Boite à outils d'algèbre linéaire.

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Revenir aux définitions		• $\mathbb{R}$ est un $(\mathbb{Q},+,\times)-$espace vectoriel • $\mathbb{R}$ est un $(\mathbb{C},+,\times)-$espace vectoriel (mais définition compliquée) *(rarement utilisée, seulement pour les définitions « étranges »)*
Montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence	prouver présence du neutre et stabilités	• les applications périodiques de période $2.\pi$ dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ • les matrices « magiques » *(mais peut être réussirez vous à y voir un noyau...)* • les applications C^2 de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle en 0 et en 1 • les endomorphismes de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dont le noyau contient $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$.
	l'écrire $Vect(\dots)$	• une droite vectorielle dont on vous a donné un vecteur non nul • un plan de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ d'équation $2.x+3.y-z=0$ que vous écrivez finalement $Vec(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix})$. • les solutions d'une équation différentielle linéaire que vous avez fini de résoudre • les polynômes factorisables par $(X-1).(X-2)$: . $Vect((X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2).X,\ (X-1).(X-2).X^2,\dots)$
	l'écrire comme noyau d'un morphisme	• les matrices de trace nulle dans $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ • les matrices symétriques dans $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ • le plan d'équation $a.x+b.y+c.z=0$ dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ • les solutions d'une équation différentielle linéaire (avant résolution) • les polynômes nuls en 1 et en 2 (noyau de $P(X)\longmapsto(P(1),\ P(2))$) • le commutant d'une matrice donnée A est noyau de $M\longmapsto A.M-M.A$ • les sous-espaces propres d'endomorphismes sont des espaces vectoriels *la méthode fournit en général même la dimension*
	l'écrire comme image d'un morphisme	• pour A donnée, les matrices de la forme $A.M-M.A$
	l'écrire comme intersection ou somme de sous-espaces vectoriels	• les endomorphismes de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ d'image incluse dans le plan d'équation $x+y-3.z=0$ et de noyau contenant $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ • les endomorphismes de $(E,+,.)$ qui commutent avec tous les autres sont une intersection généralisée de commutants • les suites s'écrivant comme somme d'une suite périodique et d'une suite de limite nulle

Comme souvent, prenez soin de faire proprement la première démonstration du devoir qui vous demande « montrez que tel ensemble est un espace vectoriel », en quantifiant « on prend $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans $(E, +, .)$ et α et β dans $(\mathbb{R}, +, .)$... ».
Les démonstrations suivantes seront traitées par mot clef « noyau de l'application linéaire $f - \alpha.Id$ », ou « image de l'application linéaire $M \longmapsto A.M$ ».

Il ne faudra vraiment pas perdre de temps sur une question évidente telle que « on note A l'ensemble des vecteurs de E de la forme $\begin{pmatrix} x & +y \\ 2.x & -y \\ x & +3.y \end{pmatrix}$, montrez que c'est un espace vectoriel », ou même « on pose $K = \{\overrightarrow{a} \in E \mid f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}\}$, montrez que c'est un espace vectoriel ».
Attention quand même à ne pas confondre $\{\overrightarrow{a} \in E \mid f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}\}$ pour f donnée et $\{f \in L(E) \mid f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}\}$ pour $\overrightarrow{a}$ donné.

Pour montrer qu'une application est linéaire

Revenir aux définitions	Quantifier proprement	• La trace est linéaire : $\alpha.Tr(A) + \beta.Tr(B) = Tr(\alpha.A + \beta.B)$. • La dérivation est linéaire.
L'écrire sous forme matricielle	Souvent, après avoir choisi des bases, on l'écrit $U \longmapsto M.U$.	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +2.y & -z \\ & y & +z \\ 2.x & -y & +z \\ x & & -z \end{pmatrix}$ est linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ puisque c'est $U \longmapsto M.U$.

Pour les applications linéaires du type « intégrale » ou « somme de série », la rédaction se fait dans le sens :
on suppose que $\phi(f) = \int_a^b f(t).dt$ existe de même que $\phi(g) = \int_a^b g(t).dt$, alors $\int_a^b (\alpha.f(t) + \beta.g(t)).dt$ existe est égale à $\alpha. \int_a^b f(t).dt + \beta. \int_a^b g(t).dt$.

Pour montrer qu'une famille est liée

Revenir aux définitions	Exprimer un des vecteur comme combinaison linéaire des autres.	• $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est liée car le dernier est somme des premiers.
Jouer sur les dimensions	Le cardinal de la famille est plus grand que la dimension de l'espace.	• Quatre polynômes de degré inférieur ou égal à 2 sont forcément liés. • Pour toute matrice M de taille 2 sur 2, la famille (I_2, M, M^2, M^3, M^4) est liée. • Trois applications (ou plus) de la forme $x \longmapsto \cos(x + a)$ forment une famille liée. • $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est liée car les trois vecteurs sont dans le plan d'équation $x = z$.
Étudier un système.		• $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est liée car le dé terminant est nul.

Pour montrer qu'une famille est libre

Revenir aux définitions	Montrer qu'aucun vecteur ne peut être combinaison des autres.	• La famille des $(x \longmapsto \lvert x-a \rvert)_{e\in\mathbb{R}}$ est libre car chaque fonction $x \longmapsto \lvert x-\alpha\rvert$ est « non dérivable en α » alors que toute combinaison des autres est dérivable en α.
	Montrer l'implication « si une combinaison donne $\overrightarrow{0}$ c'est forcément que tous les coefficients sont nuls.	• $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\3\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ car $\left\lvert\begin{array}{llll} a & +2.b & +c & =0\\ a & +3.b & & =0\\ a & +2.b & +4.c & =0\\ 2.a & +b & +3.c & =0\end{array}\right.$ donne très vite $a=b=c=0$ *(comparer L_1 et L_3, continuer)*.
Utiliser un morphisme.	Si l'image $(f(\overrightarrow{u_1}),\dots f(\overrightarrow{u_p}))$ par un morphisme f de la famille est libre, c'est que la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots \overrightarrow{u_p})$ était libre. *(contraposée d'un résultat simple)*	• $((X-b).(X-c),\ (X-a).(X-c),\ (X-a).(x-b))$ est libre car son image par $P(X)\longmapsto\begin{pmatrix}P(a)\\P(b)\\P(c)\end{pmatrix}$ est (presque) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. • $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\3\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ car en projetant $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Étudier un système.		
Raisonner par agrandissement.	Ajouter des vecteurs, calculer un déterminant. Si la sur-famille est libre, c'est que la famille initiale l'était. *(contraposée classique)*	• $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\3\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ car $\begin{vmatrix}1&2&1&0\\1&3&0&0\\1&2&4&0\\2&1&3&1\end{vmatrix}$ est non nul.
	$\overrightarrow{e_0}$ est non nul. $\overrightarrow{e_1}$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{e_0}$. $\overrightarrow{e_2}$ n'est pas combinaison de $\overrightarrow{e_0}$ et $\overrightarrow{e_1}$. $\overrightarrow{e_3}$ n'est pas dans $Vect(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.	• Toute famille de polynôme échelonnée en degré est libre. (les polynômes sont tous de degrés distincts, on les ordonne par degrés croissants...).
Raisonner par fusion.	L'écrire comme fusion d'une famille libre de A et d'une famille libre de B avec en plus $A\cap B = [\ \overrightarrow{0}\ \}$.	• La famille $(c_0,c_1,\dots c_n)$ est libre dans l'espace des applications paires (Tchebychev). La famille $(s_1,\dots s_n)$ est libre dans l'espace des applications impaires (idem). Alors la famille $(c_0,c_1,\dots c_n,s_1,\dots s_n)$ est libre dans l'espace des applications. $(c_p = \theta\longmapsto \cos(p.\theta)$ et $s_q=\theta\longmapsto\sin(q.\theta))$
Passer en bilinéaire.	Toute famille orthogonale pour un produit scalaire est libre.	• La famille $(c_0,c_1,\dots c_n,s_1,\dots s_n)$ est libre dans l'espace des applications continues, car orthogonale pour le produit scalaire $(f,\ g)\longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$.

.

Pour montrer qu'une famille engendre $(E,+,.)$

Revenir aux définitions	Montrer que tout vecteur se décompose... en le décomposant. *Souvent par analyse synthèse...*	• $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-7x+3y+2z).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3x+y+z).\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (11x-4y+3z).\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Reconstruire les vecteurs d'une base « canonique »	Conclure par transitivité. *Pas forcément évident à faire de tête, sauf cas particulier.*	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -7.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 11.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Voir si ce n'est pas carrément une base.	Calculer un déterminant.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1.
Voir si elle ne contient pas déjà une base.	Calculer un déterminant extrait.	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$ engendre $(\mathbb{R}^3,+,.)$.

.

Pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

Revenir aux définitions	Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E,+,.)$ se décompose d'une façon unique. Preuve par analyse et synthèse.	Toute application f se décompose d'une façon unique en $\left(x \longmapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right) + \left(x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$.
Jouer sur les dimensions	Inclusion naturelle, et formule de Grassmann.	$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ est de dimension 1, l'ensemble d'équation $x+y-z=0$ est de dimension 2, il n'y a que le vecteur nul dans leur intersection ; $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de cette droite ce plan. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose en somme d'un vecteur de la droite et du plan.
Trouver le projecteur caché	On profite alors de $Ker(p) \oplus Im(p) = E$.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur (vérifier $M^2 = M$), de noyau d'équation $x+y-z=0$ et d'image engendrée par $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

.

Pour trouver l'image d'un morphisme

Revenir aux définitions.	Donner une famille génératrice de l'image.	• L'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +2.y & +z \\ 2.x & +5.y & +z \\ x & +3.y & \end{pmatrix}$ est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Mais l'un d'entre eux ne sert à rien. Le dernier est trois fois le premier moins le second.
	Trouver une équation cartésienne de l'image.	• Un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & +2.y & +z \\ 2.x & +5.y & +z \\ x & +3.y & \end{pmatrix}$ si et seulement si $b = a + c$. La condition est visiblement nécessaire. Est elle suffisante ? • On l'a aussi avec $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 5 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = 0$.
Jouer sur les dimensions.	Trouver des vecteurs de l'image, et dire qu'ils recouvrent tout car on a sa dimension.	• L'image de $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même est en fait incluse dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais en plus elle a la même dimension.
	Encadrer la dimension de l'image et conclure.	• L'ensemble image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +2.y & +z \\ 2.x & +5.y & +z \\ x & +3.y & \end{pmatrix}$ n'est pas $\mathbb{R}^3$ car $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau.. Mais l'ensemble image n'est pas non plus de dimension 1 (vecteurs images non colinéaires). Il est de dimension 2.

Pour prouver qu'une matrice se diagonalise

Revenir aux définitions.	Trouver D diagonale et P inversible vérifiant $M.P = P.D$.	Pour $M = \begin{pmatrix} -38 & 20 \\ -70 & 37 \end{pmatrix}$, on peut proposer $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Le jouer plus vectoriel.	Trouver une base de vecteurs propres.	Pour $M = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -11 \\ 24 & 3 & -26 \\ 14 & 1 & -14 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres et indépendants car associés à des valeurs propres distinctes *(trouvez les)*.
Devancer la Spé.	Trouver un polynôme à racines simples qui annule la matrice (2^{nde} année).	M vérifie $M^3 - 7.M + 6.I_3 = 0_3$ et ça s'écrit $(M - I_3).(M + 3.I_3).(M - 2.I_3) = 0_3$.
	Trouver les valeurs propres et montrer que la somme des dimensions des sous-espaces propres donne le format de la matrice.	M a pour spectre $\{1, \ -3, \ 2\}$ et chaque sous-espace propre est de dimension 1 (total 3) : $Ker(M - I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $Ker(M + 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix})$ et $Ker(M - 2.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Projecteurs

Caractérisation (équivalence)

$p \circ p = p$	$M^2 = M$	exemples : $z \to \Re e(z)$, $M \to \dfrac{M +^t M}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$Im(p) \subset Ker(Id - p)$	$Im(p) = Ker(Id - p)$	$E = Ker(p) \oplus Ker(Id - p)$	$Im(Id - p) \subset Ker(p)$	$Im(Id - p) = Ker(p)$
$p \circ (Id - p) = (Id - p) \circ p = 0_{L(E)}$		$Id - p$ est aussi un projecteur	$Id - (Id - p) = ?$	
qui est le projecteur bijectif, qui est le projecteur nilpotent ?				

Conséquences (sans équivalence)

$E = Im(p) \oplus Ker(p)$			$Tr(p) \in \mathbb{N}$	$\det(p) = 0$
$p(\overrightarrow{u}) \in Ker(Id - p)$	$\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}) \in Ker(p)$	$\overrightarrow{u} = (p(\overrightarrow{u})) + (\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}))$	$\chi_p(\lambda) = \lambda^{n-r}.(1-\lambda)^r$	
$p(\overrightarrow{u}) \in Im(p)$	$\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}) \in Im(Id - p)$		$Tr(p) = rg(p)$	

Construction explicite

base de $Im(p)$	base de $Ker(p)$	$M = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$		

Symétries

$\sigma^2 = Id$	$S^2 = I_n$	$z \to \overline{z}$, $M \to^t M$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
		$\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{u} + p(\overrightarrow{u})}{2} + \dfrac{\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u})}{2}$		
pour ne pas tout redémontrer : $\dfrac{\sigma + Id}{2}$ et $\dfrac{Id - \sigma}{2}$ sont deux projecteurs associés				

Projecteurs orthogonaux

$p \circ p = p$ $M^2 = M$	et	$Ker(p) \perp Im(p)$ $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}).(\overrightarrow{b} - p(\overrightarrow{b})) = 0$	$\overrightarrow{a}.p(\overrightarrow{b}) = p(\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b}$ $\lvert\lvert p(\overrightarrow{a})\rvert\rvert \leqslant \lvert\lvert\overrightarrow{a}\rvert\rvert$	${}^tM = M$
Construire une base orthonormée de $Im(p)$: $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_r})$			$p(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\varepsilon_1}) \times \overrightarrow{\varepsilon_1} + \dots + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\varepsilon_r}) \times \overrightarrow{\varepsilon_r}$	
Si $rg(p)$ est grand, passer par $Id - p$ d'image $Ker(p)$ dont une base orthonormée ne contiendra que peu de vecteurs				

Comment interpréter une matrice ?

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & a_p^n & \dots & a_p^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$	on résout $M.X = Y$ d'inconnue X	$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_1^1.x_1 & +a_1^2.x_2 & \dots & +a_1^n.x_n & = & y_1 \\ a_2^1 & +a_2^2.x_2 & \dots & +a_2^n.x_n & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_p^1.x_1 & +a_p^2.x_2 & \dots & +a_p^n.x_n & = & y_p \end{array} \right.$
une application linéaire $X \longmapsto M.X$ $\nwarrow$		$\nearrow$ un système linéaire
	$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & a_p^n & \dots & a_p^n \end{pmatrix}$	le vecteur Y est il dans $Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_n})$
la matrice d'une application : $Mat_B^\beta(f)$ $\swarrow$		$\searrow$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^p$
a_i^k est la composante suivant $\overrightarrow{e_i}$ de $f(\overrightarrow{\varepsilon_k})$	$f(\overrightarrow{\varepsilon_k})$ est justement la k^{ieme} colonne	$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_p^1 \end{pmatrix}$ jusqu'à $\overrightarrow{u_n} = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_p^n \end{pmatrix}$

Exemple

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +3.z & +5.t \\ x & +2.y & +4.z & +7.t \\ x & & +2.z & +3.t \end{pmatrix}$	noyau $= Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$	$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +3.z & +5.t & = & a \\ x & +2.y & +4.z & +7.t & = & b \\ x & & +2.z & +3.t & = & c \end{array} \right.$
application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ $\nwarrow$		$\nearrow$ système « dégénéré »
image d'équation $2.a - b - c = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = ?$
$\swarrow$		$\searrow$ une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$(liée)
$f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et ainsi de suite	$2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix})$

Comment interpréter une matrice carrée inversible ?

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$	inverser la matrice	$\left\{ \begin{array}{lllllll} a_1^1.x_1 & +a_1^2.x_2 & \dots & +a_1^n.x_n & = & y_1 \\ a_2^1.x_1 & +a_2^2.x_2 & \dots & +a_2^n.x_n & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_n^1.x_1 & +a_n^2.x_2 & \dots & +a_n^n.x_n & = & y_n \end{array} \right.$
un endomorphisme $X \longmapsto M.X$ bijectif $\nwarrow$		$\nearrow$ un système de Cramer
calculer l'image	$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$	décomposer sur la nouvelle base
la matrice d'un isomorphisme : $Mat_\beta^\beta(Id)$ $\swarrow$		$\searrow$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$
a_i^k est la composante suivant $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ de $f(\overrightarrow{\varepsilon_k})$	$Mat_B^\beta(Id)$	$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}$ jusqu'à $\overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}$

Exemple.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +3.z \\ x & +2.y & +4.z \\ x & & +z \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{array}{lllll} x & = & -2.a & +b & +2.c \\ y & = & -3.a & +2.b & +c \\ z & = & 2.a & -b & -c \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{lllll} x & +y & +3.z & = & a \\ x & +2.y & +4.z & = & b \\ x & & +z & = & c \end{array} \right.$
automorphisme de $\mathbb{R}^3$ $\nwarrow$		$\nearrow$ système de Cramer
$\begin{pmatrix} -2.a & +b & +2.c \\ -3.a & +2.b & +c \\ 2.a & -b & -c \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathscr{C} = \overrightarrow{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B , \overrightarrow{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \overrightarrow{k} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_B$
$\swarrow$		$\searrow$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$
$f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et ainsi de suite	changement de base	$B = \overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{C}} , \overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{C}} , \overrightarrow{e_3} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{C}}$

Qu’est ce que le rang

d’une famille de vecteurs	dimension de l’espace vectoriel engendré cardinal de la famille libre la plus grande possible	$\leqslant cardinal$ $\leqslant dimension$
d’un morphisme	dimension de l’espace vectoriel image nombre de vecteurs images indépendants	$\leqslant dim(F)$ $\leqslant dim(E)$
d’une matrice	dimension de l’espace vectoriel engendré par les colonnes nombre de colonnes linéairement indépendantes nombre de lignes indépendantes	$\leqslant NbCol$ $\leqslant NbLig$ $rg(M) = rg({}^tM)$

Qu’est ce que le déterminant

d’une famille de vecteurs	le « volume » du parallélépipède engendré forme $n-$linéaire antisymétrique valant 1 pour la base « canonique »	
d’une matrice carrée	le déterminant de la famille de ses vecteurs colonne $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \times a_1^{\sigma(1)} \times \ldots \times a_n^{\sigma(n)}$	
d’un endomorphisme	le déterminant de sa matrice $Mat_B^B(f)$ la matrice dépend de la base mais $Mat_C^C(f) = P.Mat_B^B(f).P^{-1}$	$\det(Mat_B^B(f)) =$ $\det(Mat_C^C(f))$

Qu’est ce que la trace

d’une matrice carrée	la somme de ses coefficients diagonaux $\sum_{k=1}^{n} a_k^k$	
d’un endomorphisme	la trace de sa matrice $Mat_B^B(f)$ la matrice dépend de la base mais $Mat_C^C(f) = P.Mat_B^B(f).P^{-1}$	$Tr(Mat_B^B(f)) =$ $Tr(Mat_C^C(f))$