Projecteurs

Caractérisation (équivalence)

$p \circ p = p$	$M^2 = M$	exemples : $z \to \Re e(z)$, $M \to \dfrac{M + {}^t M}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$Im(p) \subset Ker(Id - p)$	$Im(p) = Ker(Id - p)$	$E = Ker(p) \oplus Ker(Id - p)$	$Im(Id - p) \subset Ker(p)$	$Im(Id - p) = Ker(p)$
$p \circ (Id - p) = (Id - p) \circ p = 0_{L(E)}$		$Id - p$ est aussi un projecteur	$Id - (Id - p) = ?$	
qui est le projecteur bijectif, qui est le projecteur nilpotent				

Conséquences (sans équivalence)

$E = Im(p) \oplus Ker(p)$			$Tr(p) = 0$	$\det(p) = 0$
$p(\overrightarrow{u}) \in Ker(Id - p)$	$\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}) \in Ker(p)$	$\overrightarrow{u} = (p(\overrightarrow{u})) + (\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}))$	$\chi_p(\lambda) = \lambda^{n-r}.(1-\lambda)^r$	
$p(\overrightarrow{u}) \in Im(p)$	$\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}) \in Im(Id - p)$			

Construction explicite

base de $Im(p)$	base de $Ker(p)$	$M = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$		

Symétries

$\sigma^2 = Id$	$S^2 = I_n$	$z \to \overline{z}$, $M \to^t M$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
		$\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{u} + p(\overrightarrow{u})}{2} + \dfrac{\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u})}{2}$		
pour ne pas tout redémontrer : $\dfrac{\sigma + Id}{2}$ et $\dfrac{Id - \sigma}{2}$ sont deux projecteurs associés				

Projecteurs orthogonaux

$p \circ p = p$	et	$Ker(p) \perp Im(p)$	$\overrightarrow{a}.p(\overrightarrow{b}) = p(\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b}$	${}^t M = M$
$M^2 = M$		$\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}).(\overrightarrow{b} - p(\overrightarrow{b})) = 0$	$\lvert\lvert p(\overrightarrow{a}) \rvert\rvert \leqslant \lvert\lvert \overrightarrow{a} \rvert\rvert$	
Construire une base orthonormée de $Im(p)$: $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_r})$			$p(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\varepsilon_1}) \times \overrightarrow{\varepsilon_1} + \ldots + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\varepsilon_r}) \times \overrightarrow{\varepsilon_r}$	
Si $rg(p)$ est grand, passer par $Id - p$ d'image $Ker(p)$ dont une base orthonormée ne contiendra que peu de vecteurs				