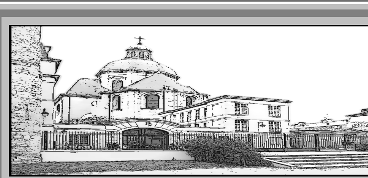
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 28 avril
M.P.S.I.2



2024 2025

TD25

◁0▷ Pour toute suite réelle u, on définit sa moyenne de Cesarbi par $z_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}.\sum_{k=0}^{n} 2^k.u_k$. Montrez que les propriétés suivantes passent de u à z :
constance, caractère borné, croissance, convergence vers 0, convergence.
(pour la convergence, on pourra suivre exactement la même méthode que pour le théorème de Cesàro).
Indiquez lesquelles des propriétés précédentes passent de z à u.

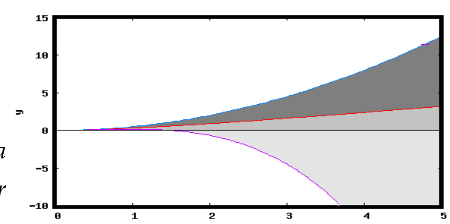
◁1▷ Calculez $\int_0^1 Max\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\Big).dx$.

◁2▷ ♡ Montrez que $4^{4.n+2} - 3^{n+3}$ est toujours un multiple de 11.
Tout multiple de 11 est il de cette forme ?

◁3▷ ♡ Trouvez toutes les applications dérivables f vérifiant $f'(t) = f(2-t)$ pour tout t *(on pourra par exemple dériver deux fois).*

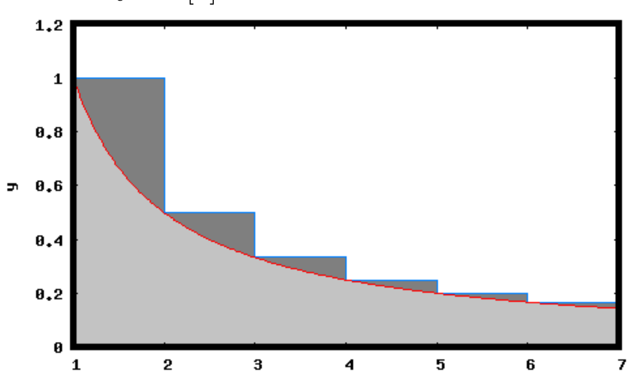
◁4▷ La CONSTANTE D'EULER (de valeur approchée `0.5772156649015328606 10`).
On définit $c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $C_N = \sum_{k=1}^{N} c_k$ (on va montrer que C_N converge, vers une limite appelée γ).
Montrez pour tout x positif : $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.
Déduisez $\frac{1}{2.n^2} - \frac{1}{3.n^3} \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{2.n^2}$.
Déduisez pour tout couple d'entiers (n, N) *(avec $n \leqslant N$)* :

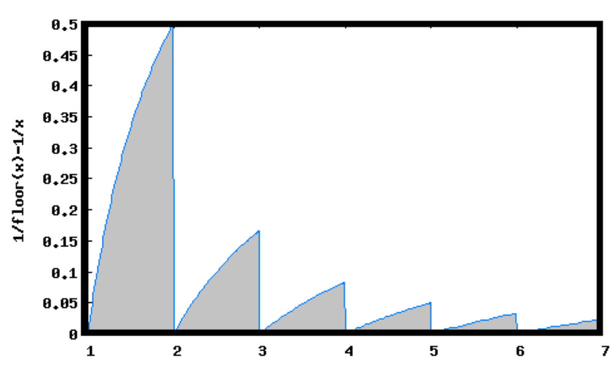
$$\frac{1}{2.n+2} - \frac{1}{2.N} - \frac{1}{6.n^2} + \frac{1}{6.(N+1)^2} \leqslant C_N - C_n \leqslant \frac{1}{2.n} - \frac{1}{2.N+2}$$



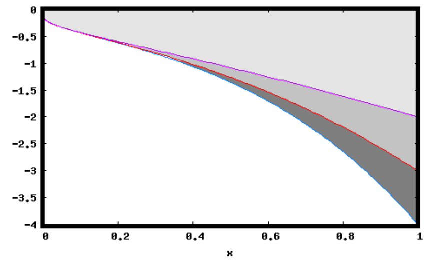
Déduisez $\gamma - C_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2.n}$ *(en gros, pour connaître γ à 10^{-4} près, il faudra prendre n de l'ordre de 5000 dans C_n, ce qui fait trop de termes apportant chacun leur imprécision).*

Calculez $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right).dx$ au sens de la limite quand N tend vers l'infini de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right).dx$.

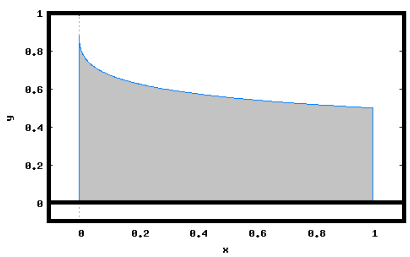




Montrez pour tout entier naturel n $H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}.dx$, en prouvant aussi que $x \longmapsto \frac{1-x^n}{1-x}$ se prolonge par continuité en 1.



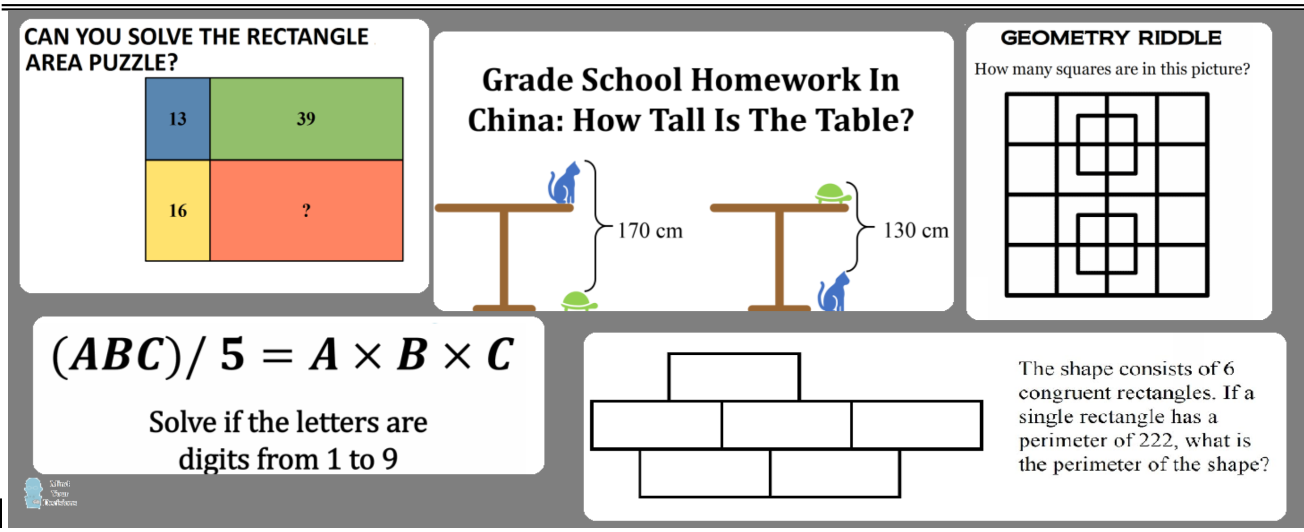
Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1-x^n}{\ln(x)}$ *(notée φ_n)* se prolonge par continuité en 0 et en 1.
Calculez $\displaystyle\int_{t=1}^{t=n}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^t.dx\Big).dt$ puis exprimez $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{t=0}^{t=n} x^t.dt\Big).dx$ à l'aide de φ_n.



Prouvez que $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{\ln(x)}$ (notée ψ) se prolonge par continuité en 0 et en 1.
En admettant qu'il existe un théorème sur les intégrales similaire au théorème sur les sommes qui permet de les permuter, déduisez : $C_n = \displaystyle\int_0^1 \psi(x).dx - \int_0^1 \Big(x^n.\psi(x)\Big).dx$.
Déduisez $\gamma = \displaystyle\int_0^1 \psi(x).dx$. 2016

◁5▷ Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 5} 2^i.3^j.5^k$? [1]

◁6▷ ♡ Calculez $\displaystyle\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2}{k^2-4}$ *(si possible évidemment sans récurrence, vous êtes en MPSI2, non ?)*



◁7▷

◁8▷ ♣ Trouvez toutes les séries géométriques réelles *(puis complexes)* vérifiant
$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{3.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)^3$.

◁9▷ A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de neuf 1. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel $U^T.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ? sachant que la notation ${}^tM$ indique la matrice M où on a échangé le rôle des lignes et des colonnes : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$)* ?

◁10▷ ♡ On sait que la suite $\left(\dfrac{n+3}{n+6}\right)$ *(notée u)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|u_n-1|\leqslant\varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

On sait que la suite $\left(\dfrac{\sin(e^n)}{n+6}\right)$ *(notée v)* converge vers 0. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|v_n-0|\leqslant\varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

/♡ On sait que la suite $\left(\dfrac{n^2+3.\sin(n)}{n^2-\ln(n)}\right)$ *(notée w)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir

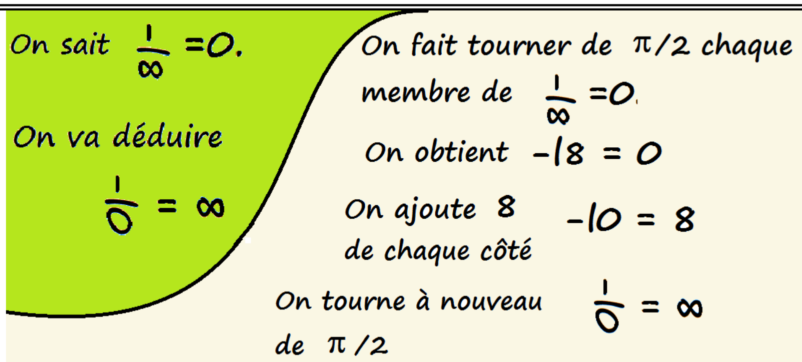
1. par « écriture décimale, je veux dire écriture en base 10 (car il existe des écritures en base 2, 16 ou même −2), et pas écriture avec des chiffres derrière la virgule, car là vous pouvez mettre plein de 0

$|w_n - 1| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

Bonus de bonus : des conseils, piqués pour certains à Pierre-Jean Desnoux (ex prof de MP à Charlemagne).

S'il y a un contre-exemple à chercher, essaye avec $((-1)^n)$.	
Trois petits points ne font pas une preuve.	
Juste. Justifié. Efficace.	
« Forcément », « naturellement » traduisent en fait l'ignorance.	
Si on a fait tendre n vers l'infini dans une limite, il n'y a plus de n dans le résultat.	
Si l'ensemble image est patit, le noyau sera grand.	
Tu devras avoir autant d'équations de chaque côté de $\Leftrightarrow$.	
Pour majorer ou minorer une somme, pense déjà à « nombre de termes fois le plus grand / petit ».	
Quand deux sigmas s'additionnent, on peut prendre la même variable de sommation. Quand deux sigmas se multiplient, on prend deux variables de sommation différentes. La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$n'a en général rien à voir avec $\sum_{k=1}^{n} a_k.\sum_{k=1}^{n} b_k$.	
$(\cos(2.t))'$ n'a pas de sens. f peut être croissante, décroissante, périodique. $f(x)$ est juste un nombre, il ne croît pas.	
Tu ne simplifieras pas par a si tu ne sais pas si a est non nul. Tu ne soustrairas pas des inégalités entre elles.	
Une équation ou une inéquation est une question (« trouver x pour que... »). Sinon, il y a des égalités et des inégalités, c'est tout.	

◁11▷ ♡ Que fait la suite $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{3}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}},\dots)$?

◁12▷ 

◁13▷ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\frac{\ln(n)}{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.

Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
$\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 = a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$.

◁14▷ ♡ Calculez cette intégrale « exponentielle » $\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

◁15▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}}$.

◁16▷ L'énoncé dit : « une suite u de réels strictement positifs vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} 0$, déduire que (u_n) converge vers 0 ». Un élève commence par « on note α la limite de la suite u ; on a alors par passage à la limite : $\frac{\alpha}{\alpha} = 0$, d'où $\alpha = 0$ ». Indiquez les erreurs de son raisonnement.

Démontrez quand même le résultat en commençant par $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour n plus grand que $N_{1/2}$.

◁17▷ Où est l'erreur : pour tout k, $\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Une question telle que « montrez que f est un endomorphisme de E » appelle une réponse en plusieurs points : morphisme et endo.
Si l'hypothèse une une limite ou un équivalent, vous n'obtiendrez jamais une conclusion en « pour tout n ». Au mieux une conclusion en « pour tout n à partir d'un certain rang », avec un encadrement et non plus une égalité.
Pense à intercaler des termes : $a-b=a-\alpha+\alpha-b$ avec α bien choisi.
Le symbole $\Longrightarrow$ ne se galvaude pas. Si vous voulez écrire « donc », eh bien écrivez « donc ». Et au lieu de « donc », citez l'argument (on somme, on dérive, cas particulier, par passage à la limite...).
Les trois piliers de l'intégration : linéarité, croissance et Chasles.
Ne crains pas d'avancer lentement, crains seulement de t'arrêter.
Jamais de sigma « mous ».
Si je tiens la fonction, je ne tiens pas sa dérivée. Si je tiens sa dérivée, je maîtrise la fonction.
Penser aux idées simples : sommes télescopiques, décompositions en éléments simples, intégration par parties, formule de Leibniz, factorisation de a^n-b^n, formules de Viète, théorème d'encadrement, majoration terme à terme, comparaison série intégrale, principe des tiroirs, quantité conjuguée, inégalité triangulaire (première et seconde)
Tu ne soustrairas point des équivalents de même ordre. Tu ne passeras pas les équivalents aux exponentielles.
Cette variable a-t-elle été présentée ? Une lettre muette est en fait une lettre absente ($\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ ..., $\displaystyle\int_a^b \dots dx$).
Nommer les objets, c'est déjà prendre le pouvoir sur eux.
Gauss, Bézout et Euclide. Avec ça, tu tiens presque toute l'arithmétique élémentaire. Sur les entiers, comme sur les polynômes. Mais le lemme de Gauss ne dit pas n'importe quoi.
« Montrez qu'il existe un unique a vérifiant.. ; », ce n'est pas une question. C'est deux questions : • existence et unicité. « Montrez que P_n est un polynôme de degré n vérifiant $P(X+1)-P(X)=\dots$ » ce n'est pas une question, c'est trois questions : • polynôme, degré et formule.
Une suite qui converge vers a peut très bien ne jamais prendre la valeur a.
Ne confonds pas « borne supérieure » et « plus grand élément ». Ne dis pas « le majorant » mais « un majorant ».
Pour « identifier », il faut presque toujours un argument de type « base » ou « somme directe » , sinon c'est presque toujours une bêtise.
La relation $f(x)=g(x)$ n'entraîne pas $f'(x)=g'(x)$ si elle n'a lieu que pour un x particulier.
Ne te perds pas entre les étages (f ou $f(x)$, u_n ou (u_n), pas de $(f(0))'$...).
Une formule en « pour tout n » se démontre souvent sans récurrence, et sert dans la suite pour des récurrences.
Tu ne diviseras jamais par 0. Une suite ne peut pas être équivalente à 0.
Si tu as bien cherché un exercice... ...même si tu n'as rien trouvé... ...tu t'es bien préparé pour les concours.
Les réponses aux questions posées tu encadreras. Les arguments tu souligneras. Tes notations tu mettras en valeur.
Si tu sens que ton argument est bancal, crois moi, le correcteur le saura encore mieux que toi...
On justifie la convergence d'une série en étudiant / dominant.. son terme général, et pas avec des $\sum$ (sauf pour la série géométrique).
$x.\ln(x)$ en 0 est la forme indéterminée classique. Et 1^∞ est une forme indéterminée (classique $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$).

◁18▷ Soit p dans $\mathbb{N}-\{0,1\}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2).u_{n+2} = (n+2).u_{n+1}$.
Montrez par récurrence $S_n = \dfrac{1}{p-1}.\Big(1-(n+p+1)u_{n+1}\Big)$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (n+p).u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0. Déduisez $\lim_{n\to+\infty} S_n$ en fonction de p.

◁ 19 ▷ Un élève dont je tairai le nom s'est trompé sur la moyenne de Cesàro : $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n}$ au lieu de $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ (nombre de termes).
Perd il la propriété « convergence » ?
Perd il la propriété « croissance » ?

◁ 20 ▷ *On note $(E,+,.,\times)$ l'algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Deux suites a et b sont dites voisines si la moyenne de Cesàro de leur différence tend vers 0 à l'infini.* Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence.
Indiquez pour les suites suivantes si elles sont équivalentes et/ou voisines de la suite (n^2) :

(n^2+n)	$(n^2+n.\ln(n))$	$\left(\dfrac{n^3+\ln(n+1)}{n+1}\right)$	$(n.\ln(n+1))$	$(2.n^2+n)$

Montrez que deux suites stationnaires *(c'est à dire "constantes à partir d'un certain rang")* sont voisines si et seulement si elles ont la même limite.
Un élève prétend qu'une suite a est voisine de la suite constante égale à 1 si et seulement si elle converge vers 1. A-t-il raison ?

Deux parties A et B de $\mathbb{N}$ sont dites "de même masse" si leurs fonctions indicatrices sont deux suites voisines. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $P(\mathbb{N})$.
Montrez que les ensembles finis ont tous la même masse.
Montrez que l'ensemble $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a la même masse que les ensembles finis.
Montrez que si A et B sont des parties de $\mathbb{N}$ de même masse, alors A^c et B^c ont la même masse.
Montrez que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs ont la même masse, mais n'ont pas la même masse que $\mathbb{N}$.
Montrez que l'ensemble A des nombres qui sont multiples de 2 ou de 3 a la même masse que l'ensemble B des nombres qui ne sont pas multiples de 3.
Écrivez une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne deux booléens $(1_A(n),\ 1_B(n))$ pour les deux parties A et B définies ci dessus.

◁ 21 ▷ ♡ On pose : $u_n = (-1)^n.(2.n+1)$ pour tout n. Calculez $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.
Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.
♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.
Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \dfrac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1}$.

◁ 22 ▷ ♡ Pour tout n, on définit $a_n = \dbinom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.
En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\dbinom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

◁ 23 ▷ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$ puis de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2.x} \frac{dt}{\ln(t)-1}$ *(et ce ne devra pas du tout être les mêmes domaines...)*

◁ 24 ▷ ♡ Montrez l'équivalence entre $a_n \sim b_n$ et $b_n = a_n + o(a_n)$.

◁ 25 ▷ ♡ Pour tout n, on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.
La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication : $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$).*

◃ 26 ▹

Étape 0	la suite	$\left(1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape1	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape2	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape3	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape4	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Écrivez la formule pour le terme général à l'étape p.			
Étape$p$	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{32} \quad \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Faites tendre p vers $+\infty$.			
	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots 1, \dots\right)$	converge vers 0

Euh, il y a une erreur, là !

◃ 27 ▹

Faux : si u_n tend vers a quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ tend vers a^n quand n tend vers $+\infty$.
Vrai ou faux : si u_n tend vers $a > 1$ quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ est équivalent à a^n quand n tend vers $+\infty$.

◃ 28 ▹ C'est drôle, mais il y a un multiple de 13 dont la somme des chiffres vaut 13 : $13 \times 19 = 247$ et $2+4+7 = 13$. Et c'est pareil pour 19 : $19 \times 46 = 874$ et $8+7+4 = 19$. Trouvez une solution pour 10. Une solution pour 20. Trouvez une solution pour 25. Et pour 22. Soit par un programme Python. Soit avec votre cervelle.

◃ 29 ▹ Montrez que si la série à termes positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (avec une limite non nulle), alors la série à termes positifs $\dfrac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ ne converge pas.

◃ 30 ▹ On note L_2 l'espace des suites réelles de carré sommable (les (a_n) telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$ existe).

Montrez que pour (a_n) et (b_n) dans L_2 alors la série de terme général $a_n.b_n$ est absolument convergente (pensez à une majoration avec des $(a_n)^2$ et des $(b_n)^2$).
Déduisez que L_2 est stable par addition et multiplication par un réel (oh, oui, un espace vectoriel).

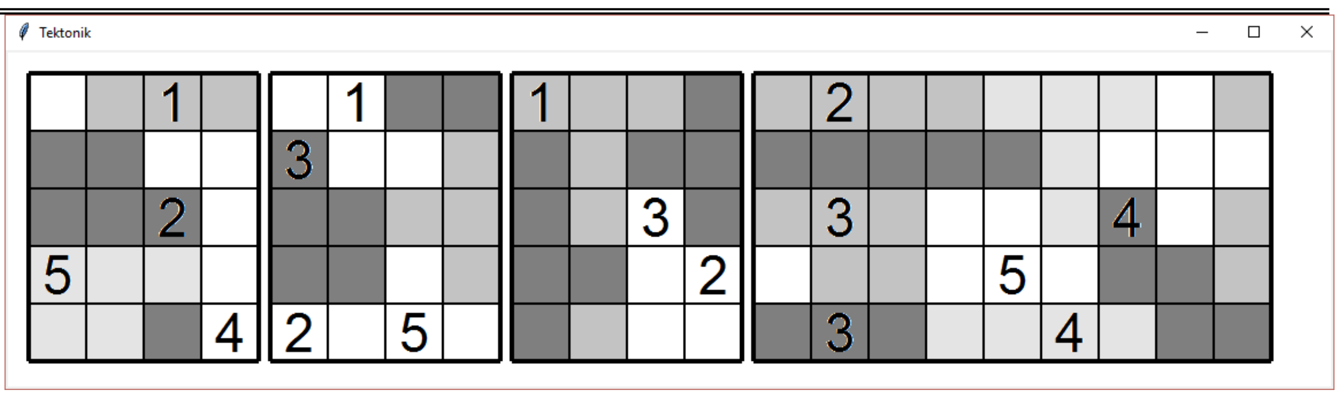
◃ 31 ▹ Montrez l'existence de chaque $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$ (noté a_n) et montrez que la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculez sa somme.

◃ 32 ▹ d_n est le nombre de diviseurs positifs de n. Montrez que la série de terme général $\dfrac{d_n}{2^n}$ converge.

Montrez que la série de terme général $\dfrac{1}{2^n - 1}$ ($n > 0$ évidemment) converge.
Comparez les deux sommes obtenues.

◃ 33 ▹ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto (x+1)^{\ln(x)}$. Montrez qu'elle est décroissante puis croissante sur $]0, +\infty[$.

◃ 34 ▹



◁35▷ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ avec des coefficients entiers sachant que son carré est $11.I_2$ et son déterminant -11. Combien de solutions ?

◁36▷ ♣ Mon corps est à sept éléments[2] version sur 2 sur 2. On pose donc $\mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec l'addition et la multiplication modulo 7 qui en font un corps.
Montrez qu'il y a 7^4 matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Montrez qu'il y a $(7^2 - 1).(7^2 - 7)$ matrices carrées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversibles *(indication : vecteurs non nuls et non colinéaires...)*.
Montrez qu'il y a $\dfrac{(7^2-1).(7^2-7)}{6}$ matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

◁37▷ ♡ Trouvez le réel a sachant $\left\{\begin{array}{rcl} 2^a \times 3^b \times 5^c & = & 235 \\ 3^a \times 5^b \times 2^c & = & 352 \\ 5^a \times 2^b \times 3^c & = & 523 \end{array}\right|$

◁38▷ Écrivez $x \longmapsto \cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos(x+b)$ et $x \longmapsto \cos(x+c)$ (b et c sont deux réels donnés, dont la différence n'est pas multiple de π).
Pouvez vous écrire $x \longmapsto \cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos(x+b)$ et $x \longmapsto \cos(x+b+\pi)$.

◁39▷ ♡ Deux matrices carrées A et B de même format sont dites semblables si il existe une matrice inversible P vérifiant $A.P = P.B$.
Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables en trouvant une matrice P.
Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant mais ne sont pas semblables.
Ajustez pour que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \clubsuit \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & \spadesuit \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

◁40▷ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est semblable à son double *(en donnant P inversible vérifiant donc $A.P = P.(2.A)$)*. Même question avec ses multiples *($\lambda.A$ pour λ non nul)*.

◁41▷ Montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$ (déterminant de VanDerMonde de taille 3).

◁42▷ On donne $u_0 = 9$, $u_1 = -8$ et $u_2 = 2$.
Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

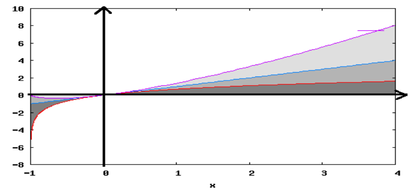
◁43▷ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

◁44▷ ♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n = 4^n - 3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n = -4^{n+1} + 5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

2. comme disait Blanche Neige

Montrez pour tout x positif : $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (1+x).\ln(1+x)$.

Déduisez : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leqslant e^{n} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.



◁ 45 ▷ Déduisez $\sqrt[n]{n!} \sim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{n}{e}$.

◁ 46 ▷ On veut montrer le résultat suivant : si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices à coefficients complexes *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice P à coefficients complexes)* alors elles le sont aussi en tant que matrices à coefficients réels *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice R à coefficients réels)*.

Regardons un exemple $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Arrangez vous pour que A ait la même trace et le même déterminant que B.

Vérifiez que A est semblable à B via la matrice P. Trouvez une matrice réelle R telle que A soit semblable à B via R.

Dans le cas général, un élève propose la démonstration suivante :

on part de $A = P^{-1}.B.P$, on écrit $P = R + i.S$, on obtient $(R + i.S).A = B.(R + i.S)$ d'où $R.A = B.R$ et on a trouvé R ;

Complétez les étapes qui manquent dans son raisonnement *(il y a des notations à rendre rigoureuses et il y a une grosse lacune sur la fin)*.

◁ 47 ▷ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 de trace et déterminant nuls est nilpotente.

Montrez que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a une trace nulle et un déterminant nul, mais n'est pas nilpotente.

◁ 48 ▷ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 6 et de terme général a_i^k, que est le signe devant $a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$? Même question avec $a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$. De même pour $a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$.

Complétez $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_.^6$ pour qu'il ait un signe moins.

◁ 49 ▷ A est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli. Quelle est la valeur maximale de ${}^tU.A.V$ si U est le vecteur colonne formé de neuf 1 et V le vecteur colonne formé des entiers de 0 à 8 ?

A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de un 1 suivi de huit 0. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ?)* ?

◁ 50 ▷ La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant* $A.P = P.B$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P vérifiant* $A.P = P.B$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant* $A.P = B.P$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

◁ 51 ▷ Un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est dit jovial s'il existe une liste d'entiers naturels entiers

$2 \leqslant k_0 < k_1 < \ldots < k_{n-1} = p$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{k_i} = 1$. Par exemple : 12 est jovial d'ordre 4 car $1 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}$.

Écrivez un script testeur de jovialité qui prend en entrée une suite d'entiers `L` et vérifie si les entiers plus grands que 2 vont en croissant et ont pour somme de leurs inverses 1. La procédure devra retourner `False, 0` si il y a une erreur, et `True, p` où p est le dernier terme de la liste *(le nombre jovial)* si tout va bien.

Comme on est en maths, il ne faudra pas se baser sur un calcul approché qui de toutes façons ne pourra pas être probant comme ci contre. Je rappelle que pour Python, 1/2+1/3+1/6 vaut 0.99999999999. Quel farceur ce serpent !

Par exemple, `TestJovial([2, 4, 6, 12])` doit donner « `True, 12` », donc 12 est jovial.

```
S=0
for i in L :
....S += 1/i
if S==1 :
```

♣ 0 ♣ Montrez que 24 est jovial d'ordre 5. Montrez que 156 (c'est 12.13) est jovial d'ordre 5.

♣ 1 ♣ Montrez qu'aucun nombre premier n'est jovial.

♣ 2 ♣ On note J l'ensemble des nombres joviaux. Donnez $Min(J)$ *(justifiez)*.

♣ 3 ♣ On doit montrer que J est stable par multiplication ; un élève propose le raisonnement suivant : on part de $\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{p}=1$ (n termes) et $\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}+\ldots+\frac{1}{q}=1$ (m termes), on effectue le produit et on réordonne les nombres aux dénominateurs $\frac{1}{k_0.h_0}+\ldots+\frac{1}{p.q}=1$ ($n.m$ termes), le dernier entier de la liste est jovial. Où est l'erreur ?

♣ 4 ♣ Montrez que si p est jovial alors $2.p$ et $p.(p+1)$ le sont aussi.

Et un test avec Python ?

◃52▹ ♡ On rappelle la définition du déterminant d'une matrice A de terme général a_i^k : $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).(a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)})$.
A-t-on $\det(-A)=\det(A)$?
Montrez que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.
Quel est le coefficient de chacun des termes suivants dans le déterminant d'une matrice de taille 6 :

$a_1^2.a_2^3.a_3^4.a_4^5.a_5^6.a_6^1$	$a_1^6.a_2^5.a_3^4.a_4^3.a_5^2.a_6^1$	$a_1^3.a_2^4.a_3^2.a_4^1.a_5^6.a_6^5$	$a_1^3.a_3^4.a_5^2.a_6^1.a_2^6.a_4^5$	$a_1^3.a_2^2.a_3^4.a_4^6.a_5^5.a_6^1$

En taille n, quel est le coefficient de $a_1^n.a_2^{n-1}\ldots a_{n-1}^2.a_n^1$.

Calculez $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ en utilisant la définition avec ses 24 termes *(dont plusieurs seront nuls)*.

◃53▹ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$. Vous avez ensuite le droit d'augmenter ou diminuer un des coefficients d'une unité. Est il possible que le déterminant ne change pas ?
Quel coefficient changez vous pour que le déterminant bouge le plus possible ?

◃54▹ On travaille avec les entiers de 0 à 16 pour l'addition et la multiplication modulo 17.

Complétez

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
inverse de a	*	*	*	13	*		5			*		*	*	*	*	*

Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 4 & *\\ 1 & * & 3\\ * & 1 & *\end{pmatrix}$ pour que ce soit l'inverse de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2\\ 15 & 5 & 16\\ 16 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2\\ 15 & 5 & 16\\ 16 & 2 & 0\end{pmatrix}$ en utilisant la formule $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)}$.

Résolvez l'équation $\left\{\begin{array}{cccccc|} 7.a & +2.b & +2.c & = & 2\\ 15.a & +5.b & +16.c & = & 1\\ 16.a & +2.b & & = & 4\end{array}\right.$.

◃55▹ ♡ Montrez : $\det(M^2+I_2)\geqslant 0$ pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$.
Conseil : $\det(M+i.I_2)$ *et* $\det(M-i.I_2)$.

◃56▹ Qui c'est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2.n,\ 3.n]$?

◃57▹ Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 5 & 2\\ 2 & b & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & a\end{pmatrix}$ (notée A) vaut 7 quel que soit a. Trouvez b.

Et donnez les coefficients de A^{-1} qui ne dépendant pas de a.

◃58▹ On pose $U=\begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix}$. Montrez que $\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid \exists\lambda\in\mathbb{R},\ M.U=\lambda.U\}$ est un espace vectoriel. Donnez en une base et la dimension.

◃59▹ Dérivez $x \longmapsto \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ x & 25 & 13 \\ 18 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

◃60▹ Montrez que $\begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ ne pourront jamais être nuls.

◃61▹ Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n et crée la matrice de format n sur n(liste de listes) correspondant aux exemples suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Et demandez au matheux en vous de calculer le déterminant en taille n.

◃62▹ La comatrice d'une matrice antisymétrique inversible est antisymétrique. La preuve :
${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$ donc
$Com(A) =^t (\det(A).A^{-1}) = \det(A).{}^t(A^{-1}) = \det(A).({}^tA)^{-1} = \det(A).(-A)^{-1} = -\det(A).A^{-1} = -Com(A)$
Et pourtant, il suffit d'une matrice de taille 3 pour avoir un contre-exemple. Alors ?

◃63▹ ♡ Le colleur demande de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(2.a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$. Après un calcul un peu long, l'élève P.Céhessi trouve 0.
L'élève M.Péhaiçi bougonne "coplanaires dans $\mathbb{R}^4$". Expliquez.

◃64▹ Une forme bilinéaire antisymétrique sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifie $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 4$ et $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{k}) = 10$.
Pouvez vous calculer $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$?
Et si je vous donne $\phi(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 8$?

◃65▹ Montrez que $\sum_{k=1}^{n} k.\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{n^2.\ln(n)}{2}$ quand n tend vers l'infini.

◃66▹ De même qu'on peut développer un déterminant par rapport à une colonne faite de n termes avec chacun son cofacteur, il existe une formule où l'on développe par rapport à deux colonnes, somme de termes du type "déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$". Combien de termes de ce type ?
Quel est le signe du terme $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ dans le déterminant de taille 5 ?

◃67▹ Calculez $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. (non, pas de rapport)

◃68▹ Le corps est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5, noté $\mathbb{F}_5$.
Montrez qu'il y 5 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$. .
5 formes trilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
625 formes bilinéaires sur $(\mathbb{F}_5)^2$
125 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
125 formes bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$

◃69▹ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{a}$.

◃70▹ $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}$ n'a pas de sens si on ne met pas de parenthèses *(ainsi, $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k})$ va en avoir)*. Combien de « valeurs » peut prendre ce vecteur suivant comment vous mettez les parenthèses ? *(base canonique)*

◃71▹ ♡ a, b et c sont trois réels, montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) \end{vmatrix} = \cos(b) - \cos(a)$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b)-\cos(a)).(\cos(c)-\cos(b)).(\cos(c)-\cos(a)).$$

Avez vous une formule pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$? Et pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix}$

◁72▷ Est il possible qu'une phrase soit vraie dans ce que j'ai écrit dans ce cadre ?

Dans ce cadre, exactement une phrase est vraie.
Dans ce cadre, exactement une phrase est fausse.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont vraies.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont fausses.

◁73▷ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

◁74▷ ♡ Montrez que l'équation d'un cercle du plan est de la forme $x^2+y^2-2.\alpha.x-2.\beta.y+\gamma=0$.
Montrez néanmoins que $x^2+y^2-2.x-4.y+7=0$ n'est pas une équation de cercle.
Montrez que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation du cercle passant par $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$ et $C(c,\gamma)$ *(surtout ne développez pas, on est en maths ! pensez à prouver que c'est la forme d'une équation de cercle, et trouvez trois points évidents)*. Donnez l'équation et le centre du cercle passant par $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$.
Donnez l'équation et le centre de la sphère de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1,1,0)$, $B(2,5,0)$ et $C(4,12,0)$ et $D(0,0,1)$.

◁75▷ ♡ Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a',\ a'')$, $(b',\ b'')$ et $(c',\ c'')$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$.

Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

puis $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

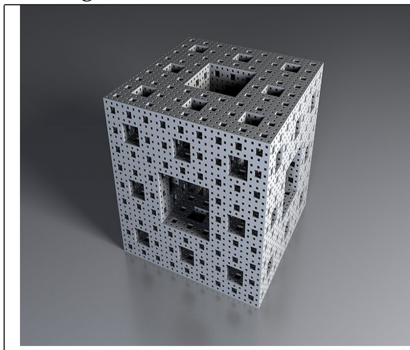
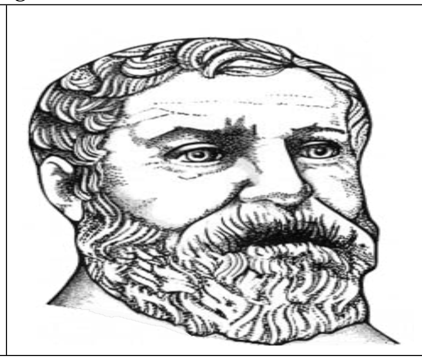
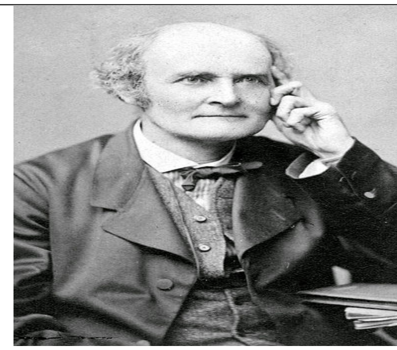
et $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$

et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(déterminant de Cayley-Menger [3])*.

---

3. *Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en 1937, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie*

Retrouvez la formule dite de Heron[a] : $S=\sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.

a. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques

♣5♣ Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca*[4]*)*. Prouvez la.

◁76▷ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et crée la matrice de taille n sur n "du laboureur", dont voici les premières $L_0 = ()$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$,

$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \curvearrowright \\ \curvearrowleft & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \hookleftarrow \\ \hookrightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$

Calculez son déterminant en fonction de n.

◁77▷ Soit A une matrice de terme général a_i^k. On note $\overbrace{A}$ la matrice de terme général $\alpha_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$. Expliquez "géométriquement" comment elle se déduit de A.
Montrez qu'elle a le même déterminant que A.
Vous pourrez revenir à la formule "brute", vous pourrez aussi utiliser la permutation $i \longmapsto n+1-i$.
Exprimez $\overbrace{A}$ à l'aide de A et de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

◁78▷ f est une application affine paire vérifiant $f(2)=7$. calculez $\int_0^5 f(t).dt$.

◁79▷ Lequel de ces deux programmes va bien construire une matrice (justifiez) :

```
def Fred(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
........M[k][k] = a
........M[k][k+1] = b
....return M
```

```
def Daphne(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
........M[k][k] = a
........M[k][k-1] = b
....return M
```

Calculez le déterminant de celle qui existe.

4. *XV^{eme} siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans $\mathbb{R}^3$ et reste d'ailleurs connu comme peintre*