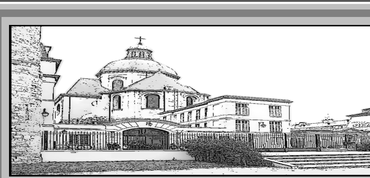
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 4 avril
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



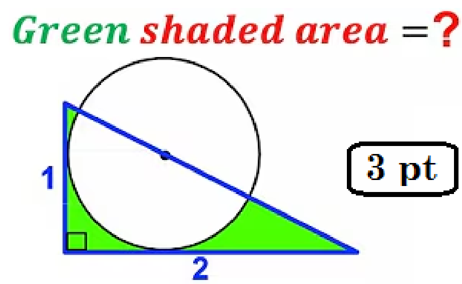
2024 2025

# IS23

♡ 0 ♡ $L$ est l'ensemble des applications lipschitziennes de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $L$ est stable par addition. Montrez que tous les éléments de $L$ sont bornés. Déduisez que $L$ est stable par multiplication. 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que si $f$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ est lipschitzienne.

♡ 2 ♡ Vrai ou faux : $\forall \theta,\ (\tan(\theta) \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall n \in Z,\ \tan(n.\theta) \in \mathbb{Q})$.




♣ Montrez que la trace est lipschitzienne de rapport $\sqrt{2}$ de $M_2(\mathbb{R})$ (pour la norme définie par $||M|| = \sqrt{Tr(M^T.M)}$) dans $\mathbb{R}$ (pour la norme « valeur absolue »). 3 pt.

*C'est quoi cette question ? Placez vous au bon étage. La trace est une application : $a \longmapsto Tr(a)$. Et une application lipschitzienne de rapport $K$ c'est $\forall (a, b),\ |f(b) - f(a)| \leqslant K.|b - a|$. Sauf que $|b - a|$ n'est pas une valeur absolue, mais une norme.*

♡ 3 ♡ Soit $f$ une application de classe $C^2$ à dérivée seconde positive (application convexe). On veut montrer le résultat classique

$$\forall (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,\ 1],\ f((1-\lambda).\alpha + \lambda.\beta) \leqslant (1-\lambda).f(\alpha) + \lambda.f(\beta)$$

petite inégalité de convexité, image de la moyenne $\leqslant$ moyenne des images
Je vous donne une piste : posez $a = (1-\lambda).\alpha + \lambda.\beta$, exprimez $f(\alpha) = f\big(a + \lambda.(\alpha - \beta)\big)$ avec reste intégrale, $f(\beta) = f(a + \ldots)$ et combiner. 4 pt.

---

◇ 0 ◇ On se donne $u_0 \in ]0,\ \pi]$ et on pose $\forall n,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + \sin^2(u_n)}$.

- 1 - Montrez que pour tout $n$ $u_n$ existe et est entre 0 et $\pi$. 1 pt.
- 2 - Montrez que la suite $(u_n)$ est décroissante. 1 pt.
- 3 - Déduisez que $(u_n)$ converge et calculez sa limite. 1 pt.

*Maintenant qu'on sait qu'elle tend vers 0, on va voir à quelle vitesse elle tend vers 0.*

- 4 - On pose $v_n = \left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^2$. Montrez que $v_n$ converge vers quand $n$ tend vers l'infini. 1 pt.
- 5 - Quelle est alors la limite de $\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$ ? 1 pt.
- 6 - Donnez un équivalent de $u_n$de la forme $a.n^\alpha$. 1 pt.
- 7 - Écrivez un script **Python** qui prend en entrée un entier n et un réel u0 et retourne la liste des n+1 réels de u_0 à u_n. 2 pt.

---

◇ 1 ◇ Montrez pour tout couple $(a,\ b)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ : $a.b \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$. 1 pt.

◇ 2 ◇ Déduisez pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ : $\alpha.\beta \leqslant \dfrac{\alpha^4 + 3.\beta^{4/3}}{4}$ (indication : $(\alpha.\beta^{1/3}).\beta^{2/3} = ?$). 1 pt.

◇ 3 ◇ Soient $u$ et $v$ deux applications continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^+$. On pose $A = \left(\int_0^1 (u(t))^4.dt\right)^{1/4}$ et $B = \left(\int_0^1 (v(t))^{4/3}.dt\right)^{3/4}$. En appliquant le résultat précédent à $\alpha = \dfrac{u(x)}{A}$ et $\beta = \dfrac{v(x)}{B}$ pour chaque $x$ de $[0,\ 1]$, montrez l'inégalité de Hölder 3 pt.

$$\int_0^1 u(x).v(x).dx \leqslant \left(\int_0^1 (u(t))^4.dt\right)^{1/4}.\left(\int_0^1 (v(t))^{4/3}.dt\right)^{3/4}$$

◇ 4 ◇ Déduisez pour $f$ et $g$ continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ 3 pt.

$$\int_0^1 (f(t)+g(t))^4.dt \leqslant \left(\left(\int_0^1 (f(t))^4.dt\right)^{1/4} + \left(\int_0^1 (g(t))^4.dt\right)^{1/4}\right)^4$$

◇ 5 ◇ Montrez que $f \longmapsto \left(\int_0^1 (f(t))^4.dt\right)^{1/4}$ est une norme sur $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ (norme 4). 3 pt.

◇ 6 ◇ Montrez $\forall f \in C([0,\ 1],\ R),\ ||f||_2 \leqslant ||f_4|| \leqslant ||f||_\infty$. 2 pt.

◇ 7 ◇ Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $f_n = x \longmapsto \begin{array}{ccccc} n^{3/2}.x & si & 0 & \leqslant & 2.n.x & < & 1 \\ (\sqrt{n} - n^{3/2}.x) & si & 1 & \leqslant & 2.n.x & < & 2 \\ 0 & si & 2 & \leqslant & 2.n.x & \leqslant & 2.n \end{array}$. Représentez graphiquement $f_3$ et $f_4$ sur $[0,\ 1]$. 1 pt.

◇ 8 ◇ Montrez que $f_n$ est continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. 1 pt.

◇ 9 ◇ Calculez $||f_n||_\infty$ pour tout $n$. Déterminez $\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty$.

◇ 10 ◇ Calculez $||f_n||_1$ pour tout $n$. Déterminez $\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_1$.

◇ 11 ◇ Calculez $||f_n||_2$ pour tout $n$. Déterminez $\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_2$.

◇ 12 ◇ Calculez $||f_n||_4$ pour tout $n$. Déterminez $\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_4$. 5 pt.

*Soyez ingénieur : résumez vos résultats par un tableau.*

◇ 13 ◇ Pour $x$ donné dans $[0,\ 1]$, montrez que $f_n(x)$ converge quand $n$ tend vers l'infini (et donnez la limite). 2 pt.

---

## Hölder

---

On note $E$ l'espace des applications continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $s$ dans $[0,\ 1[$, on dit que $f$ est Hölderienne d'ordre $\alpha$ si l'ensemble

$$\left\{ \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|^s} \mid (x,\ a) \in [0,\ 1]^2 \ et\ x \neq a \right\}$$

est borné.

♠ 0 ♠ Faites entrer $x \longmapsto (2.x-1).\ln(|2.x-1|)$ dans $E$ en la prolongeant par continuité là où il faut. 1 pt.

♠ 1 ♠ Montrez que cette application n'est pas dérrivable. 2 pt.

♠ 2 ♠ Montrez qu'elle est Hölderienne pour tout $s$ de $[0,\ 1[$. 3 pt.

♠ 3 ♠ Pour quels $s$ l'application $x \longmapsto \sqrt{|1-4.x^2|}$ est elle hölderienne ? Cette application est elle dérivable ? 3 pt.

♠ 4 ♠ Montrez que si une application $f$ est hölderienne pour un exposant s elle l'est pour tout exposant $s'$ plus petit. 1 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 4 avril
M.P.S.I.2

2024 2025
IS23
CORRECTION

## IS23 Applications lipschhitziennes.

On prend $f$ et $g$ de rapports de Lipschitz respectifs $K$ et $K'$. Pour tout couple $(a,\ b)$ de $[-1,\ 1]^2$ on a

$$|(f+g)(a)-(f+g)(b)| \leqslant |f(a)-f(b)|+|f(a)-f(b)| \leqslant K.|b-a|+K'.|b-a|$$

L'application somme est lipschitzienne de rapport $K+K'$.

---

Toujours avec les mêmes notations, on peut écrire

$$|f(a)| = |f(a)-f(0)+f(0)| \leqslant |f(a)-f(0)|+|f(a)| \leqslant K.|a-0|+|f(0)| \leqslant K+|f(0)|$$

Le réel $K+|f(a)|$ est un majorant de $f$.

---

On termine avec le grand classique $(f.g)(a)-(g.g)(b) = f(a).\big(g(a)-g(b)\big)+g(b).\big(f(a)-g(b)\big)$ et on arrive à une majoration par

$$K'.|b-a|.\big(K+|f(0)|\big)+K.|b-a|.\big(K'+|g(0)|\big)$$

On tient un rapport de Lipschitz : $K'.\big(K+|f(0)|\big)+K.\big(K'+|g(0)|\big)$.

---

On suppose $f$ continue (donc intégrable sur tout segment) et bornée (par $K$).
On se donne $a$ et $b$ et sans perte de généralité on suppose $a \leqslant b$.
On calcule (relation de Chasles, inégalité triangulaire, majoration)

$$\Big|\int_0^b f(t).dt-\int_0^b f(t).dt\Big| = \Big|\int_a^b f(t).dt\Big| \leqslant \int_a^b |f(t)|.dt \leqslant \int_a^b K.dt = K.(b-a)$$

## IS23 Trigonométrie.

On se donne un réel $\theta$ et on suppose que $\tan(\theta)$ est rationnel.
On va montrer par récurrence sur $n$ que pour tout $n$, $\tan(n.\theta)$ est encore un rationne (dont on pourrait donner la forme ?).

L'initialisation peut se faire aux rangs 0 et 1.

Pour un $n$ donné, on suppose que $\tan(n.\theta)$ est rationnel.
En tant que somme, produit, quotient de rationnels, le nombre $\dfrac{\tan(\theta)+\tan(n.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(n.\theta)}$.

Par principe de récurrence, chaque $\tan(n.\theta)$ est rationnel, et par imparité, chaque $\tan(-n.\theta)$ l'est aussi.

La réponse est donc « oui ».

Sauf que...

Si par exemple $\tan(\theta)$ vaut 1 (rationnel), alors $\tan(2.\theta)$ n'existe pas et ne peut pas être qualifiée de rationnelle !

## IS23 La trace est lipschitzienne.

On nous donne le rapport, on va passer de la définition « de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » à la propriété attendue « de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ » :

$$\forall (a,\ b)\in\mathbb{R}^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant \sqrt{2}.|b-a|$$

$$\forall (a,\ b)\in (M_2(\mathbb{R}))^2,\ |f(B)-f(A)| \leqslant \sqrt{2}.|B-A|$$

$$\forall(a,\ b) \in (M_2(\mathbb{R}))^2,\ |f(B) - f(A)| \leqslant \sqrt{2}.||B - A||_2$$
$$\forall(a,\ b) \in (M_2(\mathbb{R}))^2,\ |Tr(B) - Tr(A)| \leqslant \sqrt{2}.||B - A||_2$$

On se donne deux matrices $A$ et $B$ qu'on écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Le premier membre se calcule

$$|Tr(B) - Tr(A) = |Tr(B - A)| = |\alpha - a + \delta - d|$$

Le second membre est classique aussi

$$\sqrt{2}.\sqrt{Tr(\begin{pmatrix} \alpha - a & \gamma - c \\ \beta - b & \delta - d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha - a & \beta - b \\ \gamma - c & \delta - d \end{pmatrix})} = \sqrt{2}.\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2 + (\delta - d)^2}$$

Notre objectif devient clair

$$|\alpha - a + \delta - d| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2 + (\delta - d)^2}$$

On voit que $c$ et $\gamma$ n'ont pas de rôle à jouer, de même que $\beta$ et $b$. On va insérer un terme moins indigeste

$$|\alpha - a + \delta - d| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\delta - d)^2} \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2 + (\delta - d)^2}$$

La seconde majoration est directe (positivité des carrés ajoutés). Reste à prouver

$$|\alpha - a + \delta - d| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\delta - d)^2}$$

qui s'écrit $|x + y| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{x^2 + y^2}$ avec $x = \alpha - a$ et $y = \beta - b$.
Pour prouver ceci, j'ai le choix : élever au carré et soustraire. Je le fais

$$2.(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = 2.x^2 + 2.y^2 - x^2 - y^2 - 2.x.y = (x - y)^2$$

L'autre méthode consiste à voir une inégalité de Cauchy-Schwarz entre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le produit des normes vaut $x + y$ et le produit des normes vaut $\sqrt{2}.\sqrt{x^2 + y^2}$.

Bref, une question facile une fois qu'on a compris de quoi on parlait, et qu'on ne s'est pas contenté d'aligner des formules à l'aide des mots entendus sans même se placer au bon étage.

## IS23 Inégalité de convexité.

On place donc notre origine entre $\alpha$ et $\beta$, au point $(1 - \lambda).\alpha + \lambda.\beta$.

On mesure :

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha = \Big((1 - \lambda).\alpha + \lambda.\beta\Big) + \lambda.(\alpha - \beta)$ | $(1 - \lambda).\alpha + \lambda.\beta$ | $\beta = \Big((1 - \lambda).\alpha + \lambda.\beta\Big) + (1 - \lambda).(\beta - \alpha)$ |

et on écrit deux formules de Taylor avec reste intégrale avec $h$ valant une fois $\lambda.(\alpha - \beta)$ et une fois $(1 - \lambda).(\beta - \alpha)$ au seul ordre disponible ici

$$\begin{array}{lllllllll} f(\alpha) & = & f(a + h) & = & f(a) & + & \lambda.(\alpha - \beta).f'(a) & + & \lambda^2.(\alpha - \beta)^2.\int_0^1 (1 - t).f''\big(a + t.\lambda.(\alpha - \beta)\big).dt \\ f(a) & & & & & & & & \\ f(\beta) & = & f(a + h') & = & f(a) & + & (1 - \lambda).(\beta - \alpha).f'(a) & + & (1 - \lambda)^2.(\beta - \alpha)^2.\int_0^1 (1 - t).f''\big(a + t.(1 - \lambda).(\beta - \alpha)\big).dt \end{array}$$

Courage, on va combiner. Avec quels coefficients ? $(1 - \lambda)$ pour la première et $\lambda$ pour la seconde.
Première colonne (avent le signe égale) : $(1 - \lambda).f(\alpha) + \lambda.f(\beta)$ comme par hasard.
Deuxième colonne (après le signe égale) : $(1 - \lambda).f(a) + \lambda.f(a)$ c'est à dire $f(a)$.
Troisième colonne : $(1 - \lambda).\lambda.(\alpha - \beta).f'(a) + \lambda.(1 - \lambda).(\beta - \alpha).f'(a)$ c'est à dire 0.Dernière colonne : une horreur avec des intégrales.

$$(1 - \lambda).f(\alpha + \lambda.f(\beta) = f(a) + \begin{array}{c} (1 - \lambda).\lambda^2.(\alpha - \beta)^2.\int_0^1 (1 - t).f''\big(a + t.\lambda.(\alpha - \beta)\big).dt \\ \lambda.(1 - \lambda)^2.(\alpha - \beta)^2.\int_0^1 (1 - t).f''\big(a + t.(1 - \lambda).(\beta - \alpha)\big).dt \end{array}$$

Mais peu importe le calcul de ces intégrales. L'application sous le signe somme est positive car $f''$ est positive (par hypothèse). Et les multiplicateurs $1-t$ tout comme les $(1-\lambda)$, $(1-\lambda)^2$, $\lambda$ et $\lambda^2$ ($\lambda$ est entre 0 et 1).

On notera qu'on n'a pas à suppose $\alpha \leqslant \beta$ ni $\beta \leqslant \alpha$ puisque le réel $(\beta-\alpha)$ intervient au carré dans nos produits.

On a donc en résumé $(1-\lambda).f(\alpha)+\lambda.f(\beta) = f\big((1-\lambda).\alpha+\lambda.\beta\big) + positif$ et en version inégalité

$$(1-\lambda).f(\alpha)+\lambda.f(\beta) \geqslant f\big((1-\lambda).\alpha+\lambda.\beta\big)$$

## IS23 Suite récurrente.

On montre par récurrence que pour tout $n$, $u_n$existe et est entre 0 et $\pi$.
C'est initialisé.

Supposons pour un $n$ quelconque donné que $u_n$ existe est entre 0 et $\pi$.
Le dénominateur $1+\sin^2(u_n)$ existe t est strictement positif. Le quotient existe.
De plus, on a $1+\sin^2(x) \geqslant 1$ et $0 \leqslant u_n \leqslant \pi$. On a alors $0 \leqslant \dfrac{u_n}{1+\sin^2(u_n)} \leqslant u_n \leqslant \pi$.

On note qu'on a prouvé au passage $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite est donc décroissante. Étant aussi minorée par 0 (positive !).
Elle converge par théorème de convergence des suites réelles monotones bornées.

---

Par passage à la limite et continuité dans $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+\sin^2(u_n)}$ (et unicité de la limite), sa limite $\alpha$ vérifie $\alpha = \dfrac{\alpha}{1+\sin^2(\alpha)}$.
On obtient $\alpha.\sin^2(\alpha)=0$ et donc $\alpha=0$ ou « $\alpha$ est un multiple de $\pi$ ». Comme la limite est entre 0 et $u_0$ (strictement inférieur à $\pi$), la seule limite possible est 0 .

---

Ayant défini $v_n$et vérifié son existence (aucun $u_k$ n'est nul)

$$v_n = \frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2} = \frac{(1+\sin^2(u_n))^2}{(u_n)^2} - \frac{1}{(u_n)^2} = \frac{2.\sin^2(u_n)+\sin^4(u_n)}{(u_n)^2} = \Big(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\Big)^2.(2+\sin^2(u_n))$$

Comme $u_n$ tend vers 0, $\sin(u_n)$ tend vers 0 (continuité) et $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}$ tend vers 1 (forme indéterminée usuelle).
Bref, $v_n$ tend vers 2 quand $n$ tend vers l'infini.

---

Sa moyenne de Cesàro $\dfrac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend donc aussi vers 2 (je l'ai prise ici au rang $n-1$ pour la commodité).

---

Mais cette somme télescope

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{(u_{k+1})^2} - \frac{1}{(u_k)^2}\Big) = \frac{1}{n}.\frac{1}{(u_n)^2} - \frac{1}{n}.\frac{1}{(u_0)^2}$$

Maintenant qu'on sait que ceci tend vers 2, ajoutons $\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{(u_0)^2}$ qui tend aussi vers 0 et on trouve

$$\frac{1}{n}.\frac{1}{(u_n)^2} \longrightarrow_{n\to+\infty} 2$$

On passe à l'inverse : $2.n.(u_n)^2$ tend vers 1,
à la racine (tout est positif) : $\sqrt{2.n}.u_n$ tend vers 1,
on arrange $\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{\sqrt{2.n}}}$ tend vers 1. C'est la définition de $u_n$est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{2.n}}$ quand $n$ tend vers l'infini.

---

Pour la partie `Python`, on a plusieurs solutions. On crée une liste ne contenant que u0 puis on append les nouveaux termes.

On crée une liste de 0 de la bonne longueur, avec u0 comme premier terme, et on avance dans la liste en remplaçant chaque nouveau venu la nouvelle valeur.

```
def suite(u0, n) :
....S = [u0]
....for k in range(n) :
........S.append(f(S[-1])
....return S
```

```
def suite(u0, n) :
....S = [u0]+[0]*n
....for k in range(n) :
........S[k+1] = f(S[k])
....return S
```

```
def suite(u0, n) :
....u = u0
....S = [u]
....for k in range(n) :
........u = f(u)
........S.append(u)
....return S
```

en ayant créé pour être tranquille

```
def f(x) :
....return x / (1+(math.sin(x))**2
```

et importé le module `math` pour un demi point.

## IS23 Inégalité de Hölder (un peu comme Cauchy-Schwarz).

On commence par $a.b \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ qu'on obtient en calculant la différence

$$\frac{a^2+b^2}{2} - a.b = \frac{a^2+b^2-2.a.b}{2} = \frac{(a-b)^2}{2}$$

On ajoutera qu'on connaît même le cas d'égalité : $a = b$.

---

Écrivons comme suggéré pour $\alpha$ et $\beta$ donnés

$$\alpha.\beta = (\alpha.\beta^{1/3}).\beta^{1/3} \leqslant \frac{(\alpha.\beta^{1/3})^2+\beta^{4/3}}{2} \leqslant \frac{\alpha^2.\beta^{2/3}+\beta^{4/3}}{2} \leqslant \frac{\frac{\alpha^4+\beta^{4/3}}{2}+\beta^{4/3}}{2} = \frac{\alpha^4+3.\beta^{4/3}}{4}$$

---

Même si l'énoncé ne dit rien, on va supposer $\int_0^1 u^4(t).dt$ et $\int_0^1 v^{4/3}(t).dt$ non nulles.
Cela dit, comme $u$ est continue et positive, ceci conduirait à $u$ identiquement nulle.
On note aussi que $v^{4/3}$ ne nous pose pas de problème puisque $v$ est positive. De toutes façons, la racine cubique existe sur tout $\mathbb{R}$.

L'inégalité précédente appliquée à $\alpha = \frac{u(x)}{A}$ et $\beta = \frac{v(x)}{B}$ (positifs) donne, pour tout $x$ de $[0,\ 1]$

$$\frac{u(x)}{A}.\frac{v(x)}{B} \leqslant \frac{\frac{(u(x))^4}{A^4}+3.\frac{(v(x))^{4/3}}{B^{4/3}}}{4}$$

Intégrons de 0 à 1 pour $x$ ($A$ et $B$ ne dépendant pas de $x$)

$$\frac{\int_0^1 u(x).v(x).dx}{A.B} \leqslant \frac{\frac{\int_0^1 (u(x))^4.dx}{A^4}+3.\frac{\int_0^1 (v(x))^{4/3}.dx}{B^{4/3}}}{4}$$

Mais justement, $\int_0^1 (u(x))^4.dx$ est égal à $A^4$ par définition.
Et $\int_0^1 (v(x))^4.dx$ est égal à $B^{4/3}$.

Le membre de droite devient simplement $\frac{\frac{A^4}{A^4}+3.\frac{B^4/3}{B^{4/3}}}{4}$ ce qui donne finalement 1.

On a obtenu $\frac{\int_0^1 u(x).v(x).dx}{A.B} \leqslant 1$ ce qui donne $\int_0^1 u(x).v(x).dx \leqslant A.B$. C'est le même genre d'inégalité que celle de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 u(x).v(x).dx \leqslant \Big(\sqrt[4]{\int_0^1 u^4(t).dt}\Big).\Big(\sqrt[4/3]{\int_0^1 v^{4/3}(t).dt}\Big)$$

Seule difficulté contre laquelle je ne peux rien : « mais monsieur, comment pouvez vous dire que $\displaystyle\int_0^1 (u(x))^4.dx$ est égale à $\Big(\sqrt[4]{\int_0^1 (u(t))^4.dt}\Big)^4$ ; dans une c'est $x$, dans l'autre c'est $t$ ». Là je ne puis plus rien pour vous.

## IS23 Inégalité triangulaire pour la norme 4.

On se donne $f$ et $g$ continues. Toutes les intégrales existence.
On calcule une différence

$$\Big(\Big(\int_0^1 (f(t))^4.dt\Big)^{1/4} + \Big(\int_0^1 (g(t))^4.dt\Big)^{1/4}\Big)^4 - \int_0^1 (f(t)+g(t))^4.dt$$

Posons $I = \sqrt[4]{\displaystyle\int_0^1 (f(t))^4.dt}$ et $J = \sqrt[4]{\displaystyle\int_0^1 (g(t))^4.dt}$ pour alléger. Le premier membre $(I+J)^4$ contient $I^4 + J^4$ et aussi $4.(I^3.J + I.J^3)$ et enfin $6.I^2.J^2$..

Le membre de droite est, après séparation par linéarité $\displaystyle\int_0^1 (f(t))^4.dt + \int_0^1 (g(t))^4.dt$ puis $4.\Big(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^3.g(t).dt + \int_0^1 f(t).(g(t))^3.dt\Big)$ et enfin $6.\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2.(g(t))^2.dt$.

Il ne serait pas absurde de comparer groupe par groupe

| $I^4$ | $J^4$ | $4.I^3.J$ | $4.I.J^3$ | $6.\Big(\int_0^1 (f(t))^4.dt\Big)^{1/2}.\Big(\int_0^1 (g(t))^4.dt\Big)^{1/2}$ |
|---|---|---|---|---|
| égalités | | Hölder | | Cauchy-Schwarz |
| $\int_0^1 (f(t))^4.dt$ | $\int_0^1 (g(t))^4.dt$ | $4.\int_0^1 (f(t))^3.g(t).dt$ et l'autre | | $6.\int_0^1 (f(t))^2.(g(t))^2.dt$ |

Pour la colonne avec des 6, on a bien

$$\int_0^1 F(t).G(t).dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 F^2(t).dt}.\sqrt{\int_0^1 G^2(t).dt}$$

avec $F = f^2$ et $G = g^2$ ; c'est Cauchy-Schwarz.

Pour les colonnes avec des 4, par symétrie des rôles, une suffira on va comparer $4.I.J^3$ avec $4.\displaystyle\int_0^1 (f(t).(g(t))^3.dt$ (qu'on va d'ailleurs majorer par $4.\displaystyle\int_0^1 |f(t)|.|g(t)|^3.dt$, grâce à l'inégalité triangulaire).
Et $I.J^3$ c'est $\Big(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^4.dt\Big)^{1/4}.\Big(\int_0^1 (g(t))^4.dt\Big)^{3/4}$ ou même $\Big(\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^4.dt\Big)^{1/4}.\Big(\int_0^1 |g(t)|^4.dt\Big)^{3/4}$ grâce à la parité des exposants.

Or, on a justement prouvé $\displaystyle\int_0^1 u(t).v(t).dt \leqslant \Big(\int_0^1 u(t)^4.dt\Big)^{1/4}.\Big(\int_0^1 v(t)^{4/3}.dt\Big)^{3/4}$. Il suffit de prendre $u = f$ et $v = g^3$ pour avoir la bonne majoration.

On fait donc de même en inversant les rôles pour avoir

$$\int_0^1 (f(t))^3.g(t).dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|^3.|g(t)|.dt \leqslant \Big(\int_0^1 (f(t))^4.dt\Big)^{1/4}.\Big(\int_0^1 (g(t))^4.dt\Big)^{3/4}$$

Et en assemblant les pièces, on a bien

$$\int_0^1 (f(t)+g(t))^4.dt = \Big(||f+g||_4\Big)^4 \leqslant \Big(||f||_4 + ||g||_4\Big)^4$$

## IS23 Norme 4.

$\boxed{\text{E}}$ Pour $f$ continue, $f^4$ l'est aussi et est même positive. L'intégrale $\int_0^1 (f(t))^2.dt$ existe, et est positive.
Sa racine quatrième existe.
$\boxed{\text{P}}$ Et elle est positive.

$\boxed{\text{I}}$ L'inégalité triangulaire a été montrée plus haut.

$\boxed{\text{H}}$ On se donne $f$ et $\lambda$ et par calcul direct

$$||\lambda.f||_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 (\lambda.f(t))^2.dt} = \sqrt[4]{\lambda^4.\int_0^1 (f(t))^2.dt} = |\lambda|.\sqrt[4]{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$$

$\boxed{\text{S}}$ On se donne $f$ et on suppose que $\sqrt[4]{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$ est nul. Ceci conduit à $\int_0^1 (f(t))^2.dt = 0$.
On définit $\phi = x \longmapsto \int_0^x (f(t))^4.dt$ . Par positivité de $f^4$, $\phi$ est croissante. Par calcul et hypothèse, $\phi$ est nulle en 0 et en 1. $\phi$ est donc identiquement nulle. Sa dérivée est donc nulle, ce qui donne $\forall x,\ f^4(x) = 0$.

## IS23 Applications $f_n$.

Chaque $f_n$est définie par intervalle, et les intervalles sont de plus en plus cours :

| de 0 inclus à $1/(2.n)$ exclu | de $1/(2.n)$ inclus à $1/n$ exclu | de $1/n$ inclus à 1 inclus |
|---|---|---|
| $n^{3/2}.x$ | $\sqrt{n} - n^{3/2}.x$ | 0 |

Sur chaque intervalle, $f_n$ est continue. Mais que fait elle en $1/n$ et en $2/n$ ? Calculons les limites aux bornes.

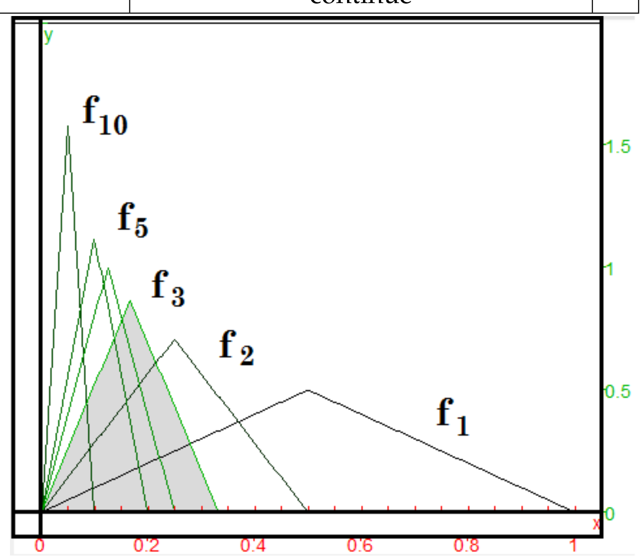
<table>
<tr><td colspan="2">de 0 à $1/(2.n)$</td><td rowspan="2">en $1/(2.n)$</td><td colspan="3">de $1/(2.n)$ à $1/n$</td><td rowspan="2">en $(1/n)^-$</td><td colspan="2">de $1/n$ à 1</td></tr>
<tr><td></td><td>en $1/(2.n)^-$</td><td>en $1/(2.n)^+$</td><td></td><td>en $(1/n)^-$</td><td>en $(1/n)^+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$n^{3/2}.x$</td><td>$\frac{n.\sqrt{n}}{2.n}$</td><td>$\sqrt{n} - \frac{n.\sqrt{n}}{2.n}$</td><td>$\sqrt{n} - \frac{n.\sqrt{n}}{2.n}$</td><td>$\sqrt{n} - n.\sqrt{n}.x$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">continue</td><td></td><td colspan="3">continue</td><td></td></tr>
</table>

L'application affine par morceaux se raccorde bien en $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ .

Elle est continue en tout point.

On en profite pour faire comme demandé et représenter $f_3$ et $f_4$.

Je vous offre aussi $f_5$ et $f_{10}$ pour que vous comprenniez ce qui va suivre.




## IS23 Normes de $f_n$.

Dans tout ce suit, les valeurs absolues sont inutiles car $f_n$est positive.
Et les intégrales existent car $f_n$ est continue.

Par tableau de variations, $f_n$ réalise son maximum en $1/(2.n)$, et il vaut $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

---

On intègre $f_n$ soit par relation de Chasles soit géométriquement

$$\int_0^1 f_n(t).dt = \int_0^{1/(2.n)} n.\sqrt{n}.t.dt + \int_{1/(2.n)}^{1/n} (\sqrt{n} - n^{3/2}.t).dt + \int_{1/n}^{1} 0.dt$$

On peut en effet aussi intégrer géométriquement, avec deux triangles rectangles et même un rectangle de largeur $\dfrac{1}{2.n}$ et de hauteur $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.
Dans les deux cas, on trouve $\dfrac{1}{4.\sqrt{n}}$.

---

On intègre $(f_n)^2$ aussi par relation de Chasles

$$\int_0^1 (f_n(t))^2.dt = \int_0^{1/(2.n)} n^3.t^2.dt + \int_{1/(2.n)}^{1/n} (\sqrt{n} - n^{3/2}.t)^2.dt + 0$$

Les $\dfrac{1}{n^3}$ et $\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{1/n}$ se compensent parfaitement. Le résultat ne dépend plus de $n$. On trouve $\dfrac{1}{12}$. Puis on passe à la racine.

Les deux intégrales sont égales, par symétrie de la fonction.

---

On recommence ?

$$\int_0^1 (f_n(t))^4.dt = \int_0^{1/(2.n)} n^6.t^4.dt + \int_{1/(2.n)}^{1/n} (\sqrt{n} - n^{3/2}.t)^2.dt + 0$$

Les deux intégrales valent $\dfrac{n}{160}$.
On somme, on passe à la racine quatrième et c'est fini.

---

On résume avec un tableau

| indice de la norme | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| norme | $\|\|f_n\|\|_1 = \dfrac{1}{4.\sqrt{n}}$ | $\|\|f_n\|\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$ | $\|\|f_n\|\|_4 = \sqrt[4]{\dfrac{n}{80}}$ | $\|\|f_n\|\|_\infty = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ |
| limite de la norme ($n \to +\infty$) | 0 | $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

*Interprétation : tout dépend de la norme.*
*Pour la norme 1, les $f_n$ se rapprochent de 0.*
*Pour la norme 2, ils restent tous sur une même sphère (un sucri) de rayon $1/\sqrt{12}$.*
*Pour la norme 4 et la suivante, les $f_n$ se sauvent à l'infini (mais pas à la même vitesse).*

## IS23 Convergence point par point.

On se donne $x$ dans $]0,\ 1]$.
Pour $n$ plus grand que $[1/x]$, on a $n > 1/x$ et donc $n.x > 1$. $f_n(x)$ st donc nul.

*Explication : pour n assez grand, le pic est passé à gauche de x, et x est « dans la plaine ».*

La suite $(f_n(x))$ est donc stationnaire, nulle à partir d'un certain rang. Et sa limite existe et vaut évidemment 0.

*Il ne fallait pas se lancer dans des formules dans tous les sens, au risque de se perdre.*
*Il fallait voir les choses. Bref, il fallait faire des maths.*

## IS23 Applications höldériennes.