Vocabulaire des familles de vecteurs dans un espace vectoriel $(E,+,.)$

Résolution de systèmes par équivalences, matrices carrées inversibles, déterminant non nul

Bases de $(E,+,.)$

Tout vecteur de E se décompose, d'une façon unique (composantes).

d'une façon unique (analyse)	(synthèse) se décompose
Familles libres aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres	**Familles génératrices** tout vecteur de $(E,+,.)$ se décompose
Implications (systèmes), cas particuliers, orthogonalité, « astuces »	On propose / on vérifie (après résolution souvent)

$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$ $(\alpha_1.\overrightarrow{u_1}+\dots,+\alpha_p.\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0})$ $\Rightarrow(\alpha_1=\dots=\alpha_p=0)$	$(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\longrightarrow\alpha_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\alpha_p.\overrightarrow{u_p}$ est injective de $\mathbb{R}^n$ (vers un s.e.v.)	$(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\longrightarrow\alpha_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\alpha_p.\overrightarrow{u_p}$ est surjective de $\mathbb{R}^n$ sur E	$\forall\overrightarrow{a}\in E,\ \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^n$ $\overrightarrow{a}=\alpha_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\alpha_p.\overrightarrow{u_p}$

famille vide — $\overrightarrow{u_1}$ non nul — $\overrightarrow{u_2}$ non colinéaire — non coplanaires — tout E

enlevez un vecteur à une famille libre, elle reste libre	**lemme d'agrandissement** $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ libre, $\overrightarrow{u_{p+1}}$ donné $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p},\ \overrightarrow{u_{p+1}})$ reste libre $\Leftrightarrow(\overrightarrow{u_{p+1}}\notin Vect(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}))$	**base incomplète** Etant données une famille libre et une famille génératrice, on peut compléter la famille libre en base, en prenant des vecteurs de la famille génératrice	ajoutez un vecteur à une famille génératrice, elle reste génératrice

libre maximale $\Rightarrow$ libre et bon cardinal $\Rightarrow$	base	$\Leftarrow$ génératrice minimale $\Leftarrow$ génératrice et bon cardinal

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

suivant le cardinal de la famille

engendre un sous-espace vectoriel strict	$dim(E)$	forcément liée
$\dim(F)\leqslant\dim(E)$ $(F\subset E\ et\ \dim(F)=\dim(E))\Rightarrow(F=E)$	$\dim(F\cap G)\leqslant\dim(F)$	$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$ Grassmann

Une famille est liée si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Une famille est liée si il existe une relation de dépendance linéaire $\alpha_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\alpha_p.\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0}$ avec au moins un α_k non nul.
Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
Une famille liée engendre un sous-espace vectoriel de dimension plus petite que son cardinal.

Toutes les propriétés (liée, libre, génératrice de $(E,+,.)$) ne dépendant pas de l'ordre dans lequel on cite les vecteurs.
Ce qui va dépendre de l'ordre est la liste des composantes d'un vecteur sur une base.