Un théorème du programme énonce le résultat suivant ; on va utiliser trois méthodes pour le prouver.

soit (u_n) une suite réelle strictement positive, telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel α d $[0,\ 1[$, il faut alors montrer que (u_n) converge vers 0.

♡ 0 ♡ Montrez qu'à partir d'un certain rang, la suite (u_n) est strictement décroissante. Déduisez qu'elle converge vers une limite λ. En écrivant alors $u_{n+1} = u_n.\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ montrez que λ est nul. 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez qu'à partir d'un certain rang R on a $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1+\alpha}{2}.u_n$ et $u_n \leqslant \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^{n-R}.u_R$. Trouvez pour ε donné un rang N à partir duquel on a $u_n \leqslant \varepsilon$. Concluez. 3 pt.

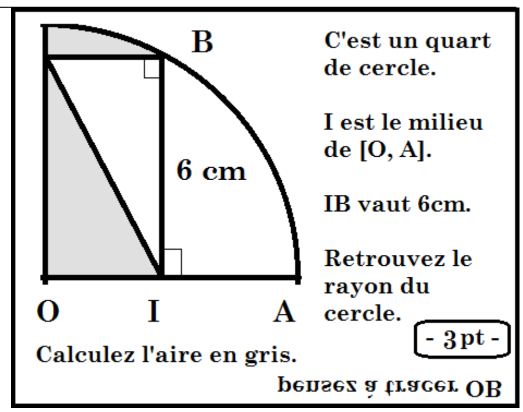
♡ 2 ♡ Appliquez le théorème de Cesàro à la suite $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et concluez. 2 pt.

♡ 3 ♡ a est un réel fixé plus grand que 1, p est un entier naturel fixé. Appliquez ce théorème pour prouver $\dfrac{n^p}{a^n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$, $\dfrac{a^n}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $\dfrac{n^n}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ en calculant justement à chaque fois le quotient de deux termes consécutifs. 3 pt.

☺$_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n+4}$ et $u_0 = 4$. Étudiez la suite. Mais attention... On travaille dans le corps des entiers de 0 à 6 pour toutes les lois modulo 7. Montrez que cette suite est périodique. Calculez u_{2025}. 3 pt.

☺$_1$ Calculez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} 3^{-k}}{\sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k}}$. 3 pt.

☺$_2$ $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto x.\ln(x)$. Combien des trois sont uniformément continues de $]0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$? 3 pt.



♠ 0 ♠ On note $A_r = \{(k,\ p) \in \mathbb{N}^2 \mid k^2 + p^2 \leqslant r^2\}$ (points à coordonnées entières dans le quart de disque de centre $(0, 0$ et de rayon r). Montrez que tout tout entier naturel n et tout entier k entre 0 et n il y a $1 + [\sqrt{n^2-k^2}]$ éléments de A_n d'abscisse k. 1 pt.

♠ 1 ♠ Déduisez (par encadrement et sommes de qui vous savez) que $\dfrac{Card(A_n)}{n^2}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}.dt$ quand n tend vers l'infini. 3 pt.

♠ 2 ♠ Calculez cette intégrale. 2 pt.

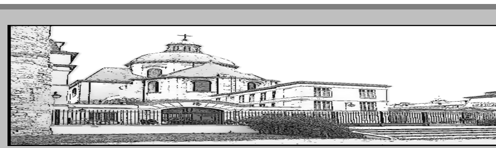
On se donne t dans $[0,\ 1[$. On définit pour tout N : $A_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} t^p$ et $B_N = \displaystyle\sum_{q=0}^{N} t^{(q^2)}$.

♠ 3 ♠ Montrez que (A_N) converge quand N tend vers $+\infty$, et calculez sa limite. 1 pt.

♠ 4 ♠ Montrez que (B_N) converge quand N tend vers $+\infty$. 1 pt.

♠ 5 ♠ Montrez que le coefficient de t^N dans $A_N.(B_N)^2$ est $Card(A_{\sqrt{N}})$. 4 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 9 avril
M.P.S.I.2



2024 2025
IS24
CORRECTION

IS24 Application du théorème de comparaison logarithmique.

On traduit la convergence de la suite quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$vers α strictement plus petit que 1 :$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n \geqslant \varepsilon,\ \alpha+\varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \alpha+\varepsilon$
A partir d'un certain rang, les termes de la suite quotient passent donc sous 1 pour se diriger vers α.
En l'occurrence à partir du rang $N_{(1-\alpha)}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \alpha+1-\alpha$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant N_{1-\alpha}}$ est alors décroissante.

En tant que suite décroissante positive, elle converge vers un réel λ.
Tenir compte ds termes du début n'y change rien : u_n (et aussi u_{n+1}) converge vers λ.

Mais alors en écrivant $u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n$ on a, en passant à la limite : $\lambda = \alpha.\lambda$ avec $\alpha < 1$. La seule solution est donc $\lambda = 0$.

Pour majorer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par $\dfrac{1+\alpha}{2}$, il suffit de prendre le rang N_ε avec $\alpha+\varepsilon = \dfrac{1+\alpha}{2}$. On vérifie que $\varepsilon = \dfrac{1-\alpha}{2}$ est bien strictement positif.
Le rang $R = N_{(1-\alpha)/2}$ convient.
En multipliant $n-R$ inégalité entre réels positifs

$$\frac{u_{R+1}}{u_N} \leqslant \frac{1+\alpha}{2},\ \frac{u_{R+2}}{u_{R+1}} \leqslant \frac{1+\alpha}{2},\ \frac{u_{R+3}}{u_{R+2}} \leqslant \frac{1+\alpha}{2}, \ldots \frac{u_R}{u_{n-1}} \leqslant \frac{1+\alpha}{2}$$

on obtient $u_n = u_R.\Big(\dfrac{1+\alpha}{2}\Big)^{n-R}$, démontrable par récurrence sur n plus grand que R (le mot clef attendu est « positifs » pour les produits d'inégalités).

Pour que ceci soit plus petit que ε, on va exiger $\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)^{n-R} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{u_R}$ ce qui équivaut à $(n-R).\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\varepsilon}{u_R}\right)$ puis

$$n \geqslant R + \frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{u_R}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)}$$

On va prendre une partie entière arrondie à à l'entier supérieur (et le maximum avec $R = N_{(1-\alpha)/2}$.

On notera la cohérence « n plus grand que » car $\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)$ est négatif.

On applique le théorème de Cesàro à la suite $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$,qui converge vers$\ln(\alpha)$ par continuité du logarithme :

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \longrightarrow_{n\to+\infty} \ln(\alpha)$$

On télescope et $\dfrac{\ln(u_n)}{n} - \dfrac{\ln(u_0)}{n}$ converge vers 0. On ajoute le terme dont la limite est assurément nulle $\dfrac{\ln(u_0))}{n}$.
Il s'ensuit que $\dfrac{\ln(u_n)}{n}$ converge vers $\ln(\alpha)$. Mais alors $\dfrac{\ln(u_n)}{n}.n$ diverge vers l'infini (négatif car le multiplicateur non nul $\ln(\alpha)$ est même strictement négatif.
On remonte : (u_n) converge vers 0 par valeur supérieur puisque son logarithme tened vers $-\infty$.

Ce raisonement n'est utilisable que pour α strictement positif. Ou alors il faut utiliser la variante du théorème de Cesàro « limite infinie ».

IS24 — Application du théorème de comparaison logarithmique.

On pose donc $u_n \frac{n^p}{a^n}$ et on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}.\frac{a^n}{n^p} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{a}$

suite (u_n)	$\frac{n^p}{a^n}$	$\frac{n^p}{a^n}$	$\frac{n!}{n^n}$
quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$	$\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}.\frac{a^n}{n^p} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{a}$	$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$	$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$
limite du quotient	$\frac{1}{a} < 1$	$0 < 1$	$\frac{1}{e} < 1$
conclusion	$\frac{n^p}{a^n} \to 0$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$	$\frac{n!}{n^n} \to 0$

On tient tout pour classifier les suites de limite infinie, de la plus lente de celles utilisées en Prépas à la plus rapide

$$\ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll n^5 \ll (1,01)^n \ll 2^n 5^n \ll n! \ll n^n$$

IS24 — Suite récurrente homographique.

On nos donne $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+4}$ et $u_0 = 4$. Va-t-on diagonaliser une matrice ? On est juste avec des entiers modulo 7. Ils ne sont pas si nombreux.
On peut envisager de calculer quelques termes de la suite. Et on sait une chose : si on retombe sur un 4, la suite va reprendre la même liste d valeurs et être périodique.
Et comme il n'y a pas tant de valeurs possibles, on va très vite retomber sur 4.

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	
4	$\frac{4+2}{4+4} = \frac{6}{1} = 6$	$\frac{6+2}{6+4} = \frac{1}{3} = 5$	$\frac{5+2}{5+4} = \frac{0}{2} = 0$	$\frac{0+2}{0+4} = \frac{2}{4} = 4$	stop !

La suite est périodique et sa période vaut 4, avec le motif répétitif $[4,\ 6,\ 5,\ 0]$.

Si on nous le demande $u_{2025} = u_1 = 6$.

IS24 — Séries géométriques.

Dans la somme truffée d'infinis, il faut donner un sens au numérateur $\sum_{k=n}^{+\infty} 3^{-k}$. C'est la limite de $\sum_{k=n}^{N} 3^{-k}$ quand N tend vers l'infini.
Mais cett série se calcule explicitement

$$\sum_{k=n}^{K} 3^{-k} = \frac{3^{-n} - 3^{-K-1}}{1-3^{-1}} = \frac{3^{1-n} - 3^{-K}}{2} \longrightarrow_{K\to+\infty} \frac{3^{1-n}}{2}$$

De même $\sum_{k=n}^{K} 2^{-k} = \frac{2^{-n} - 2^{-K-1}}{1-2^{-1}} = 2^{1-n} - 2^{-K} \longrightarrow_{K\to+\infty} 2^{1-n}$.

On peut estimer chaque quotient et sommer

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}3^{-k}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}2^{-k}}=\sum_{n=0}^{N}\frac{3^{1-n}}{2.2^{1-n}}=\sum_{n=0}^{N}\frac{3}{4}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{3}{4}.\frac{1-(2/3)^{N+1}}{1-\frac{2}{3}}\longrightarrow_{N\to+\infty}\frac{9}{4}$$

La « somme » (au sens de limite de sommes) vaut $\frac{9}{4}$.

IS24 Uniforme continuité.

Bon, $]0,\ 1]$ n'est pas un segment. On ne peut pas utiliser le théorème de Heine.

$x\longmapsto x$ est lipschitzienne de rapport 1, donc uniformément continue.

Si lnétait uniformément continue, elle serait bornée.
En effet, pour $\varepsilon=1$, on aurait un réel η_1 vérifiant $\forall x,y\ |x-y|\leqslant\eta_1\Rightarrow|ln(x)-\ln(y)|\leqslant 1$.
On pourrait recouvrir $]0,\ 1]$ par un nombre fini de tels intervalles (il en faudrait $N=\left[\frac{1}{\eta_1}\right]+1$).
En collant côte à côte les rectangles de largeur η_1 et de hauteur 1, on borne l'application entre $\ln(1)-N$ et $\ln(1)+N$.

Variante : la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
Son image par l'application logarithme serait alors aussi une suite de Cauchy.
Elle devrait donc converger, ce qui n'est pas le cas.

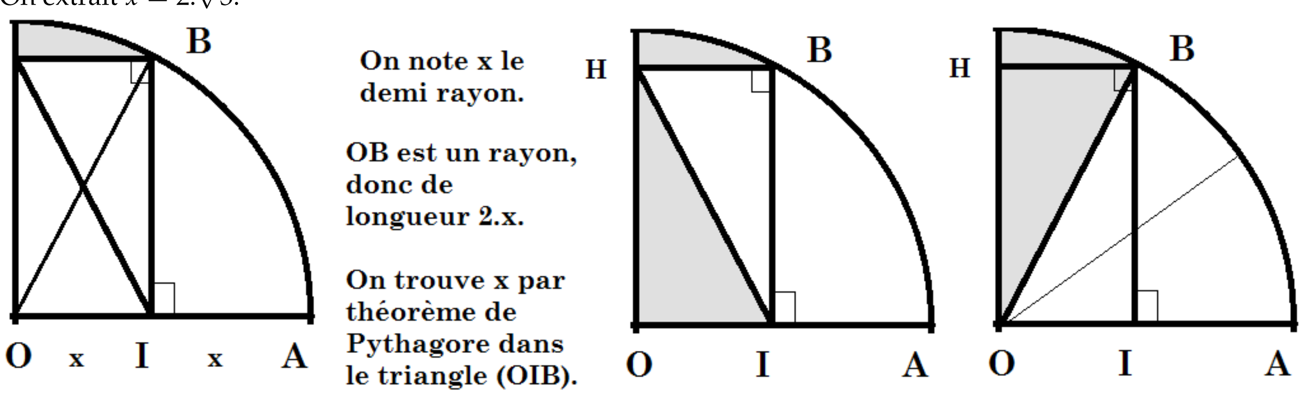
$x\longmapsto x.\ln(x)$ est continue, mais $]0,\ 1]$ n'est pas un segment.

Mais on peut prolonger l'application par continuité en 0 (par la valeur 0).
On peut appliquer le théorème de Heine à l'application prolongée : elle est uniformément continue sur $[0,\ 1]$.

Mais alors en ne regardant que les x et y dans $[0,\ 1]$, elle le reste. Et c'est fini.

IS24 Géométrie.

On note donc R le rayon et même x le demi rayon.
OB est égal à R.
Dans le triangle OIB, rectangle en I, le théorème de Pythagore donne $x^2+6^2=(2.x)^2$.
On extrait $x=2.\sqrt{3}$.



On retourne ensuite le triangle (OIH) en triangle (OHB).
La somme des deux aires cherchées correspond à une portion de disque de rayon r.
Il en faut douze comme elles pour remplir le disque (angle au cenre $\pi/3$).
L'aire cherchée est donc $\pi.\frac{(4.\sqrt{3})^2}{12}$ d'où un total de $4.\pi\ (cm^2)$

IS24 — Points dans un quart de disque.

n et k donnés (entiers avec $k \leqslant n$), on doit compter les couples $(k,\ p)$ avec $k^2 + p^2 \leqslant n$.
Il y en a autant que d'entiers p vérifiant $0 \leqslant p \leqslant \sqrt{n^2 - k^2}$.
Or, dans le segment $[0,\ A]$, il y a les entiers0, 1, 2 jusqu'à $[A]$. Le décompte est bon.

On encadre ensuite $\sqrt{n^2-k^2} \leqslant [\sqrt{n^2-k^2}+1] \leqslant \sqrt{n^2-k^2}+1$.
On somme pour k de 0 à n

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2-k^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} [\sqrt{n^2-k^2}+1] \leqslant \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{n^2-k^2}+1)$$

Dans la somme du milieu chaque point de A_n est compté une fois et une seule (les abscisses ne peuvent aller qu de 0 à n)
On divise comme demandé par n^2 (positif) et on tente d e reconnaître une somme de Riemann (et à droite on a un compteur)

$$\frac{1}{n^2}.\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2-k^2} \leqslant \frac{Card(A_n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2-k^2} + \frac{n+1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}.\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

car le dernier terme est nul (sinon, avec $\sum_{k=0}^{n}$ on avait un terme de trop par rapport à un somme de Riemann).

Par continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,\ 1]$, les deux termes de l'encadrement tendent vers $\int_0^1 \sqrt{2-t^2}.dt$, et par théorème d'encadrement justement, le terme du milieu tend aussi vers cette intégrale.

C'est une faute de dire que c'est un passage à la limite.
Le passage à la limite a besoin que les trois limites existent.
Or, vous ne savez pas si la limite du milieu existe.
A moins d'être plus fort que l'énoncé en maths. Ou aussi con qu'un pauvre élève de Terminale qui croit que tout converge.

Que vaut cette intégrale ? Par interprétation géométrique, c'est l'aire d'un quart dé disque dé rayon 1 (domaine défini par l'équation $y = \sqrt{1-x^2}$).
On trouve donc $\frac{\pi}{4}$.

Sinon, on changé de variable : $t = \sin(\theta)$ avec θ dé 0 à $\pi/2$:

$$\int_0^1 \sqrt{2-t^2}.dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}.\cos(\theta).d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2.\theta)}{2}.d\theta$$

Évidemment on trouve à nouveau $\pi/4$.

IS24 — Séries en puissances de t.

La somme A_N se calculé directement. Inutile dé perdre du temps avec « croissanté majorée » ou autre.
Converger c'est admettre une limite, donc si on en trouve une tout dé suite, autant en profiter !

$$A_N = \sum_{p=0}^{N} t^p = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{1}{1-t}$$

Pour $B_N = \sum_{q=0}^{N} t^{(q^2)}$ en revanche, on n'a pas de formulé explicite (d'ailleurs on né nous demande pas la limité).

Mais $(B_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante ($B_{N+1} - B_N = t^{(N+1)^2} \geqslant 0$) et majorée. En effet, comme t est plus petit que 1, plus l'exposant est grand, plus lé nombré est petit : $t^4 \leqslant t^2$ puis $t^9 \leqslant t^3$ et $t^{(q^2)} \leqslant t^q$. On somme : $B_N \leqslant A_N$ (si vous dites « ah non, dans une c'est q et dans l'autre c'est p, je ne sais pas ce que je peux faire pour vous... je reste muet comme une variable).

Mais il faut encore majorer (majorant indépendant de N)

$$B_N = \sum_{q=0}^{N} t^{(q^2)} \leqslant \sum_{q=0}^{N} t^q = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-t}$$

La série (B_N) converge. Mais on ignoré sa limite.

On développe $\sum_{i=0}^{N^2} t^i . \sum_{j=0}^{N} t^{j^2} . \sum_{k=0}^{n} t^{k^2}$ et on a une somme des $t^{i+j^2+k^2}$. Avec coefficient 1.
Mais on peut les regrouper.

Combien de fois a-t-on le même exposant N ?
Autant de fois que N peut s'écrire $i+j^2+k^2$.

> Regardez $(1+t+t^2+t^3+t^4+\ldots+t^{N^1}).(1+t+t^4+t^9+\ldots+t^{N^2}).(1+t+t^4+t^9+\ldots+t^{N^2})$ et cherchez les termes nen t^7 par exemple.

Comptons les triplets (i,j,k) vérifiant $i+j^2+k^2=n$.
Ceci revient à compter les triplets vérifiant $j^2+k^2=n-i$ c'est à dire $j^2+k^2 \leqslant n$.
C'est exactement la définition de $Car(A_n)$.

L'exercice (oral ENS) se poursuivait avec la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^{(n^2)} = 0$ pour laquelle on montrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{(n^2)} \sim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{1-t}}$$

en utilisant la limite de $Card(A_n)$ et quelques théorèmes sur les séries entières.