fait, ça marcherait avec n'importe lequel, mais ici on va prendre 1.

En revanche, réfléchissez. dans l'uniforme continuité, on écrit $\forall \varepsilon, \exists \eta_{\varepsilon}$... car η se calcule à partir de ε . Il est « fonction de ε ».

On lui donne donc un nom qui tient compte de sa filiation (comme les noms russes en Ivanof, Petrof ou les noms anglais en Jackson, Richardson...)

En revanche, c'est n'avoir rien compris que d'écrire dans la négation $\exists \varepsilon, \forall \eta_{\varepsilon}$...

En effet, pourquoi dire que η dépend de ε alors qu'il est quelconque.

11. oui, $\mathbb{R}$ n'est pas un segment ! c'est un intervalle non borné

Avoir compris cette distinction « qui dépend de qui », c'est faire des maths.

Recopier des formules par cœur sans comprendre le lien entre les variables, c'est faire... je sais pas moi, des « sciences » mais pas des maths.

On propose donc $\varepsilon_0 = 1$.

Pour tout η , on va prendre x et y autour de $\sqrt{2}$, proches à η près l'un de l'autre.

Dans $\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$ on peut trouver un rationnel x (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Dans $\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$ on peut trouver un rationnel y (densité ou même $\sqrt{2} + (x - \sqrt{2})$, comprenez vous ?).

$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{4}, \sqrt{2}\right]$	$\left[\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$
x			y
	$\eta/2$		
$\eta/2$		$\eta/2$	

La différence entre abscisses est plus petite que η .

La différence entre ordonnées se calcule

$$\left| \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{y - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{y - x}{(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2})} \right|$$

On la minore : $|y - x|$ est plus grand que $\eta/2$.

$|x - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

$|y - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

le quotient est plus grand que $\frac{\eta/2}{\eta^2/4}$ ce qui fait $\frac{2}{\eta}$.

C'est plus grand que 1.

Sauf si η vaut plus que 2, mais ce sont les η petits qui nous concernent.

Sinon, on peut exploiter la suite de l'exercice. Si elle était uniformément continue sur $\mathbb{Q}$ elle se prolongerait en une application continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par densité. Ce qui n'est pas le cas.

Passons à $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$.

Sur $\mathbb{R}$, on la devine non définie en $\sqrt{2}$ et discontinue chaque fois qu'on passe par une valeur qui fait sauter la partie entière.

On remonte : $\frac{1}{x - \sqrt{2}} = n$ dans $\mathbb{Z}$ donne $x = \frac{1}{n} + \sqrt{2}$ avec n dans $\mathbb{Z}^*$.

Coup de chance, ces points de discontinuité ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Partout ailleurs, l'application est continue.

Inutile de se prendre la tête à distinguer « continue à droite/continue à gauche ».

Ici, la formule est la même à droite et à gauche.

Sinon, pour rendre les choses rigoureuses.

On se donne un rationnel $\frac{p}{q}$.

Il existe alors un intervalle $\left[\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right]$ ne contenant aucun $\frac{1}{n} + \sqrt{2}$ (chercher le plus proche, et s'en éloigner).

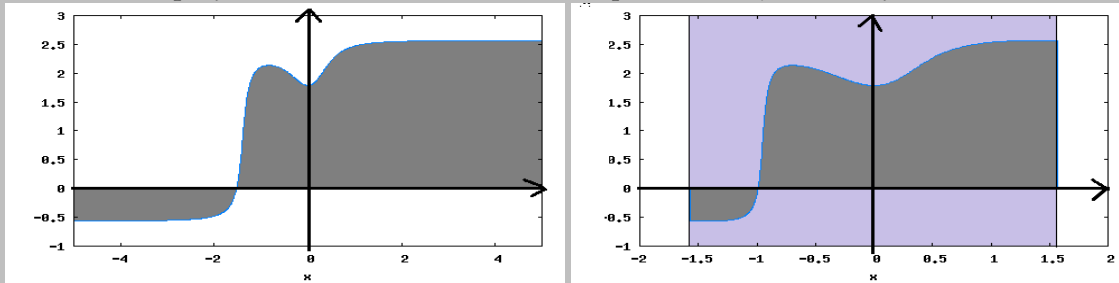
Sur cet intervalle, l'application $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$ est constante, donc continue.

Elle n'est pas uniformément continue.

Pour η strictement positif, aussi petit soit il, prendre à nouveau x et y de part et d'autre de $\sqrt{2}$. Comme tout à l'heure.

◀59▶

♥ Donnez une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue. Soit maintenant f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite a en $-\infty$ et une limite b en $+\infty$. Montrez que f est bornée. On veut montrer que f est uniformément continue. On pose alors : $\varphi = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$.



Montrez que φ se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$. Montrez que φ est alors uniformément continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ puis sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Déduisez par composition que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Comme on peut aller de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que le $\mathbb{R}$ de départ n'est pas un segment, on peut trouver des applications continues (*en tout point*), qui ne sont pas uniformément continues.

Par exemple $x \mapsto x^2$. Continue en tout point.

Mais pour tout η proposé, on pourra trouver x et y vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et pourtant $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| > 1$.

C'est bien $\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \eta, \exists(x, y), |x - y| \leq \eta$ et (pourtant) $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$.

On prendra $x = a - \frac{\eta}{2}$ et $x = a + \frac{\eta}{2}$ (avec a à préciser). On a bien $|x - y| \leq \eta$.

Ensuite $|x^2 - y^2| = 2.a.\eta$ (calcul), et on avoue alors qu'on a choisi $a = \frac{1}{\eta}$.

Si maintenant f a une limite à l'infini (en fait à chaque infini), alors :

f est bornée sur un certain $] -\infty, A]$ (par $a - 1$ et $a + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists G_\varepsilon, \forall x, x \leq G_\varepsilon \Rightarrow f(x) - a \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur un certain $[B, +\infty[$ (par $b - 1$ et $b + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists H_\varepsilon, \forall x, x \geq H_\varepsilon \Rightarrow f(x) - b \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur ce qu'il reste (<i>on ne sait pas par quoi, mais elle l'est</i>)	On applique le premier théorème de compacité : : f est continue de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée. Ce théorème ayant tendance à s'appeler « théorème de bornes atteintes » au fil des ans. Je n'ai rien contre ça.

Globalement, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour l'uniforme continuité, on peut ruser de la même façon.

Sur $[H_{\varepsilon/2}, +\infty[$, on a (que x et y vérifient ou non $|x - y| \leq \text{quelque chose}$: $|f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
et $|f(y) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
d'où $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

De même, sur $] -\infty, G_{\varepsilon/2}]$ on a la même conclusion.

Et sur $[G_{\varepsilon/2}, H_{\varepsilon/2}]$, on applique le théorème de Heine. On a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ à condition d'avoir $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$.

Et au final, on recolle tout.

Mais on va faire mieux, en ramenant l'infini à portée de main avec tangente et arctangente...

C'est là que les maths c'est beau. De belles idées, lumineuses qui épargnent même les recours aux découpages d'épsilon en quatre.

On définit donc $\theta \mapsto f(\tan(\theta))$ de $] -\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (*oui, la tangente ne pose pas de problème, on s'approche du bord, mais on ne met pas le pied dessus*).

Elle est continue, en tant que composée d'applications continues.

Mais elle se prolonge par continuité en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-_{12}$, par composition des limites : $\theta \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$
 $\tan(\theta) \rightarrow +\infty$
 $f(\tan(\theta)) \rightarrow b$

De même, en $\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+$ on prolonge par la valeur a .

12. le petit moins pour dire « par valeur inférieure »

Maintenant, quitte à l'appeler encore φ elle est définie et continue de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

Mais on est sur un segment¹³.
Elle est uniformément continue.

Par restriction de domaine, φ est encore uniformément continue sur l'intervalle ouvert.
Et pour retrouver f on compose : $f = \varphi \circ \text{Arctan}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en passant par $]-\pi/2, \pi/2[$).
Comme φ et Arctan sont uniformément continues, f l'est encore (*Arctan est lipschitzienne donc uniformément continue*).

◀60▶ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est uniformément continue sur $[0, 2]$.
Déduez que f est uniformément continue sur tout $\mathbb{R}$.
Pourquoi a-t-on pris $[0, 2]$ plutôt que $[0, 1]$ simplement ?

De $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$, f est continue, et $[0, 2]$ est un segment.
La voilà uniformément continue.

Après, en gros « par périodicité », elle est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mais il faut être précis.

Le théorème de Heine nous a donné $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon, \forall (a, b) \in [0, 2]^2, |b - a| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$.

On a envie de dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon$ (le même), $\forall (x, y) \in]-\infty, +\infty[^2, |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Et c'est vrai. Ne suffit-il pas de réduire modulo 1 : $a = x - [x]$ et $b = y - [y]$? (deux parties décimales).
Par périodicité : $f(x) = f(a)$ et $f(y) = f(b)$.
Si on a $|x - y| \leq \eta$ alors on a $|a - b| \leq \eta$ puis $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

C'est tentant... Mais il y a un problème.

Imaginez $x = 0,99$ et $y = 1,01$.

On a alors $|x - y| \leq 0,02$ (imaginons que ce soit ça η). Mais on a $a = 0,99$ et $b = 0,01$ et $|b - a|$ est plutôt grand !
On ne peut donc pas utiliser $|b - a| \leq \eta$.

Il faut en fait soustraire le même entier à x et y .

Pratiquement, prenons x et y vérifiant juste $|y - x| \leq \eta$.
L'un des deux est le plus petit. On va dire que c'est x sans perte de généralité.
On pose alors $a = x - [x]$ et $b = y - [x]$ (pas de faute de frappe, c'est bien $[x]$).

Par construction : $|b - a| = |x - [x] - (y - [x])| = |x - y| \leq \eta_\varepsilon$.

a est entre 0 et 1 par construction.

b est entre 0 et $1 + \eta$, puisque c'est $(y - x) + (x - [x])$.

Il est donc entre 0 et 2.

On peut donc utiliser l'uniforme continuité de f sur $[0, 2]$ et conclure $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Et on a bien $|f(y) - f(x)| = |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ par périodicité.

Petit détail : la majoration $0 \leq b \leq 1 + \eta$ est correcte.

J'en fais $0 \leq b \leq 1 + \eta \leq 2$.

ceci revient à supposer que η est plus petit que 1.

On ne sait pas si c'est le cas (même si dans la pratique, η est qualifié de « petit »).

Mais si η dépasse 1 dans le résultat issu du théorème de Heine, on peut le remplacer par 1, et l'implication $|x - y| \leq 1 \leq \eta \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ reste valable..

◀61▶ ♡ Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne a dans $\mathbb{R}$. Montrez par récurrence sur n que pour tout x de $[a + n.\mu_1, a + (n + 1).\mu_1]$, on a $|f(x) - f(a)| \leq n + 1$. Déduez que f est encadrée par deux applications affines.

C'est quoi μ_1 ? C'est un réel qui vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |y - x| \leq \mu_1 \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq 1$. C'est l'uniforme continuité.

13. ce que $]-\pi/2, \pi/2[$ n'était pas, on est d'accord

Ensuite, pas vraiment besoin de récurrence.

Prenons x dans $[a - n.\mu_1, a + n.\mu_1]$

et écrivons $f(a + n.\mu_1) - f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)$

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(a + n.\mu_1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)$$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a + n.\mu_1)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(a + (k+1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)|$$

$$|f(x) - f(a)| \leq 1 + n$$

Les $n + 1$ dernières majorations sont licites, puisque $|(a + n.\mu_1) - a|$ et tous les $|(a + (k+1).\mu_1) - (a + k.\mu_1)|$ sont plus petits que μ_1 .

Pour n négatif, le résultat serait vrai aussi avec des valeurs absolues. Avec le même type de télescopage.

De fait, on avance intervalle par intervalle.

La majoration $|f(x) - f(a)| \leq n + 1$ devient un encadrement $-n - 1 \leq f(x) - f(a) \leq n + 1$ puis $f(a) - n - 1 \leq f(x) \leq f(a) + n + 1$.

D'accord, mais ça ne fait pas encore un encadrement affine...

Oui, mais on va encadrer n à son tour à l'aide de x (en gros : $n \simeq \frac{x-a}{\mu_1}$).

On a supposé : $a + n.\mu_1 \leq x \leq a + (n+1).\mu_1$.

On bascule : $n.\mu_1 \leq x - a \leq (n+1).\mu_1$

On arrange : $n.\mu_1 \leq x - a$ et $x - a - \mu_1 \leq n.\mu_1$

On regroupe : $x - a - \mu_1 \leq n.\mu_1 \leq x - a$

Et enfin : $\frac{x-a}{\mu_1} - 1 \leq n \leq \frac{x-a}{\mu_1}$ et aussi $-\frac{x-a}{\mu_1} + 1 \geq -n \geq \frac{x-a}{\mu_1}$.

On reporte : $f(a) - \frac{x-a}{\mu_1} - 1 \leq f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{\mu_1} + 1$.

C'est bien un encadrement par deux fonctions de la forme $x \mapsto \alpha.x + \beta$.

f est encadrée par deux fonctions affines.

C'est ce qui explique que $x \mapsto x^2$ ne puisse pas être uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

62 ♥ Quels sont les vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ que vous pouvez utiliser pour compléter $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ en base de $\mathbb{R}^3$? Lesquels donnent une base de même orientation que la base canonique ?

Pour passer d'une famille libre de deux vecteurs à une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ il faut un vecteur et un seul.

Et il suffit que ce vecteur ne soit pas coplanaire avec les deux premiers.

La condition devient « déterminant non nul ».

Et pour que la base soit directe, la condition devient « déterminant strictement positif ».

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
4	-1	0	16	non !	0	0
oui	oui	non	oui		non	non
directe			directe			

Dans la dernière, le vecteur ajouté est colinéaire au premier.

Il y a un cas où on allonge avec « carrément le vecteur nul ».

Sinon, on a aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui élimine bien $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quatre équations, quatre inconnues, on va s'en tirer :

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la voilà liée.

On peut alors vérifier une chose : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ ne veut rien dire

$$\text{Mais } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◀63▶ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Est-il possible de choisir x pour que (U, V, W) soit de rang 3 (libre) et $(M.U, M.V, M.W)$ de rang 2 (liée) ?
Est-il possible de choisir x pour que (U, V, W) soit de rang 3 et $(M.U, M.V, M.W)$ de rang 1 ?

On veut une famille de trois vecteurs de rang 3. On veut donc une famille libre.

On veut une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: on veut une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Il faut et il suffit que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ soit non nul. On évitera $x = 3$.

En revanche, on veut que la famille des trois images soit de rang 2.

Les vecteurs $M.U$ et V sont déjà indépendants : $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Il faut et il suffit que $M.W$ soit combinaison de $M.U$ et $M.V$.

Mais alors M transforme une base en famille liée...

$$\text{Or } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est donc possible !

D'ailleurs, quel que soit le choix de x (même pour x égal à 3), les trois vecteurs $M.U$, V et $M.W$ sont dans un ensemble image de dimension 2.

Ils forment une famille de rang majoré par 2.

Ils forment une famille de rang 2 grâce aux deux premiers.

Bref, pour x égal à 3, (U, V, W) est de rang 2 et $(M.U, M.V, M.W)$ aussi.

Enfin, pour x différent de 3, (U, V, W) est de rang 3 et $(M.U, M.V, M.W)$ de rang 2.